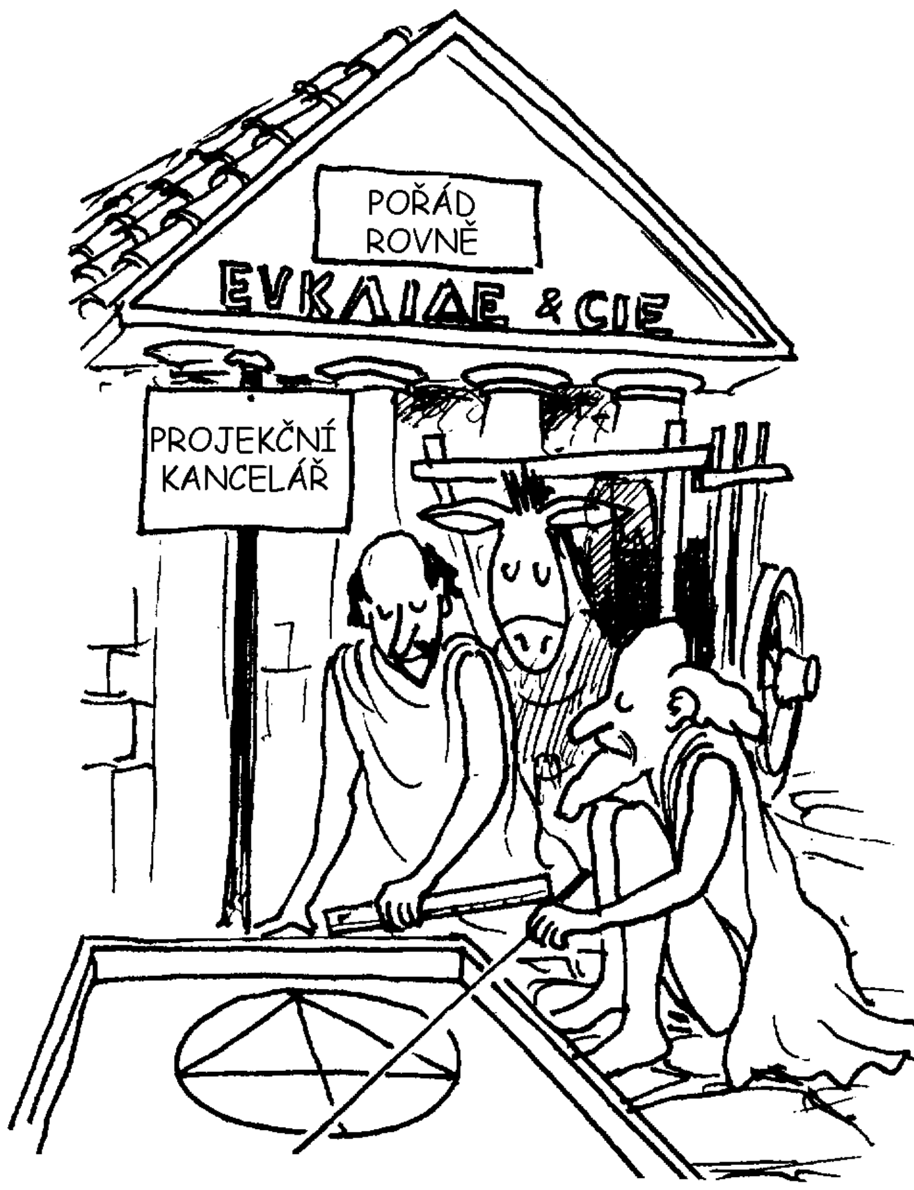
Dobrodružství Anselmea Lanturlu

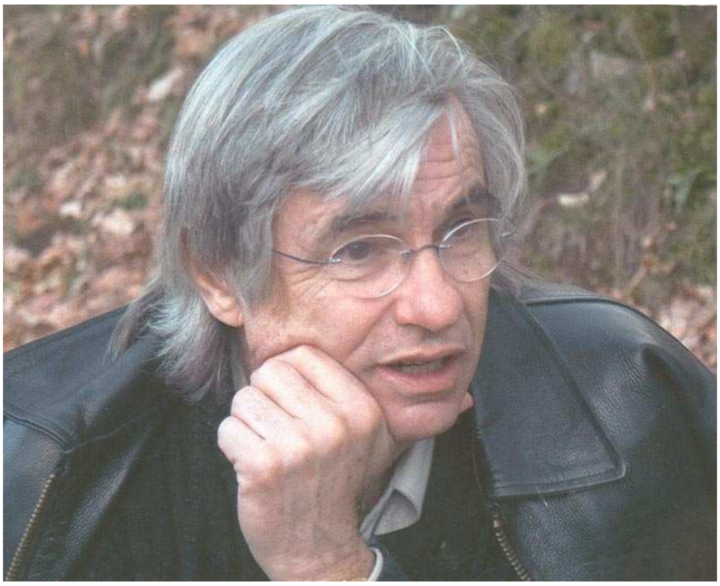
GEOMETRIKON

Jean-Pierre Petit



Věda bez hranic

Společnost podle zákona 1901



Jean-Pierre Petit, prezident společnosti

Jean-Pierre Petit je bývalý vedoucí výzkumu v CNRS (Národní středisko vědeckého výzkumu), astrofyzik a zakladatel nového literárního žánru, který se nazývá vědecký komiks. V roce 2005 založil se svým přítelem Gilles d'Agostini společnost Věda bez hranic, jejímž cílem je po světě bezplatně šířit znalosti, vědecké a technické vědomosti nevyjímaje. Společnost, která funguje díky darům, platí překladatele 150 eur (v roce 2007) a hradí bankovní poplatky z převodu platby. Četní překladatelé každým dnem zvyšují počet přeložených alb (v roce 2007 bylo k dispozici 200 zdarma stažitelných alb ve 28 jazycích, včetně Laoštiny a Rwandštiny).
Tento soubor pdf může být jako celek nebo jeho části volně duplikován a šířen, lze ho použít k výuce a to pod podmínkou, že nepůjde o výdělečnou činnost. Soubor je možné uložit do městských, školních a univerzitních knihoven, jednak formou výtisku nebo na síti typu Intranet.
Autor začal doplňovat sérii knih nejdříve jednoduššími alby (pro děti ve věku asi 12 let). Zároveň také pracuje na „mluvících" albech pro analfabety a „bilingvních" albech určených k výuce jazyků na základě mateřského jazyka.
Společnost neustále hledá nové překladatele do mateřských jazyků, kteří mají technické dovednosti, díky nimž alba dobře přeloží.

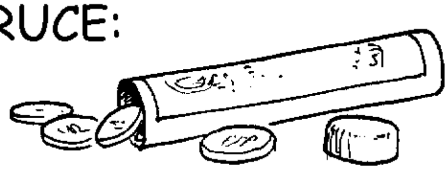
Kontaktní adresa je na úvodní stránce společnosti
http://www.savoir-sans-frontieres.com

UPOZORNĚNÍ

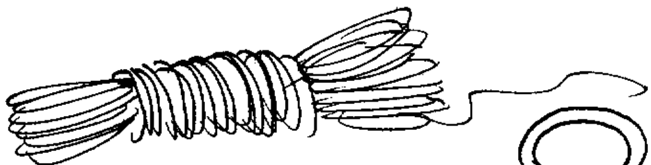
TOTO NENÍ ANI PŘÍRUČKA, ANI UČEBNICE.
JE TO PŘÍBĚH O CESTĚ ANSELMEA LANTURLU
DO SVĚTA GEOMETRIE.

PŘI ČTENÍ MĚJTE PO RUCE:

* ASPIRIN

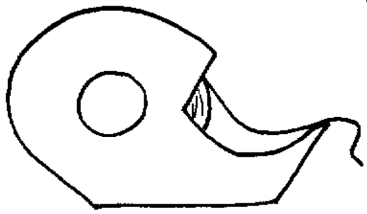


* PROVÁZEK

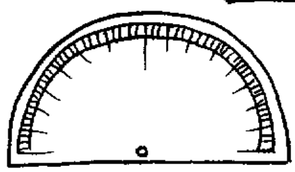


* NŮŽKY

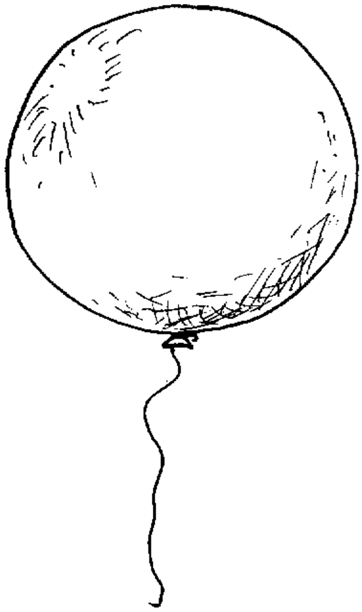
* IZOLEPU



* ÚHLOMĚR



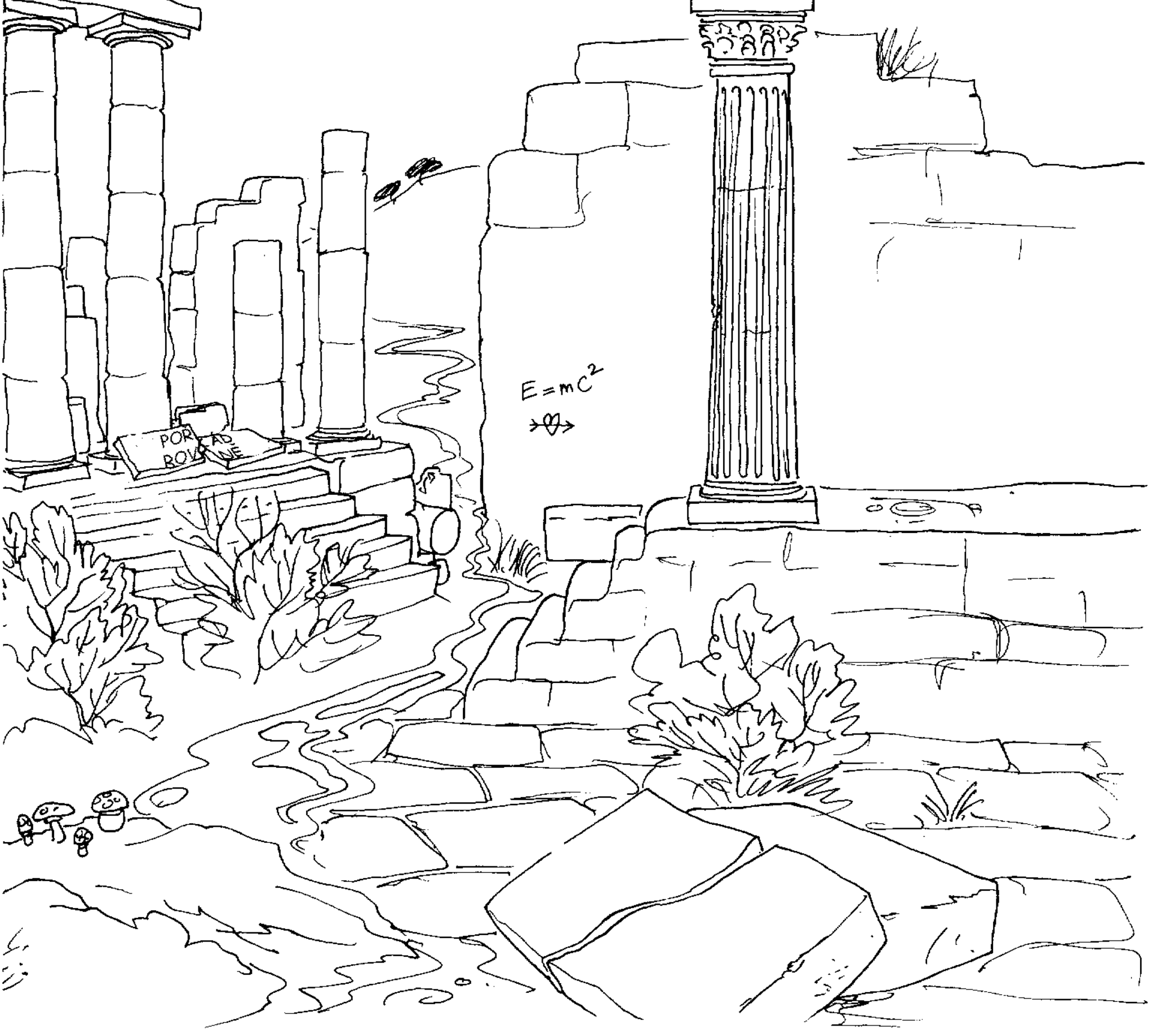
* A HEZKÝ, ÚPLNĚ
  KULATÝ BALÓNEK...



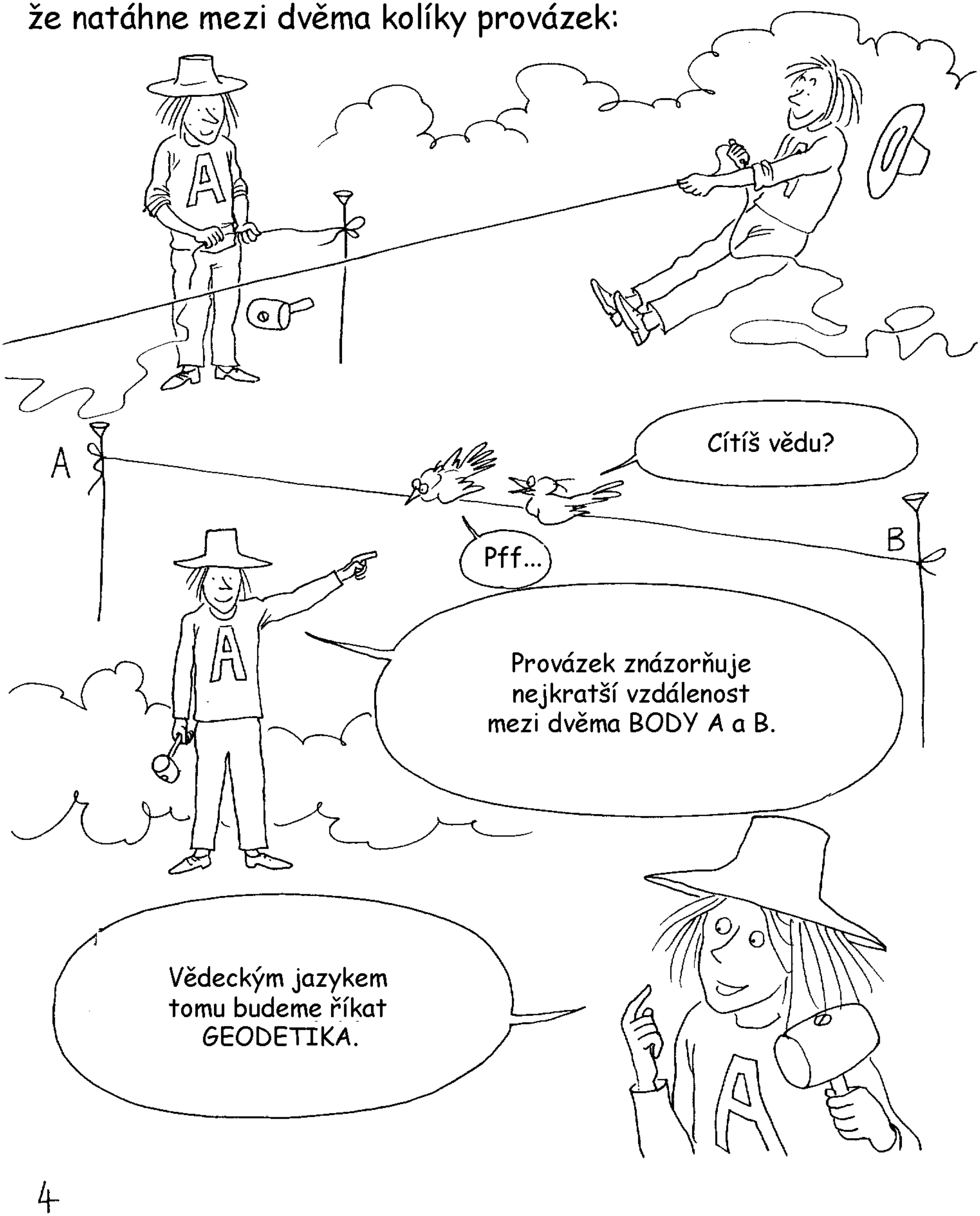
Společnost Euklid a spol. byla založena v Alexandrii ve třetím století před Kristem. Společnost dva tisíce dvě stě let prosperovala. Výrobky šly dobře na odbyt a spokojení zákazníci se stále vraceli.

Postupně ale zákazníci začali žádat něco jiného. Ti, kteří by dříve o jinou značku ani nezavadili, se na základě zvláštních zkušeností začali ptát:
"Euklide, je to opravdu to nejlepší platné navždy a všude?"

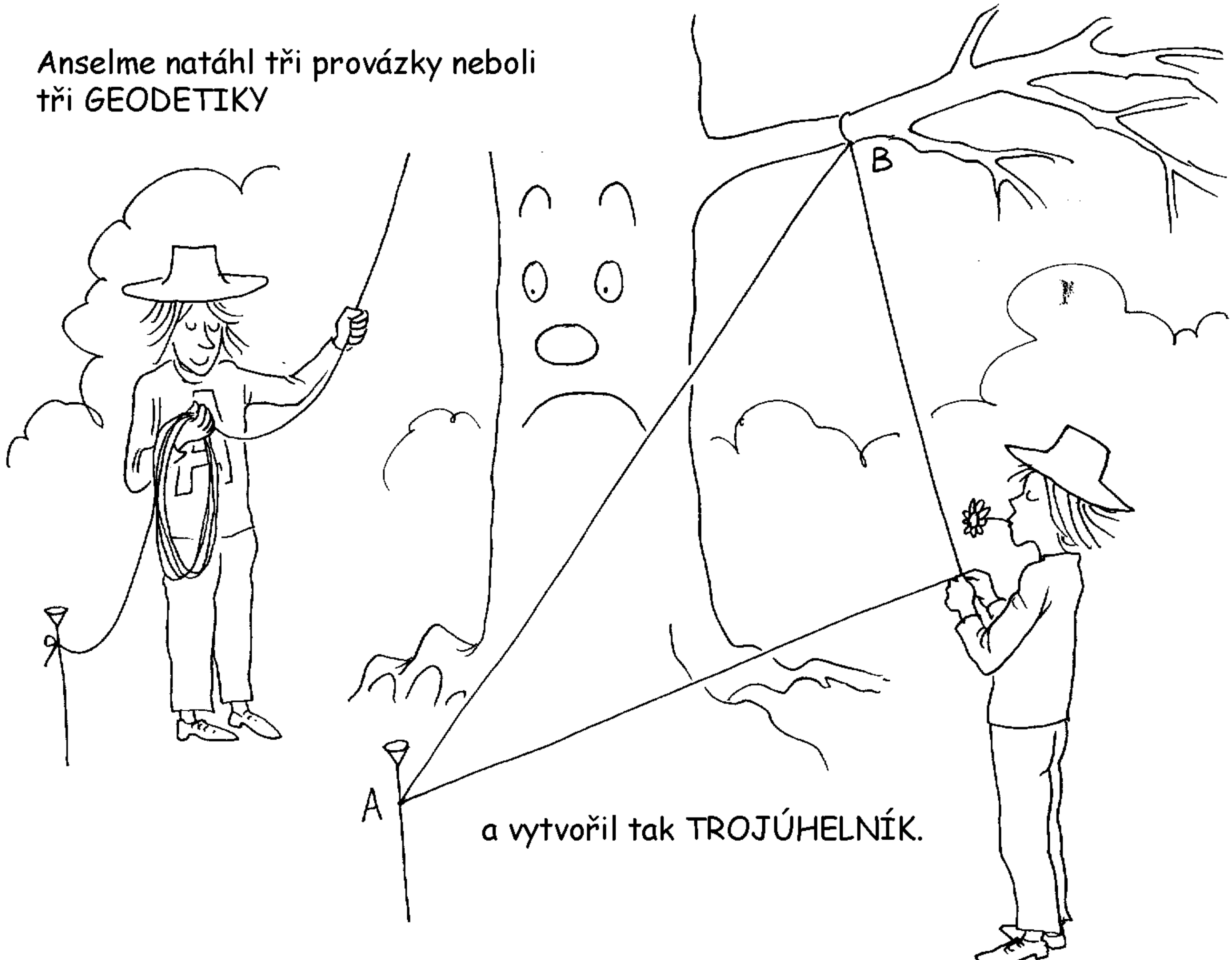
Budeme vám tady vyprávět příběh jednoho z těch zákazníků.



PŘEDMLUVA Jednoho dne se Anselme Lanturlu rozhodl, že natáhne mezi dvěma kolíky provázek:

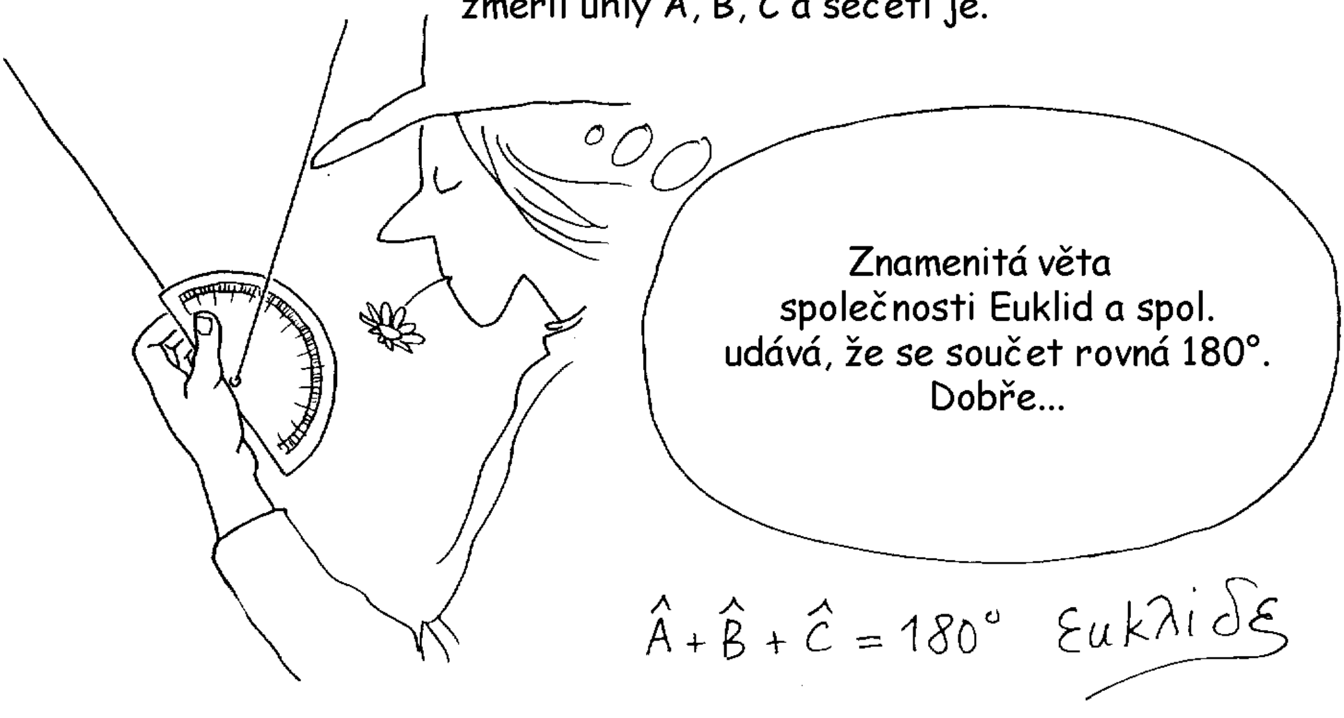


Anselme natáhl tři provázky neboli
tři GEODETIKY

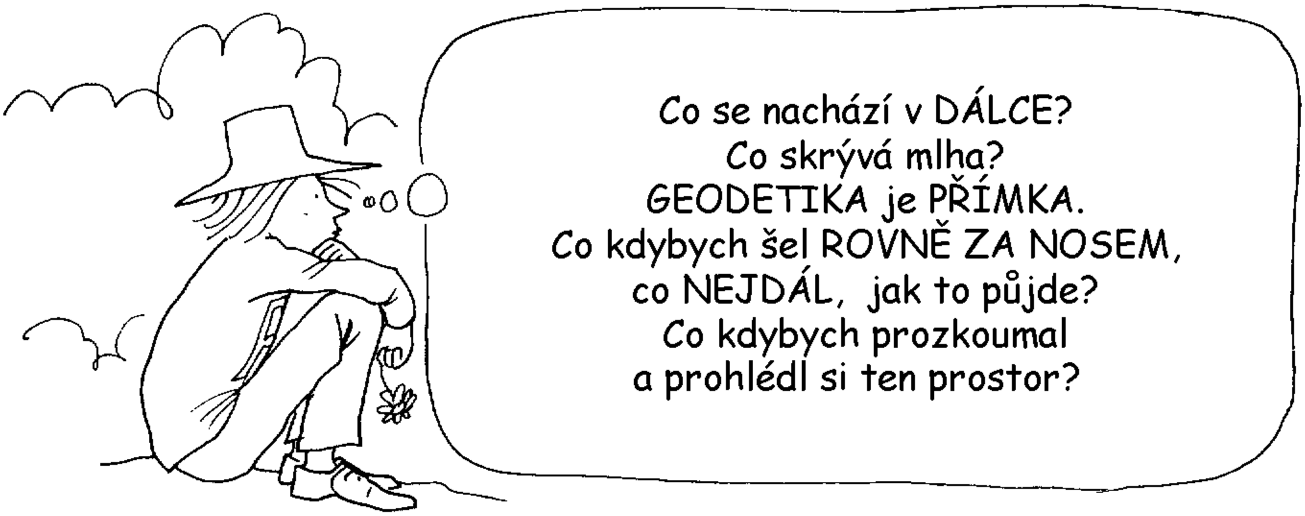


a vytvořil tak TROJÚHELNÍK.

Postupně přiložil úhloměr k vrcholům trojúhelníku,
změřil úhly $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ a sečetl je.

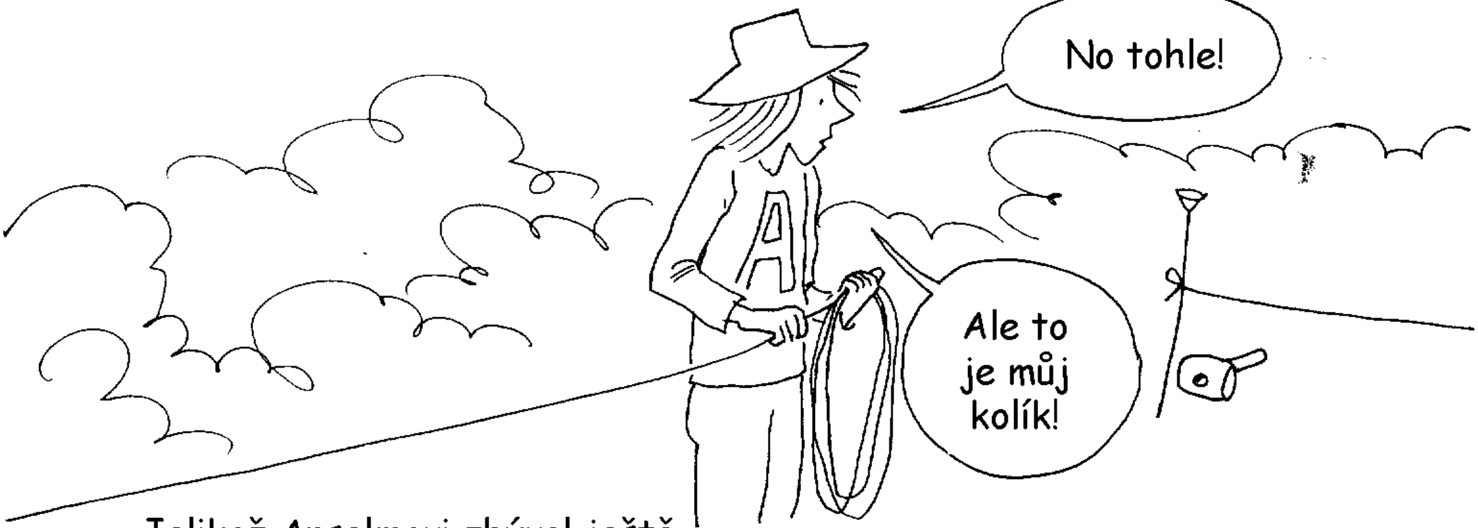


Anselmův svět byl ďábelsky mlhavý a nejasný. Člověk
v něm skoro nepoznával ani vlastní boty.



Anselme šel dlouho, předlouho...
Zůstával za ním dobře napnutý
provázek a nevadilo mu, že se vydal
na riskantní cestu v mlze:
vytvářel dokonalou GEODETIKU.

Ale nevím, jestli jste si všimli, že některé dny prostě nic nefunguje, jak má.



Jelikož Anselmovi zbýval ještě provázek, tak se rozhodl, že věc vyjasní.

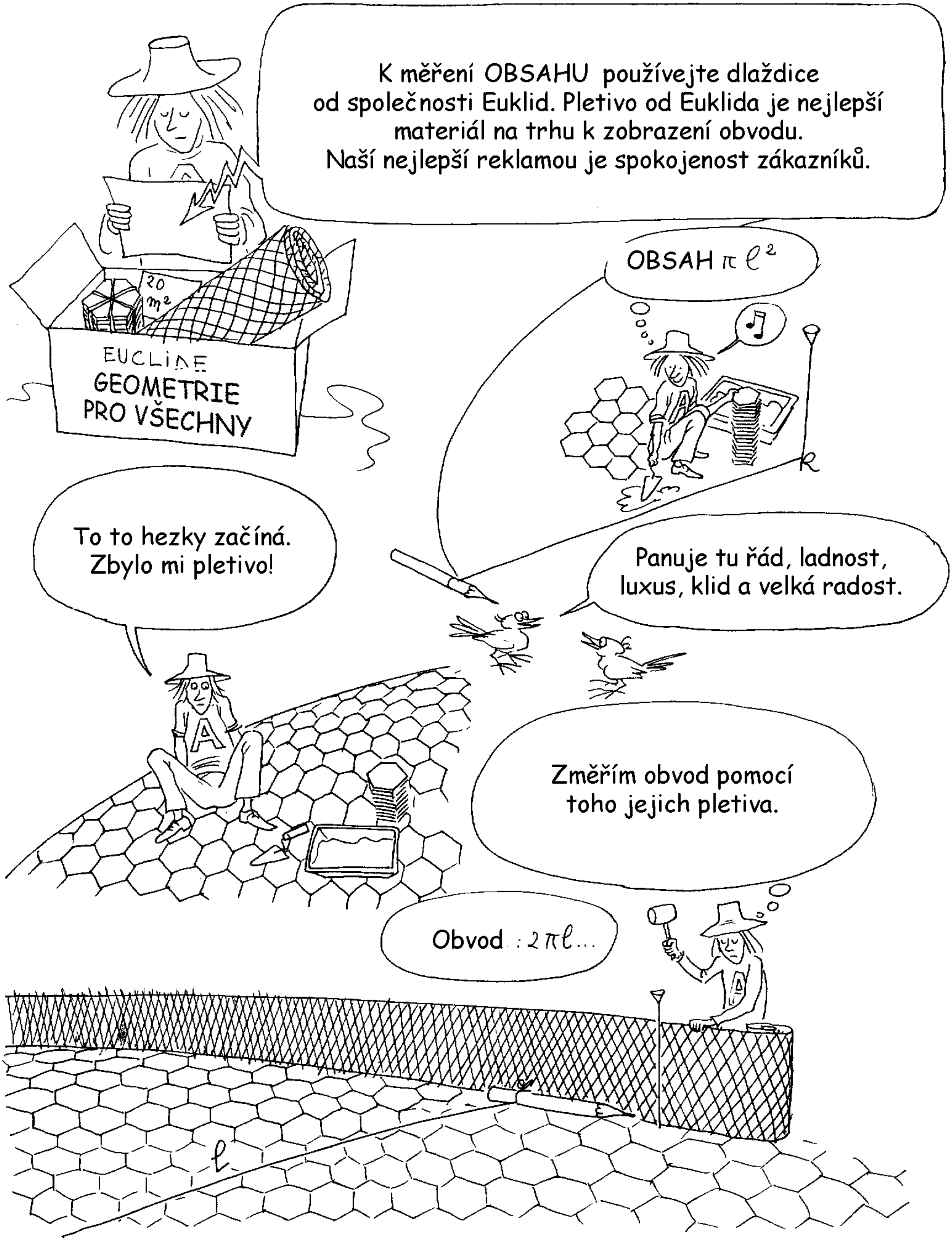
Ničím se nedal vyvést z míry, napínal nadále provázek a šel stále, pln zvědavosti ROVNĚ DOPŘEDU.

Běda...

Anselmova PŘÍMKA se uzavírala!


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Ověřme si Euklidovu větu. Natáhnu tři GEODETIKY o stejné délce. Získám tak TROJÚHELNÍK, jehož každý ze tří úhlů musí měřit 60° a jejich součet činí 180°. Tady to je v návodu.
B 60 A 60 60 C
Â + B̂ + Ĉ = 180°
Pak se nad tím zamyslím.
RATIO OMNIA VINCIT
A
B
A
Tohle je druhý vrchol B. Ještě musím napnout dva další provázky, abych získal třetí vrchol.
Věda je nádherná.
B
Je, je, jej! Úhly jsou shodné, ale měří víc než 60°.
Nefunguje to?
C
A
Součet činí samozřejmě víc než 180°!
EUKLIDOVA GEOMETRIE
EUCLIDE
EUCLIDE

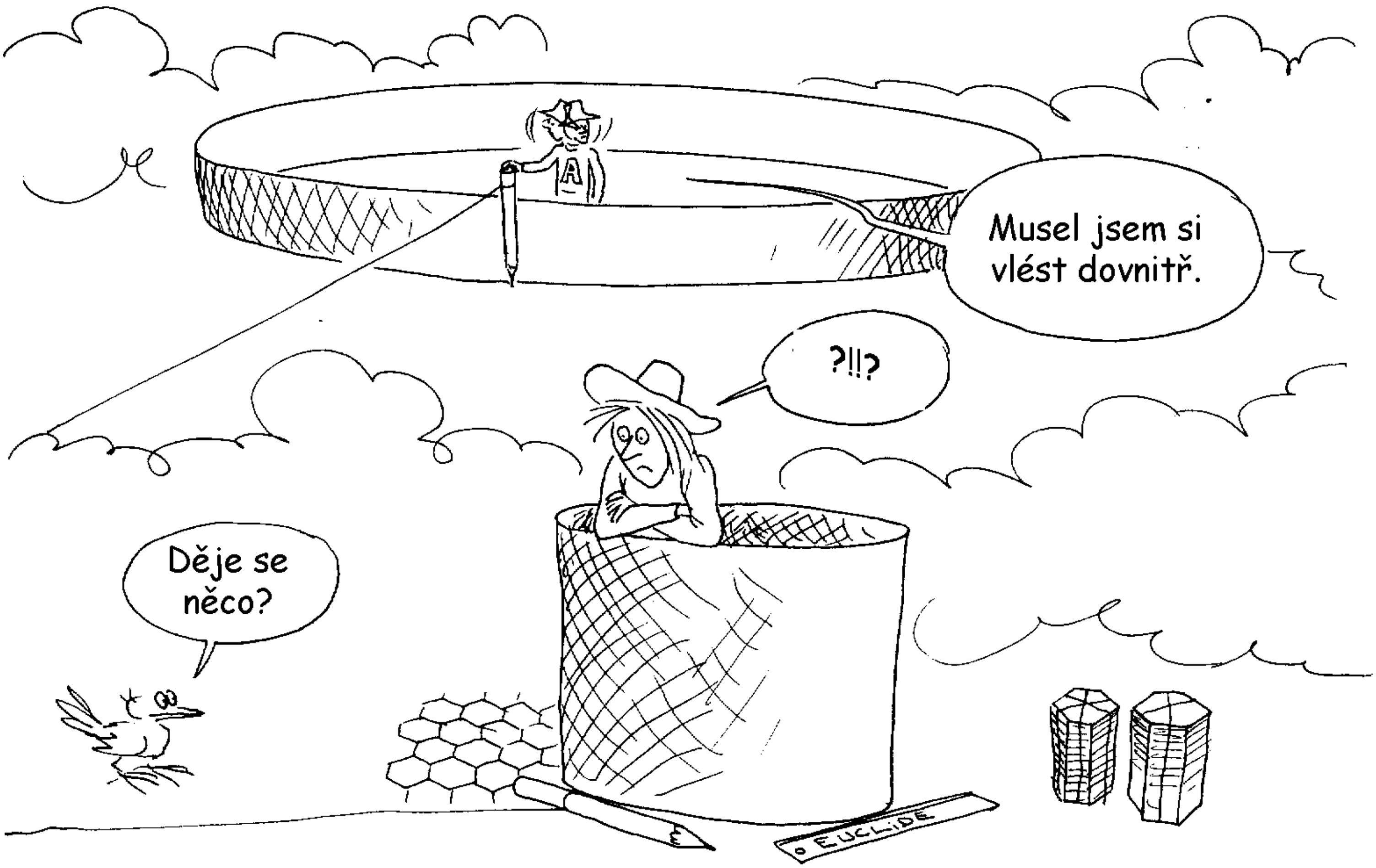

Pravítko jsem ale položil zcela NALEŽATO a ověřil jsem, že provázky byly úplně ROVNÉ.
EUCLIDE
Haló, společnost Euklid? Poslyšte, to vaše zařízení nějak zlobí.
Vteřinku, přepojím vás na technické oddělení.
Problémy s našimi trojúhelníky? To mě překvapuje. Nechcete vyzkoušet kružnice? Naši zákazníci si je moc pochvalují.
... Kružnice je tedy množina bodů, které mají od daného bodu stále stejnou vzdálenost l.
Píšu si: obvod $2\pi l$, OBSAH: πl^2. Mám to.
ℓ
K vašim službám.


K měření OBSAHU používejte dlaždice od společnosti Euklid. Pletivo od Euklida je nejlepší materiál na trhu k zobrazení obvodu. Naší nejlepší reklamou je spokojenost zákazníků.
EUCLIDE
GEOMETRIE PRO VŠECHNY
20 m²
OBSAH $\pi \ell^2$
To to hezky začíná. Zbylo mi pletivo!
Panuje tu řád, ladnost, luxus, klid a velká radost.
Změřím obvod pomocí toho jejich pletiva.
Obvod : $2\pi\ell$...
ℓ


Zbylo mi i pletivo!
Haló, společnost Euklid? Ano, to jsem ještě já! Zbylo mi hodně dlaždic A pletiva. πl^2, $2\pi l$, ta vaše věc vůbec nefunguje.
Nekřičte na mě, pane. Já jsem pouze sekretářka. Přepojím vás na technické oddělení.
Ne, ne, dlaždice jsou hezky vedle sebe. Poloměr je rovný a pletivo leží přesně na KRUŽNICI.
Pane, věřte mi, že tohle se nám stalo opravdu poprvé. Ještě to zkuste a nebojte se, vždyť víte, že naše věty jsou v záruce.
Anselme pokračoval v pokusu tak, že pokaždé zvětšil poloměr kruhu l. Ale zbývalo mu čím dál tím víc materiálu.


Jak je to možné? Zbylo mi 36 % pletiva a 19 % dlaždic! A z kružnice se stala... PŘÍMKA!
To se mi snad jenom zdá!
V prostoru je pravítko zcela ROVNÉ!
EUCLIDE
Anselme ještě zvětšil poloměr l a tentokrát...
EUCLIDE
Kružnice se prohla na druhou stranu.
A teď když ZVĚTŠUJI l, tak se obvod ZMENŠUJE. To je k zbláznění!

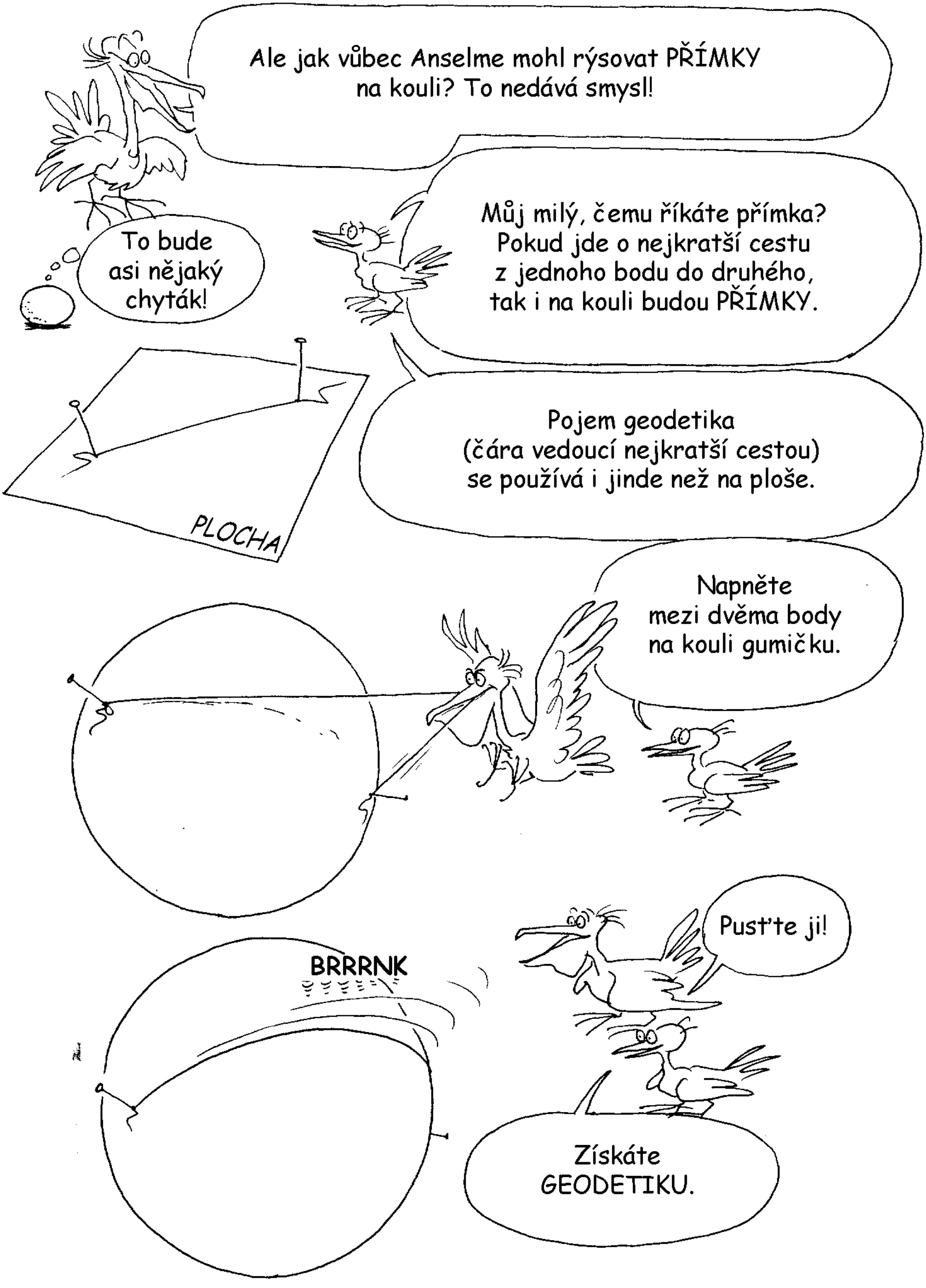
Po posledním vydláždění:



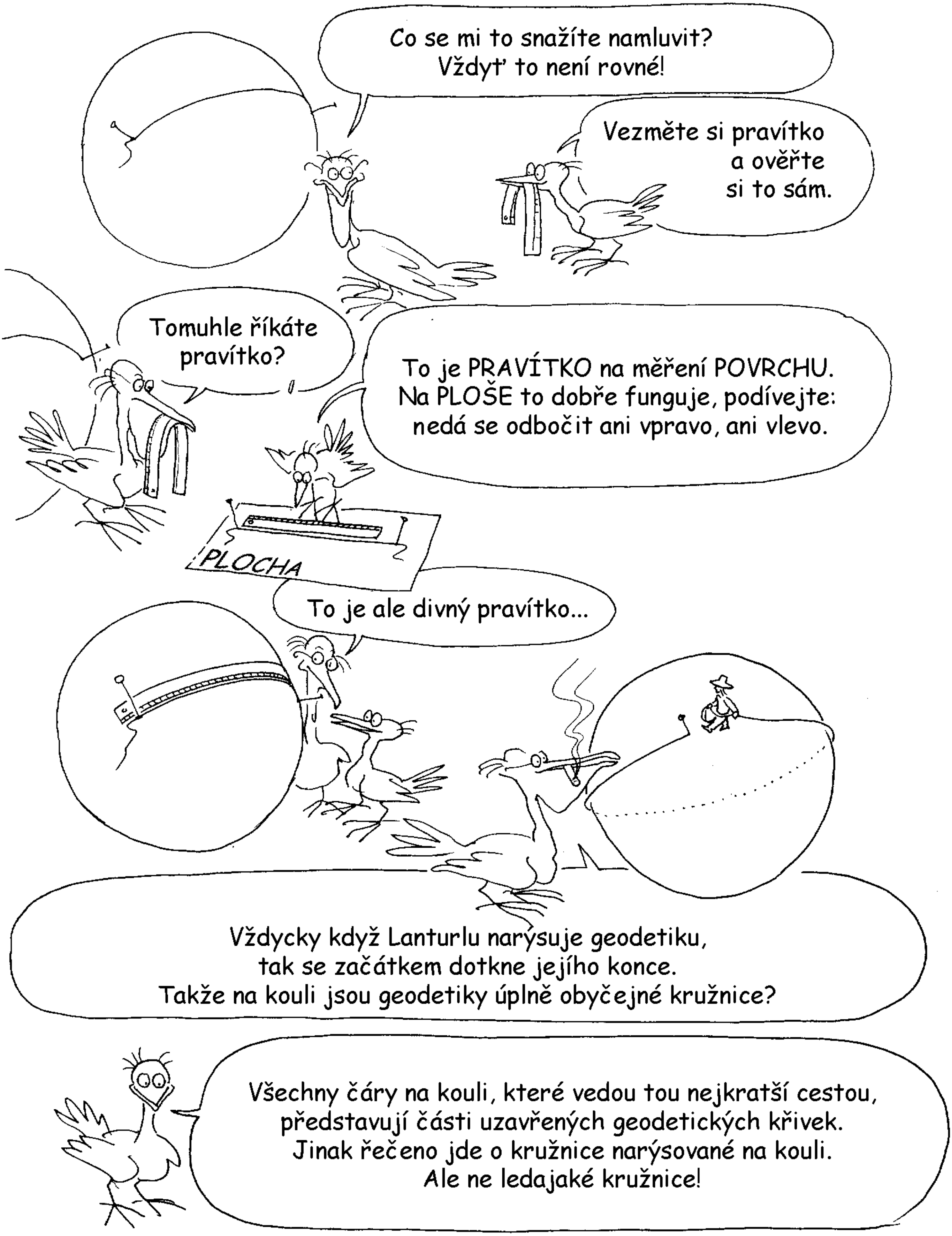
CO SE STALO?

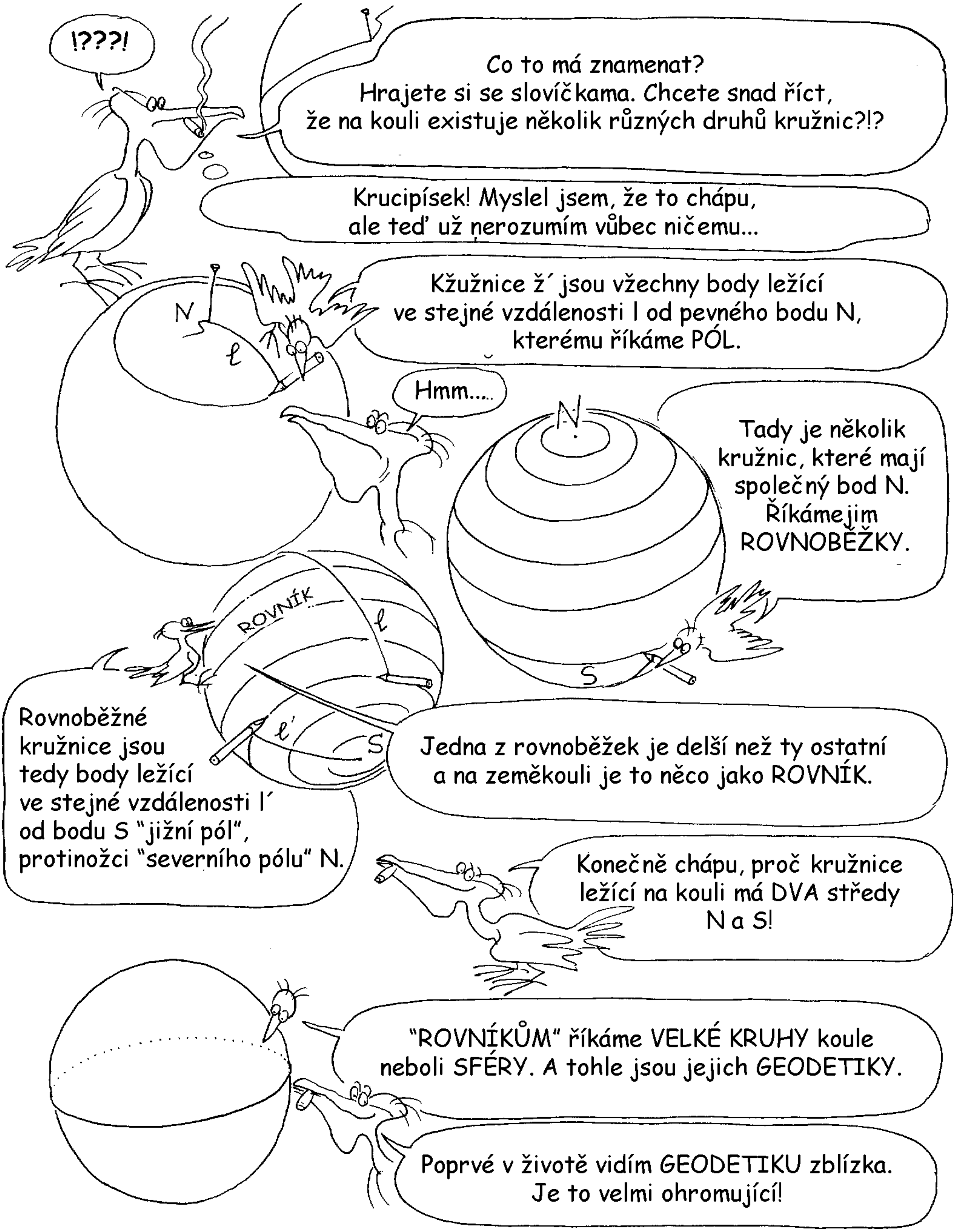
Abychom to zjistili, tak musíme rozfoukat mraky:

Anselme najednou pochopil, že se nachází na kouli, ale používal pravidla ROVINNÉ GEOMETRIE.

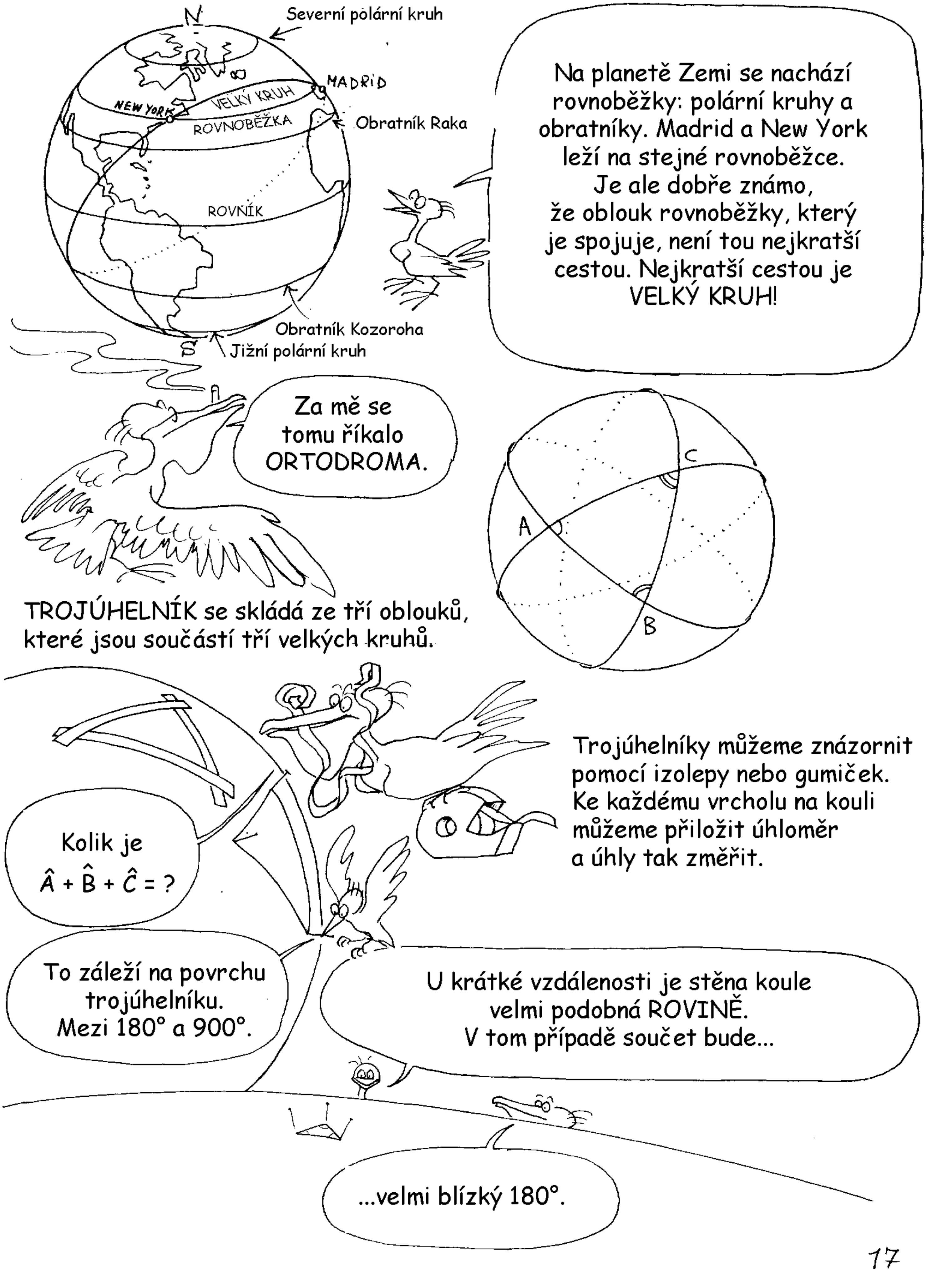


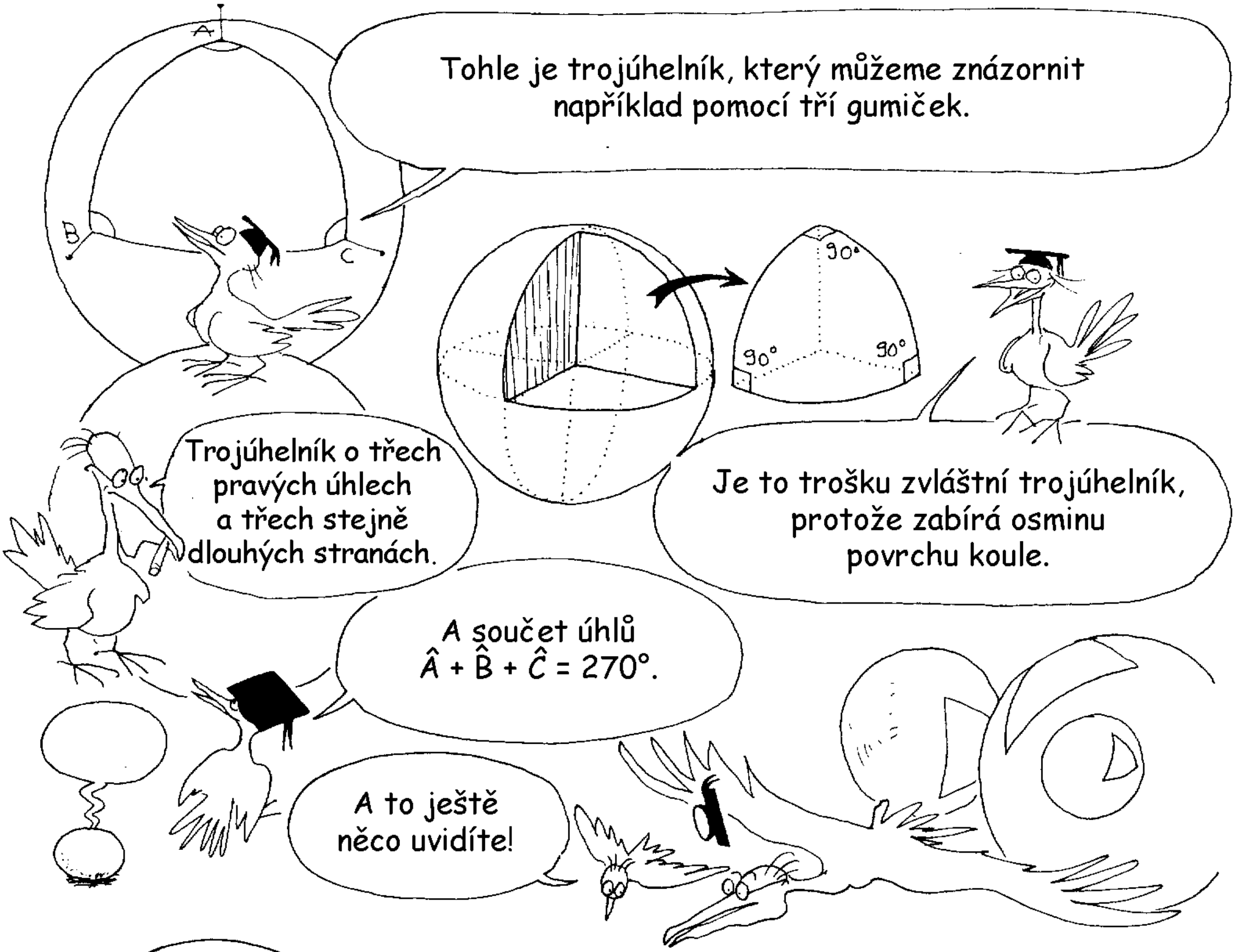
Ale jak vůbec Anselme mohl rýsovat PŘÍMKY na kouli? To nedává smysl!
To bude asi nějaký chyták!
Můj milý, čemu říkáte přímka? Pokud jde o nejkratší cestu z jednoho bodu do druhého, tak i na kouli budou PŘÍMKY.
Pojem geodetika (čára vedoucí nejkratší cestou) se používá i jinde než na ploše.
PLOCHA
Napněte mezi dvěma body na kouli gumičku.
Pusťte ji!
BRRRNK
Získáte GEODETIKU.


Co se mi to snažíte namluvit?
Vždyť to není rovné!
Vezměte si pravítko a ověřte si to sám.
Tomuhle říkáte pravítko?
To je PRAVÍTKO na měření POVRCHU.
Na PLOŠE to dobře funguje, podívejte:
nedá se odbočit ani vpravo, ani vlevo.
PLOCHA
To je ale divný pravítko...
Vždycky když Lanturlu narýsuje geodetiku,
tak se začátkem dotkne jejího konce.
Takže na kouli jsou geodetiky úplně obyčejné kružnice?
Všechny čáry na kouli, které vedou tou nejkratší cestou,
představují části uzavřených geodetických křivek.
Jinak řečeno jde o kružnice narýsované na kouli.
Ale ne ledajaké kružnice!

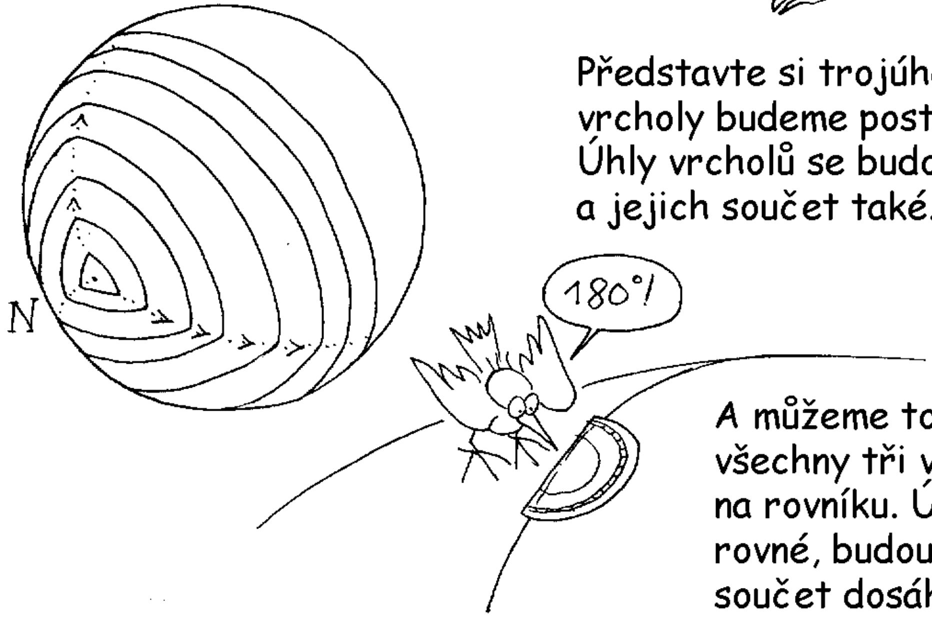


!???!
Co to má znamenat?
Hrajete si se slovíčkama. Chcete snad říct,
že na kouli existuje několik různých druhů kružnic?!?
Krucipísek! Myslel jsem, že to chápu,
ale teď už nerozumím vůbec ničemu...
N
ℓ
Kžužnice ž´ jsou vžechny body ležící
ve stejné vzdálenosti l od pevného bodu N,
kterému říkáme PÓL.
Hmm....
N
Tady je několik
kružnic, které mají
společný bod N.
Říkámejim
ROVNOBĚŽKY.
S
ROVNÍK
ℓ
ℓ´
S
Rovnoběžné
kružnice jsou
tedy body ležící
ve stejné vzdálenosti l´
od bodu S "jižní pól",
protinožci "severního pólu" N.
Jedna z rovnoběžek je delší než ty ostatní
a na zeměkouli je to něco jako ROVNÍK.
Konečně chápu, proč kružnice
ležící na kouli má DVA středy
N a S!
"ROVNÍKŮM" říkáme VELKÉ KRUHY koule
neboli SFÉRY. A tohle jsou jejich GEODETIKY.
Poprvé v životě vidím GEODETIKU zblízka.
Je to velmi ohromující!


N
Severní polární kruh
MADRID
VELKÝ KRUH
NEW YORK
ROVNOBĚŽKA
Obratník Raka
ROVNÍK
Obratník Kozoroha
S
Jižní polární kruh
Na planetě Zemi se nachází rovnoběžky: polární kruhy a obratníky. Madrid a New York leží na stejné rovnoběžce. Je ale dobře známo, že oblouk rovnoběžky, který je spojuje, není tou nejkratší cestou. Nejkratší cestou je VELKÝ KRUH!
Za mě se tomu říkalo ORTODROMA.
TROJÚHELNÍK se skládá ze tří oblouků, které jsou součástí tří velkých kruhů.
C
A
B
Trojúhelníky můžeme znázornit pomocí izolepy nebo gumiček. Ke každému vrcholu na kouli můžeme přiložit úhloměr a úhly tak změřit.
Kolik je $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ?$
To záleží na povrchu trojúhelníku. Mezi 180° a 900°.
U krátké vzdálenosti je stěna koule velmi podobná ROVINĚ. V tom případě součet bude...
...velmi blízký 180°.

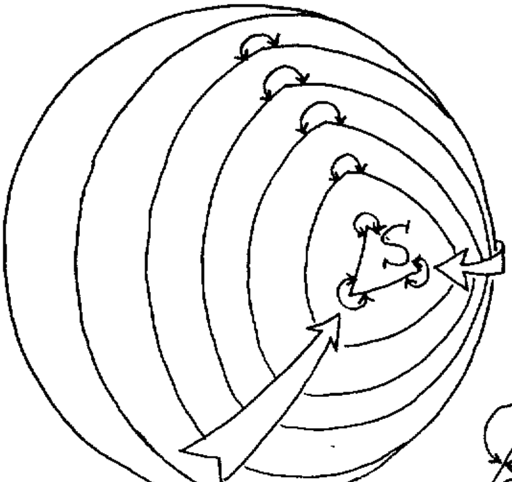


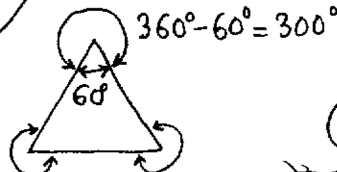
Představte si trojúhelník z gumiček, jehož vrcholy budeme postupně natahovat. Úhly vrcholů se budou zvětšovat a jejich součet také.



A můžeme to nastavit tak, aby se všechny tři vrcholy nacházely na kouli na rovníku. Úhly $\hat{A}$, $\hat{B}$, a $\hat{C}$ budou rovné, budou se rovnat 180°a jejich součet dosáhne 540°!!...

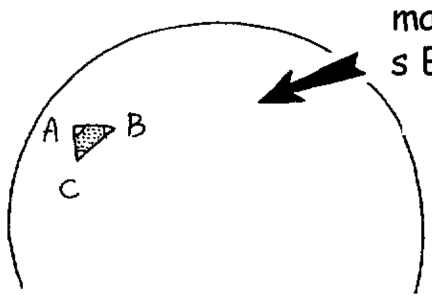
Když přesuneme vrcholy trojúhelníku na druhou polokouli, tak je přiblížíme k bodu S, protinožci bodu N.
Při zachování původní definice týkající se úhlů vrcholů, každý vrchol bude měřit víc než 180°! Přesněji řečeno každý bude měřit 360° - 60° = 300°.

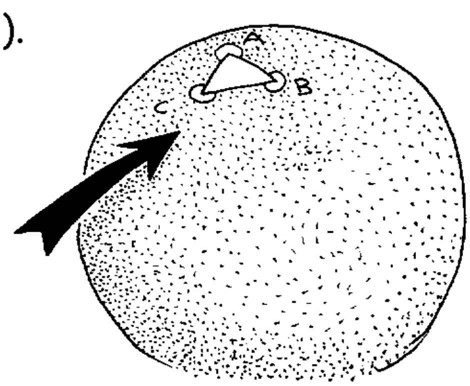




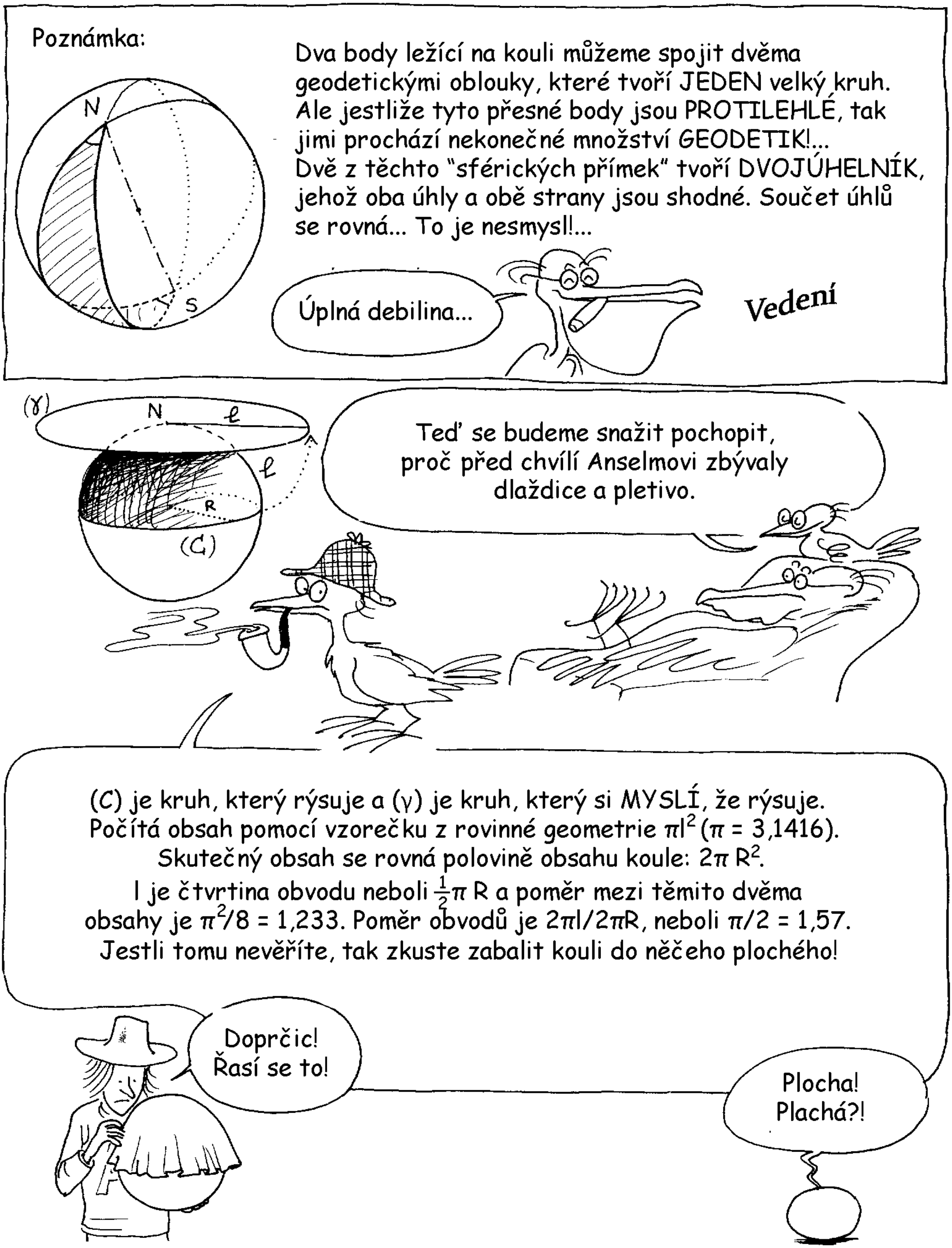
Součet : 300 × 3 = 900°

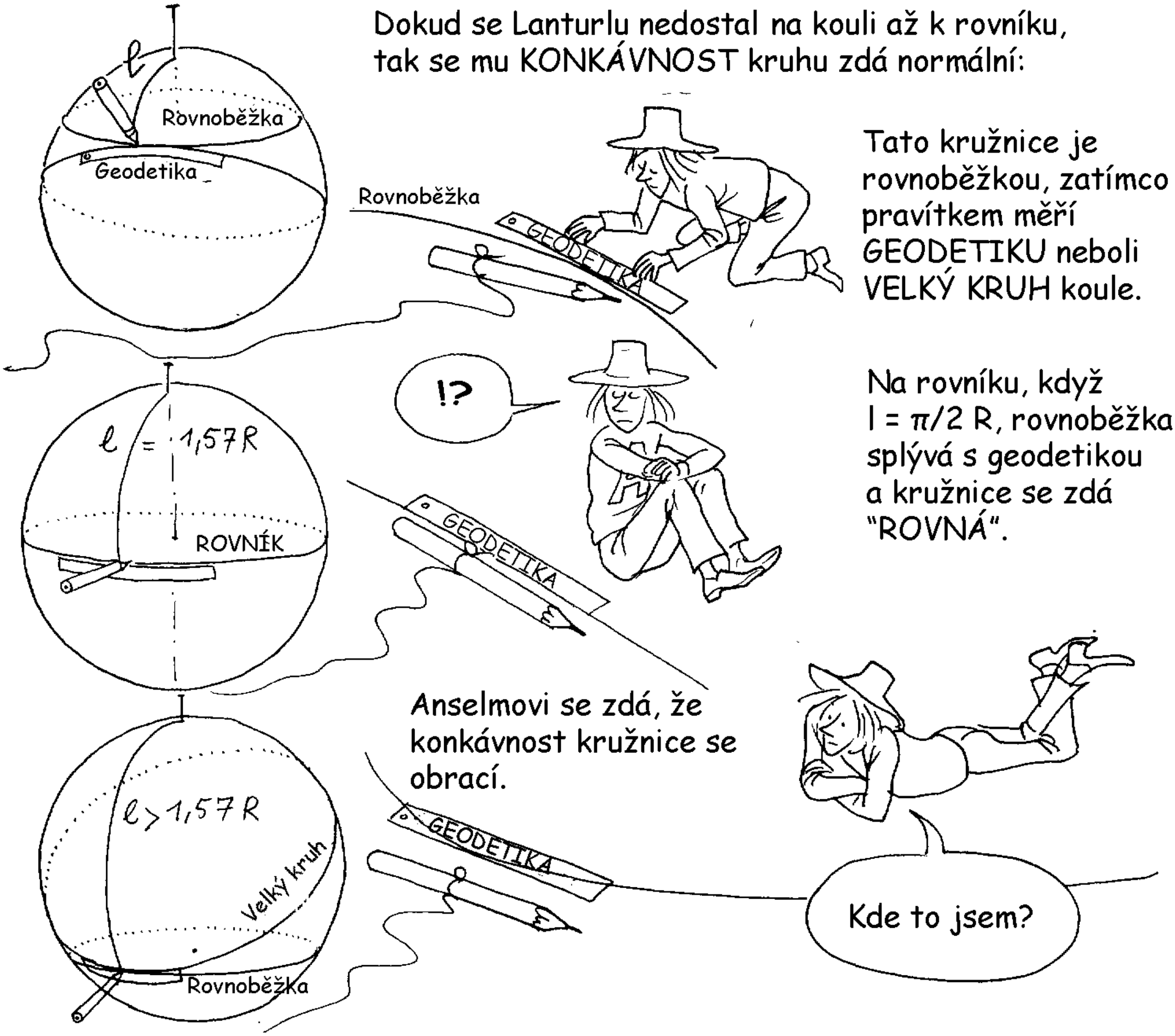
Když je obsah trojúhelníku k poměru ke kouli malý, tak se shodujeme s Euklidem ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$).



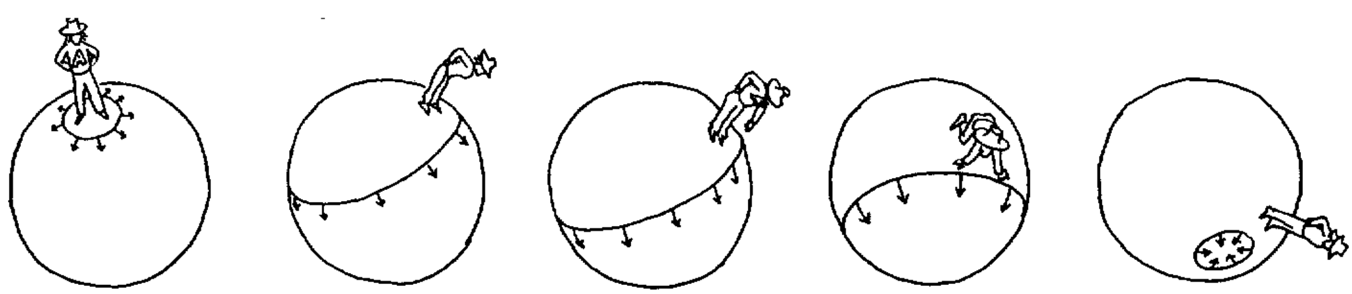


Naopak když je obsah trojúhelníku skoro tak velký jako obsah koule ($4 \times 3{,}1416 \times R^2$), tak získáme 900°.


Poznámka:
Dva body ležící na kouli můžeme spojit dvěma geodetickými oblouky, které tvoří JEDEN velký kruh. Ale jestliže tyto přesné body jsou PROTILEHLÉ, tak jimi prochází nekonečné množství GEODETIK!... Dvě z těchto "sférických přímek" tvoří DVOJÚHELNÍK, jehož oba úhly a obě strany jsou shodné. Součet úhlů se rovná... To je nesmysl!...
N
S
Úplná debilina...
Vedení
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Teď se budeme snažit pochopit, proč před chvílí Anselmovi zbývaly dlaždice a pletivo.
(C) je kruh, který rýsuje a (γ) je kruh, který si MYSLÍ, že rýsuje.
Počítá obsah pomocí vzorečku z rovinné geometrie πl^2 (π = 3,1416).
Skutečný obsah se rovná polovině obsahu koule: $2\pi R^2$.
l je čtvrtina obvodu neboli $\frac{1}{2}\pi R$ a poměr mezi těmito dvěma obsahy je $\pi^2/8$ = 1,233. Poměr obvodů je $2\pi l/2\pi R$, neboli $\pi/2$ = 1,57.
Jestli tomu nevěříte, tak zkuste zabalit kouli do něčeho plochého!
Doprčic! Řasí se to!
Plocha! Plachá?!

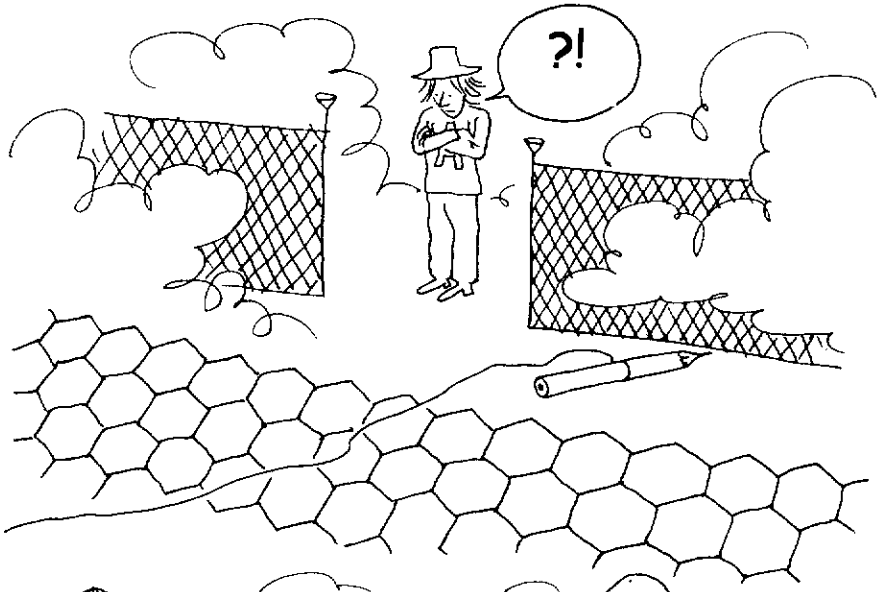


Tato vlastnost vysvětluje, jak je možné donekonečna "vstupovat" a "vystupovat" z kružnice narýsované na kouli, aniž bychom ji překročili. Je třeba si představit kružnici jako gumičku navléknutou na kulečníkové kouli.

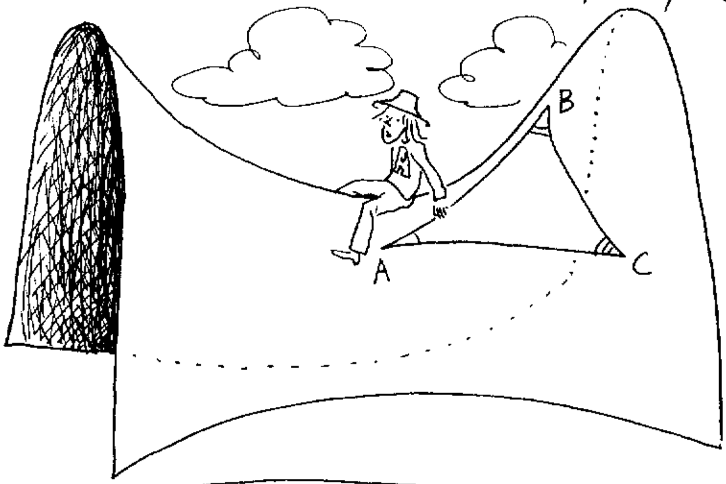



Anselmovi chvíli trvalo než pochopil všechny jevy, které objevil matematik Gauss (1777 - 1855). Rozhodl se, že se vydá prozkoumat svět POVRCHŮ:
sférická geometrie
GAUSS
Tak, mám vše, co potřebuji: pravítko, úhloměr, provázek a paličku. Jdu na to...
Někdy se kvůli vědě musí riskovat.
Věda!
Anselme přistál v novém světě. Znovu natáhl GEODETIKU, ale tentokrát...
K čertu, zdá se, že tento povrch nikam nevede.
Geodetiku nelze uzavřít.
Tak to je něco jiného!
Anselme udělal ze tří dobře napnutých provázků trojúhelník, ale součet úhlů jeho vrcholů se tentokrát ukázal nižší než 180°.

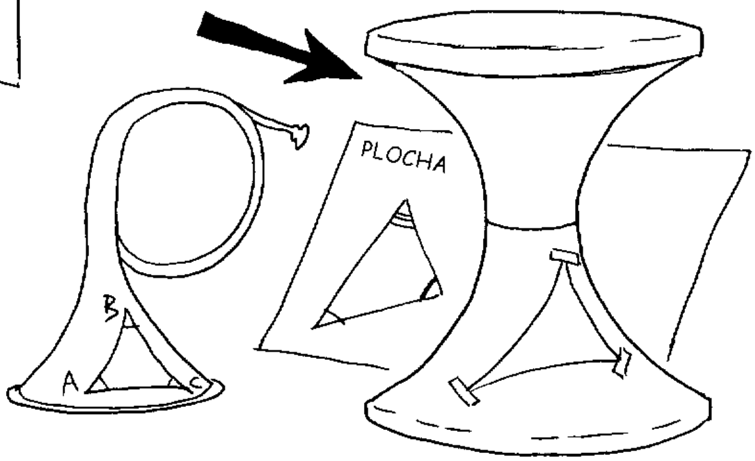
Kružnice je pořád množina bodů, které mají od daného bodu stále stejnou vzdálenost l. Lanturlu zjistil, že kružnice narýsovaná na novém povrchu, má VĚTŠÍ poloměr než $2\pi l$, zatímco její obsah PŘESAHUJE πl^2.



Podívejme se na to zblízka:

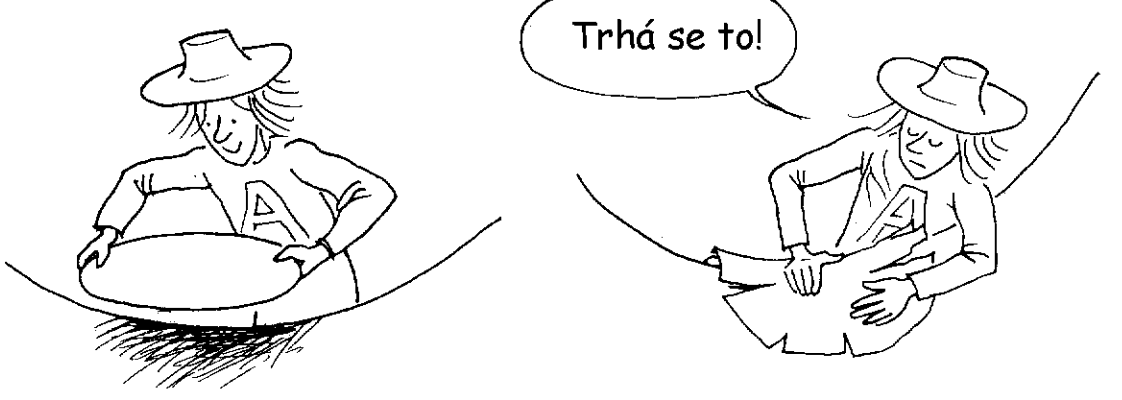


Povrch má tentokrát tvar horského průsmyku nebo koňského sedla. Některé věci z vašeho každodenního života se dají použít: myslivecký roh nebo taková stolička.

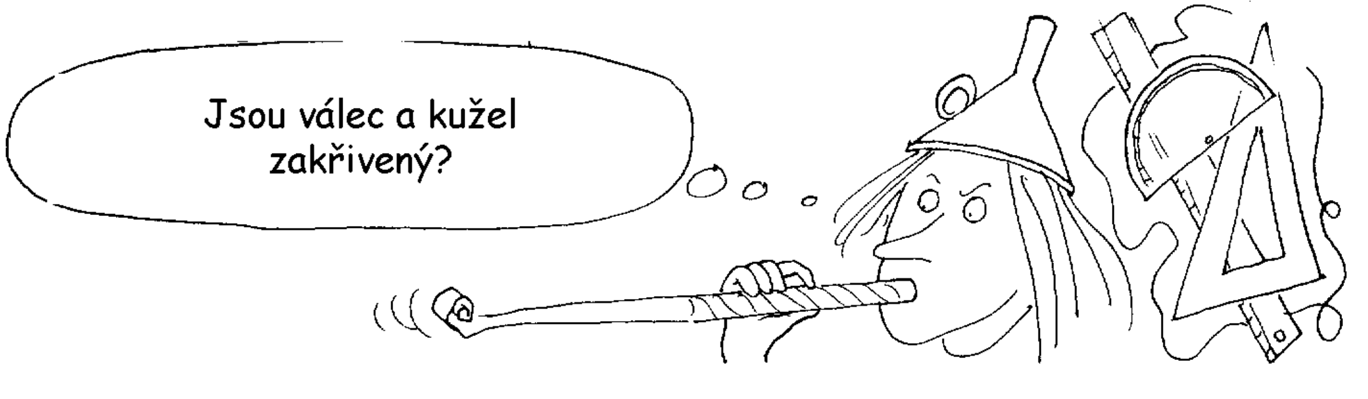


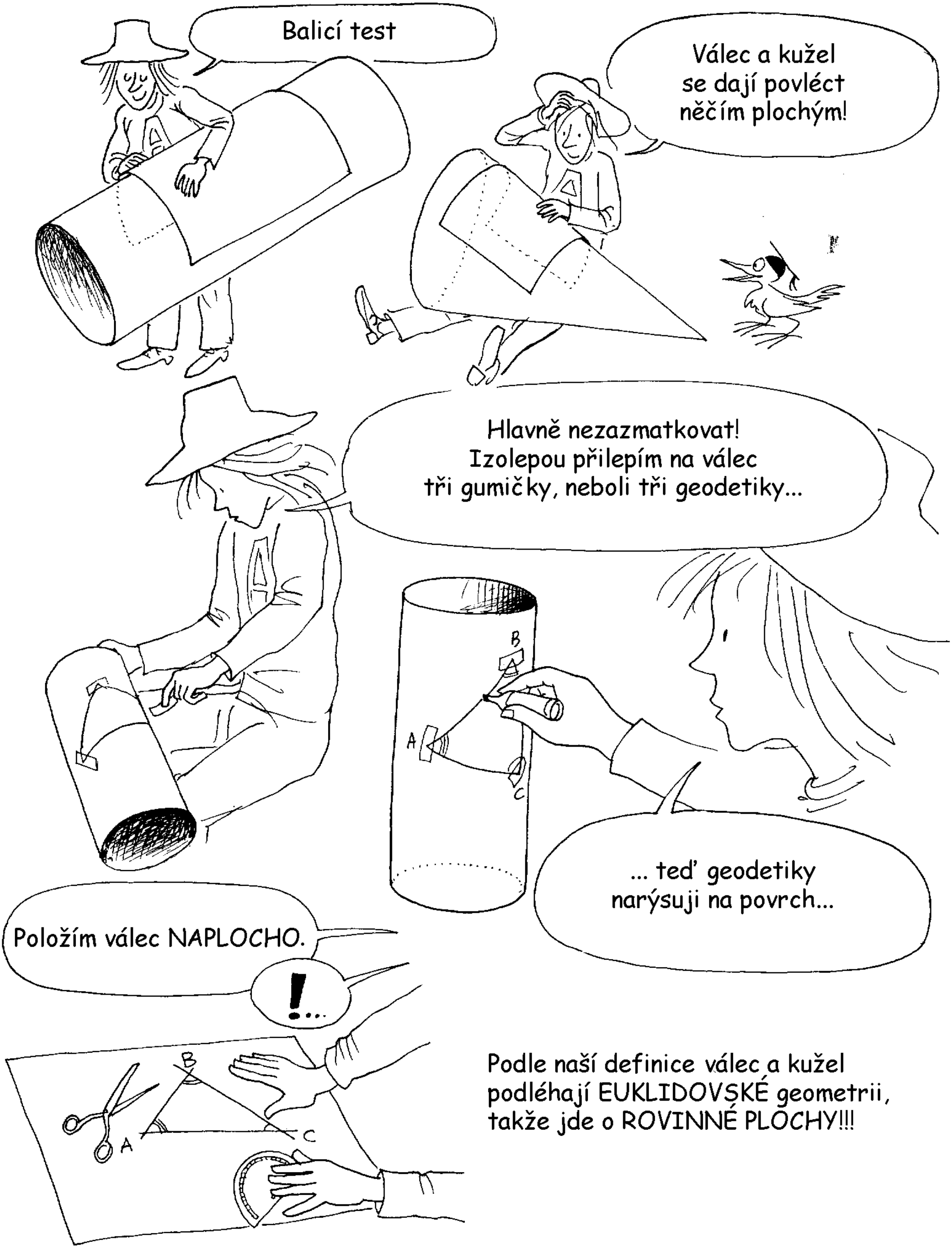
ZAKŘIVENÍ

Zakřivená plocha je plocha, na které nefungují euklidovy zákony. Křivka může být kladná nebo záporná.
Na ploše S KLADNÝM ZAKŘIVENÍM je součet úhlů trojúhelníku vyšší než 180°. Když narýsujeme kružnici o poloměru l, tak její obsah je nižší než πl^2 a její obvod nižší než $2\pi l$.
Na ploše SE ZÁPORNÝM ZAKŘIVENÍM je součet úhlů trojúhelníku nižší než 180°. Když narýsujeme kružnici o poloměru l, tak její obsah je vyšší než πl^2 a její obvod vyšší než $2\pi l$.
Před chvílí Anselme zjistil, že když se snažil POVLÉCI kouli - plochu s kladným zakřivením, něčím plochým, tak se látka řasila. Něčím plochým nelze ani povléci plochu se záporným zakřivením: látka by se roztrhala. Když chceme zjistit, zda jde o kladnou nebo zápornou křivku, tak je nejjednodušší použít balicí test.



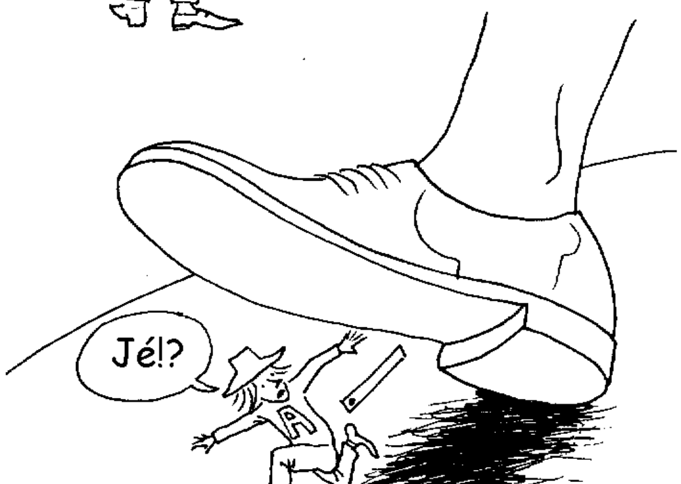
Již na předešlé stránce jsme viděli, že plochy mohou být kladně nebo někdy záporně zakřivená území.

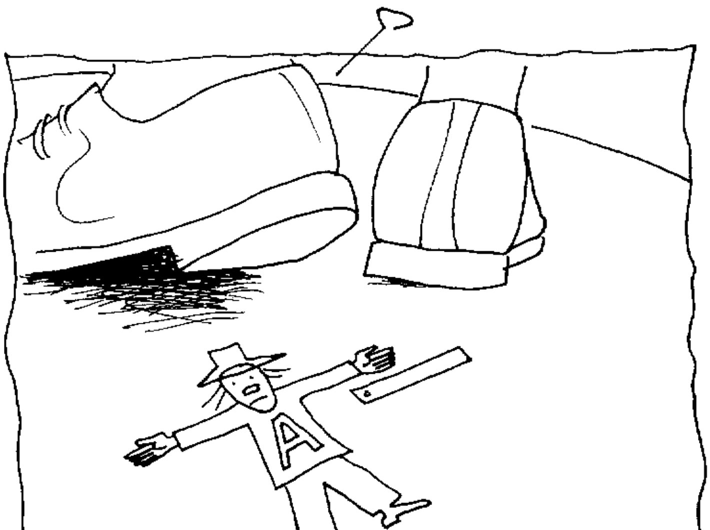



Balicí test
Válec a kužel se dají povléct něčím plochým!
Hlavně nezazmatkovat! Izolepou přilepím na válec tři gumičky, neboli tři geodetiky...
B
A
C
... teď geodetiky narýsuji na povrch...
Položím válec NAPLOCHO.
!...
B
A
C
Podle naší definice válec a kužel podléhají EUKLIDOVSKÉ geometrii, takže jde o ROVINNÉ PLOCHY!!!

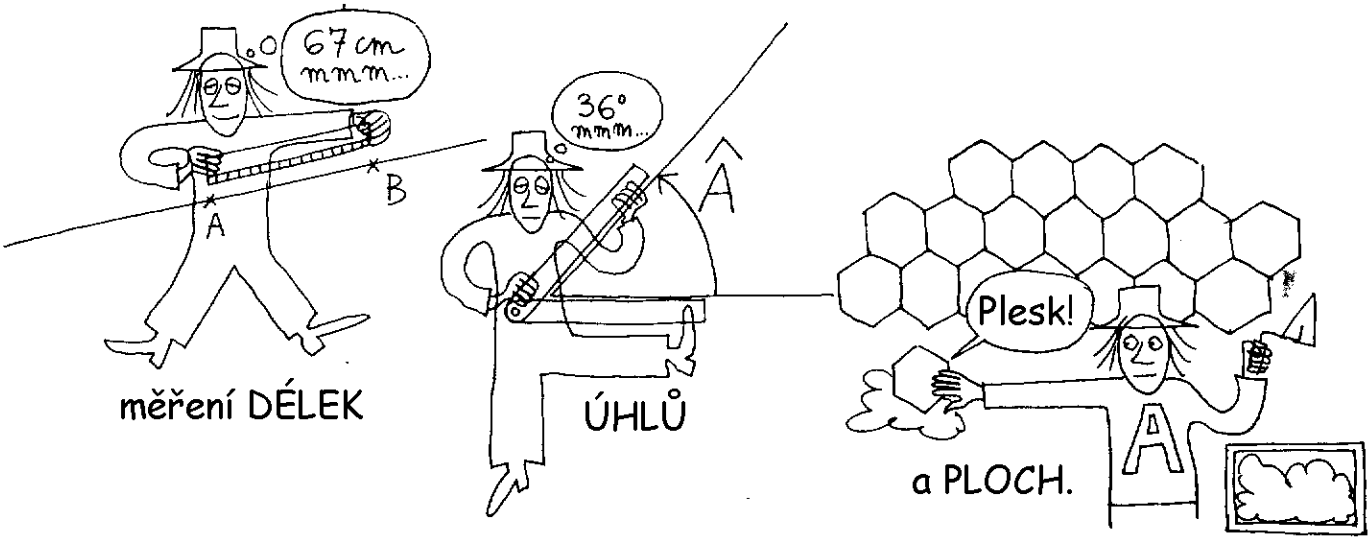
PROSTOR

Před chvílí si Anselme kvůli mrakům neviděl skoro ani na špičku nosu. Kdyby tomu tak nebylo, tak by býval mohl spatřit ZAKŘIVENÍ SFÉRICKÉHO PROSTORU.
Existuje ještě jiný způsob, jak Lanturlovi zabránit v tom, aby zakřivení viděl: umístit ho na povrch, udělat z něho SOUČÁST povrchu.





Všimněme si, že nová situace vůbec nebrání v

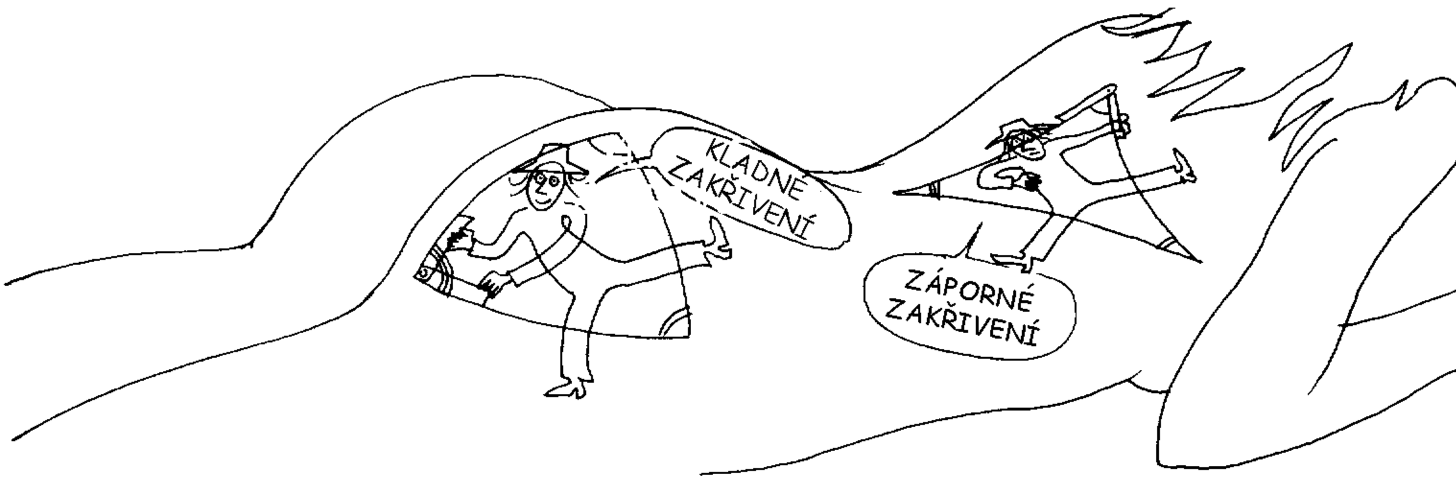


měření DÉLEK ÚHLŮ a PLOCH.

I přesto, že je Anselme přilepený K povrchu, tak by býval mohl zjistit, zda se jedná o kladné či záporné zakřivení a dokonce by ho býval mohl změřit a to vše aniž by to VIDĚL. Jestliže se součet úhlů trojúhelníku rovná 180°, tak se jedná o ROVINNOU plochu.
Pokud je součet vyšší než 180°, tak jde o kladné zakřivení a Anselme může spočítat místní poloměr křivky R pomocí vzorečku:

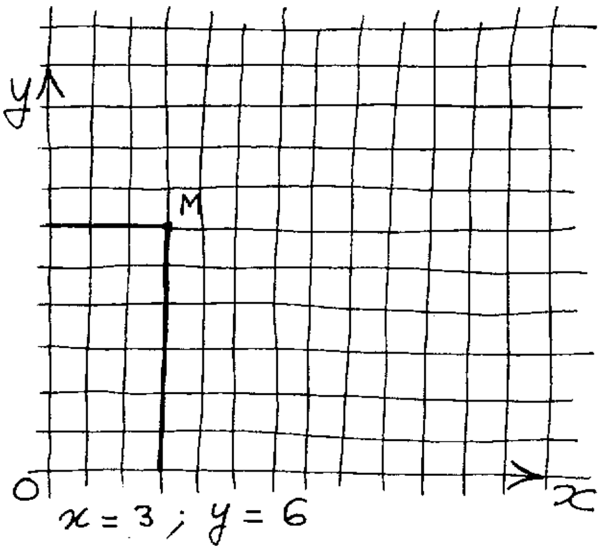
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\ (1 + \frac{A}{3{,}14\ R^2})$ stupňů. A je obsah trojúhelníku.

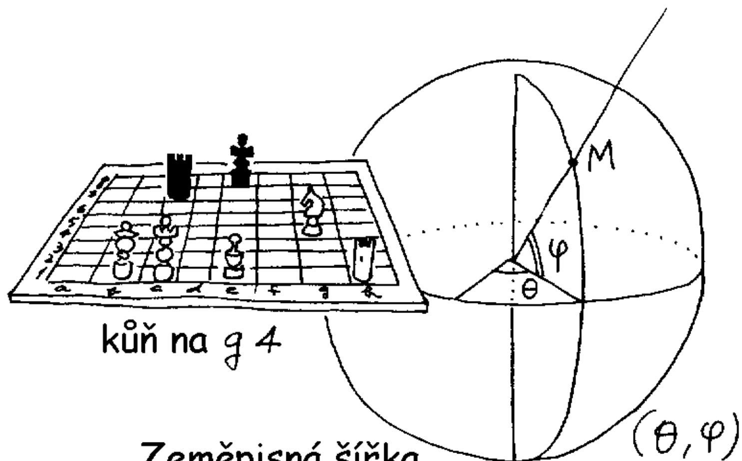
Pokud je součet nižší než 180°, tak můžeme určit poloměr křivky R, podle $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\ (1 - \frac{A}{3{,}14\ R^2})$, ale už to nemá KLASICKÝ FYZIKÁLNÍ SMYSL.
Všimněme si, že PLOCHA může být povrch o nekonečném poloměru křivky R. V tom případě znovu použijeme Euklidovy věty.



ROZMĚR

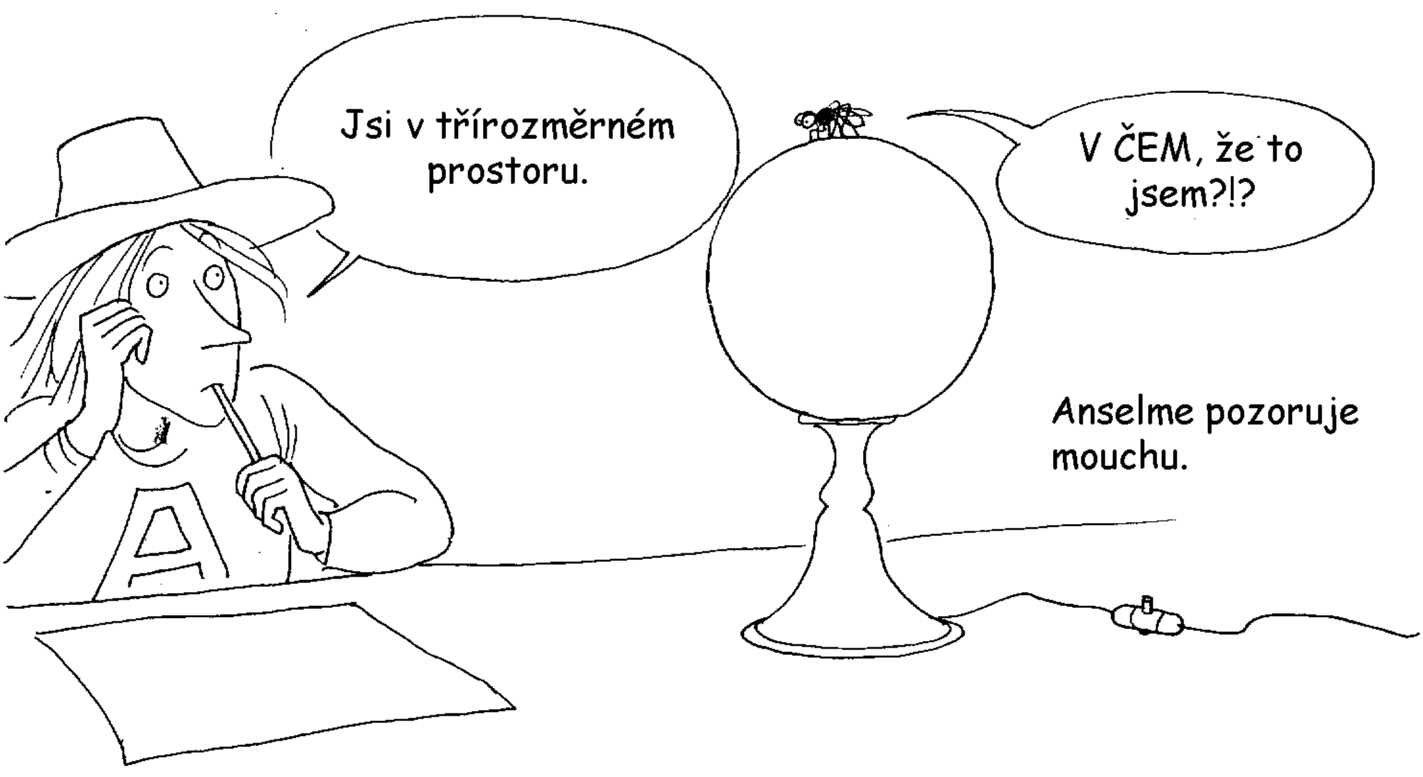
Počet rozměrů je jednoduše řečeno počet veličin, souřadnic, které je potřeba v jakémkoliv prostoru zadat k určení BODU. PLOCHY jsou zobrazení dvojrozměrného prostoru. Vyznačené veličiny mohou být délkami, čísly, úhly...

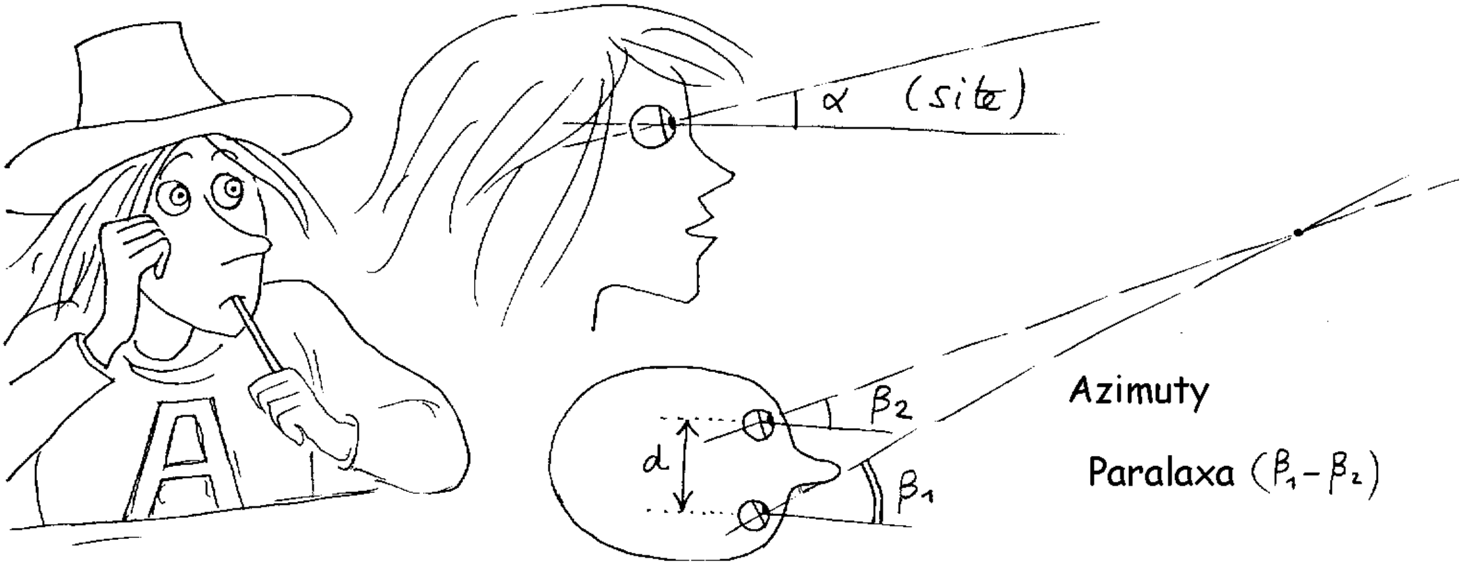




Zeměpisná šířka,
zeměpisná délka

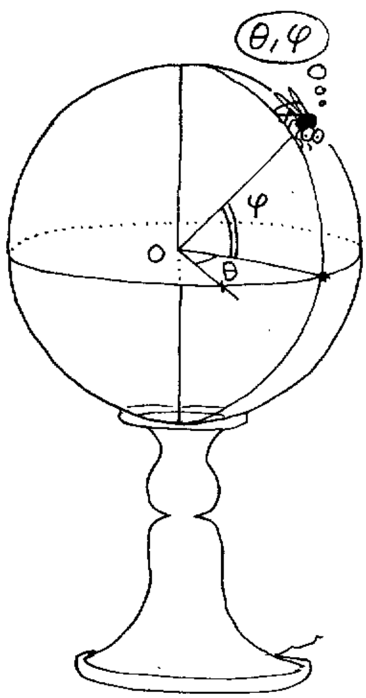
Obvykle říkáme, že prostor má, vyjma času, tři rozměry.





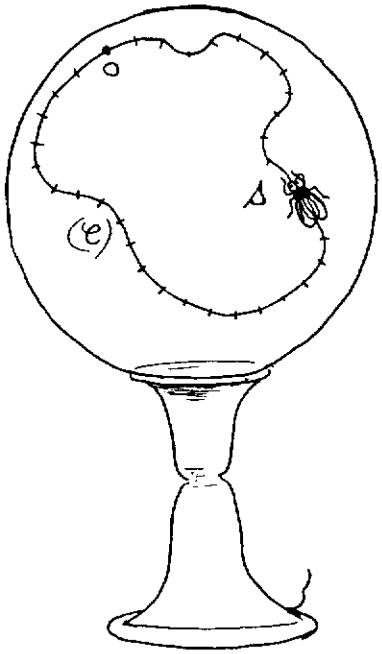
Anselme určuje polohu věcí vzhledem ke svému tělu, ke své lebce.
Poloha předmětu v určitém bodě je dána třemi ÚHLY: polohový úhel, azimuty jeho očí: β_1 a β_2.
Rozdíl mezi úhly β_1 a β_2 se nazývá paralaxa.
Anselmův mozek informaci dekóduje a převede tak paralaxu na vzdálenost.

PONOŘENÍ

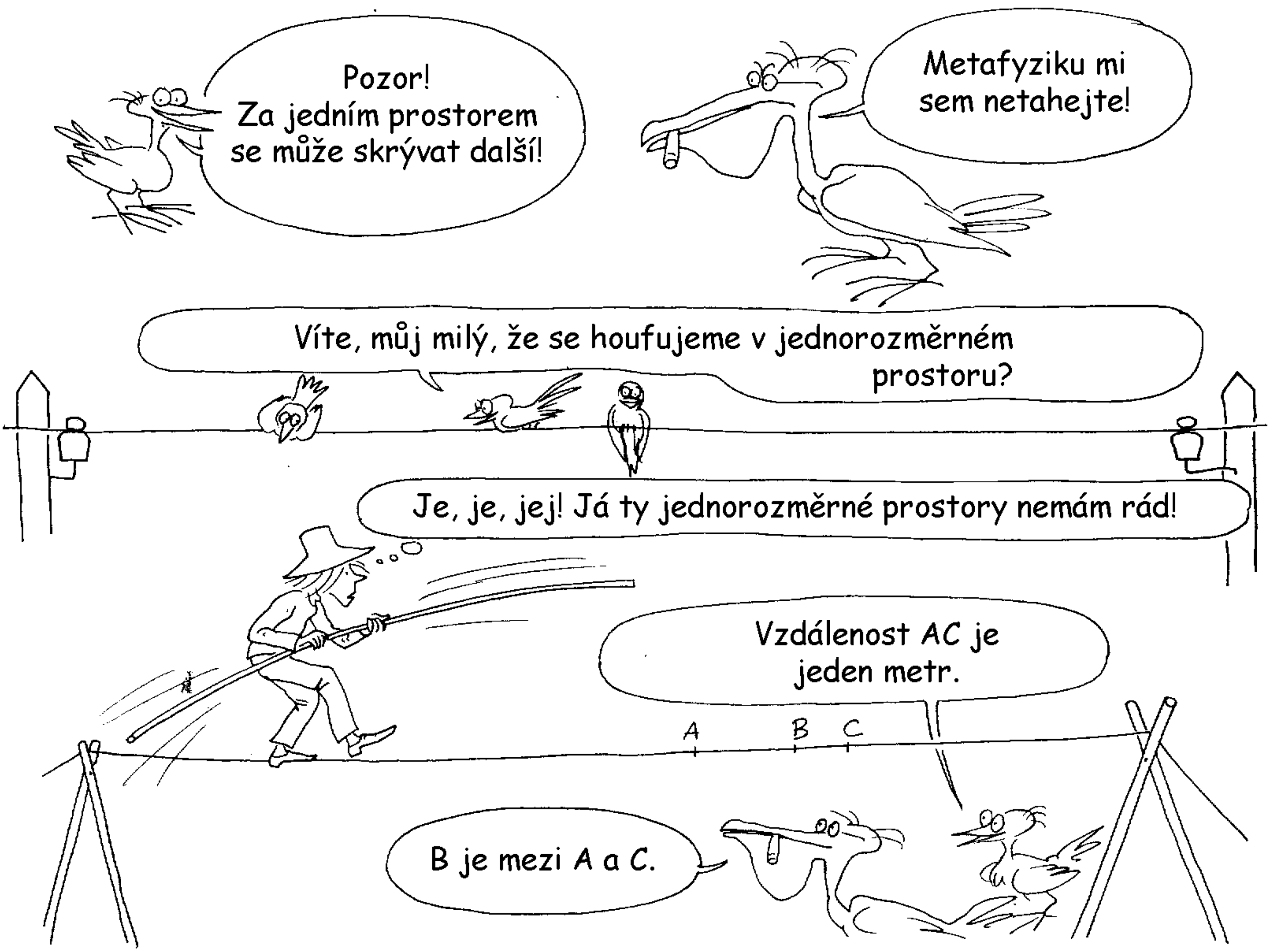


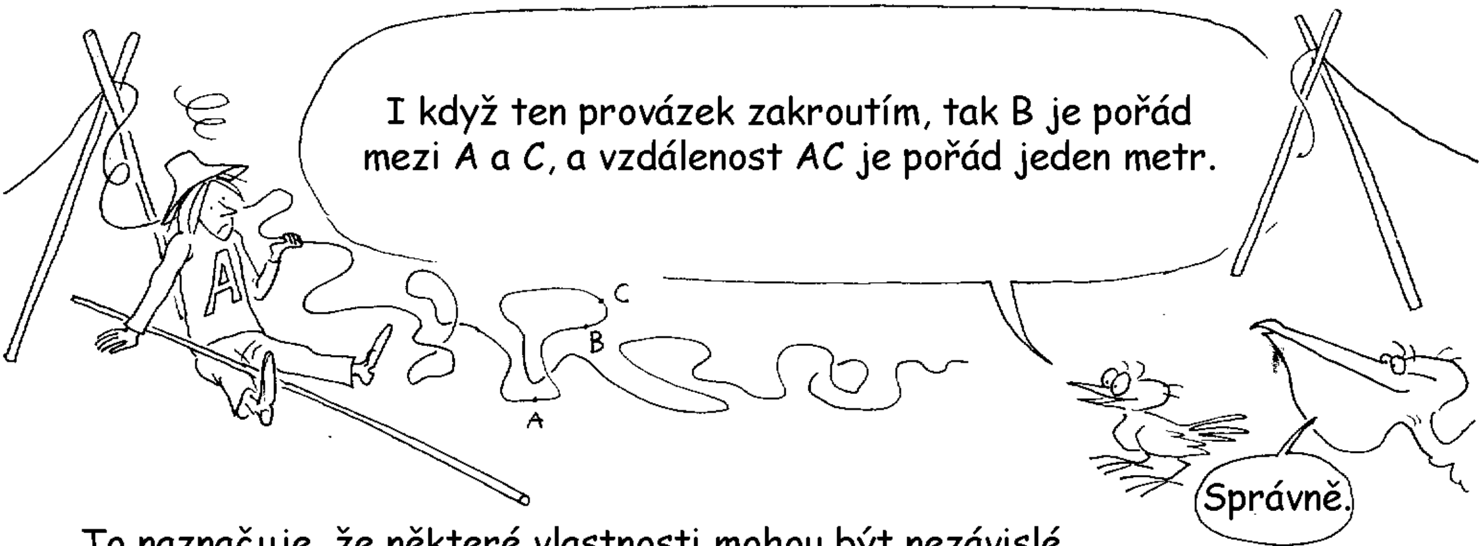
I moucha se pohybuje na sférické kupoli lampičky. Její poloha se dá v tomto dvojrozměrném prostoru určit pomocí dvou úhlů θ a γ (zeměpisná délka a šířka).

Budeme říkat, že tento dvojrozměrný prostor je PONOŘENÝ do našeho trojrozměrného prostoru.

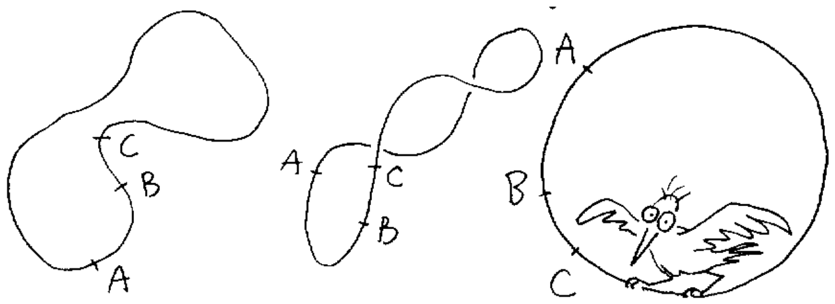


Předpokládejme, že se moucha pohybuje po křivce (ζ) nakreslené na kouli. Můžeme určit její polohu pomocí jediného algebrického údaje (vzdálenost s od výchozího bodu).
Křivka je znázornění JEDNOROZMĚRNÉHO prostoru.
Tento jednorozměrný prostor je ponořený do dvojrozměrného prostoru (koule), který je PONOŘEN do třírozměrného prostoru.
Takže prostor, ve kterém žijeme, by mohl být ponořen do vícerozměrného prostoru, a to aniž bychom o tom věděli.





To naznačuje, že některé vlastnosti mohou být nezávislé na způsobu, jakým se uskutečňuje ponoření.

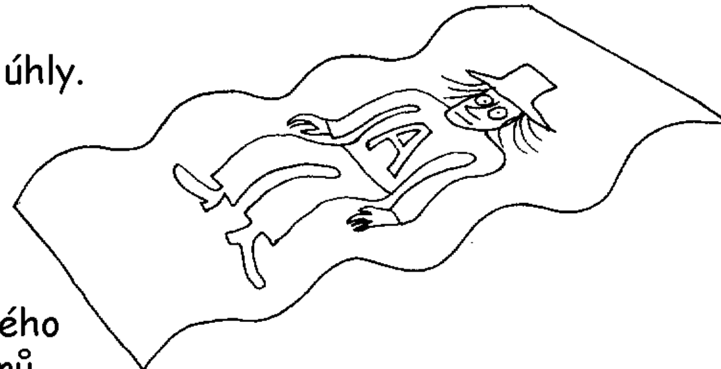


Tady je několik různých způsobů, jak PONOŘIT UZAVŘENOU KŘIVKU do běžného prostoru. Uzavření je vlastnost nezávislá na ponoření.

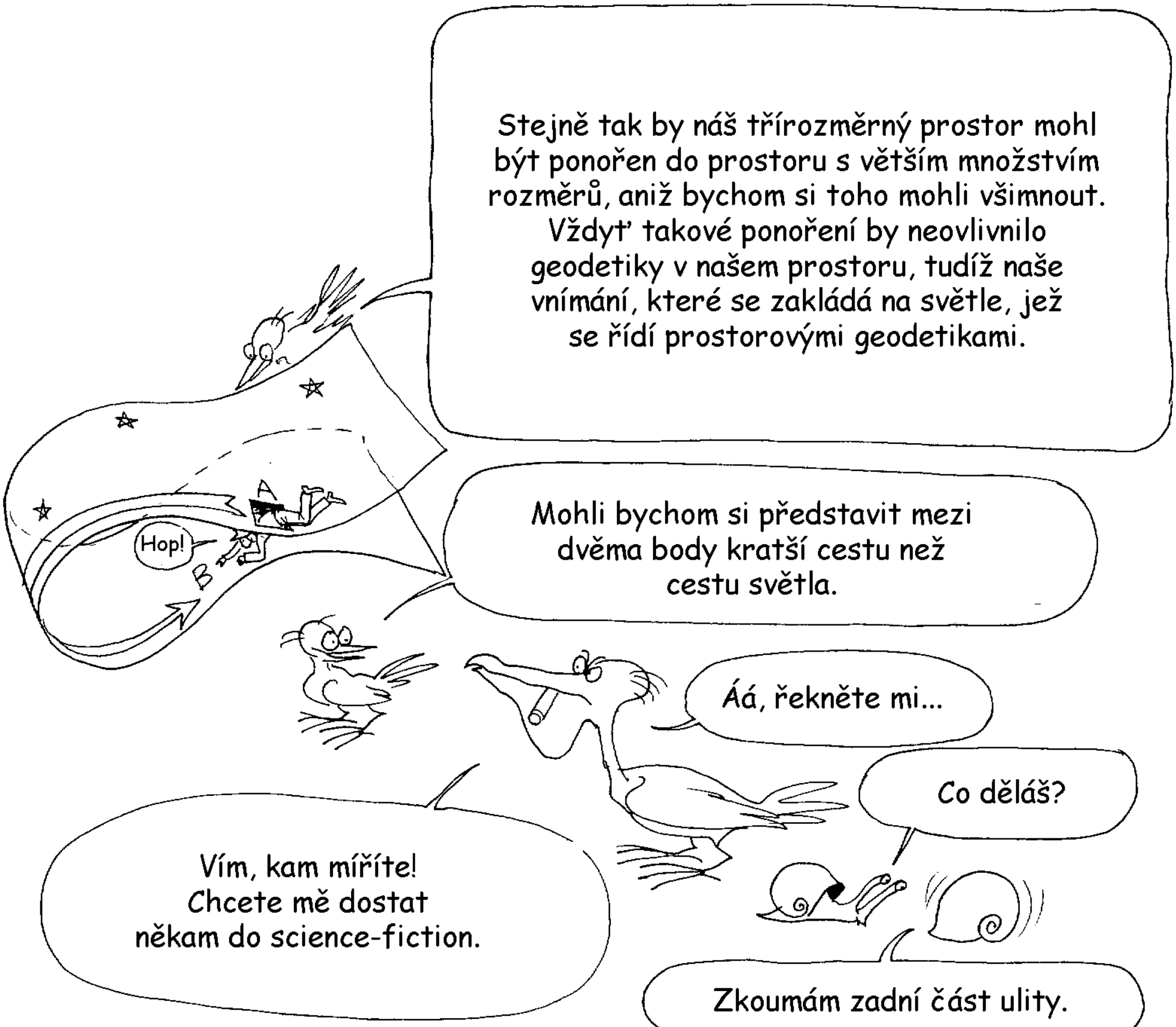
Ale naschvál jsme provázek ani nenatahovali ani nestahovali, abychom nezměnili VZDÁLENOSTI mezi jednotlivými body. Nyní budeme PONOŘOVAT PLOCHY do běžného třírozměrného prostoru.

Když PONOŘÍME PLOCHU do běžného třírozměrného prostoru, tak s ní můžeme hýbat, otáčet ji a nezměníme tím její GEOMETRII.

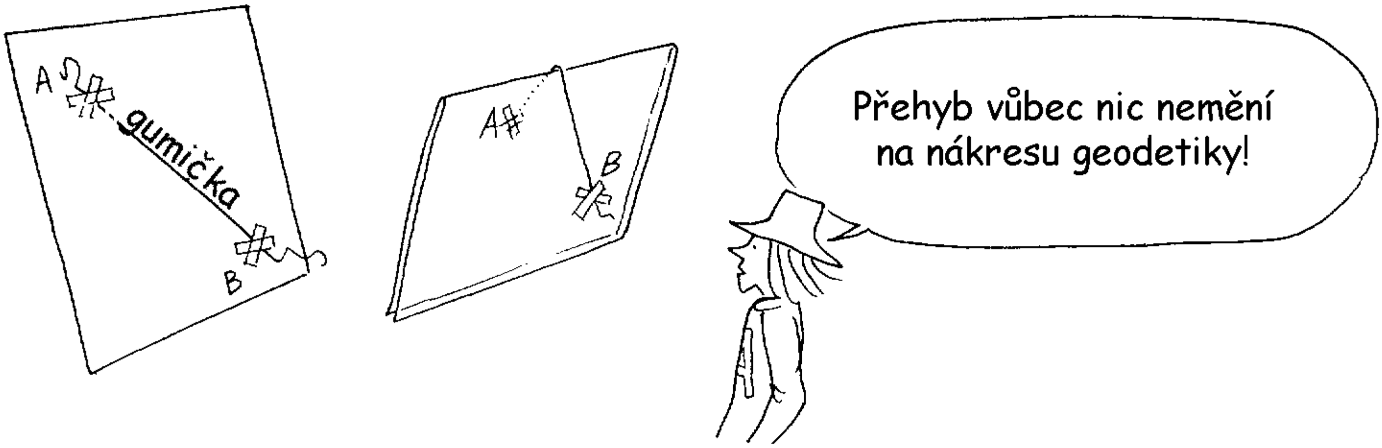
Dozvěděli jsme se, že když plochu zdeformujeme podle tvaru válce, tak se tím nezmění ani geodetiky ani úhly. V tomto smyslu má vlnitý plech stále ROVINNOU EUKLIDOVSKOU geometrii.



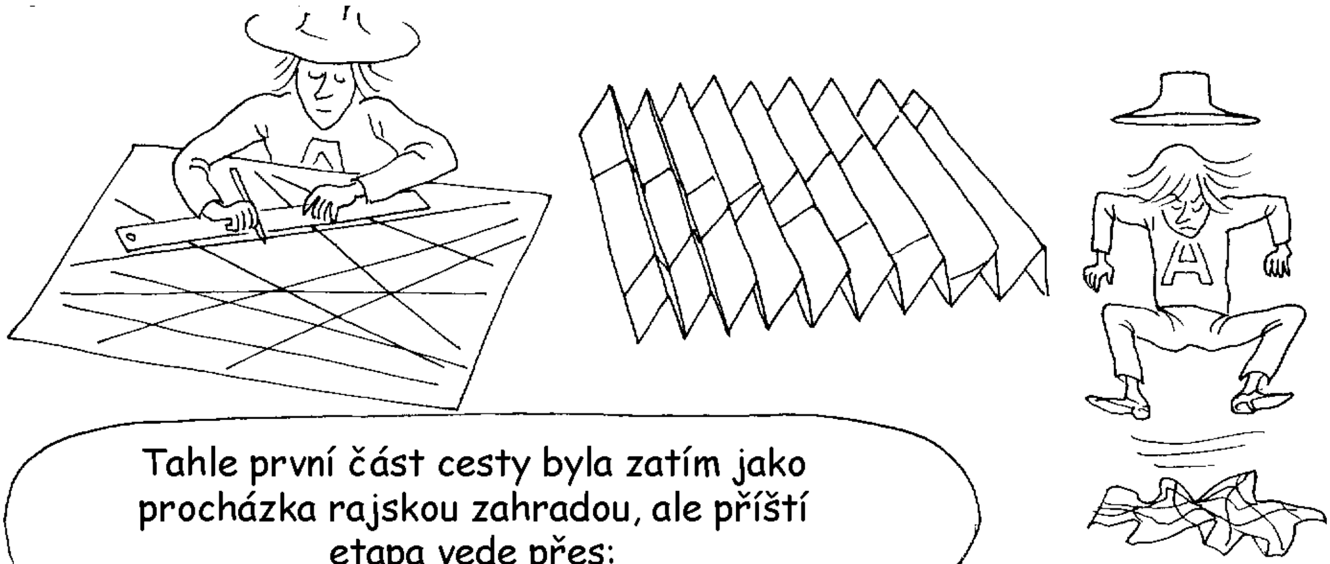
Obyvatel dvojrozměrného euklidovského prostoru, by si ani nepovšimnul přesunů, rotací a vlnění, které by představovaly pouhé změny způsobu ponoření do třírozměrného prostoru.

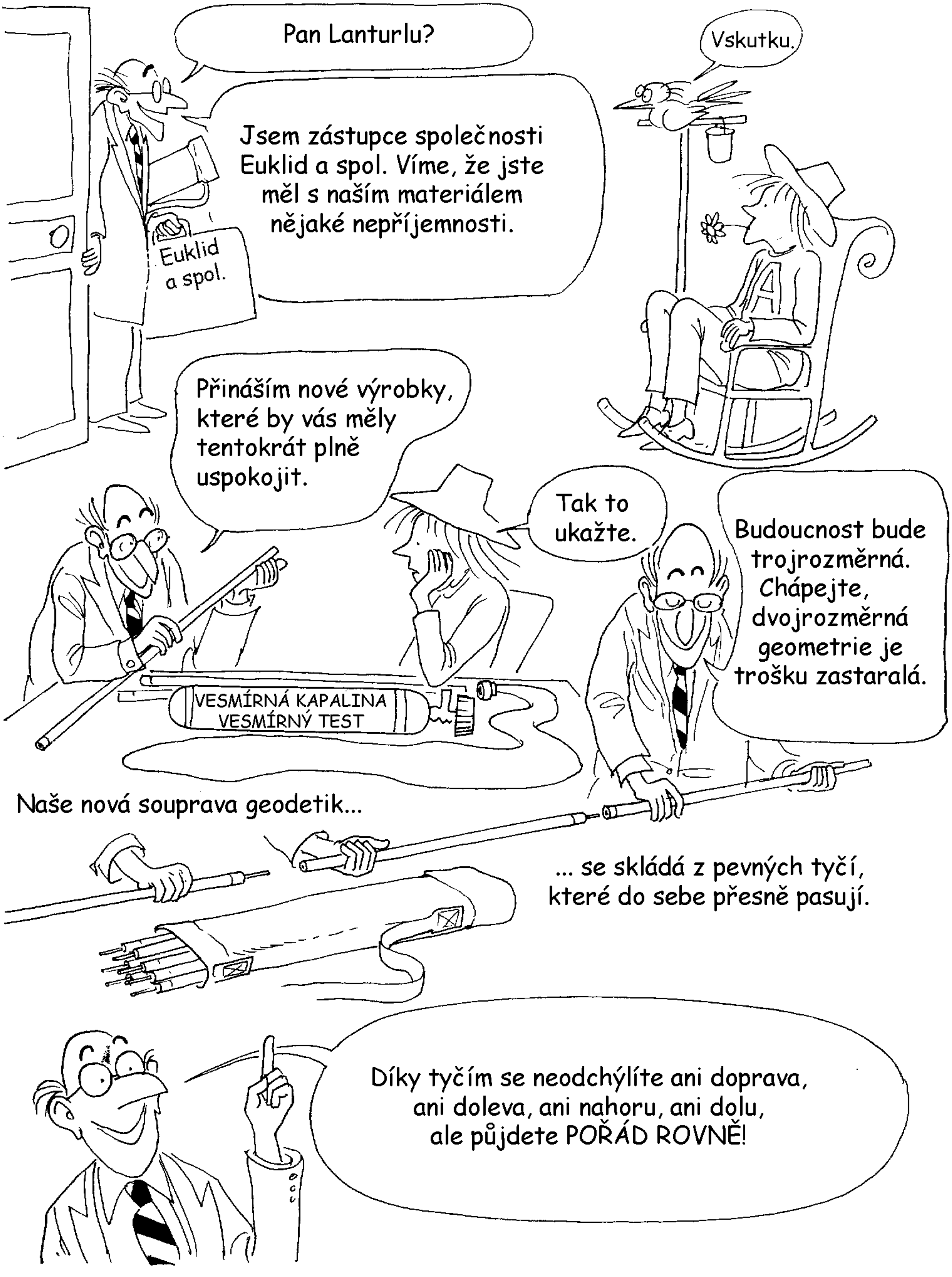


Vezmeme část plochy a složme ji:



Narýsujte podle pravítka na list papíru velké množství přímek, geodetik a potom papír zmačkejte. Pořád uvidíte rovinné, ať už zmačkané nebo nezmačkané geodetiky.



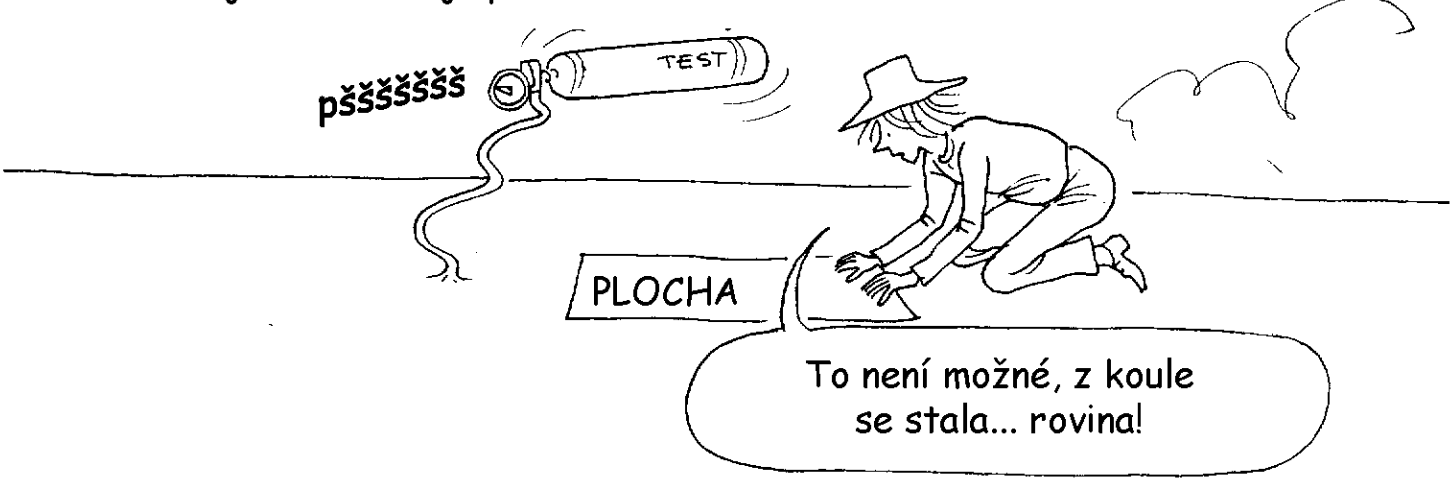

Pan Lanturlu?
Vskutku.
Jsem zástupce společnosti Euklid a spol. Víme, že jste měl s naším materiálem nějaké nepříjemnosti.
Euklid a spol.
Přináším nové výrobky, které by vás měly tentokrát plně uspokojit.
Tak to ukažte.
Budoucnost bude trojrozměrná. Chápejte, dvojrozměrná geometrie je trošku zastaralá.
VESMÍRNÁ KAPALINA VESMÍRNÝ TEST
Naše nová souprava geodetik...
... se skládá z pevných tyčí, které do sebe přesně pasují.
Díky tyčím se neodchýlíte ani doprava, ani doleva, ani nahoru, ani dolu, ale půjdete POŘÁD ROVNĚ!


Tyto barvy jsou na měření povrchů. Přesně sto gramů na metr čtverečný.
Důvtipné.
Obsah změříte tak, že to naplníte plynem. Hodnotu si přečtete přímo na průtokoměru VESMÍRNÉHO TESTU.
A nezapomeňte, že povrch koule = $4\pi l^2$ a obsah = $\frac{4}{3}\pi l^3$.
Zajisté.
EUKLID a spol.
Krásné povolání!
Anselme tentokrát přistál v třírozměrném prostoru a budeme ho i nadále doprovázet při dalších dobrodružstvích.

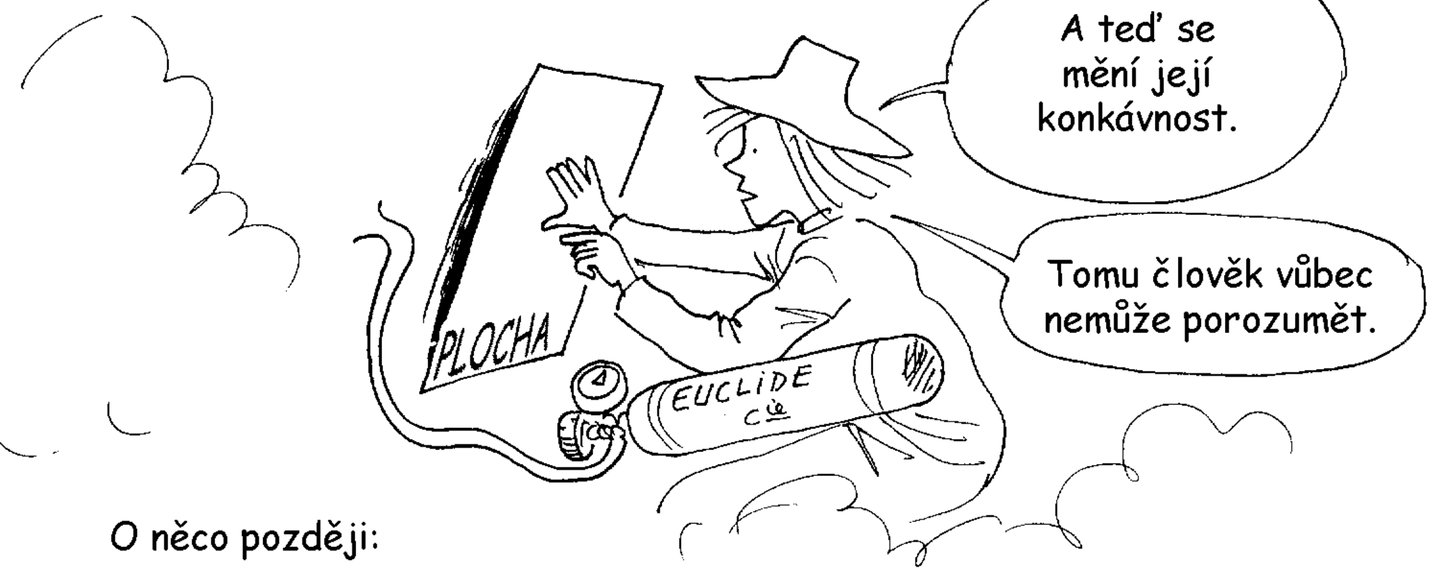

To je ale kvalitní materiál. A tyče měří přesně metr.
Potom, co do sebe zastrčil velké množství tyčí...
Už je to tady! Jako před chvílí!
Geodetika se sama uzavírá!
Uzavřený třírozměrný prostor?
To je konec VŠEHO.
Anselme si dal pauzu, aby se na asteroidu najedl.
Rozhodl se, že znovu použije metodu měření úhlů.
Euklid a spol.
Stejně jako před chvílí, tak ze tří geodetik sestavím trojúhelník.


?!?
Geodetiky jsou správně smontované, a přesto součet tří úhlů je vyšší než 180°!!...
Ták...
pšššš
Jednu vytvořím a změřím její obsah a povrch.
Koule o průměru l je množina bodů, které mají od daného bodu, který nazvu N, stejnou vzdálenost.
Povrch je menší než $4\pi l^2$.
Takže obsah je menší než $\frac{4}{3}\pi l^3$!
Zase mě napálili.

Anselme ještě zvětšuje poloměr koule l.



Znovu a znovu...



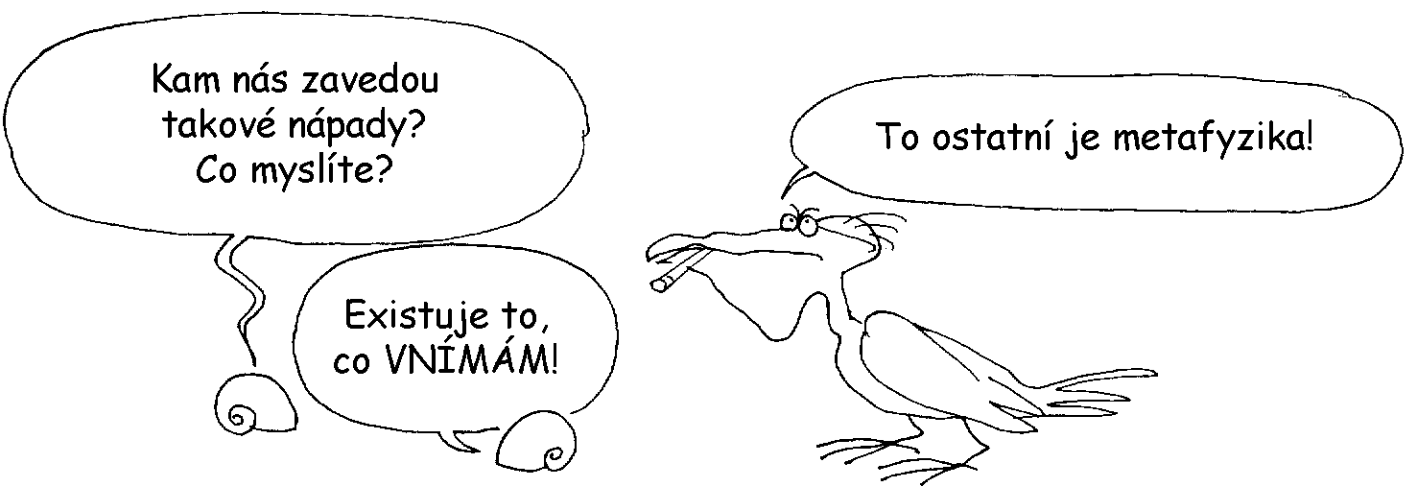
O něco později:

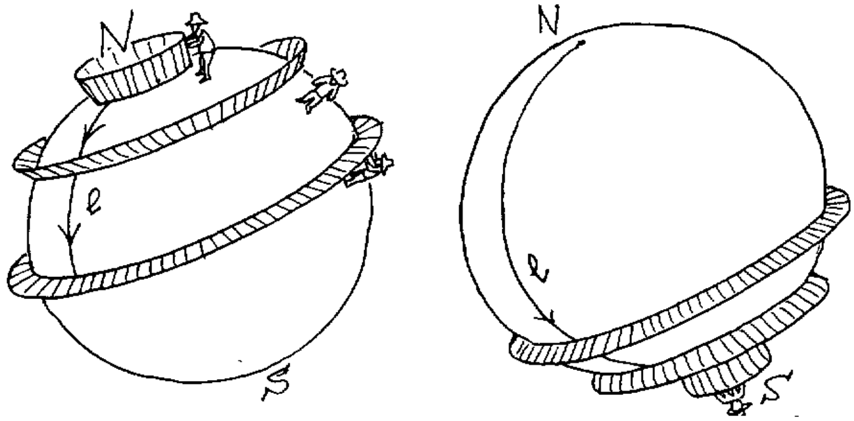
Lanturlu nafukoval v třírozměrném prostoru úplně obyčejný balónek a najednou se ocitl UVNITŘ!

Kdyby včas láhev nezavřel, tak by ho to umačkalo k smrti, stejně tak jako se na straně 13 ocitl obklíčený plotem.

Ať se snažíme, jak chceme, ZAKŘIVENÍ tohoto třírozměrného prostoru už nemůžeme ZOBRAZIT. Jeho geodetiky jsou uzavřené a obsah prostoru představuje OMEZENÝ počet čtverečních metrů, stejně jako povrch naší planety - ohraničeného prostoru má také OMEZENÝ počet čtverečních metrů. Součet úhlů trojúhelníku tohoto trojrozměrného prostoru je vyšší než 180°. Abychom "VIDĚLI" jeho zakřivení, tak bychom museli být schopni vnímat čtvrtou dimenzi.

Dá se říct, že náš třírozměrný VESMÍR je HYPERPOVRCH ponořený do čtyřrozměrného prostoru, který je možná také hyperpovrchem, který je ponořený do pětirozměrného prostoru, atd... Ale v dnešní době ještě není radno takové věci říkat.



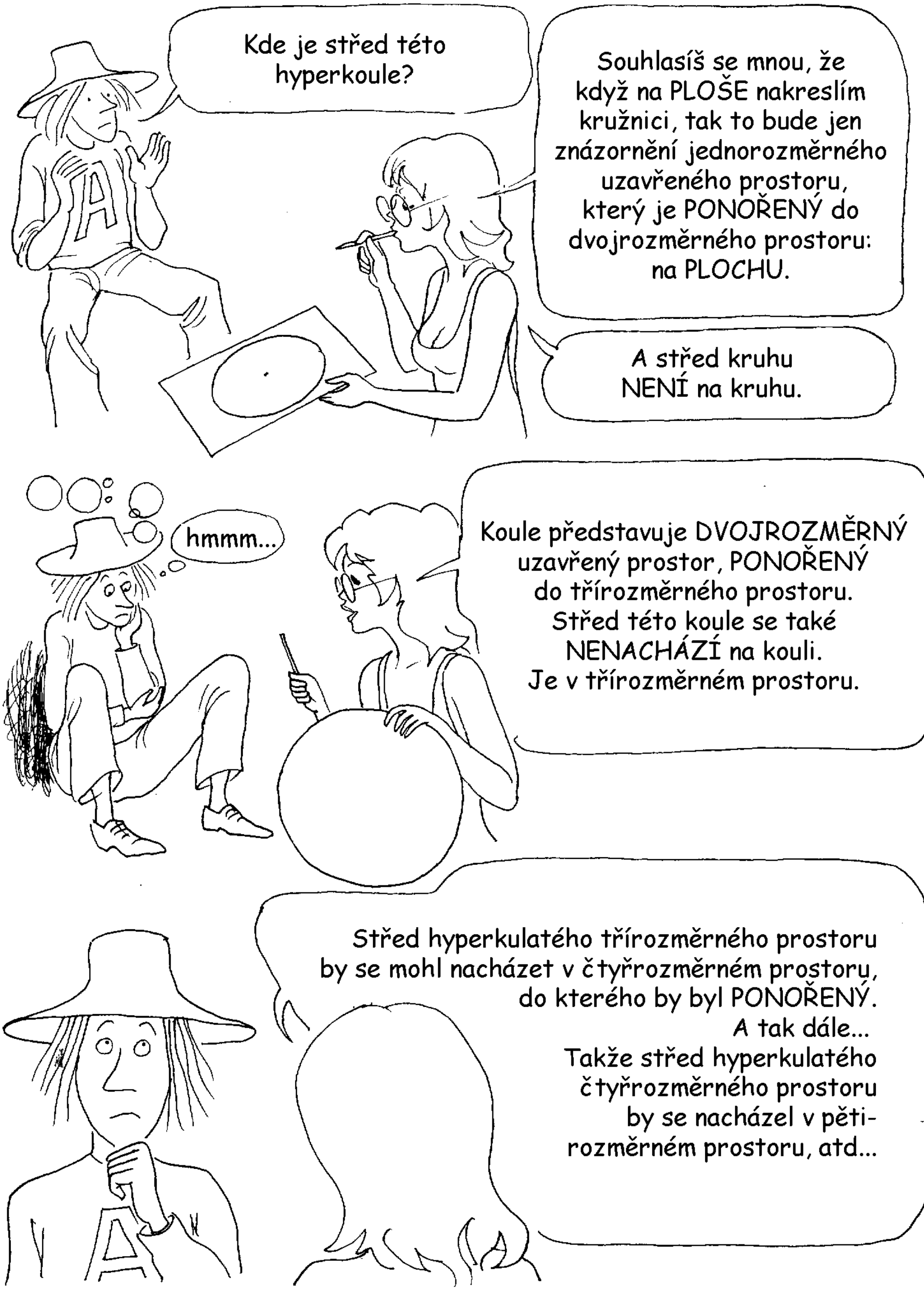


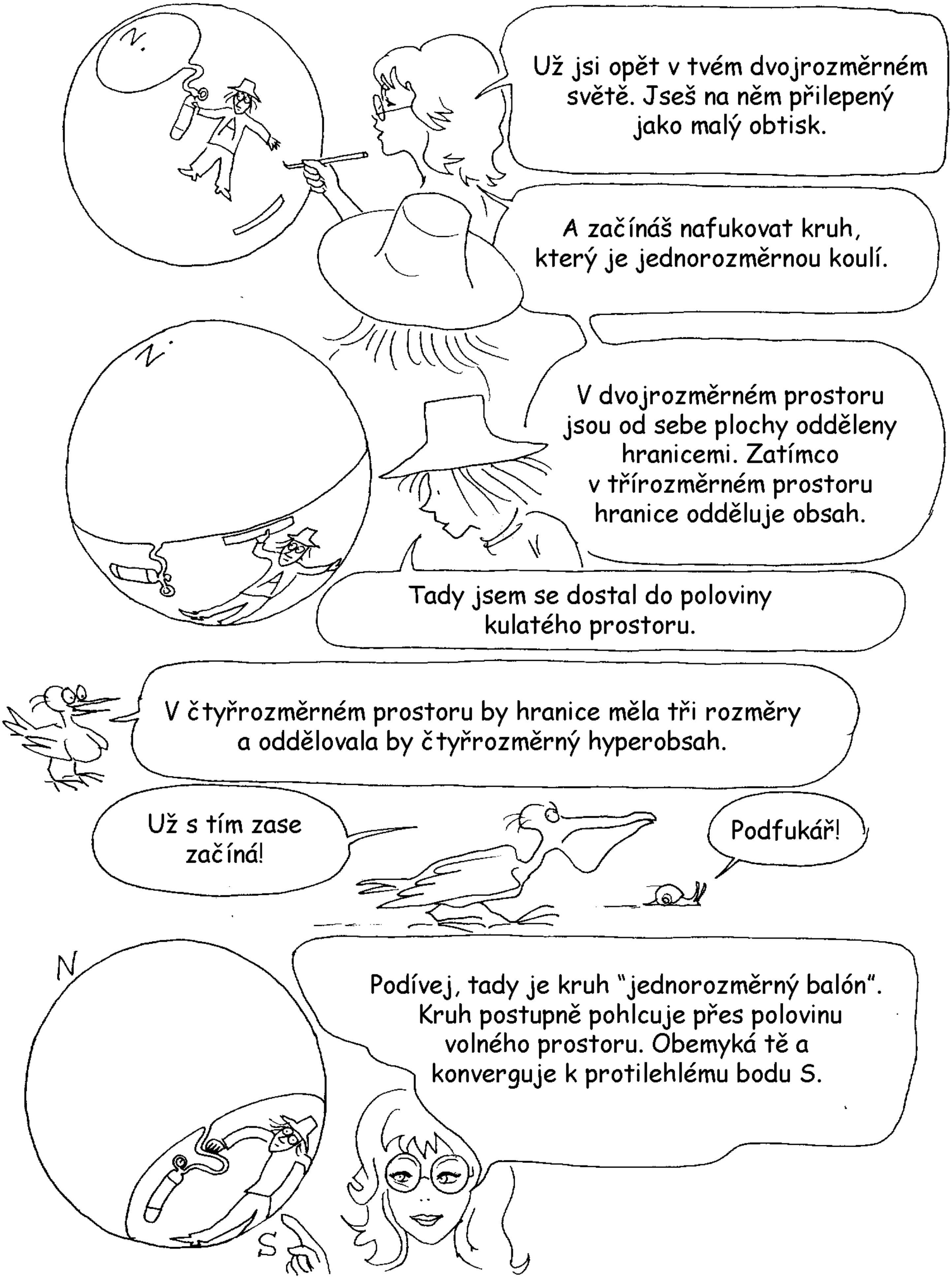
Lanturlu zvětšil na kouli poloměr l a ocitl se tak na protilehlé straně bodu S v bodě N - středu kruhu a zůstal obklíčen vlastním plotem.

V třírozměrném prostoru s kladným zakřivením je to stejné. V tomto dvojrozměrném prostoru, kterým je koule, Anselme oplotil polovinu volného povrchu a dostal se tak na ROVNÍK. V třírozměrném prostoru hyperkoule existuje také ROVNÍK. Anselme se na něj dostane, když balón zabírá polovinu volného obsahu. Na kouli se mu rovníkový kruh jevil jako PŘÍMKA. Stejně tak v hyperkulatém prostoru "rovníkový balón" se mu bude jevit jako PLOCHA.

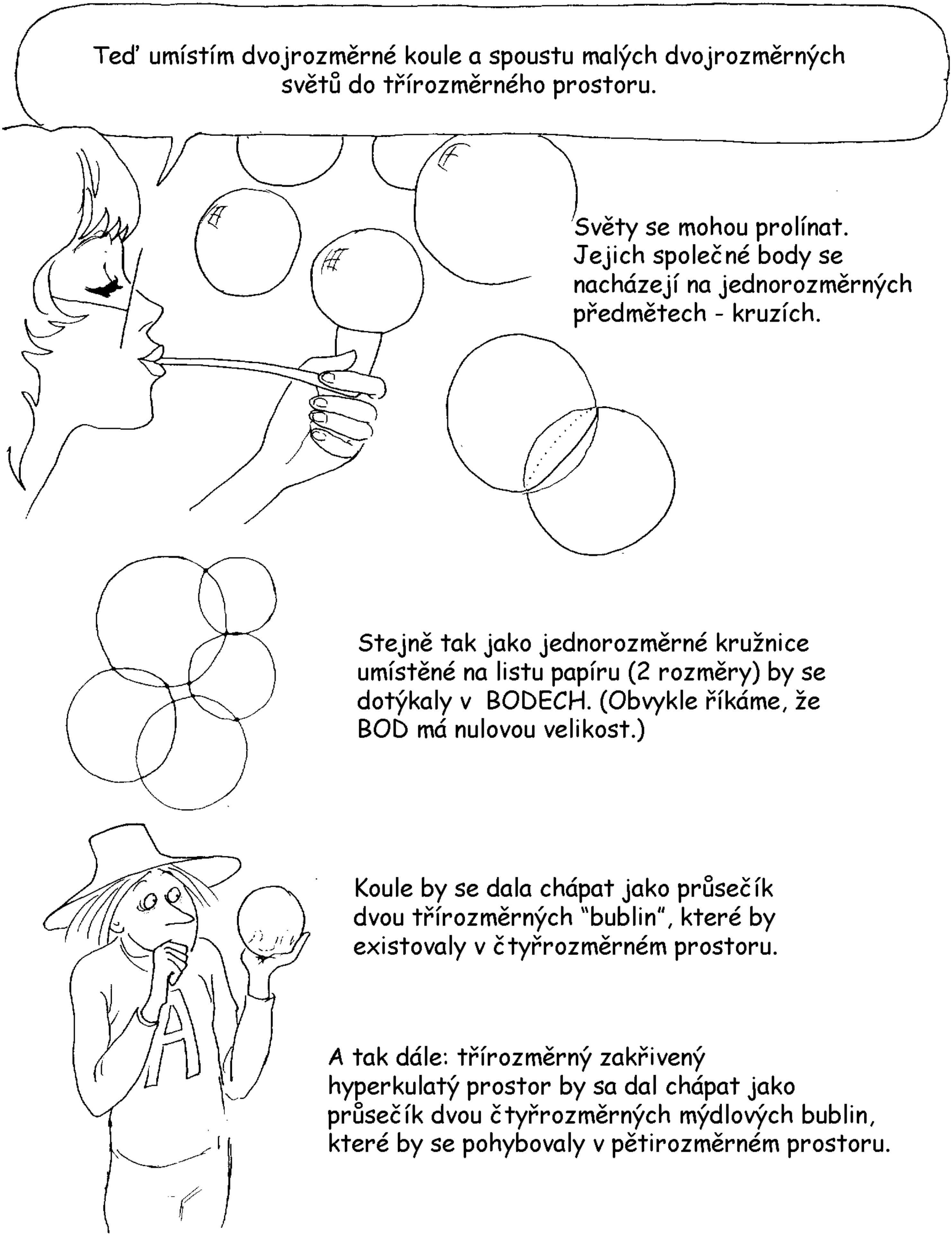
Za rovníkem se KONKÁVNOST balónu obrátí a rovník se automaticky zaměří na protilehlý bod S bodu N, který je středem balónu.


Děje se něco?
Jak bych to řekl... ehm... Všechno se mi to nějak motá v hlavě.
Jmenuji se Sofie. Křivky všeho druhu jsou mou doménou.
Cestování po hyperkoulích je vždycky ze začátku trochu překvapující. Hlavně to člověk nesmí vzdát. Dá se na to zvyknout.
anóó...
Nějak jsem ztratil souvislosti...


Kde je střed této hyperkoule?
Souhlasíš se mnou, že když na PLOŠE nakreslím kružnici, tak to bude jen znázornění jednorozměrného uzavřeného prostoru, který je PONOŘENÝ do dvojrozměrného prostoru: na PLOCHU.
A střed kruhu NENÍ na kruhu.
hmmm...
Koule představuje DVOJROZMĚRNÝ uzavřený prostor, PONOŘENÝ do třírozměrného prostoru. Střed této koule se také NENACHÁZÍ na kouli. Je v třírozměrném prostoru.
Střed hyperkulatého třírozměrného prostoru by se mohl nacházet v čtyřrozměrném prostoru, do kterého by byl PONOŘENÝ. A tak dále... Takže střed hyperkulatého čtyřrozměrného prostoru by se nacházel v pěti-rozměrném prostoru, atd...


N.
Už jsi opět v tvém dvojrozměrném světě. Jseš na něm přilepený jako malý obtisk.
A začínáš nafukovat kruh, který je jednorozměrnou koulí.
N.
V dvojrozměrném prostoru jsou od sebe plochy odděleny hranicemi. Zatímco v třírozměrném prostoru hranice odděluje obsah.
Tady jsem se dostal do poloviny kulatého prostoru.
V čtyřrozměrném prostoru by hranice měla tři rozměry a oddělovala by čtyřrozměrný hyperobsah.
Už s tím zase začíná!
Podfukář!
N
Podívej, tady je kruh "jednorozměrný balón". Kruh postupně pohlcuje přes polovinu volného prostoru. Obemyká tě a konverguje k protilehlému bodu S.
S


Stejně tak když do zakřiveného trojrozměrného prostoru vstříknu přes polovinu celkového obsahu, tak mě balón obemkne, protože konverguje k protilehlému bodu.
Pochopil jsem to!
Protože koule má v zakřiveném třírozměrném prostoru samozřejmě dva protilehlé středy.
?!!?
Stejně nevím, co jsem přesně pochopil, ale mám pocit, že jsem alespoň něco pochopil.
To bylo strachu!
Ale ne, Anselme, když jde o víc než tři rozměry, tak CHÁPAT ZNAMENÁ EXTRAPOLOVAT.
Extrapoluji a ani o tom nevím.
Ten obrázek si musíte sami v hlavě namalovat!

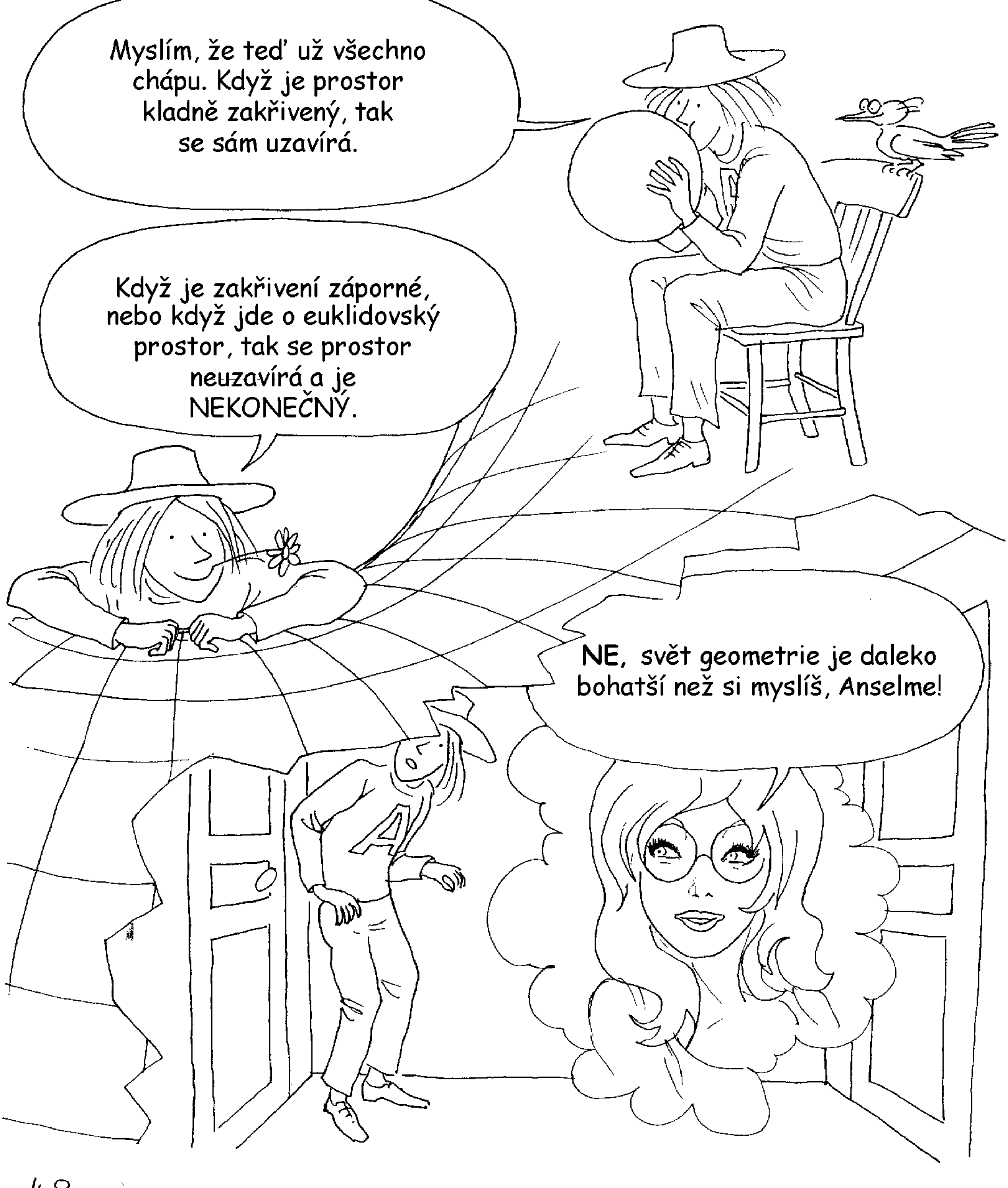

Teď umístím dvojrozměrné koule a spoustu malých dvojrozměrných světů do třírozměrného prostoru.
Světy se mohou prolínat. Jejich společné body se nacházejí na jednorozměrných předmětech - kruzích.
Stejně tak jako jednorozměrné kružnice umístěné na listu papíru (2 rozměry) by se dotýkaly v BODECH. (Obvykle říkáme, že BOD má nulovou velikost.)
Koule by se dala chápat jako průsečík dvou třírozměrných "bublin", které by existovaly v čtyřrozměrném prostoru.
A tak dále: třírozměrný zakřivený hyperkulatý prostor by sa dal chápat jako průsečík dvou čtyřrozměrných mýdlových bublin, které by se pohybovaly v pětirozměrném prostoru.

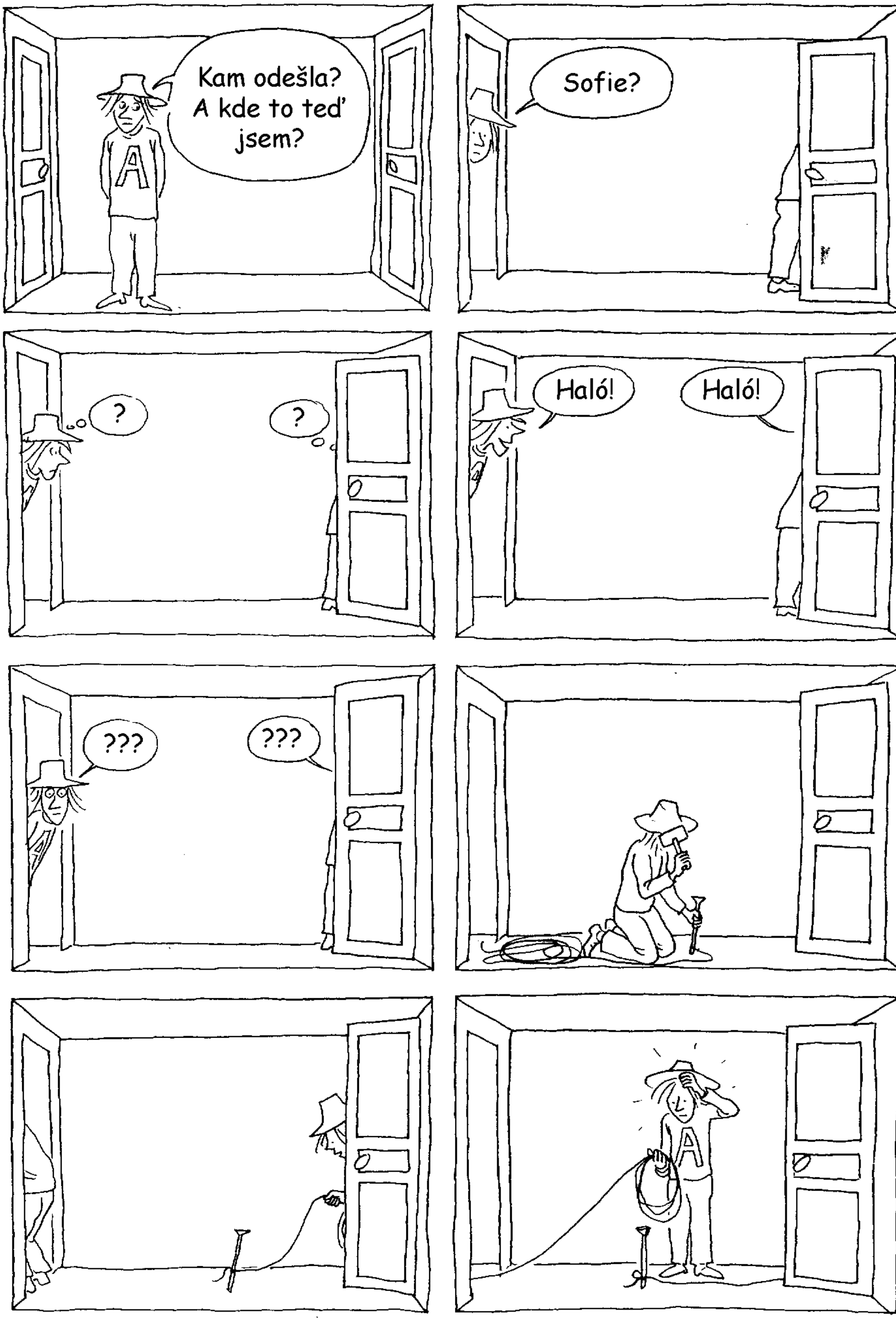

Anselme a Sofie se nejdříve zbláznili do extrapolace a teď se znovu dali do zkoumání nových třírozměrných světů.
Matematika už není, co to bývalo.
Podívej, tohle je třírozměrná izolepa na geodetiky. Lepicí část se nachází samozřejmě na konci...
Zdá se mi, že v tomhle prostoru se geodetiky neuzavírají. A když nafukuji balón VESMÍRNÉHO TESTU, tak obsah vypuštěného vzduchu je vyšší než $\frac{4}{3}\pi l^3$, zatímco povrch je vyšší než $4\pi l^2$. Součet úhlů trojúhelníku je tentokrát menší než 180°.
Vzpomeň si na stranu 23. Jsi opět v ZÁPORNĚ zakřiveném prostoru.

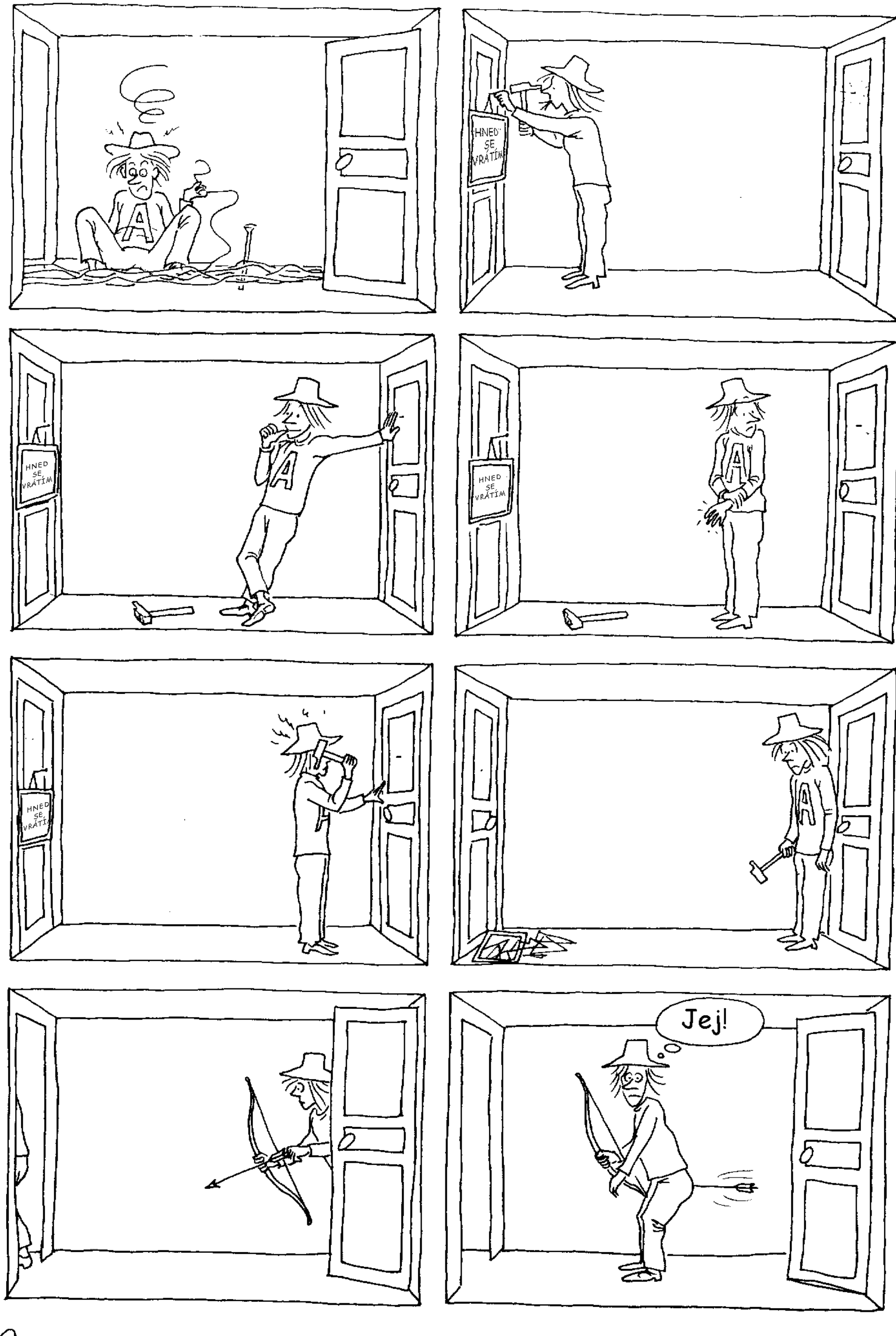
SHRNUTÍ


Víš, že v třírozměrném prostoru se může stát hodně věcí. Je to stejné jako u povrchů, které jsou dvojrozměrnými prostory. Když je součet úhlů TROJÚHELNÍKU v třírozměrném prostoru vyšší než 180°, tak budeme říkat, že jde o kladné zakřivení. Když bys tam vytvořil kouli o poloměru l, tak by VESMÍRNÝ TEST změřil, že obsah je nižší než $\frac{4}{3}\pi l^3$ a povrch by byl nižší než $4\pi l^2$. Tento HYPERKULATÝ prostor by se uzavřel.
Jestliže je součet úhlů trojúhelníku v třírozměrném prostoru nižší než 180°, tak půjde o záporné zakřivení. Obsah koule o poloměru l bude vyšší než $\frac{4}{3}\pi l^3$ a povrch bude vyšší než $4\pi l^2$. Tento prostor se bude donekonečna roztahovat.
Ale když se součet úhlů rovná 180°, tak jde o obyčejný euklidovský prostor.
Takových řečí pro nic!...

PROSTOR MUSÍ BÝT BUĎ OTEVŘENÝ, NEBO UZAVŘENÝ!



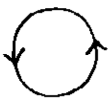

Kam odešla? A kde to teď jsem?
Sofie?
?
?
Haló!
Haló!
???
???


HNED SE VRÁTÍM
HNED SE VRÁTÍM
HNED SE VRÁTÍM
HNED SE VRÁTÍM
Jej!


Ach ano. Lanturlu se dostal do třírozměrného válcového prostoru. I přes to, že je to euklidovský prostor, bez zakřivení (součet úhlů trojúhelníku se rovná 180°), tak se tento svět sám uzavřel.
JEJ
Tak dobře... Kulaté, hyperbolické, válcové světy. Ale to už je snad všechno?
GEOMETRIE
Abyste se nedivil!
Vraťme se na chvíli do dvou rozměrů.
Co !?
NUAGES

ANI NAHOŘE, ANI DOLE

Už se to zase uzavírá jako před chvílí.
Součet úhlů = 180°. To bude euklidovská věc. A zase ten válec...
To snad ne!...
!?!
To není možné!
Představte si, že se Anselme tentokrát ocitl v DVOJROZMĚRNÉM NEORIENTOVANÉM PROSTORU. Takovým nejznámějším prostorem je Möbiova páska (1830). Řekům, které napadlo skoro všechno, tento nápad unikl.
VÝCHOZÍ BOD GEODETIKY
Sofie, dostaň mě odsud!



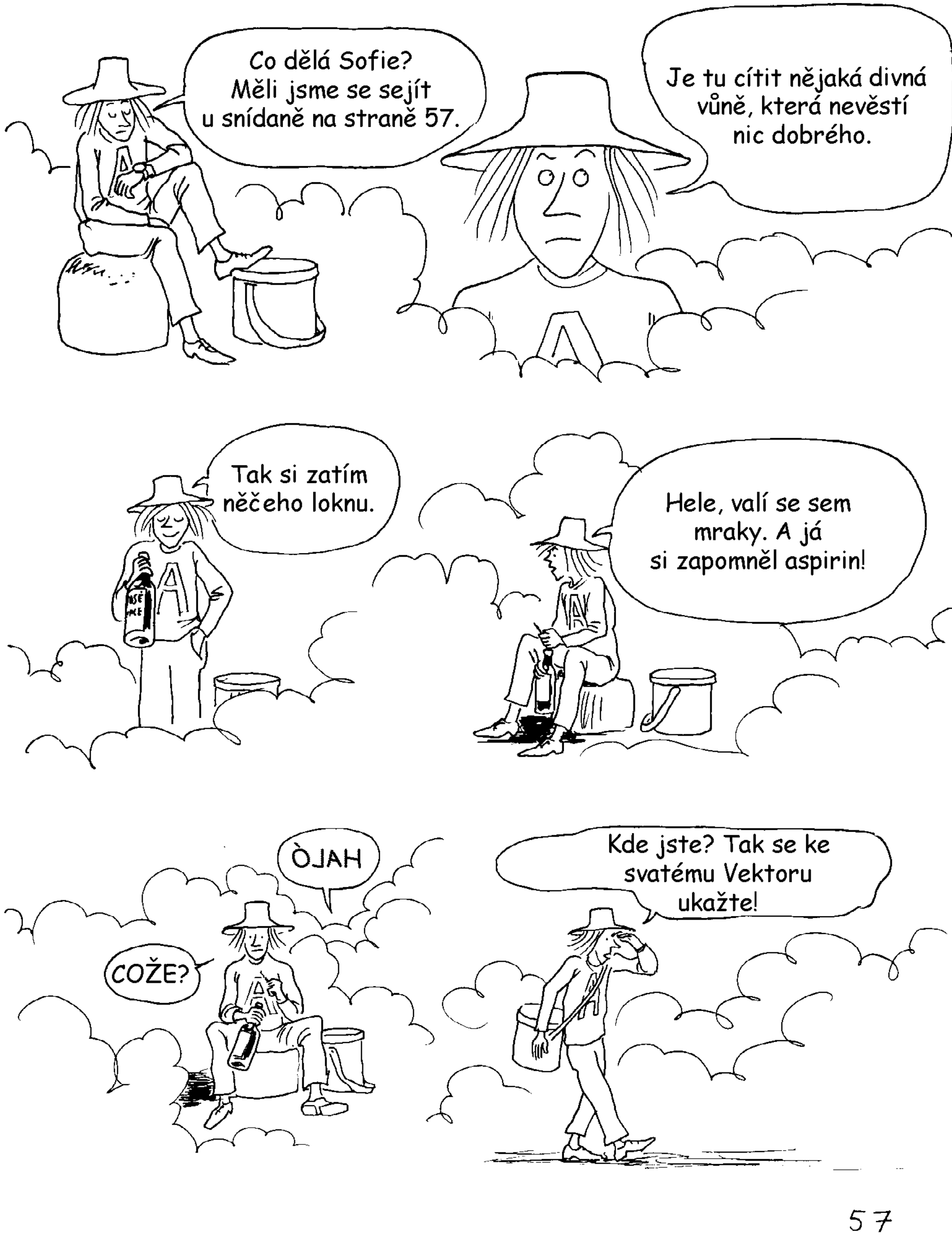
Narýsujme na ploše kružnici a vyznačme libovolně směr šipkami. Představme si, že kruh je malý obtisk, kterým můžeme donekonečna po povrchu hýbat. Když se kruh setká se sebou samým, tak budeme říkat, že jde o ORIENTOVATELNOU plochu (týká se to koule, válce, plochy, atd...). Ale když se obtisk pohybuje po Möbiově pásce, tak je to úplně jinak:

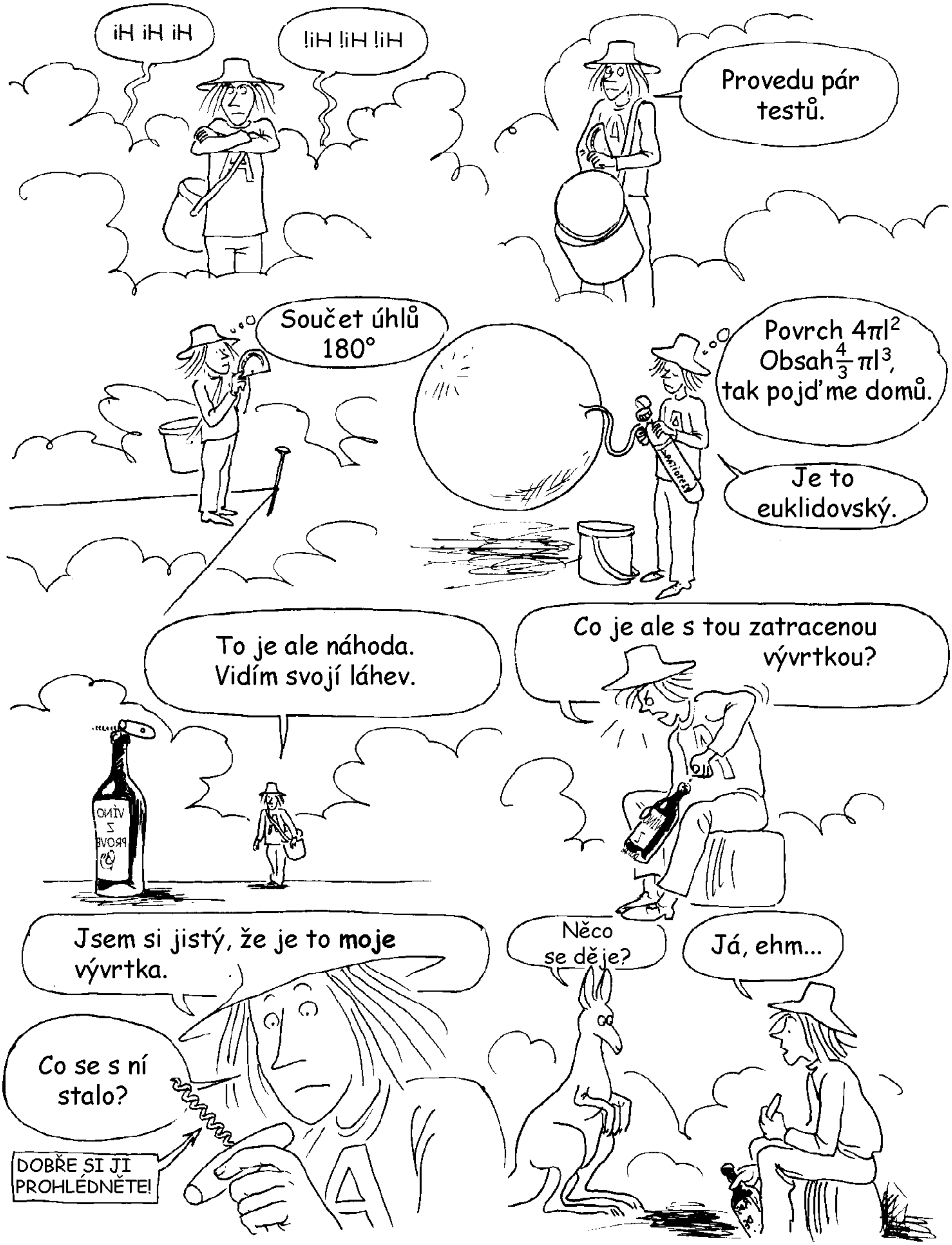

Zkusme ji rozstřihnout.
Anselme, kamaráde, to se lehko říká, ale špatně dělá.
Ale jak ji mám rozstřihnout?
To je velmi jednoduché. Rozstřihni ji na tři díly.
Všimněte si, že po rozstřihnutí je páska DVOJSTRANNÁ.
Připadám si zcela zmatený.
Všimněte si, že je zde nyní jednostranná věc (bílá) a dvojstranná věc (šedá), která má dvojnásobnou délku oproti bílé.

Po odbočce k Möbiově pásce se nyní vrátíme do euklidovských (nezakřivených) prostorů :

POLOHA PROSTORU

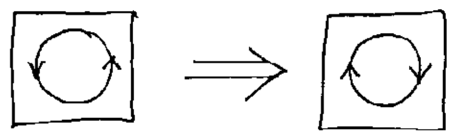
Doprovodíme Lanturlu na výpravě po dalším třírozměrném euklidovském (nazakřiveném) světě.



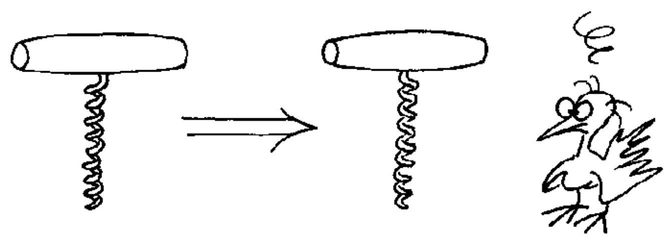

iH iH iH
!iH !iH !iH
Provedu pár testů.
Součet úhlů 180°
Povrch $4\pi l^2$ Obsah $\frac{4}{3}\pi l^3$, tak pojďme domů.
Je to euklidovský.
To je ale náhoda. Vidím svojí láhev.
Co je ale s tou zatracenou vývrtkou?
Jsem si jistý, že je to **moje** vývrtka.
Co se s ní stalo?
DOBŘE SI JI PROHLÉDNĚTE!
Něco se děje?
Já, ehm...


Je to růžové víno z Provence průměrné kvality, celkem...
VÍN Z PROV
Máte vývrtku?
Jó, mám...
Kdyby se tak klokani všech zemí chtěli spojit.
GLU GLU GLU
Není vám něco divné?
Ne, akorád, že nevypadáte moc dobře.
Berte dvakrát denně trochu kyselného síranu parmezánového.
Mějte se!
HOP
HOP
HOP
HOP
Kdosi mi něco provedl s vývrtkou, opilý klokan dožbluňk moje růžové. Co to má znamenat?
Kruci!
KŘUP!
DOPORUČUJEME VÁM, ABYSTE SI VÝVRTKU PEČLIVĚ PROHLÉDLI.

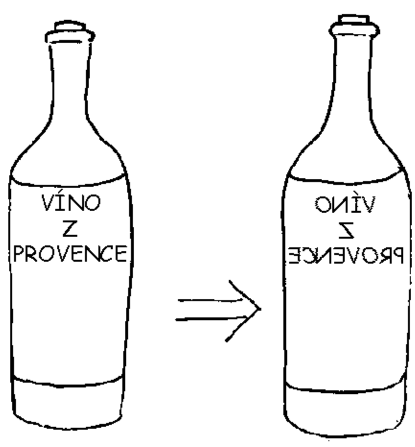
Existuje třírozměrná obdoba Möbiovy pásky (neorientovatelný dvojrozměrný prostor). Když se na Möbiově pásce obtisk kruhu dostal na druhou stranu euklidovského prostoru, tak se změnil jeho směr:



Viz strana 54.



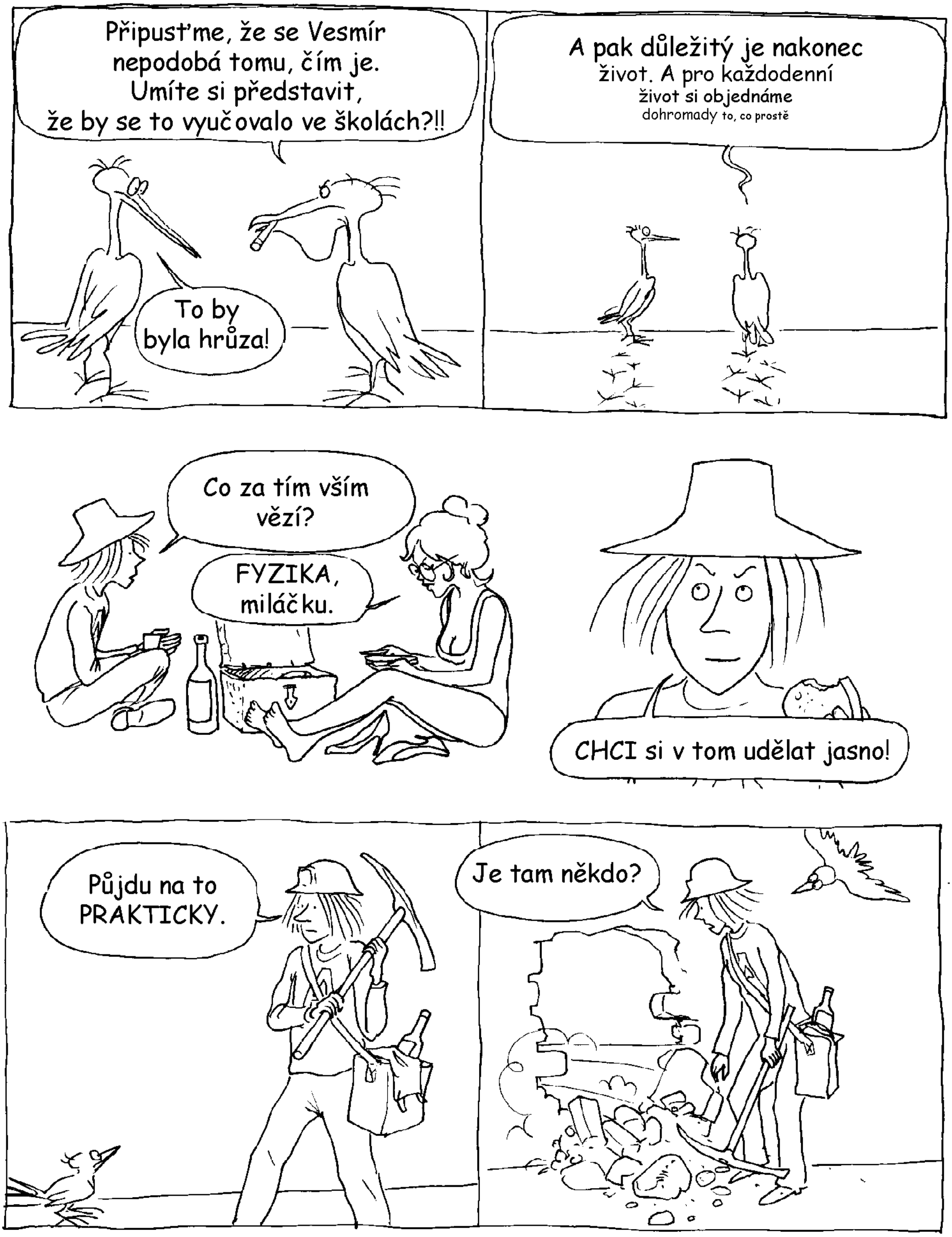
Všimněme si, že tyto předměty jsou "zrcadlové".
Vývrtka nebo Anselme mohou být považovány za třírozměrné "obtisky".
Pokaždé když předmět objede dokola třírozměrný prostor, tak změní směr. Vzhledem k tomu, že doprovázíme Anselma v jeho okružní cestě vesmírem, tak je normální, že se setkáme se "zrcadlovou lahví" a s vývrtkou, která je zakroucená neobvyklým směrem. Druhá okružní cesta vesmírem by uvedla věci do původního stavu (pod podmínkou, že bychom nechali věci na svém místě).



Anselme a klokan (z rodu protinožců) žijí ve stejném prostoru, ale liší se v tom, že to, co je "pro klokana líc" je "pro Lanturlu rub" a naopak.

DOSLOV

Všechno je to nějaké divné. Už není ani vpravo, ani vlevo, ani rub, ani líc. Kam to všechno vede? A kterou cestou se mám vydat?
Anselme, je potřeba následovat tvé životní geodetiky.
Já nikdy neuvěřím, že Vesmír je tak prapodivný. Jsou to pouhé výmysly matematiků.
Je to kreslený komiks!
Proč se tímhle vším zaobírat, když je jasné, že prostor JE euklidovský (*).
(*) Tato slova pronesl v roce 1830 profesor Ostrogradsky, vedoucí katedry matematiky v Petrohradě poté, co si přečetl Riemannovy a Lobatchevskiovy práce .


Připusťme, že se Vesmír nepodobá tomu, čím je. Umíte si představit, že by se to vyučovalo ve školách?!!
To by byla hrůza!
A pak důležitý je nakonec život. A pro každodenní život si objednáme dohromady to, co prostě
Co za tím vším vězí?
FYZIKA, miláčku.
CHCI si v tom udělat jasno!
Půjdu na to PRAKTICKY.
Je tam někdo?


Jestliže je průměrná hustota hmoty ve vesmíru nižší než 10^{-29} gramů na cm^3
?
...tak vesmír bude záporně zakřivený a bude se donekonečna rozpínat...
...naopak, jestli je hustota vyšší než 10^{-29} g/cm^3
!..
...tak vesmír bude hyperkulatý a sám se uzavře...
Ale jestli se hustota rovná 10^{-29} g/cm^3, tak bude Vesmír euklidovský.
HM...
Nejste pan Einstein?
Jjoo?...
KONEC