Anselm Vetgirigs Äventyr

GEOMETRiKON

Jean-Pierre Petit

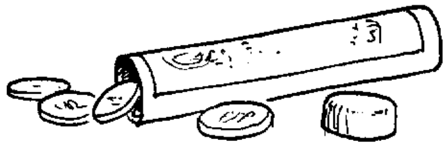
Översättning:
Jonas Karlsson


Finns det
en matematiker
i närheten?

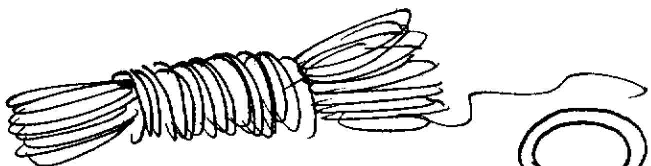
TiLL LÄSAREN

Detta är varken en lärobok eller en kurs.
Det är helt enkelt historien om Anselm Vetgirig
och en av hans resor, till geometriens land.
Läs den helst med tillgång till:

- Gott om Aspirin

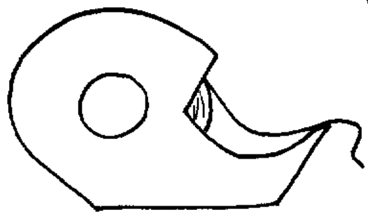


- Massor av snöre

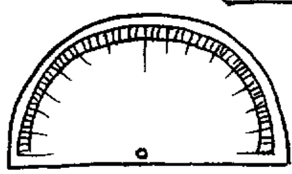


- En sax

- Tejp

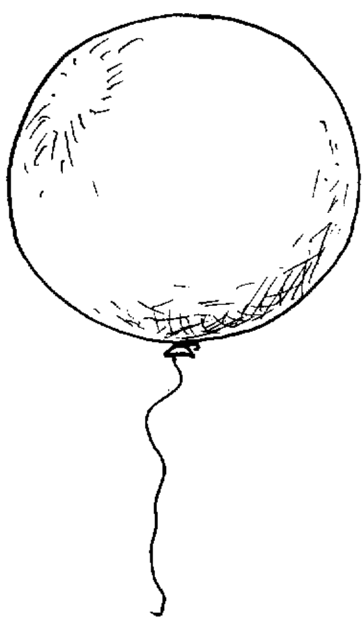


- Vinkelskiva

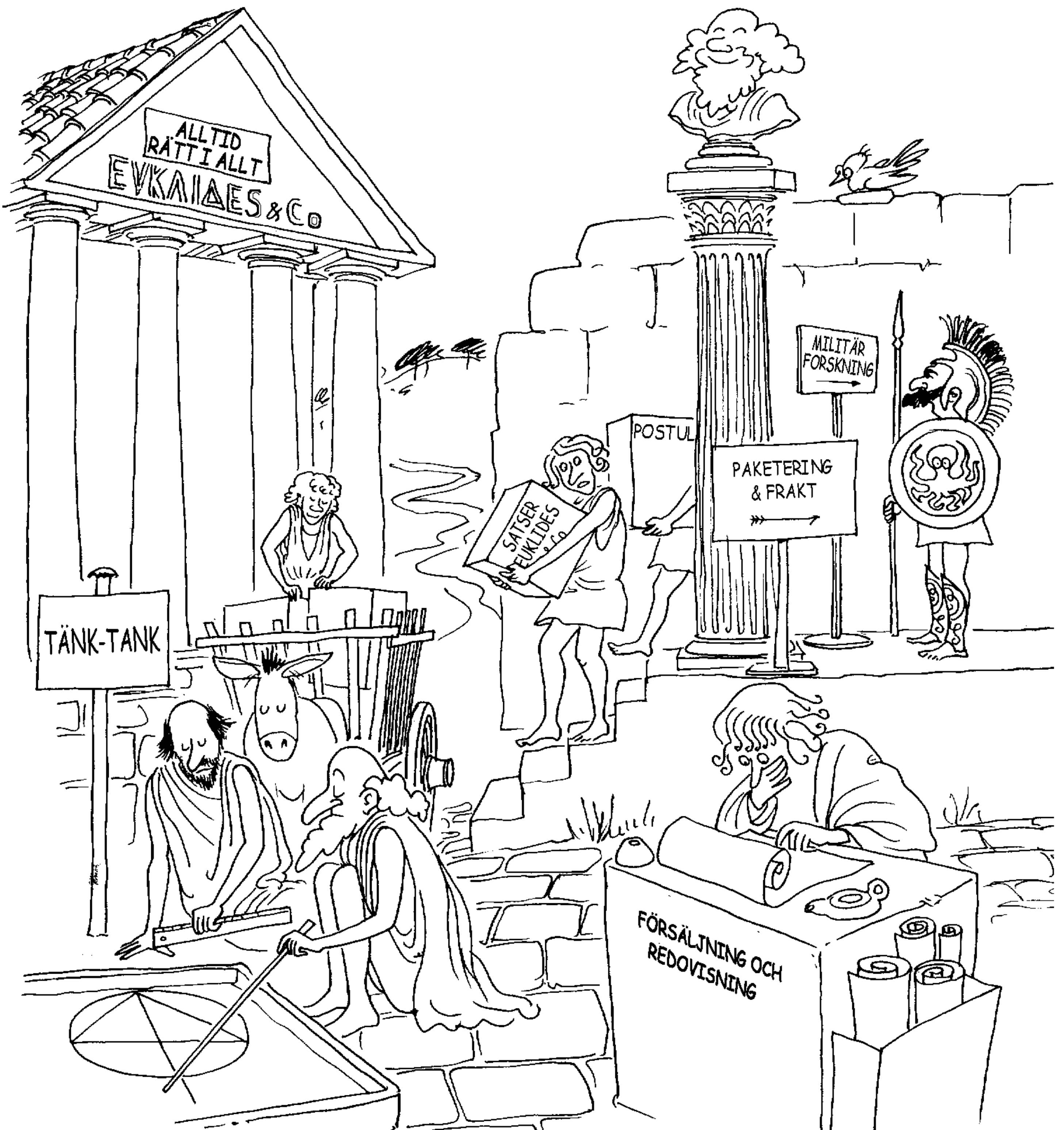


- Och en ballong,

  rund och fin...



Firma Euklides & Co. grundades i Alexandria på 200-talet före vår tid. I tvåtusen år gick affärerna utmärkt. Produkterna uppskattades, och kunderna var stammisar.

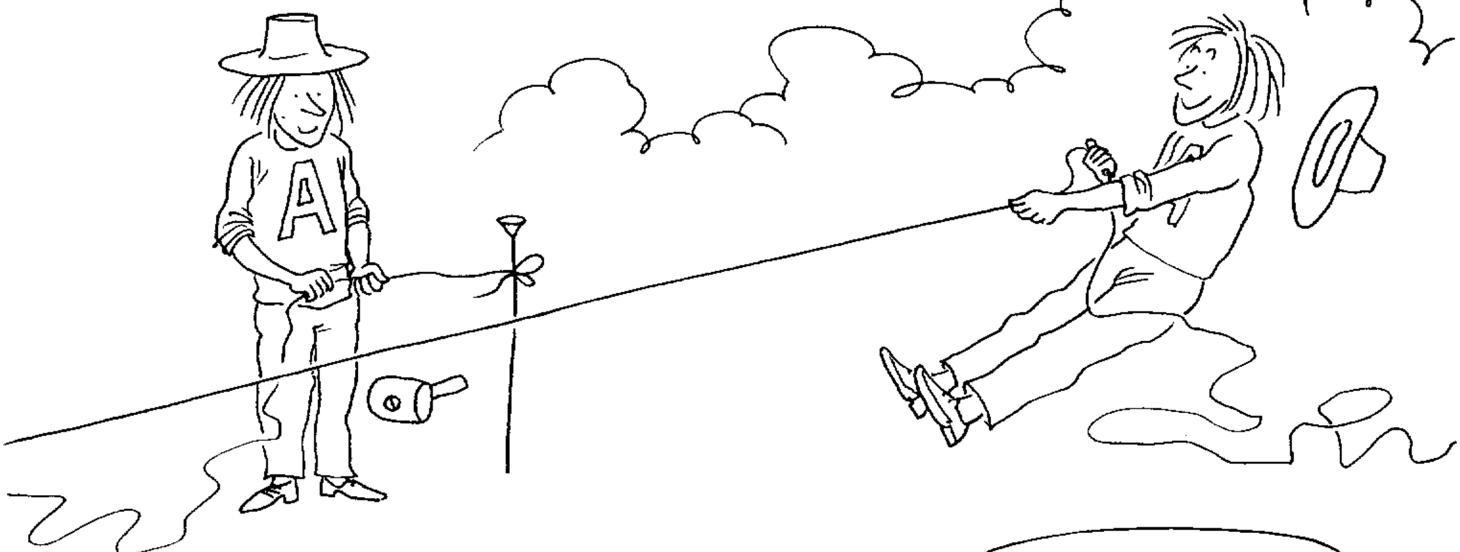


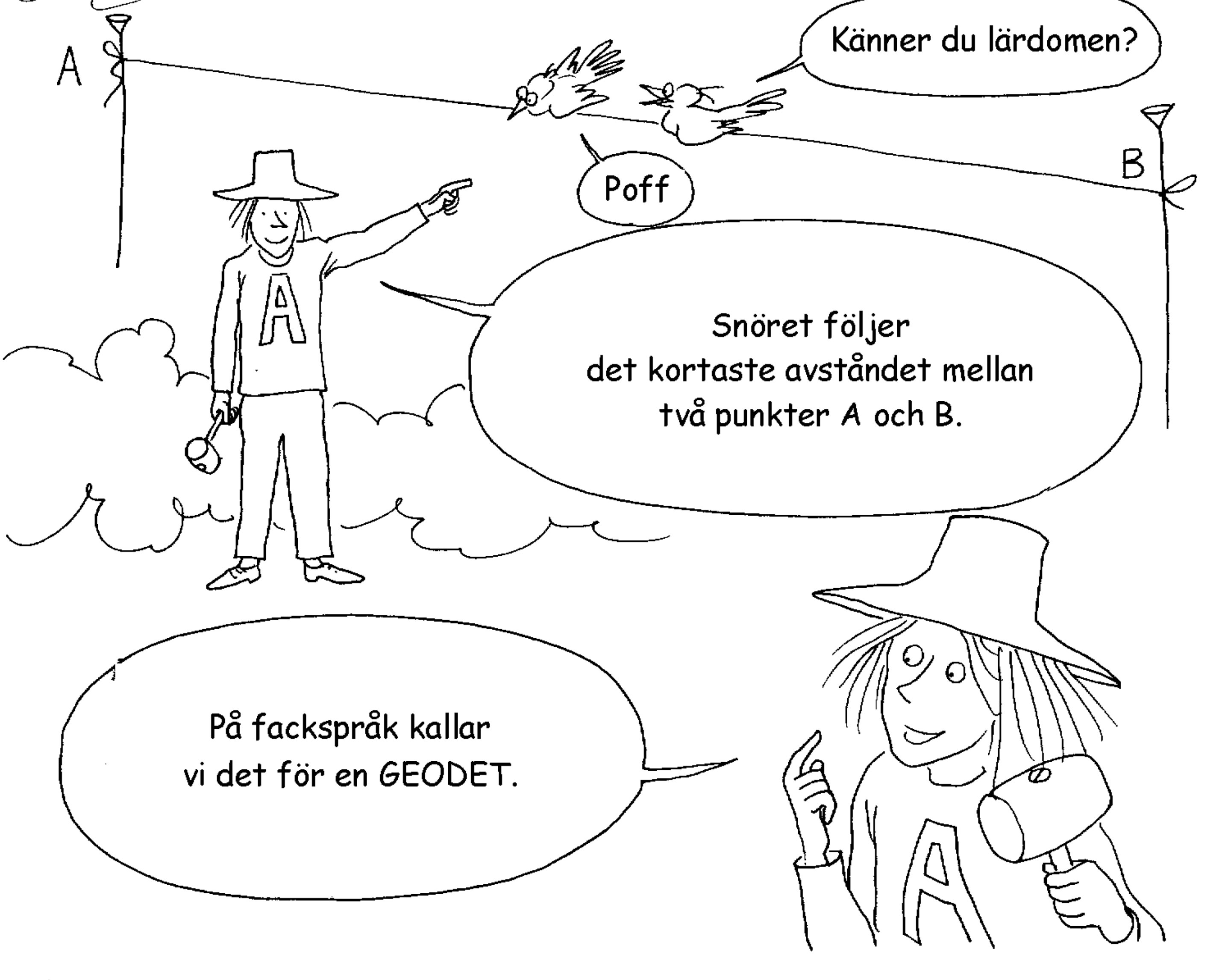
Men gradvis förändrades kundernas smak.
Vissa, som tidigare varit varumärket trogna, började fråga sig: är detta sanningen, hela sanningen, och inget annat än sanningen?

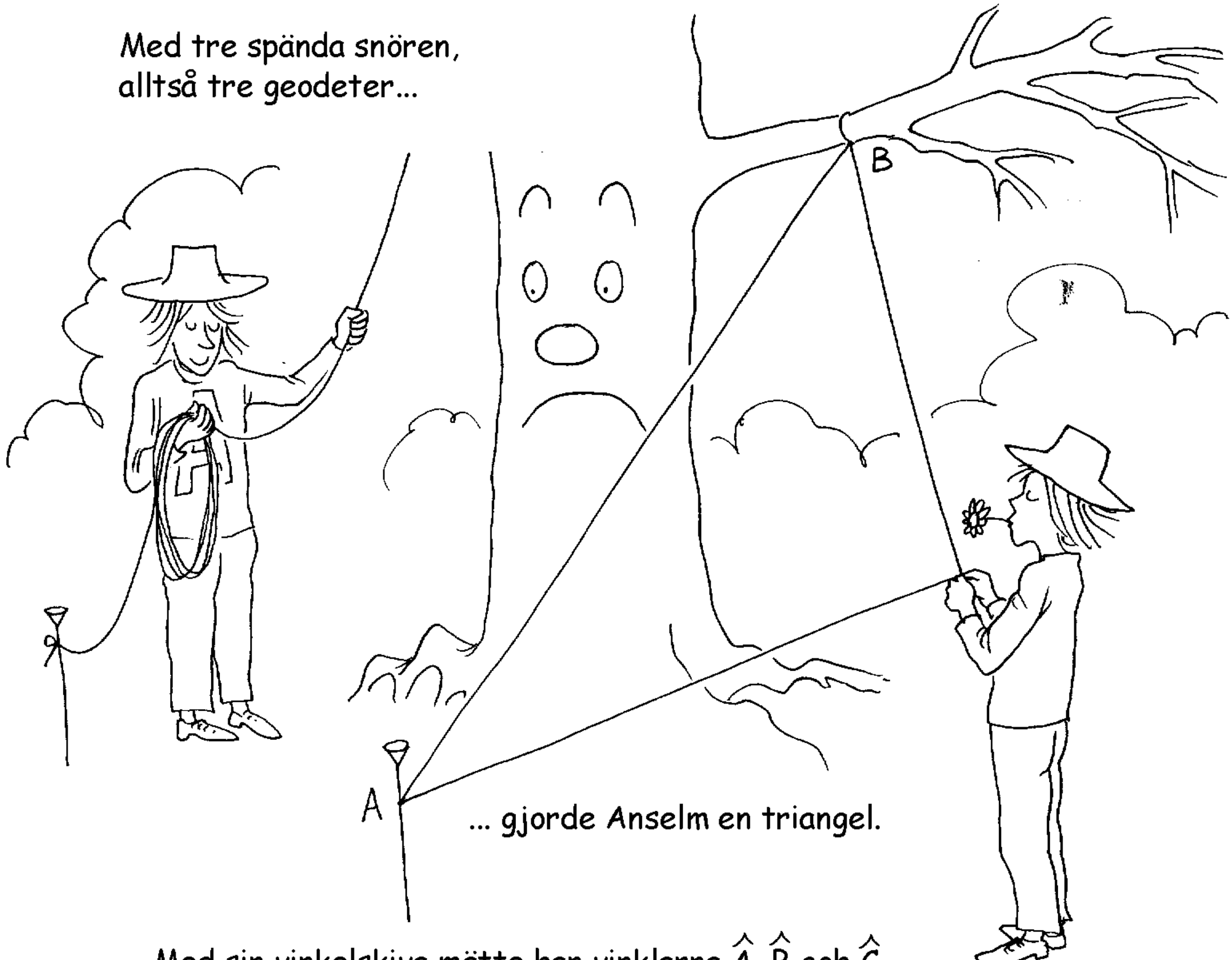
Detta är historien om en av dem.

PROLOG

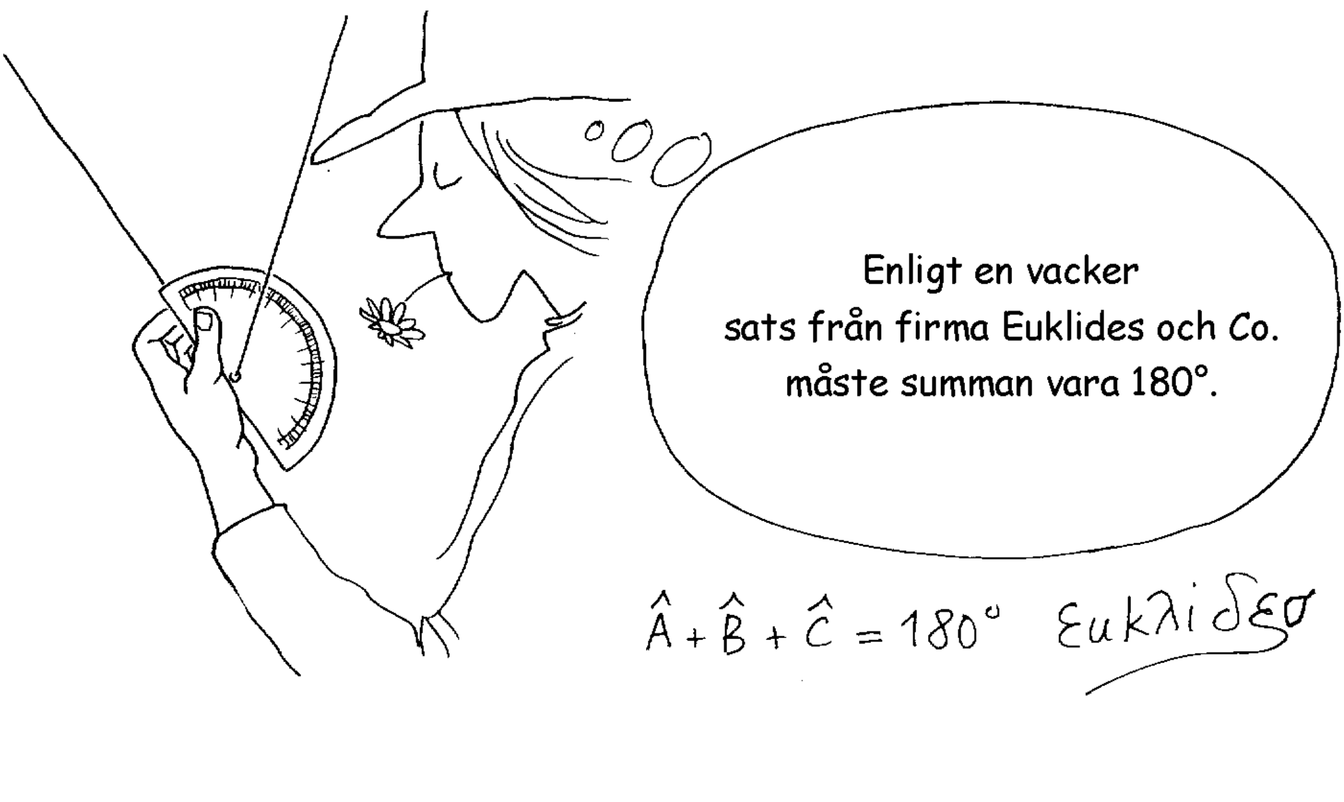
En dag försökte Anselm Vetgirig spänna ett snöre mellan två pålar.



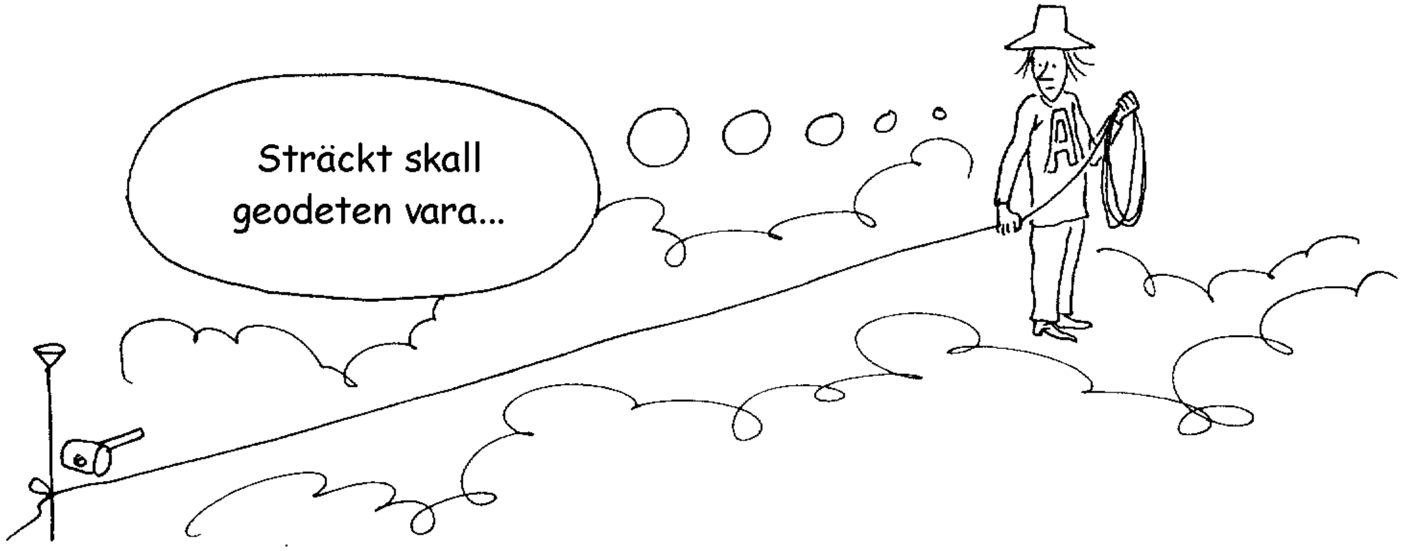


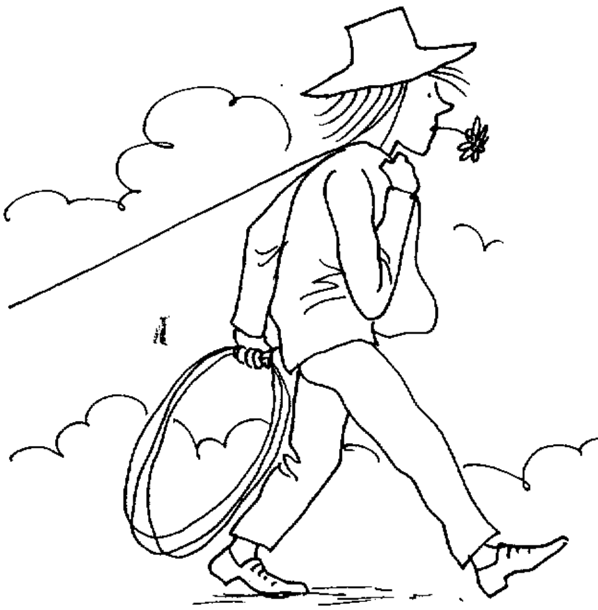


Med sin vinkelskiva mätte han vinklarna $\hat{A}$, $\hat{B}$ och $\hat{C}$
i triangelns hörn och beräknade deras summa.



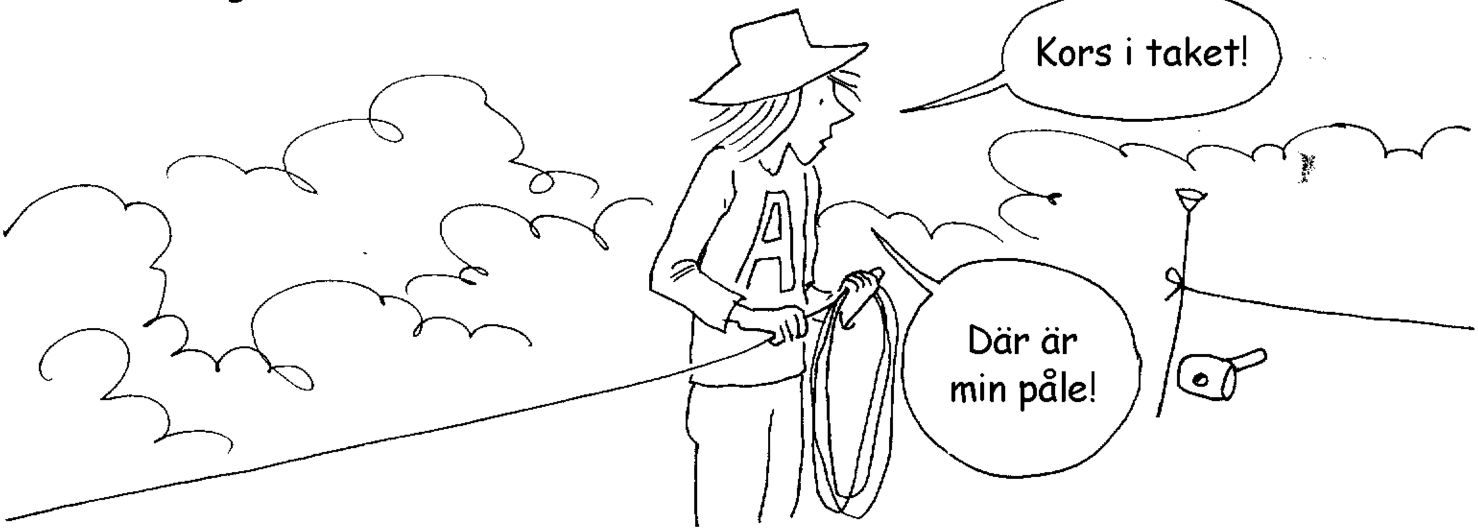
Anselms värld var täckt av en infernalisk dimma.
Men kunde knappt se handen framför sig.



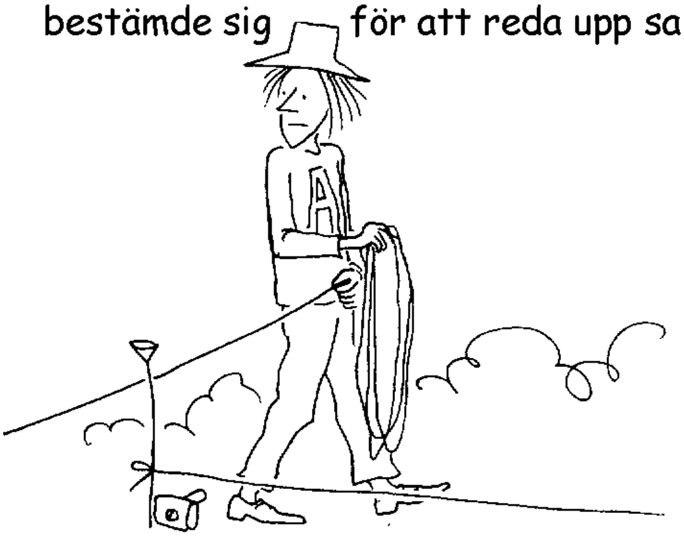


Anselm vandrade länge, länge...
Bakom honom rullades snöret upp och
markerade hans väg genom dimman.
Det sträckta snöret är en
förkroppsligad GEODET.

Men som alla vet finns det vissa dagar när inget verkar gå som det skall.

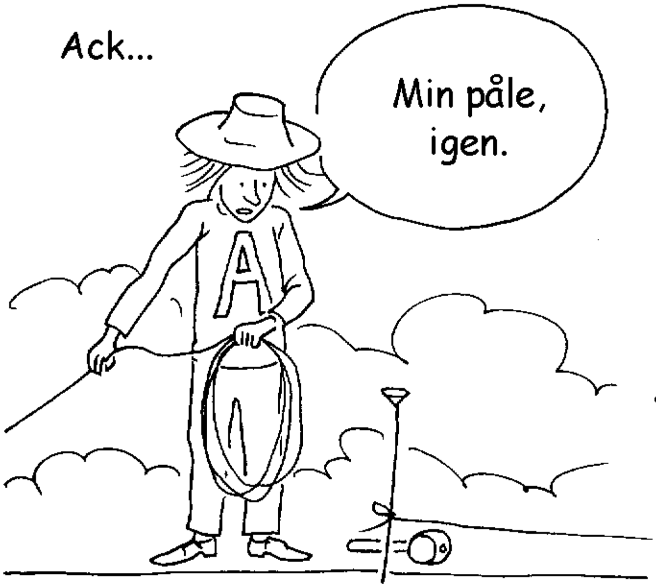


Anselm, som hade gott om snöre, bestämde sig för att reda upp saken.



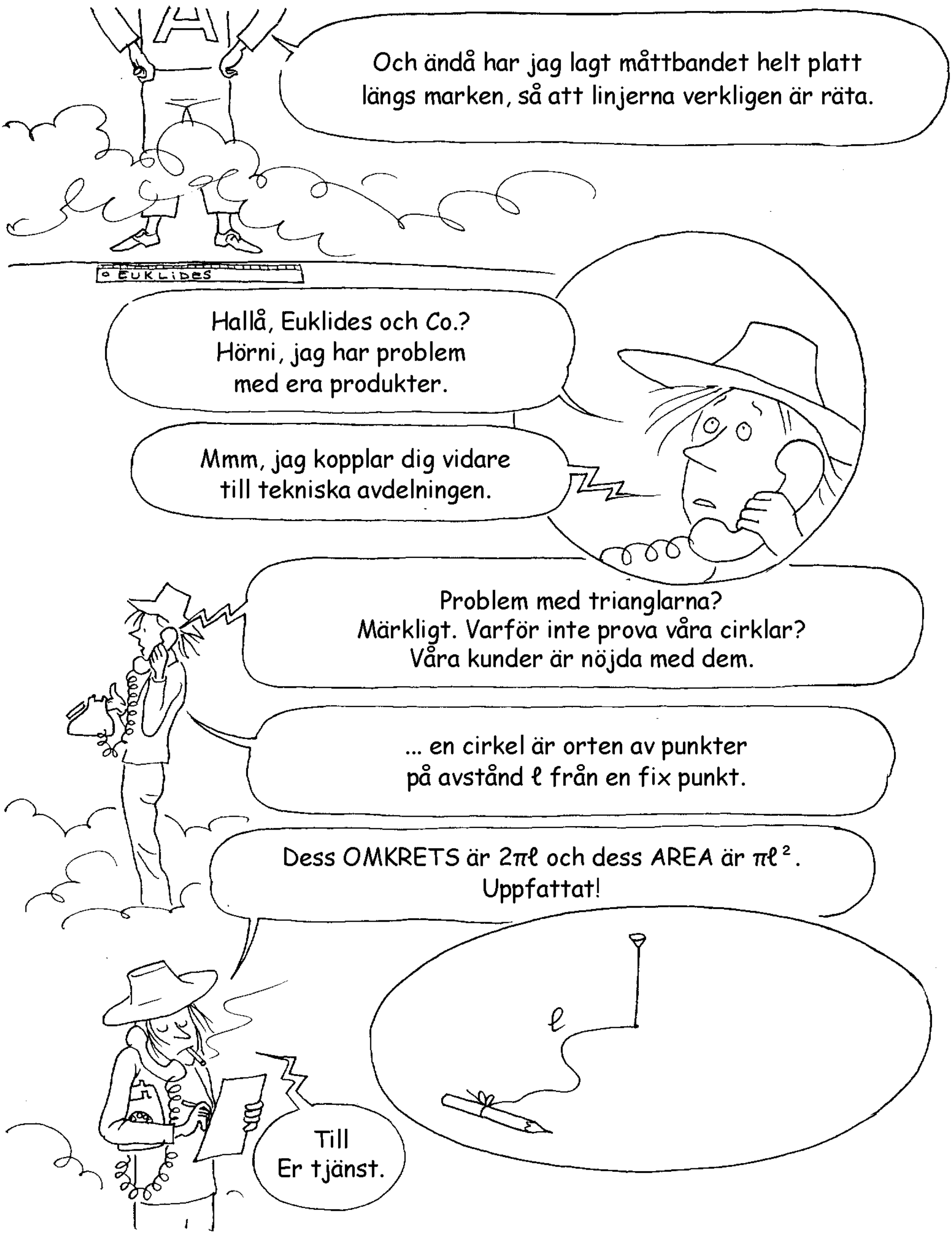
Orädd fortsatte han att spänna sin tråd och gå RAKT FRAMÅT, full av nyfikenhet.

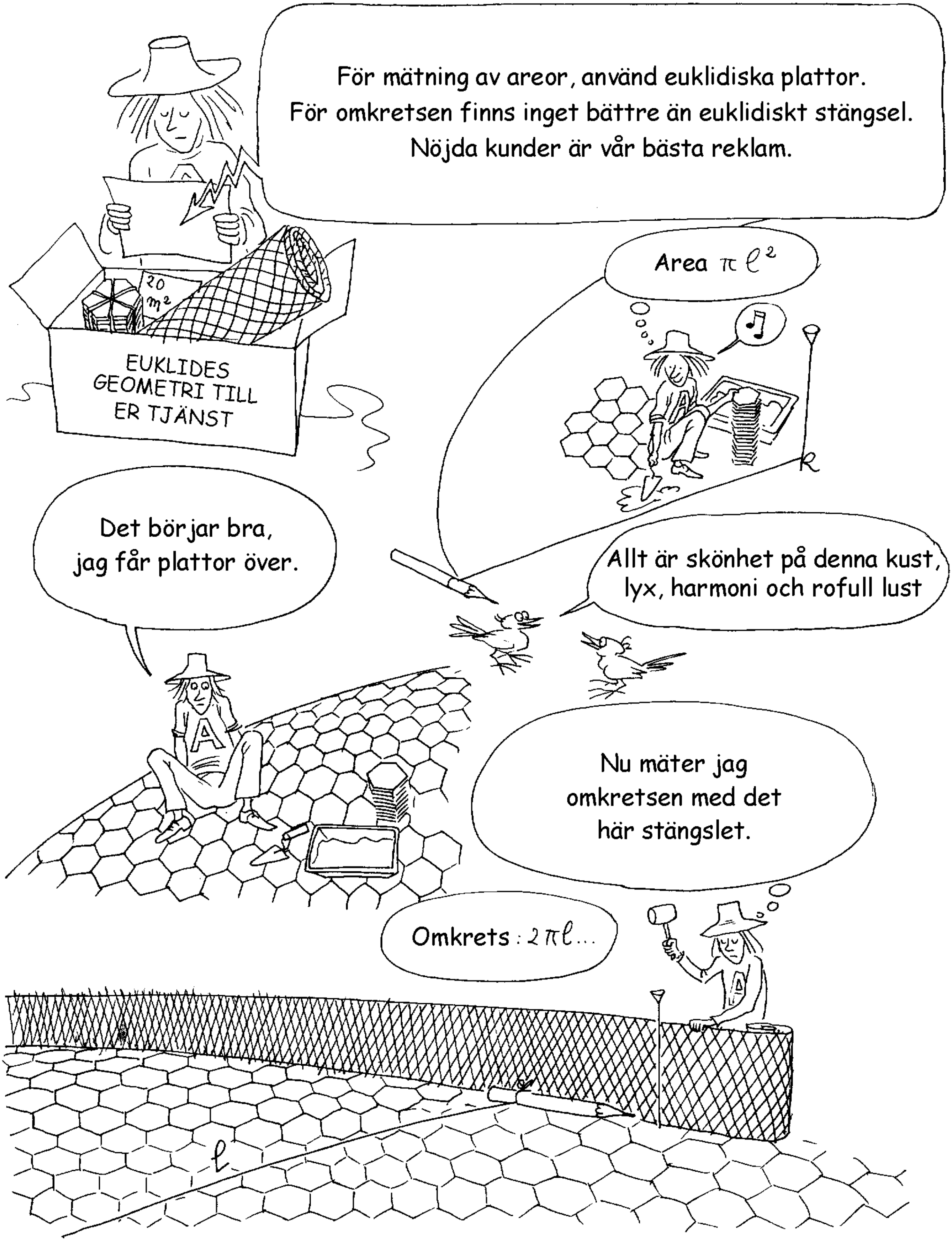
Ack...



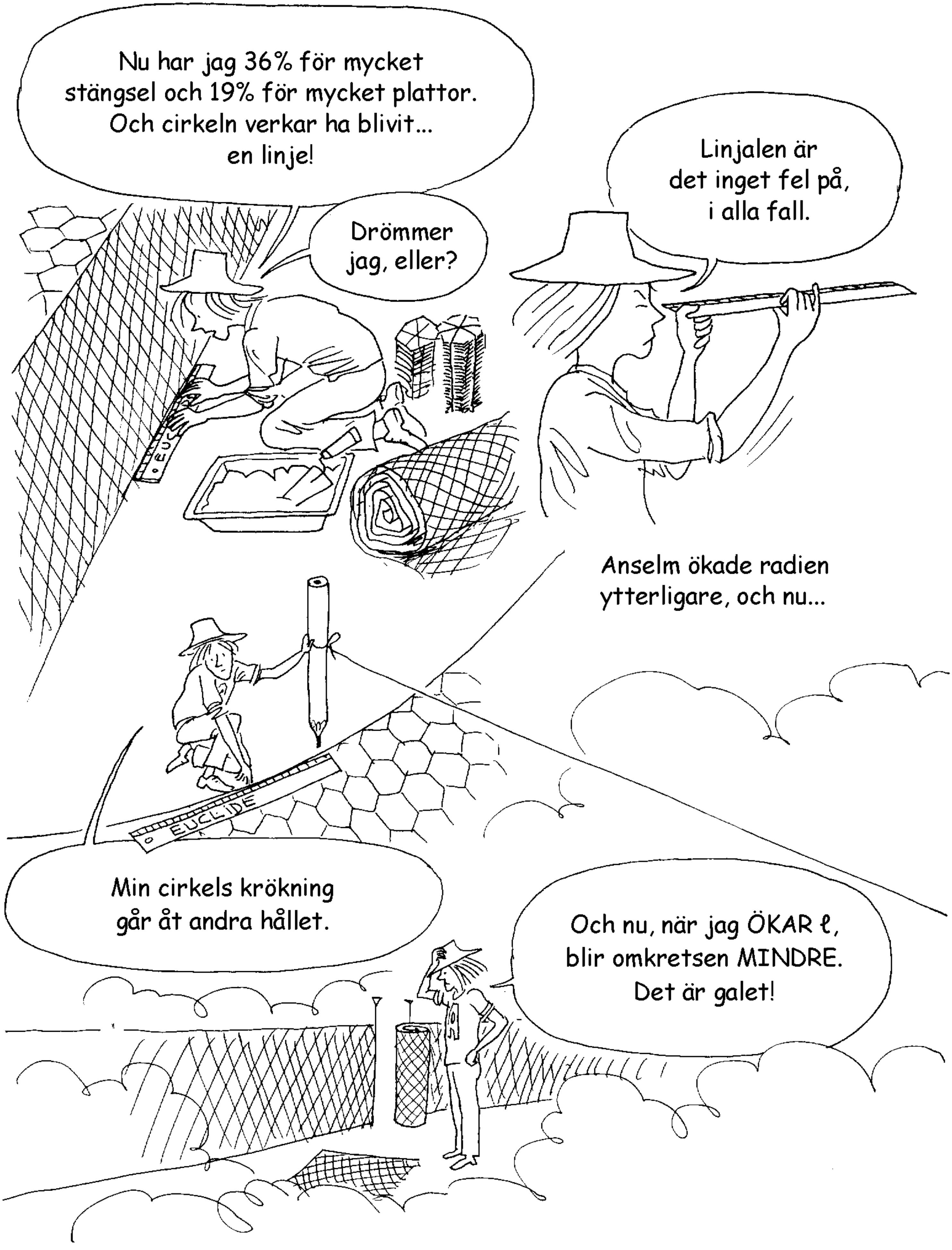
Anselms räta linje sluter sig!


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Låt oss pröva en av Euklides satser. Jag spänner upp tre GEODETER av samma längd. De ger mig en TRINGEL vars vinklar ska vara 60°, så att summan blir 180°. Så står det i manualen.
B 60 60 60 A C
Â+B̂+Ĉ = 180°
Vi skall se hur det går.
RATIO OMNIA VINCIT
A
A
B
Här är B, det andra hörnet. Nu skall jag sträcka två sidor till och finna det tredje hörnet.
Vetenskap är skoj.
B
A
Hoppsan! Vinklarna är förvisso lika, men de är större än 60°.
Är något galet?
C
A
Deras summa kommer att överstiga 180°!
EUKLIDISK GEOMETRI
EUKLIDES
EUKLIDES


Och ändå har jag lagt måttbandet helt platt längs marken, så att linjerna verkligen är räta.
EUKLIDES
Hallå, Euklides och Co.? Hörni, jag har problem med era produkter.
Mmm, jag kopplar dig vidare till tekniska avdelningen.
Problem med trianglarna? Märkligt. Varför inte prova våra cirklar? Våra kunder är nöjda med dem.
... en cirkel är orten av punkter på avstånd ℓ från en fix punkt.
Dess OMKRETS är 2πℓ och dess AREA är πℓ². Uppfattat!
ℓ
Till Er tjänst.

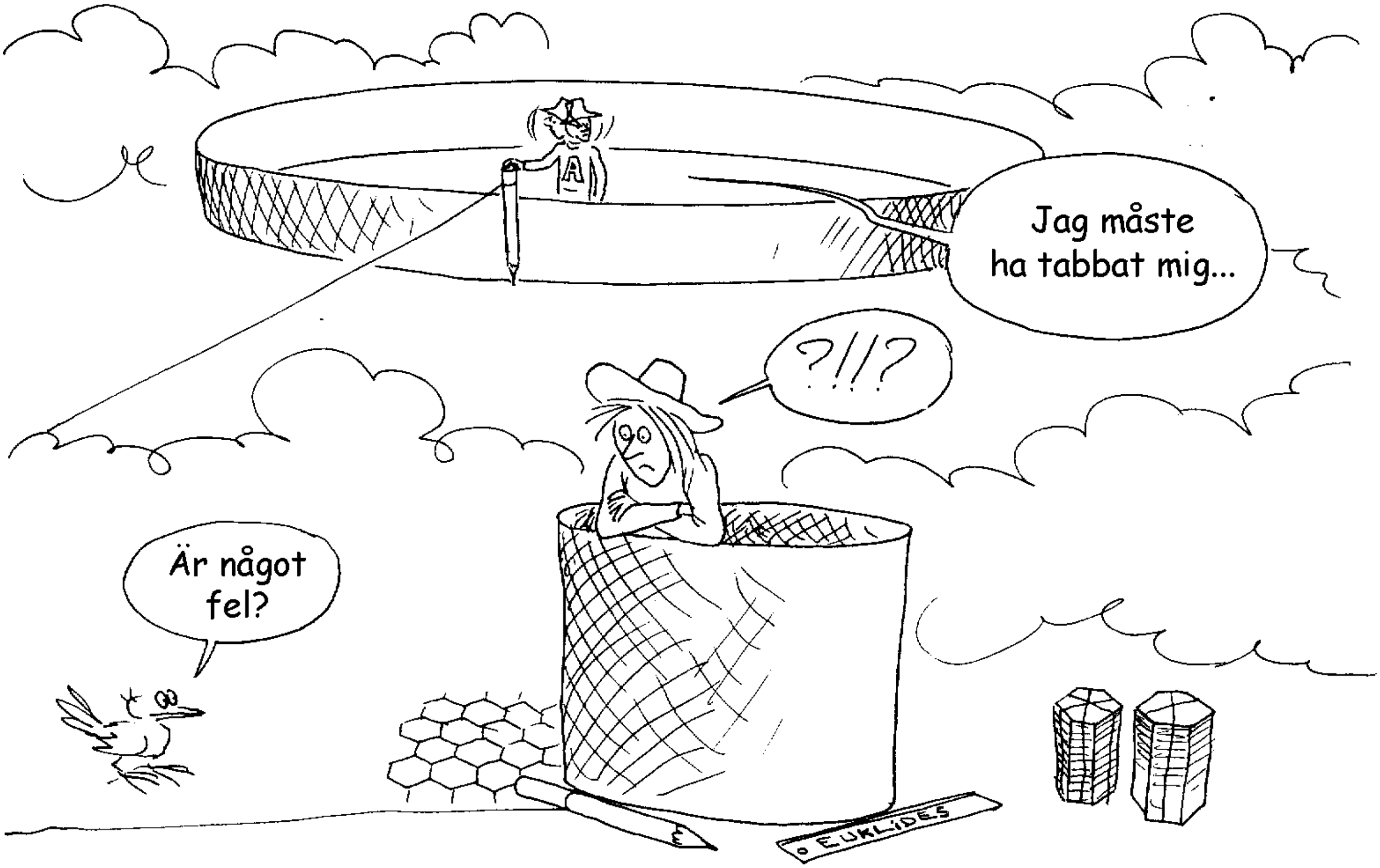

För mätning av areor, använd euklidiska plattor.
För omkretsen finns inget bättre än euklidiskt stängsel.
Nöjda kunder är vår bästa reklam.
20 m²
EUKLIDES GEOMETRI TILL ER TJÄNST
Area $\pi \ell^2$
Det börjar bra, jag får plattor över.
Allt är skönhet på denna kust, lyx, harmoni och rofull lust
Nu mäter jag omkretsen med det här stängslet.
Omkrets : $2\pi\ell$...
ℓ


Det blir stängsel över, också!
Hallå, Euklides och Co.? Ja, det är jag igen. Jag vill klaga på ert stängsel OCH era plattor. Uttrycken $\pi\ell^2$ och $2\pi\ell$ stämmer inte! Vad tänker ni göra åt det?
Skrik inte sådär. Jag är bara sekreterare här. Jag kopplar dig till tekniska avdelingen.
Nej, nej, plattorna ligger kant i kant, radien är konstant och stängslet följer omkretsen.
Min herre, det är första gången det någonsin hänt. Försök igen och håll huvudet kallt, ni vet att våra satser har kundgaranti.
Anselm byggde vidare, med allt större radier ℓ. Och felen blev allt större.



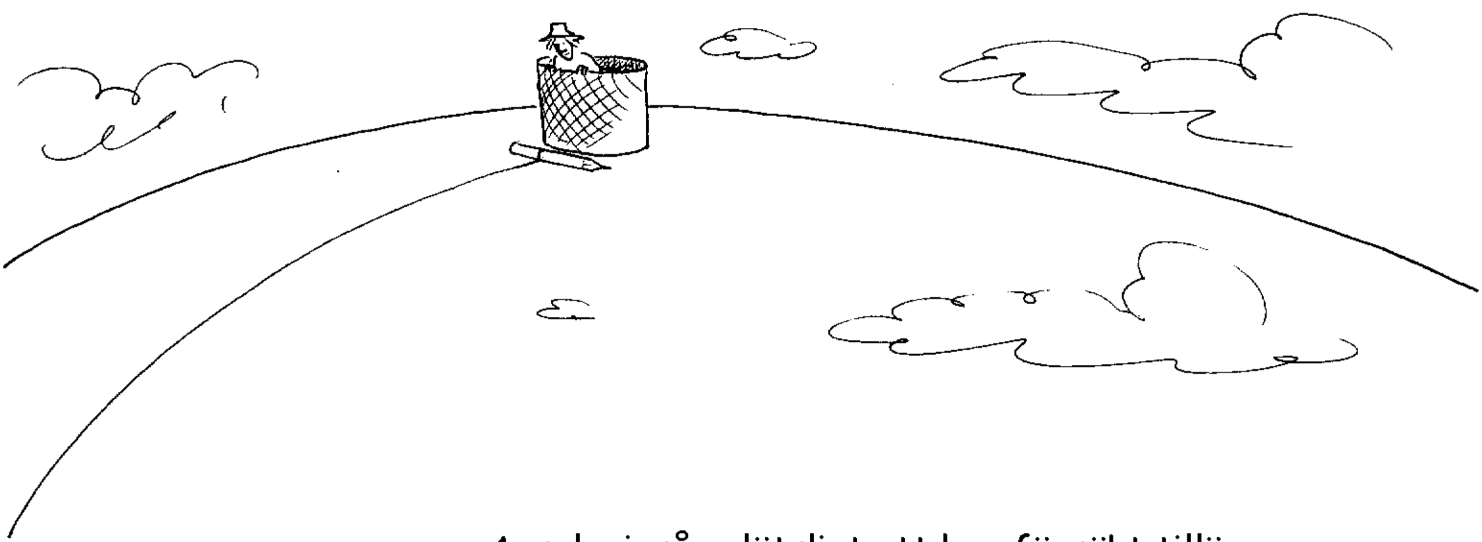
Nu har jag 36% för mycket stängsel och 19% för mycket plattor. Och cirkeln verkar ha blivit... en linje!
Drömmer jag, eller?
Linjalen är det inget fel på, i alla fall.
EUCLIDE
Anselm ökade radien ytterligare, och nu...
EUCLIDE
Min cirkels krökning går åt andra hållet.
Och nu, när jag ÖKAR ℓ, blir omkretsen MINDRE. Det är galet!

Efter ännu ett försök:

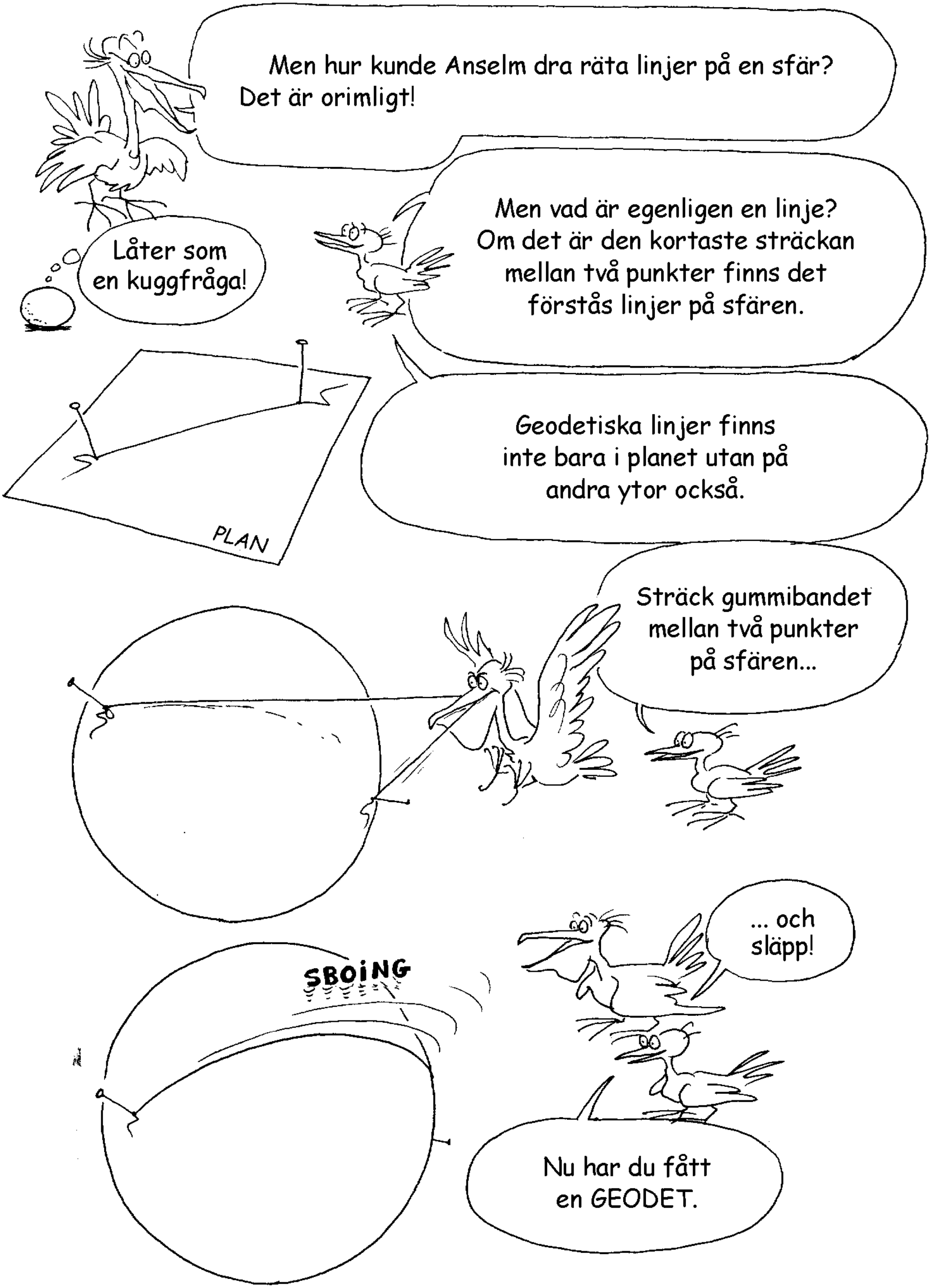


VAD HÄNDE ?

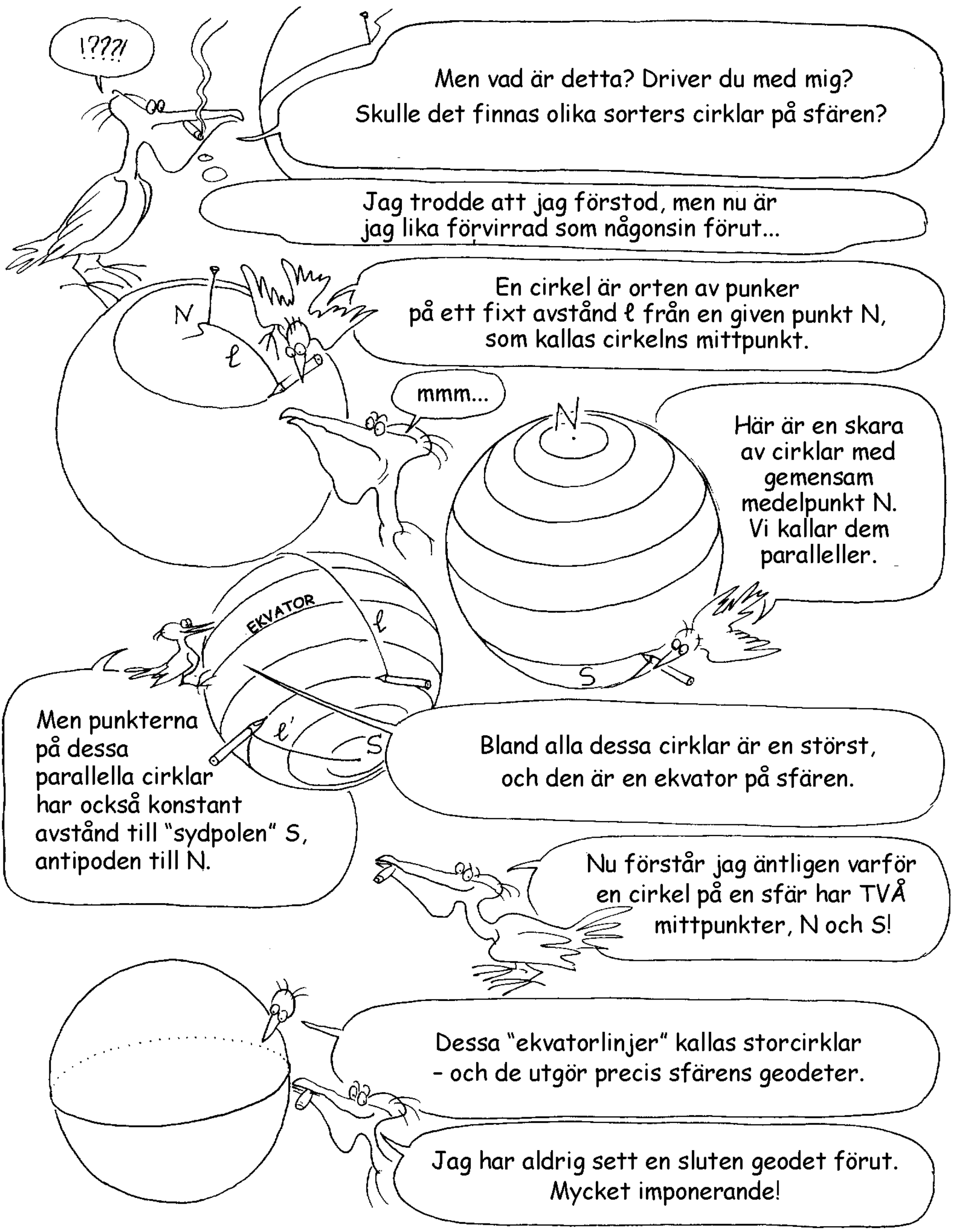
För att få klarhet låter vi dimman lätta:

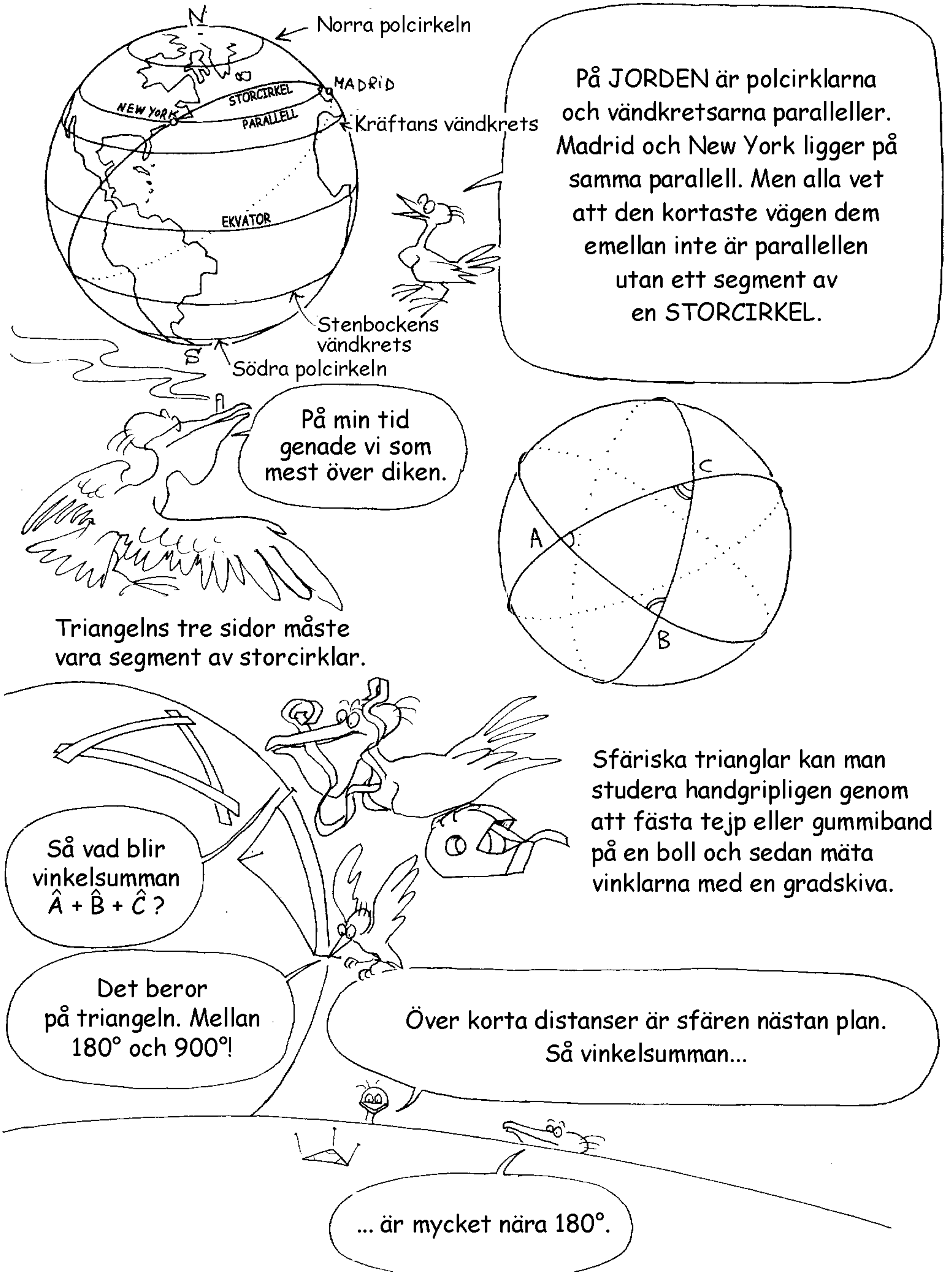


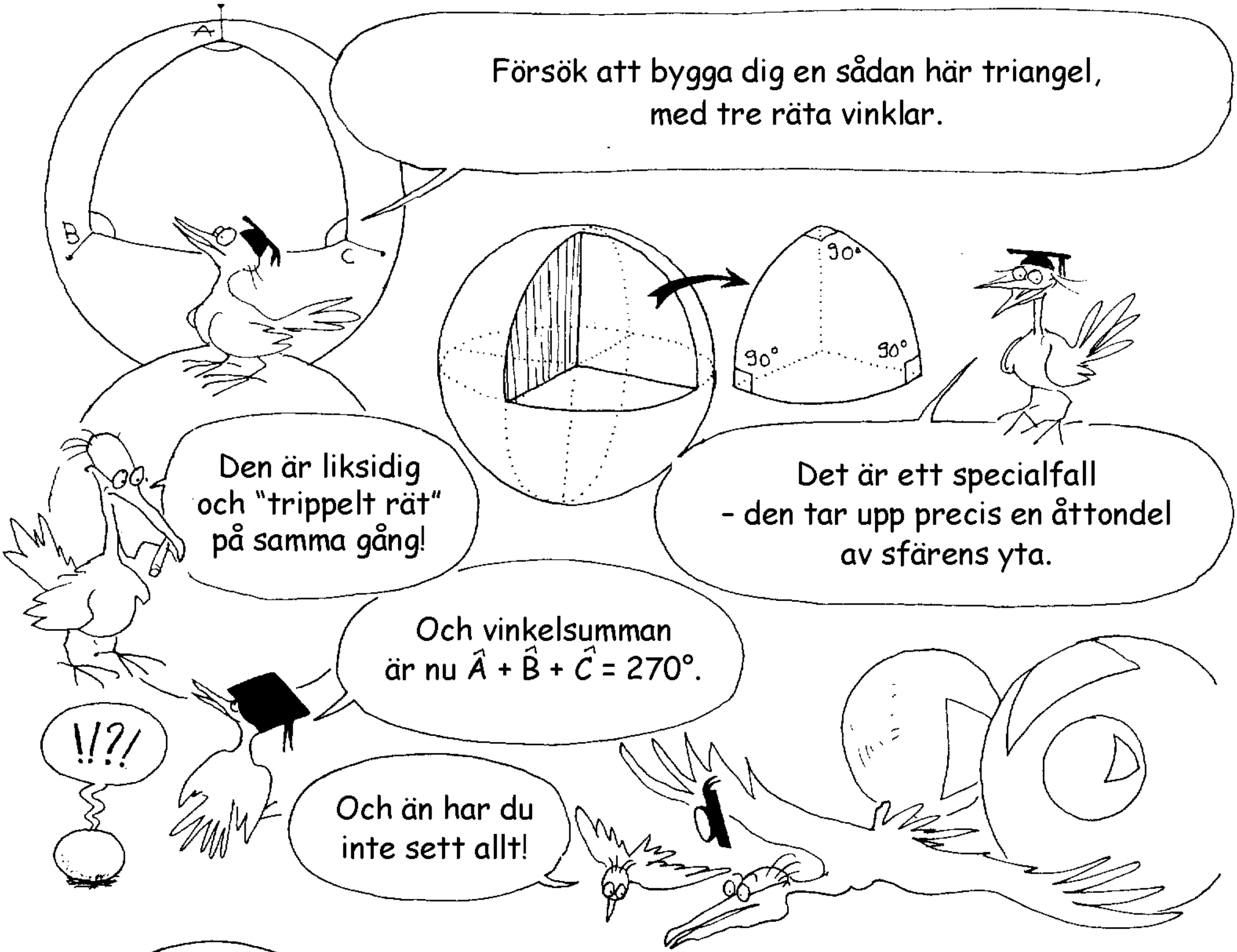
Anselm insåg plötsligt att han försökt tillämpa lagarna för PLAN GEOMETRI på en sfär.

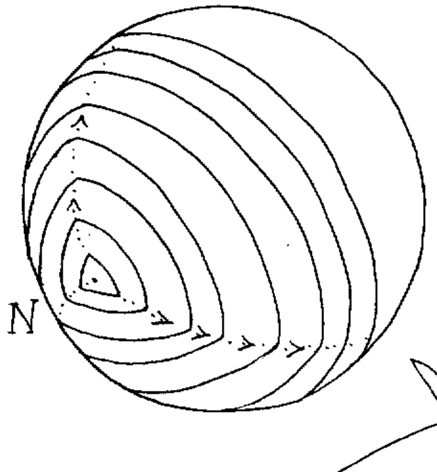

Men hur kunde Anselm dra räta linjer på en sfär? Det är orimligt!
Låter som en kuggfråga!
Men vad är egenligen en linje? Om det är den kortaste sträckan mellan två punkter finns det förstås linjer på sfären.
PLAN
Geodetiska linjer finns inte bara i planet utan på andra ytor också.
Sträck gummibandet mellan två punkter på sfären...
SBOiNG
... och släpp!
Nu har du fått en GEODET.


Behagar du skämta? Den där prylen är inte rak för fem öre!
Joho, tag den här linjalen och mät själv.
Kallar du det här en linjal?
Visst. Det är en linjal för YTOR. På planet får du lov att använda den här i stället.
PLANE
Just en skön linjal...
Jaha, och varje gång Anselm gjorde en geodet, slöt den sig. Betyder det att sfärens geodeter helt enkelt är cirklar?
Varje kortaste avstånd på en sfär är ett segment av en sluten geodet, som är en cirkel. Men inte vilken cirkel som helst duger!


!???!
Men vad är detta? Driver du med mig?
Skulle det finnas olika sorters cirklar på sfären?
Jag trodde att jag förstod, men nu är jag lika förvirrad som någonsin förut...
N
ℓ
En cirkel är orten av punker på ett fixt avstånd ℓ från en given punkt N, som kallas cirkelns mittpunkt.
mmm...
N
Här är en skara av cirklar med gemensam medelpunkt N. Vi kallar dem paralleller.
S
EKVATOR
ℓ
ℓ'
S
Men punkterna på dessa parallella cirklar har också konstant avstånd till "sydpolen" S, antipoden till N.
Bland alla dessa cirklar är en störst, och den är en ekvator på sfären.
Nu förstår jag äntligen varför en cirkel på en sfär har TVÅ mittpunkter, N och S!
Dessa "ekvatorlinjer" kallas storcirklar - och de utgör precis sfärens geodeter.
Jag har aldrig sett en sluten geodet förut. Mycket imponerande!

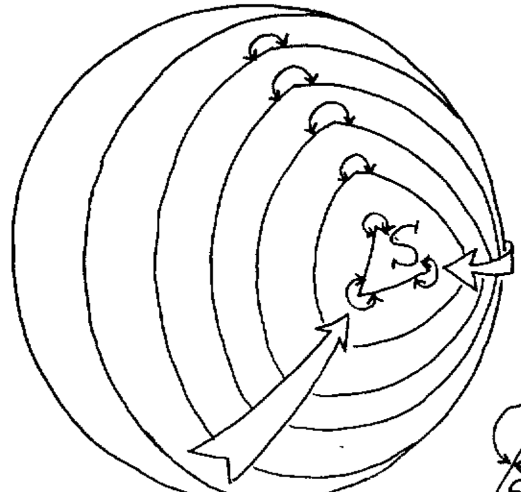

N
Norra polcirkeln
MADRID
STORCIRKEL
NEW YORK
PARALLELL
Kräftans vändkrets
EKVATOR
Stenbockens vändkrets
S
Södra polcirkeln
På JORDEN är polcirklarna och vändkretsarna paralleller. Madrid och New York ligger på samma parallell. Men alla vet att den kortaste vägen dem emellan inte är parallellen utan ett segment av en STORCIRKEL.
På min tid genade vi som mest över diken.
Triangelns tre sidor måste vara segment av storcirklar.
A
B
C
Sfäriska trianglar kan man studera handgripligen genom att fästa tejp eller gummiband på en boll och sedan mäta vinklarna med en gradskiva.
Så vad blir vinkelsumman Â + B̂ + Ĉ ?
Det beror på triangeln. Mellan 180° och 900°!
Över korta distanser är sfären nästan plan. Så vinkelsumman...
... är mycket nära 180°.



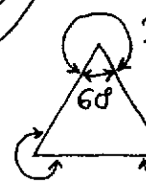


Föreställ dig en elastisk triangel vars hörn avlägsnar sig från varandra. Vinklarna blir större och större, så även deras summa.

Vid en viss punkt ligger hörnen på en storcirkel, sfärens ekvator. Varje vinkel är nu en rät linje, alltså 180°. Summan är nu 540°!



Hörnen vandrar in på södra halvklotet och möts till slut i punkten S, antipoden till N.
Om vi fortfarande betraktar N som cirkelns medelpunkt så är vinklarna större än 180°!
Närmare bestämt är de 360°- 60° = 300°.



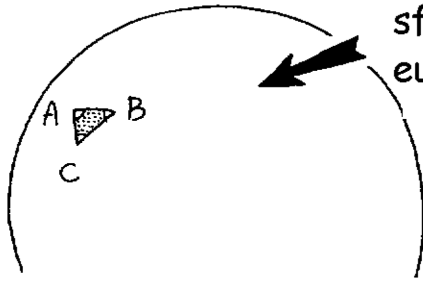
Summa: 300 x 3 = 900°

Alltså kan en sfärisk triangels vinkelsumma ligga mellan 180° och 900°!

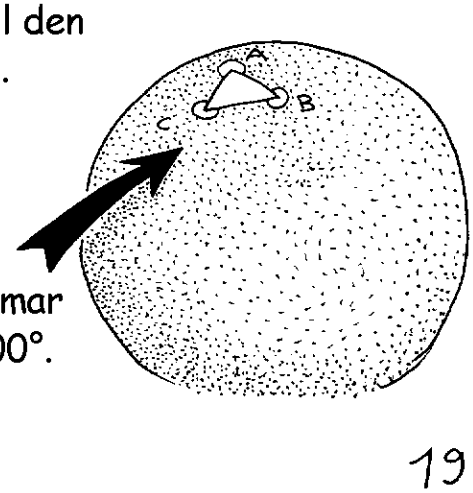
Enligt en sats av GAUSS är vinkelsumman,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}1416\,R^2}\right)$$

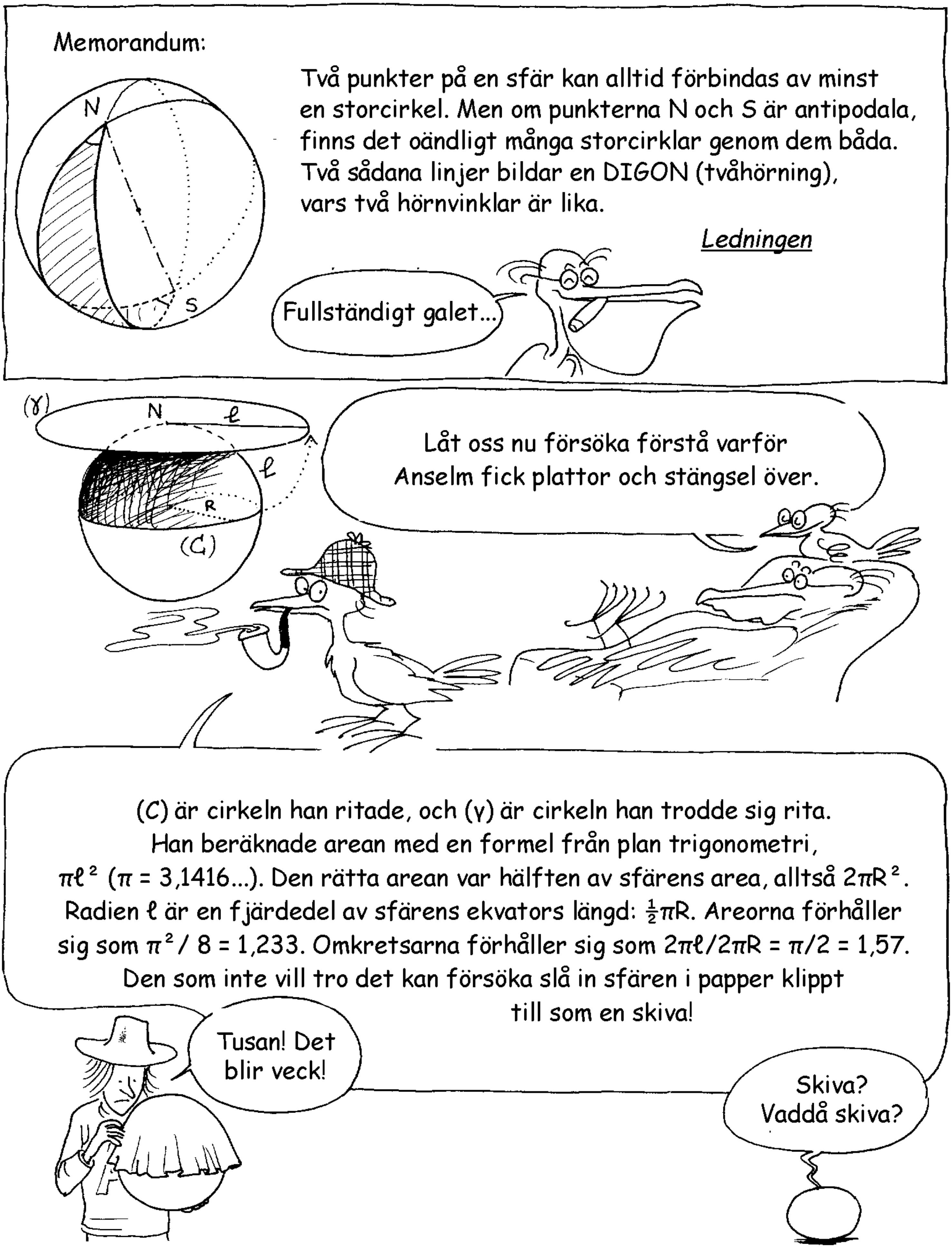
där R är sfärens radie och A är triangelns area.



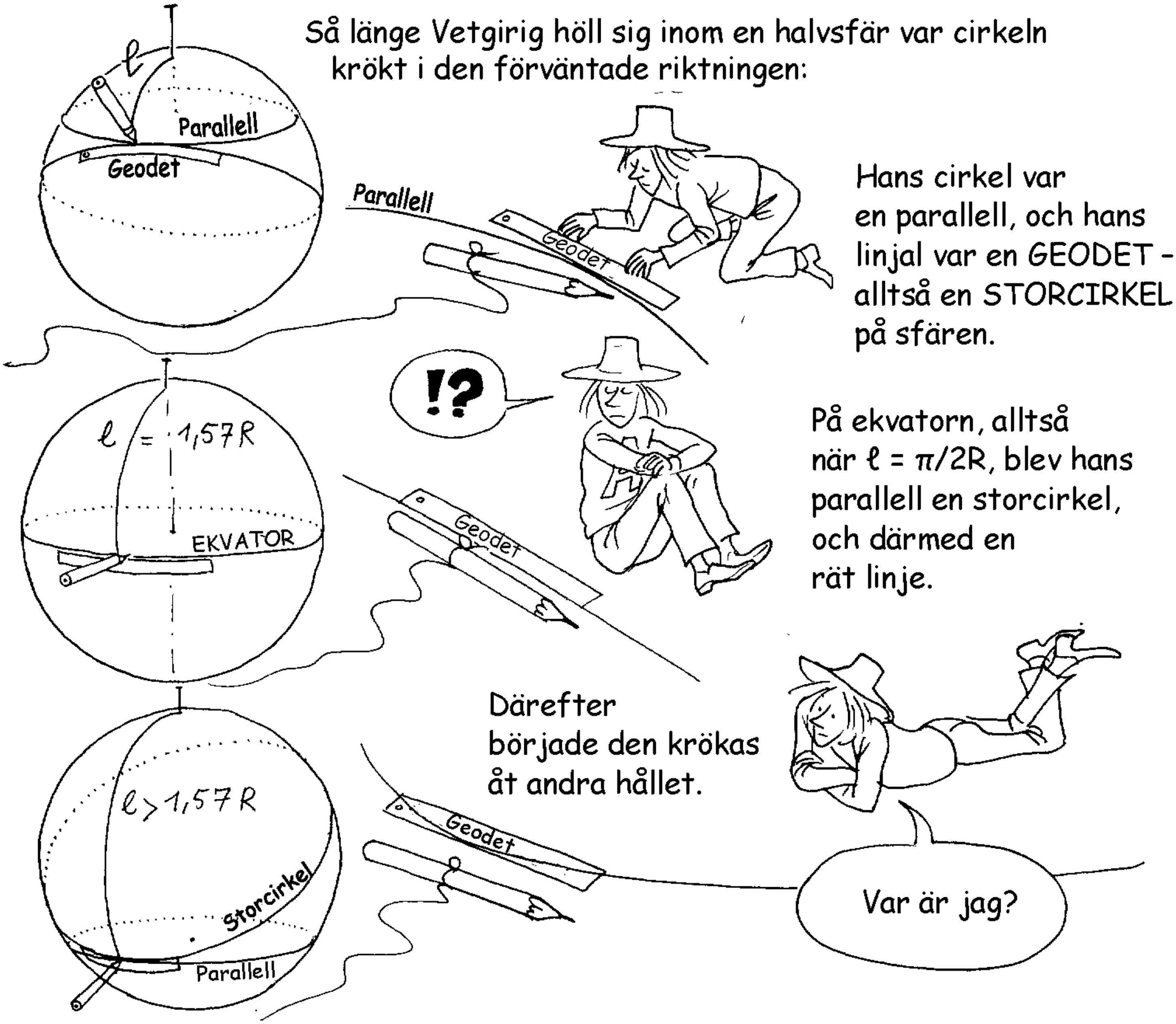
När triangelns area är liten relativt sfärens, övergår formeln till den euklidiska (A + B + C = 180°).



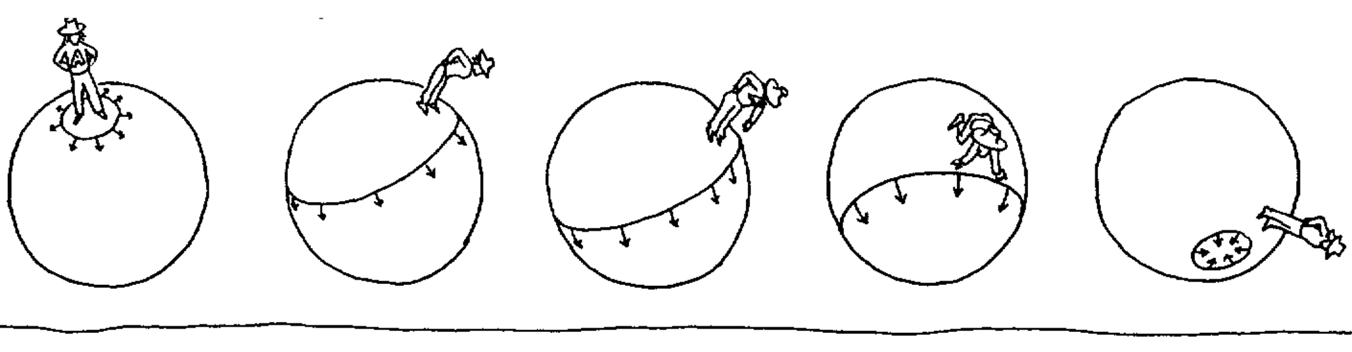
Om triangelns area tvärtom närmar sig sfärens, 4 x 3,1416 x R^2, får vi 900°.



Memorandum:
N
S
Två punkter på en sfär kan alltid förbindas av minst en storcirkel. Men om punkterna N och S är antipodala, finns det oändligt många storcirklar genom dem båda. Två sådana linjer bildar en DIGON (tvåhörning), vars två hörnvinklar är lika.
Ledningen
Fullständigt galet...
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Låt oss nu försöka förstå varför Anselm fick plattor och stängsel över.
(C) är cirkeln han ritade, och (γ) är cirkeln han trodde sig rita. Han beräknade arean med en formel från plan trigonometri, $\pi\ell^2$ (π = 3,1416...). Den rätta arean var hälften av sfärens area, alltså $2\pi R^2$. Radien ℓ är en fjärdedel av sfärens ekvators längd: $\frac{1}{2}\pi R$. Areorna förhåller sig som $\pi^2 / 8 = 1{,}233$. Omkretsarna förhåller sig som $2\pi\ell/2\pi R = \pi/2 = 1{,}57$. Den som inte vill tro det kan försöka slå in sfären i papper klippt till som en skiva!
Tusan! Det blir veck!
Skiva? Vaddå skiva?



Så på sfären kan man komma ut ur en cirkel utan att korsa den. Man får tänka sig att cirkeln är elastisk, så att den kan föras runt sfären som ett gummiband runt ett biljardklot

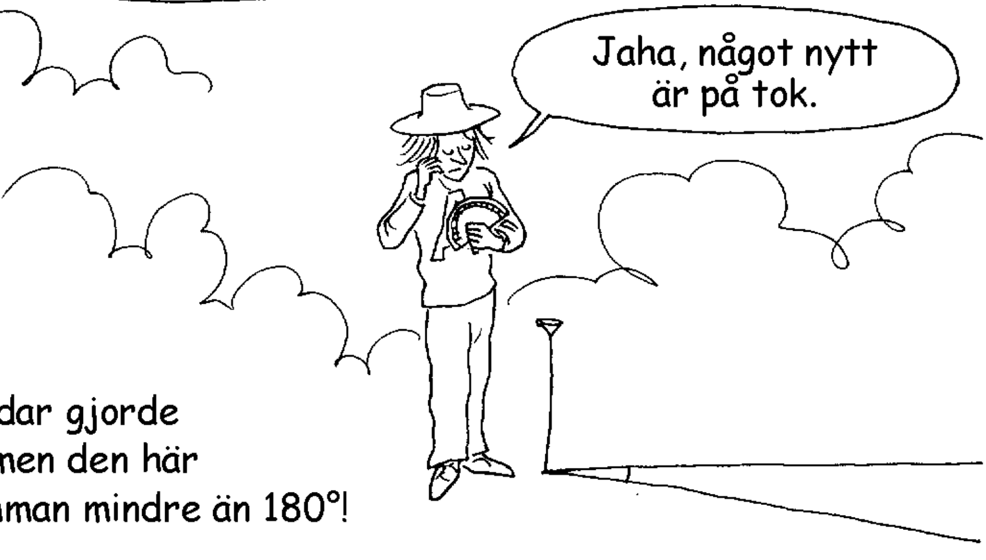


Anselm behövde lite tid på sig för att smälta dessa idéer, förknippade med matematikern Gauss (1777-1855). Han beslöt att bekanta sig med YTORNAS värld.

Ibland måste man ta risker för vetenskapens skull...

Efter ankomsten till en ny värld rullade Anselm ånyo ut en GEODET, men den här gången:

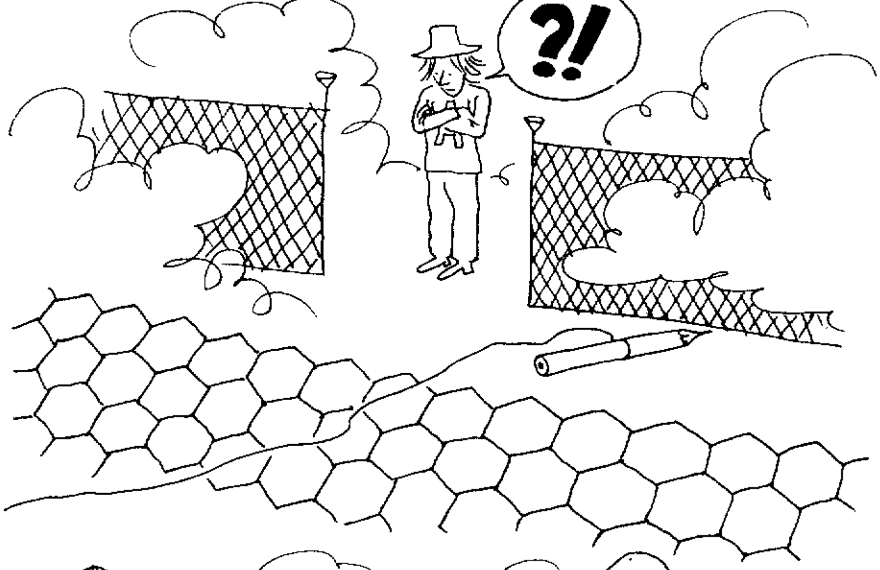
Geodeten sluter sig inte.



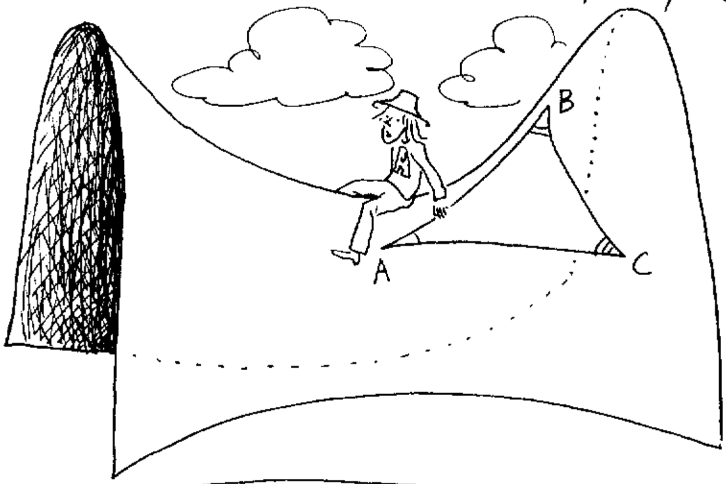
Med tre sträckta trådar gjorde Anselm en triangel – men den här gången blev vinkelsumman mindre än 180°!

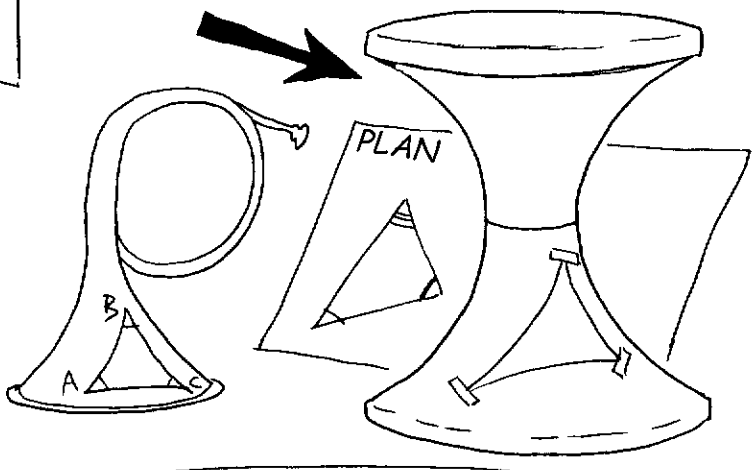
Som vanligt betyder "cirkel" orten av punker på fixt avstånd från en given punkt. Med den definitionen fann Vetgirig att hans cirkels omkrets var större än $2\pi\ell$, och arean större än $\pi\ell^2$.

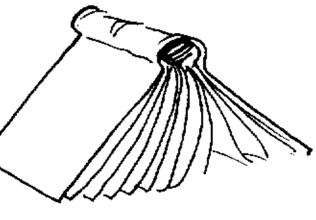
Låt dimman lätta:



Ytan har samma form som ett bergspass eller hästsadel. Många vardagliga objekt har denna form: ett jakthorn, vissa typer av pallar:





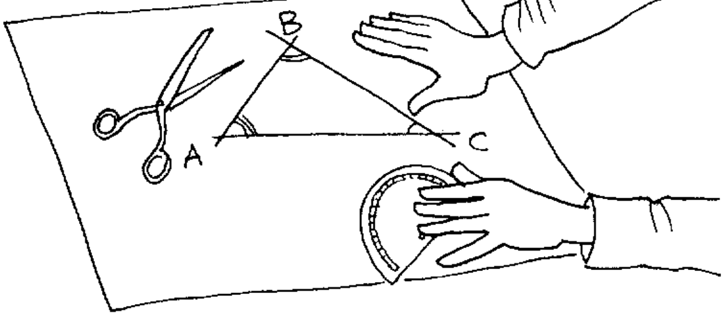


KRÖKNING:

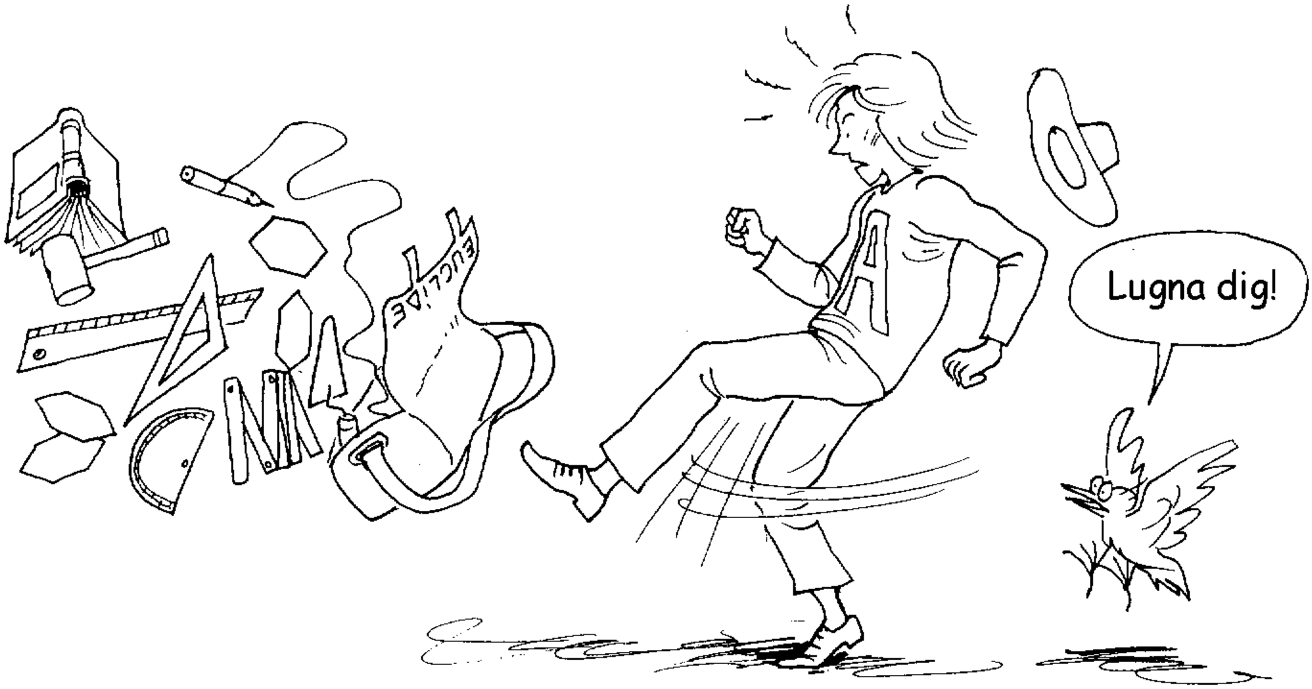
En krökt yta är en för vilken euklides satser inte gäller. Krökningen kan vara antingen positiv eller negativ.
På en yta med POSITIV KRÖKNING, är en triangels vinkelsumma större än 180°. En cirkel av radie ℓ har en area mindre än $\pi\ell^2$ och en omkrets kortare än $2\pi\ell$.
På en yta med NEGATIV KRÖKNING, är en triangels vinkelsumma mindre än 180°. En cirkel av radie ℓ har en area större än $\pi\ell^2$ och en omkrets längre än $2\pi\ell$.

För ett tag sedan upptäckte Anselm att när man försöker slå in en yta med positiv krökning i papper, uppstår veck. Att slå in en yta med negativ krökning är inte heller möjligt: pappret rivs sönder.

Som vi såg på föregående sida kan en yta ha positiv kröking i vissa punkter och negativ krökning i andra.



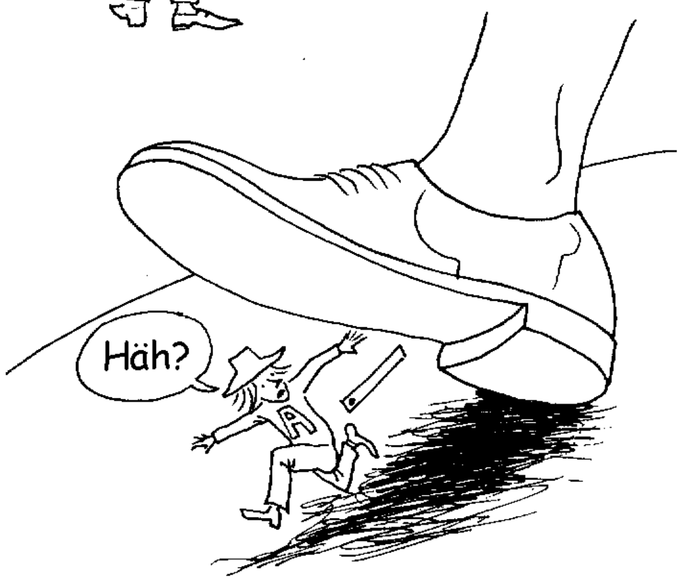
Enligt vår definition har cylindrar och koner euklidisk geometri, och är alltså plana ytor!

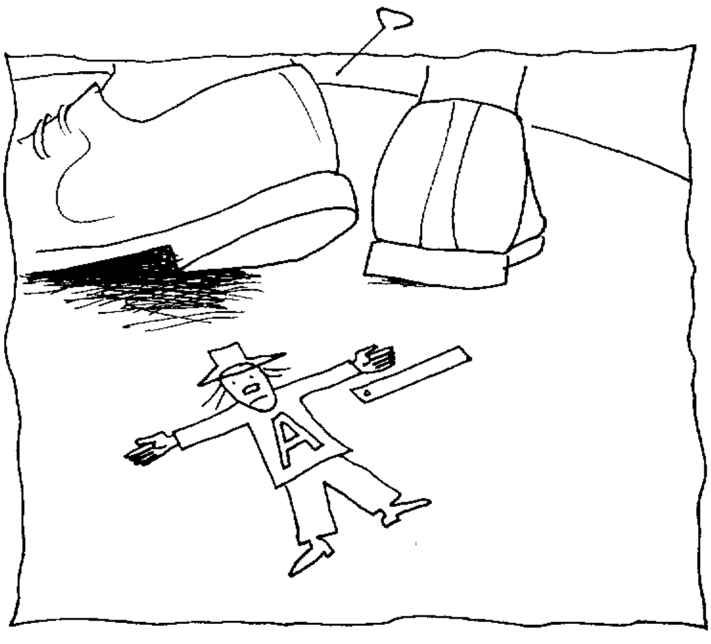


RUMSBEGREPPET:

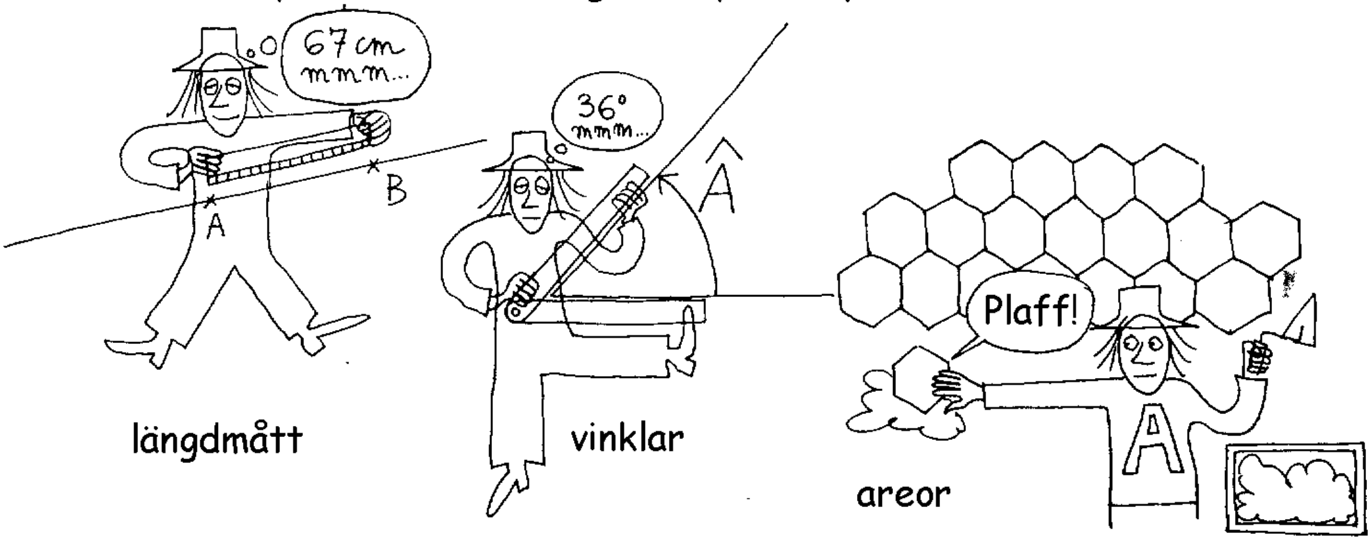
Tidigare förhindrade molnen Anselm från att se mycket längre än näsan räcker. Hade det inte varit för dem, hade han sett sitt sfäriska rums KRÖKNING.

Det finns ett annat sätt att förhindra Vetgirig att uppfatta krökningen visuellt: låt honom leva på ytan, snarare än utanför den.





Denna nya situation har inget inflytande på...



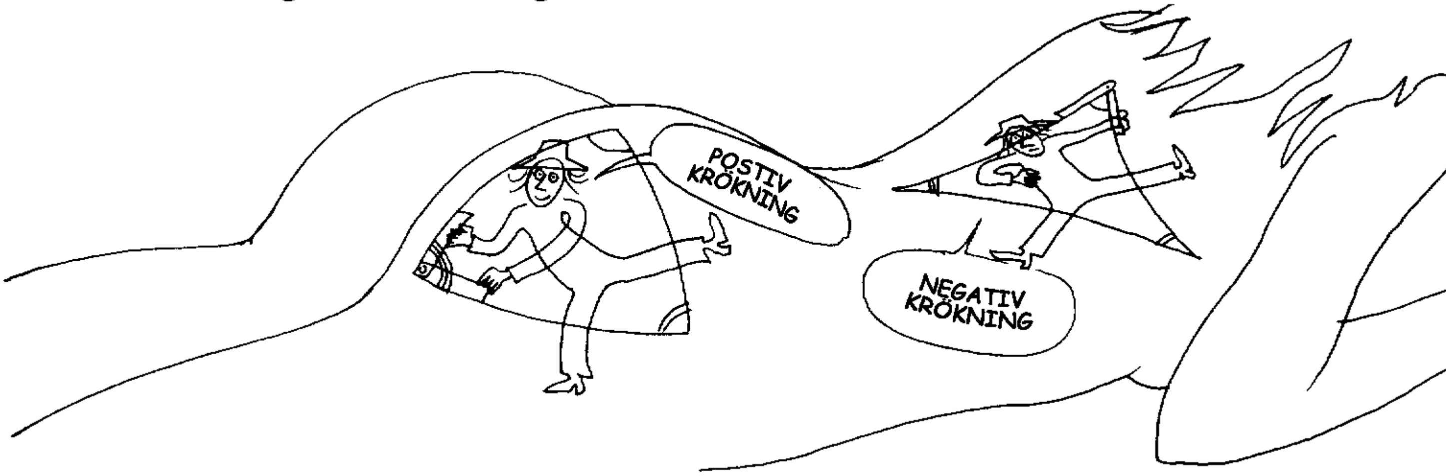
Även den som bannlysts från den tredje dimensionen kan mäta rummets krökning, både till tecken och storhet, utan att behöva se den. Om en triangels vinkelsumma är 180°, är ytan plan.
Om summan överskrider två räta, är krökningen positiv och den lokala krökningsradien R kan beräknas ur formeln

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}14\,R^2}\right)$$

där A är triangelns area.
Om summan underskrider två räta, kan vi definiera krökningsradien ur formeln

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 - \frac{A}{3{,}14\,R^2}\right)$$

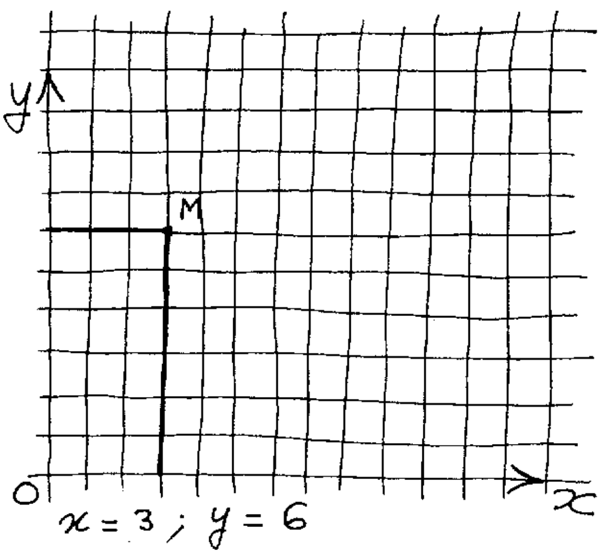
men dess fysiska tolkning blir en annan.
Märk, att vi kan betrakta planet som en yta med oändlig krökningsradie. I den gränsen återfinner vi de euklidiska satserna.

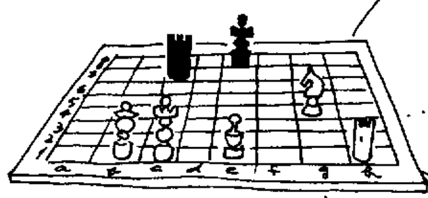


DIMENSIONSBEGREPPET

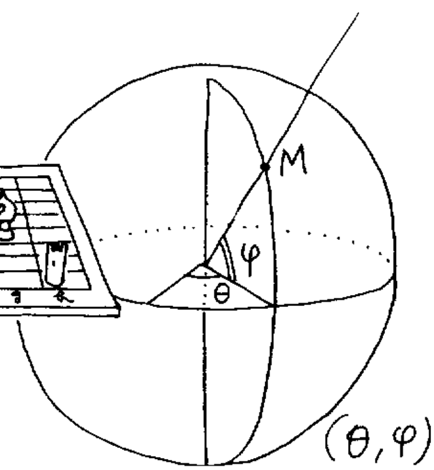
Ett rums dimension är antalet storheter – eller koordinater – som måste anges för att adressera dess punkter.

YTOR är rum med två dimensioner. Storheterna vi använder som koordinater kan vara avstånd, vinklar eller andra härledda storheter.



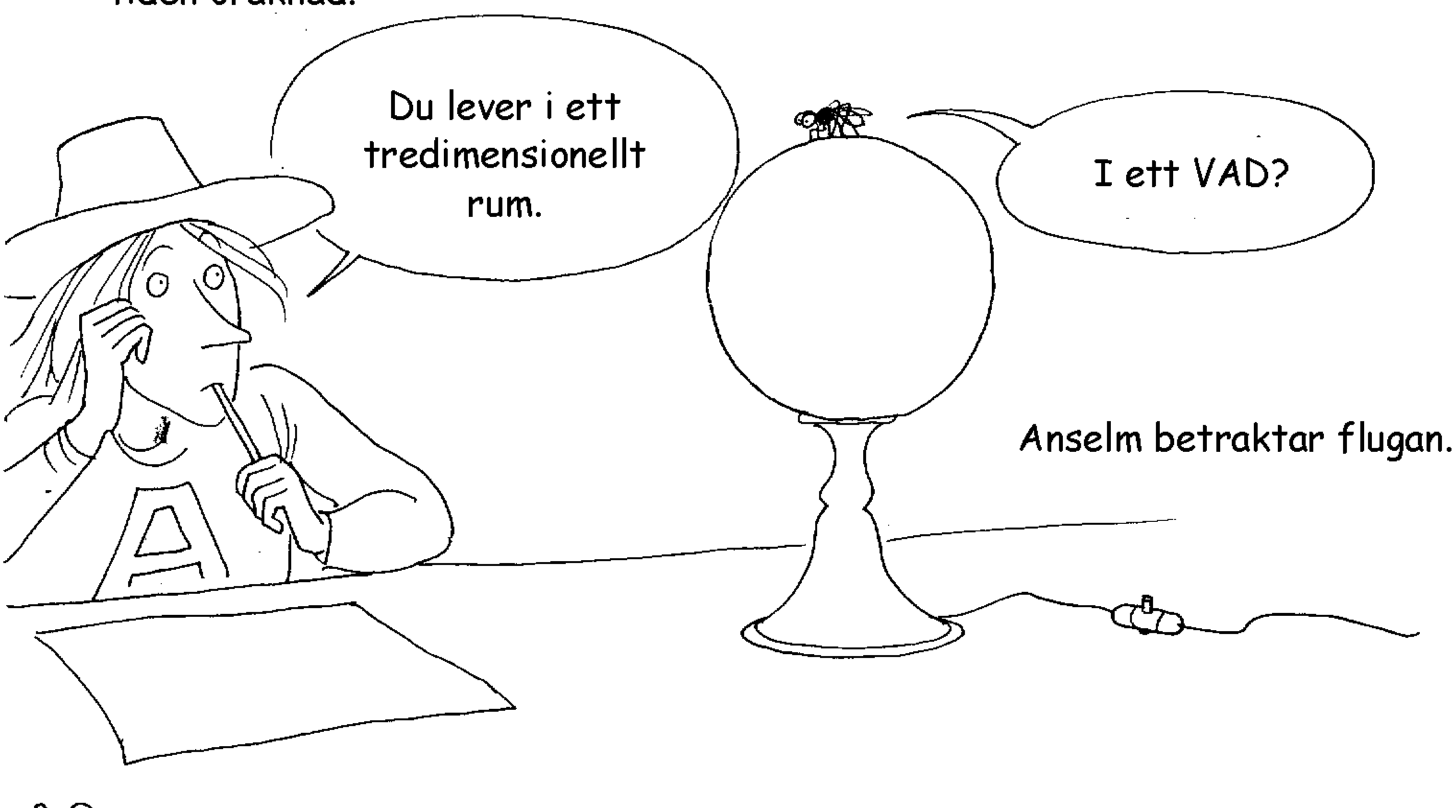


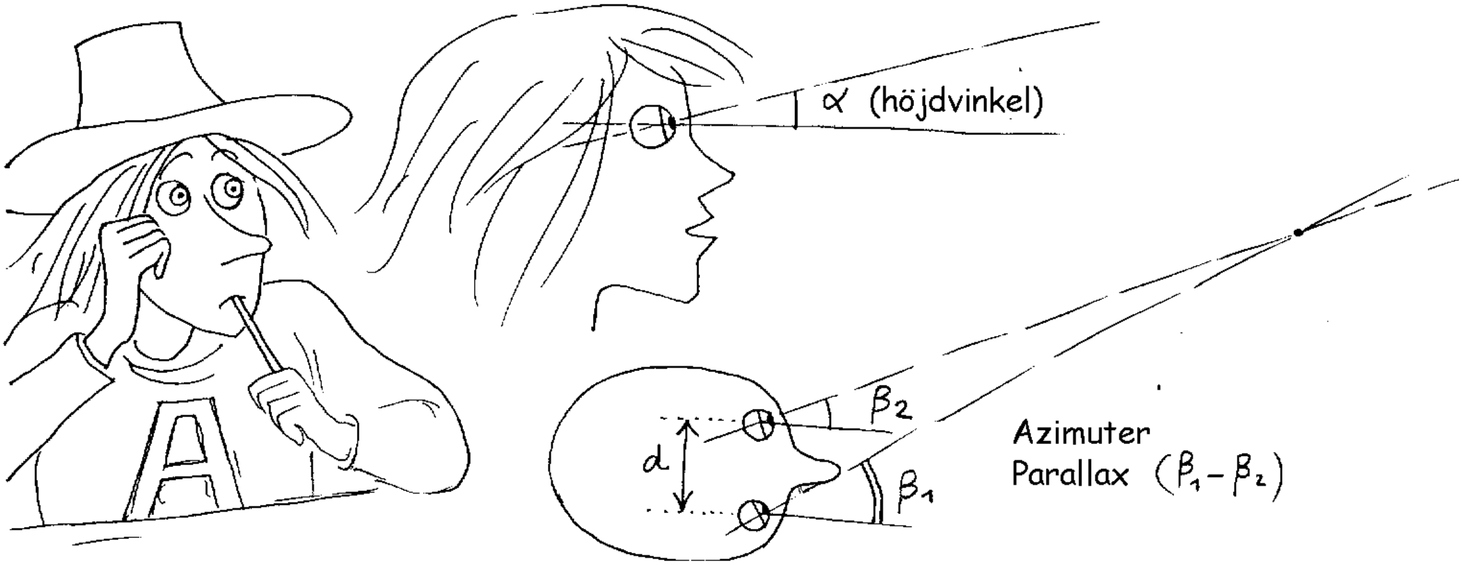
Springare på g 4



Longitud, latitud

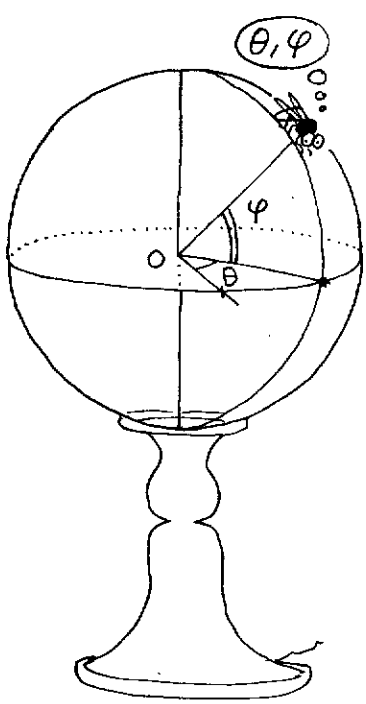
Det är brukligt att säga att det rum vi lever i har tre dimensioner, tiden oräknad.





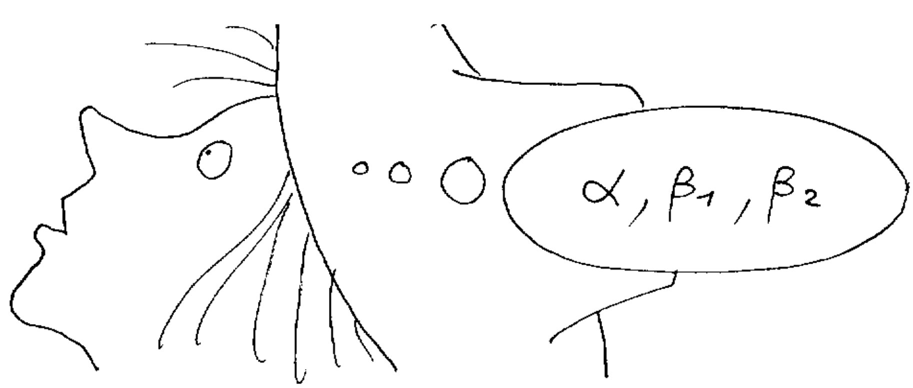
Anselm kan lägesbestämma objekt genom att använda huvudet:
en punkts läge kan beräknas ur tre vinklar: höjdvinkeln α och
de två azimuterna $\beta 1$ och $\beta 2$.
Skillnaden $\beta 1 - \beta 2$ kallas parallax.
En beräkning utförd på insidan av Anselms kranium ger avståndet.

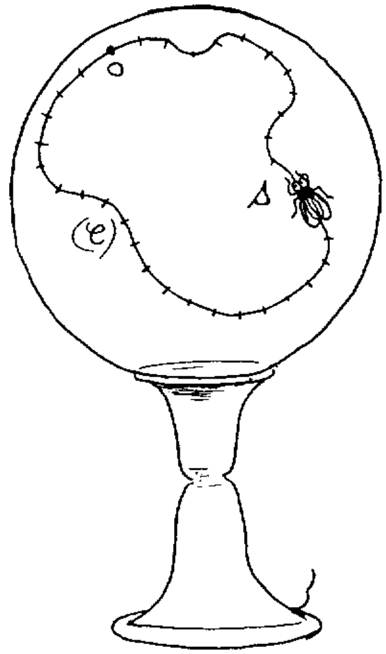
INBÄDDNINGAR:



Men flugan rör sig på lampans tvådimensionella yta, och där räcker två koordinater till för att ange en position, till exempel de två vinklarna θ och φ (longitud och latitud).

Vi säger att detta tvådimensionella rum är inbäddat i vårt vanliga, åskådliga rum.



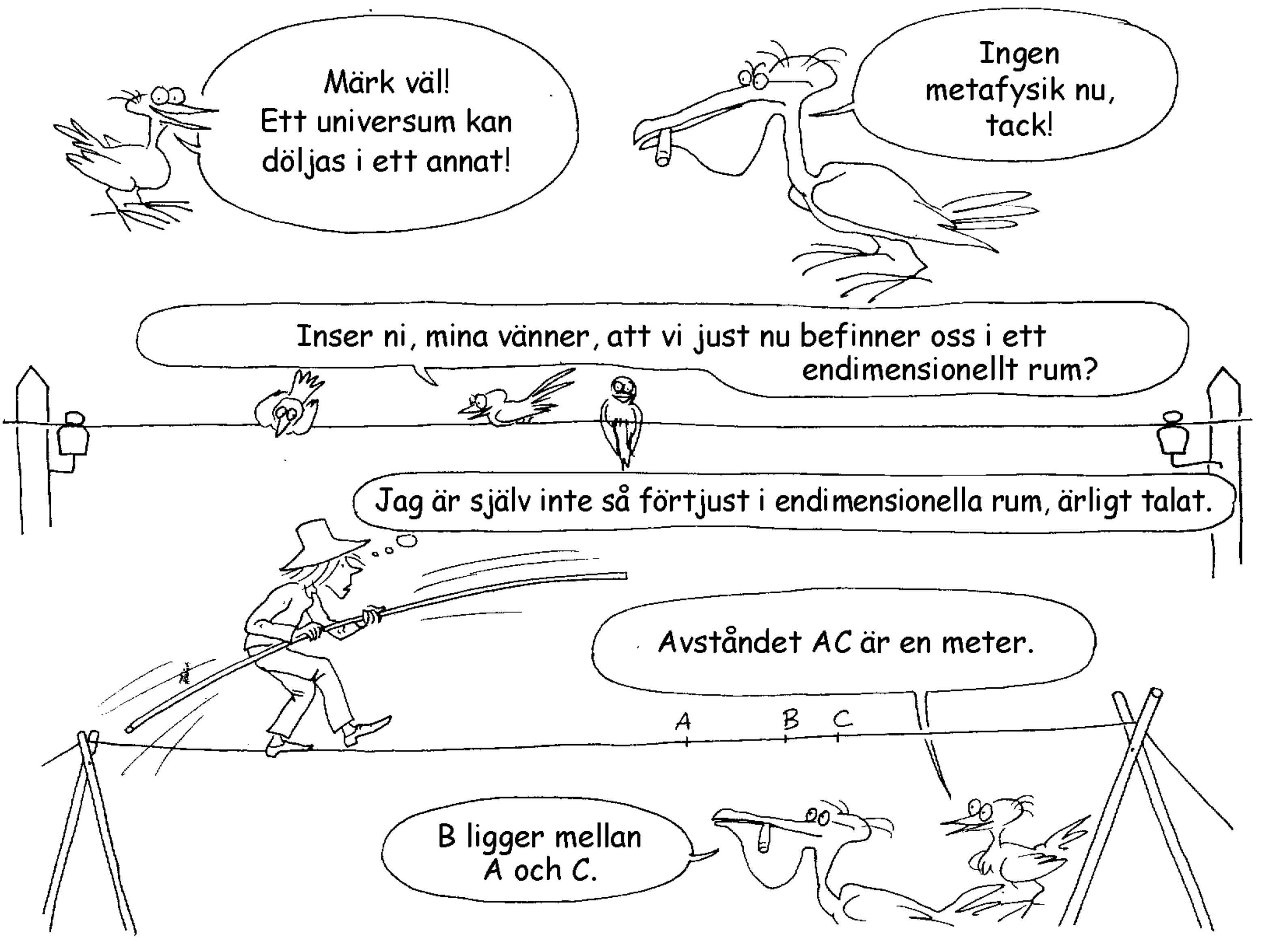


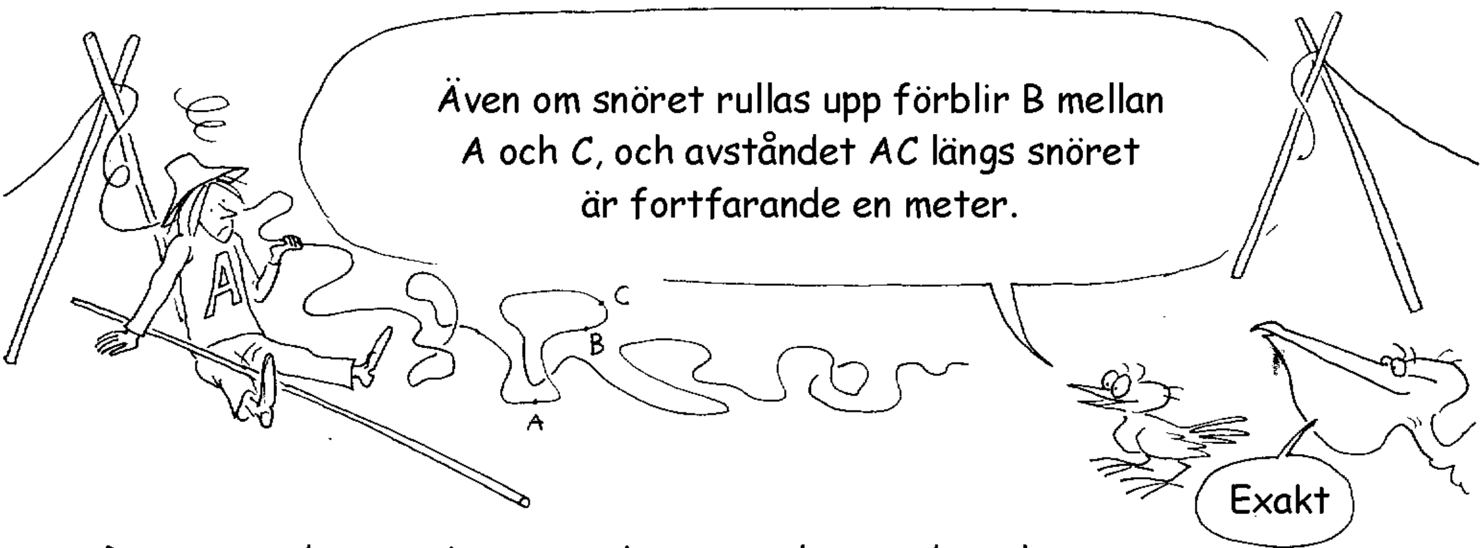
Låt oss anta att flugan följer en kurva (C) på sfären. Vi kan ange dess läge med hjälp av en enda koordinat, till exempel avståndet från dess ursprungspunkt (kurvan har en riktning).

En kurva är ett ENDIMENSIONELLT rum.

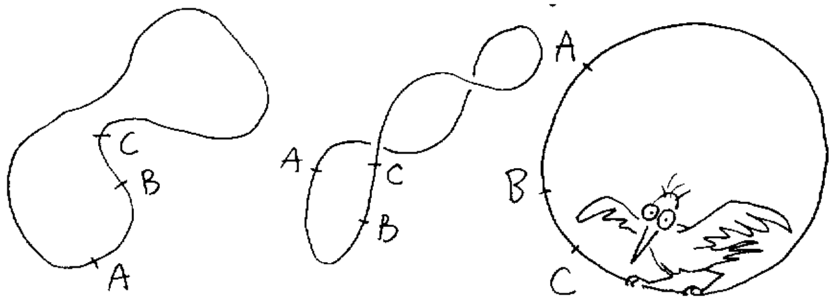
Detta endimensionella rum är inbäddat i sfärens tvådimensionella, som i sin tur är inbäddat i vårt tredimensionella.

Det rum vi lever i skulle kunna vara inbäddat i ett rum av högre dimension, om vilket vi inte är medvetna.





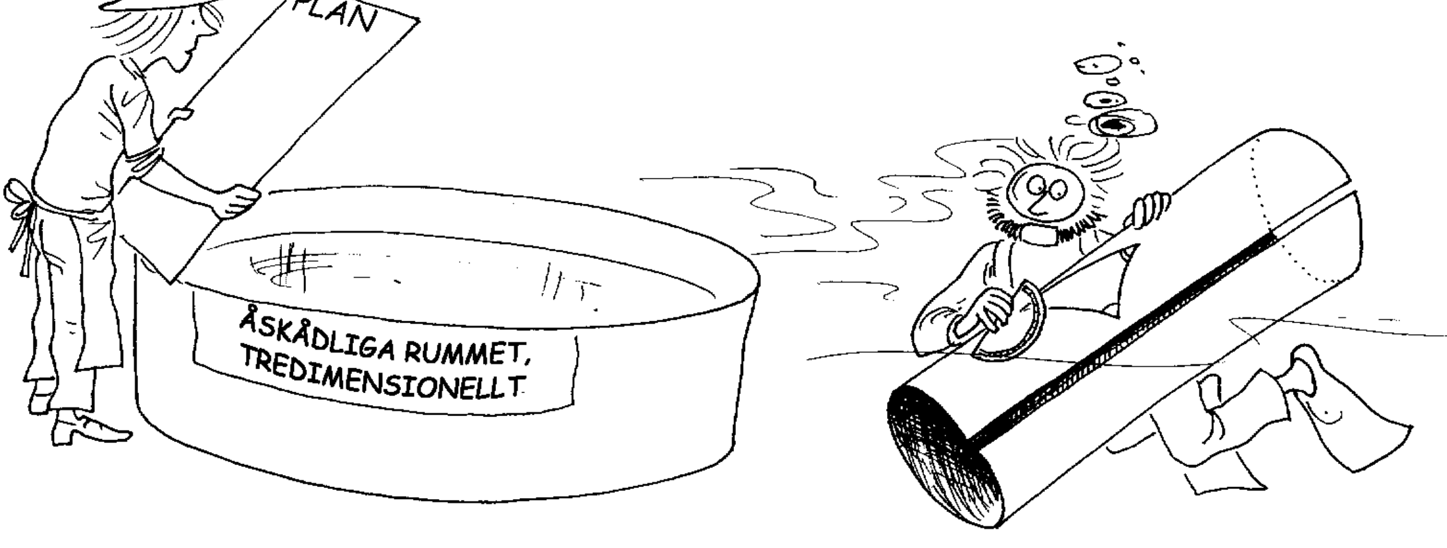
Detta antyder att vissa egenskaper är oberoende av hur inbäddningen gjorts.



Här ser vi olika sätt att bädda in en sluten kurva i det åskådliga rummet (*). Egenskapen att vara SLUTEN är oberoende av inbäddningen.

Men vi måste akta oss för att töja snöret, så att vi inte ändra avstånden mellan dess punkter. Härnäst ska vi bädda in YTOR i det tredimensionella rummet.

Om vi bäddar in ett PLAN i åskådliga rummet, kan vi böja det utan att ändra dess inre geometri.

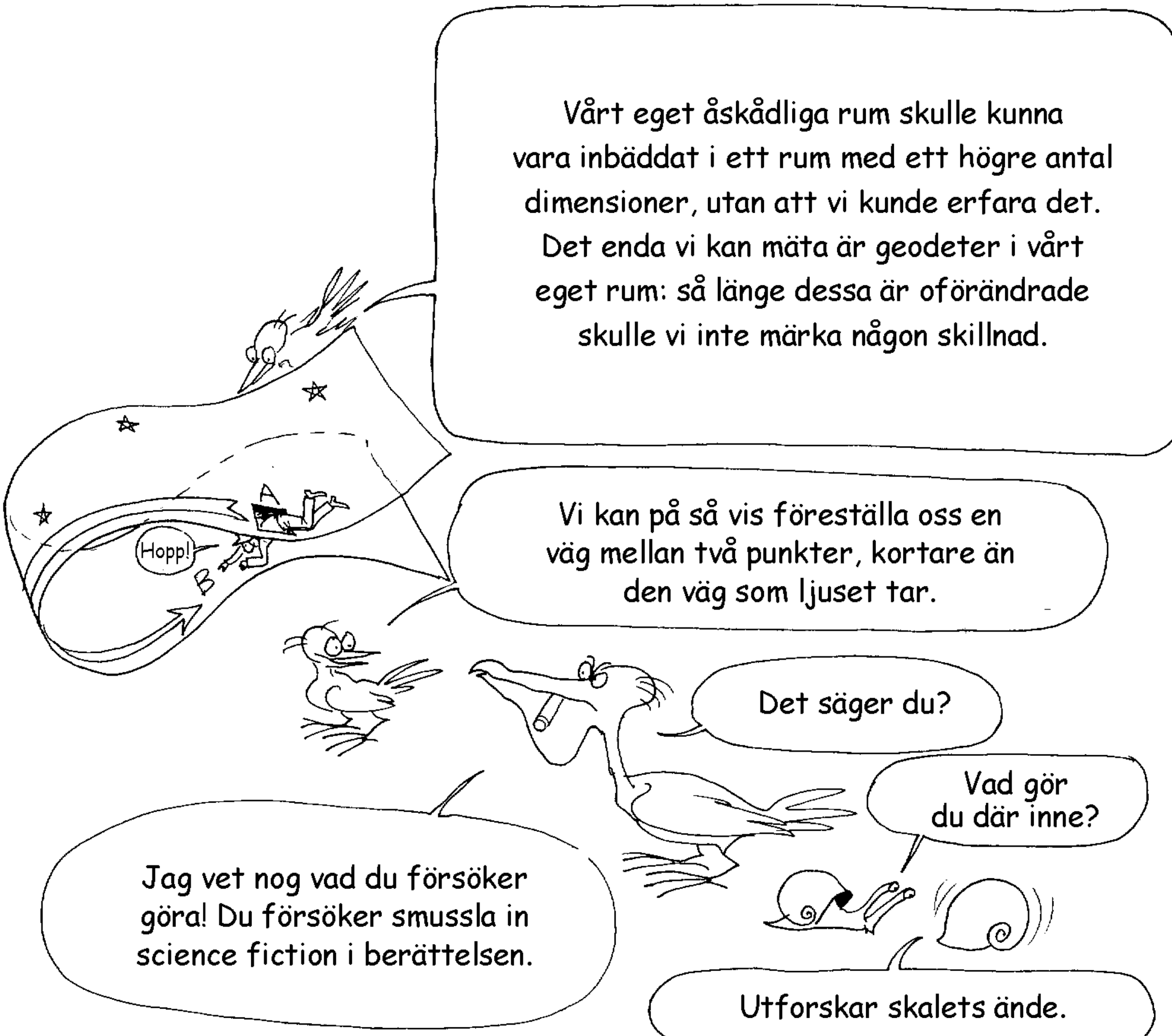


(*) Vår *Lebenswelt*, som matematiskt objekt betraktad.

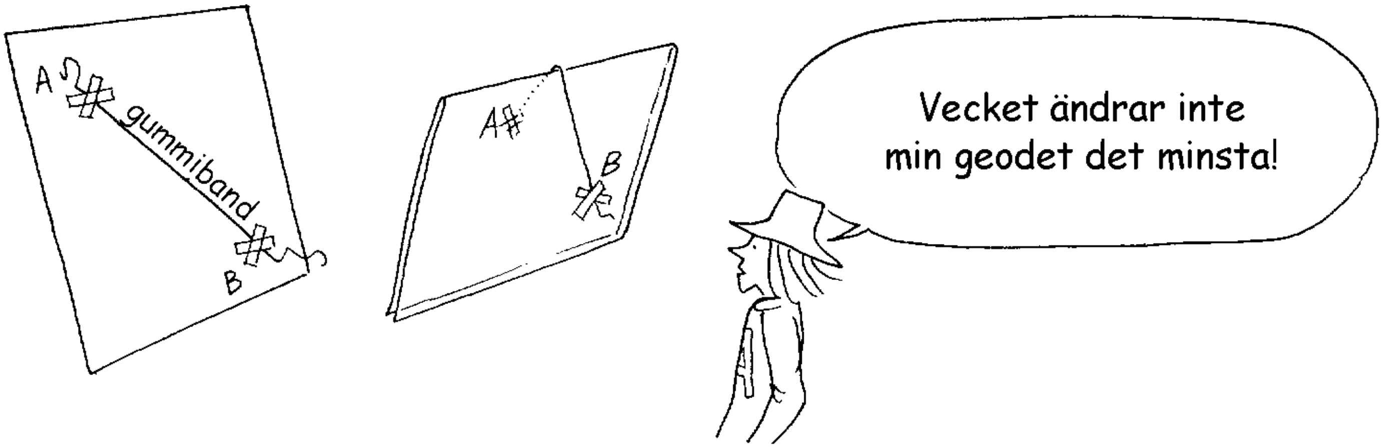
Vi har sett att ett plan låter sig rullas ihop till en cylinder utan att geodeter eller vinklar ändras.

I den meningen är en korrugerad plåt fortfarande PLAN och EUKLIDISK.

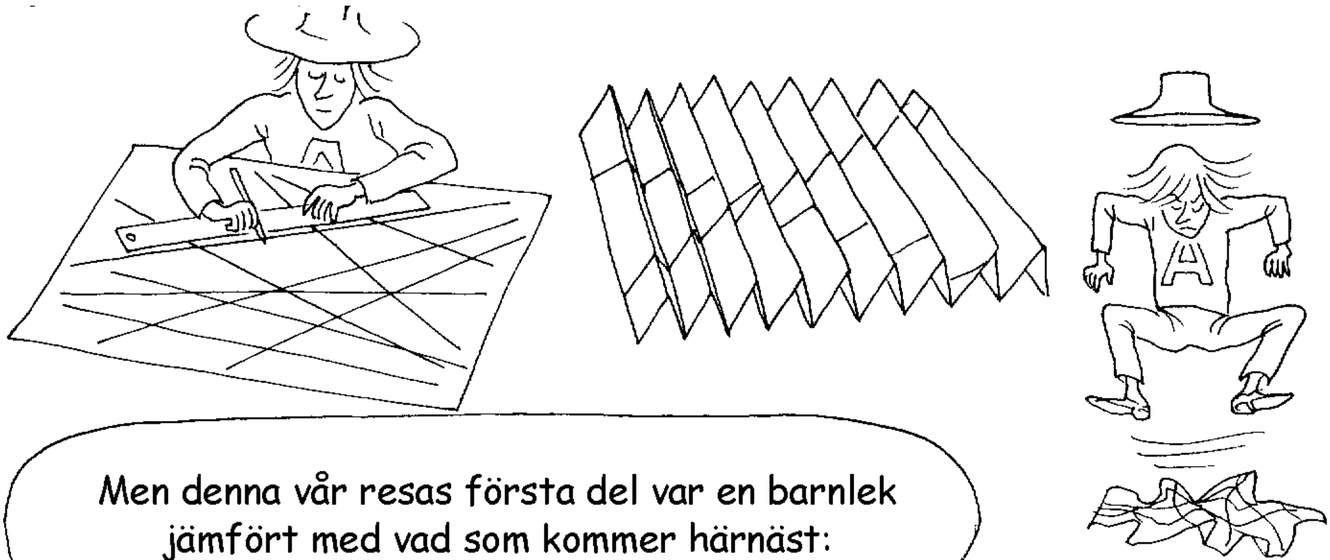
Ett sådant rums invånare skulle vara ovetande om alla yttre deformationer, som bara är oväsentliga variationer i hur ytan inbäddats.

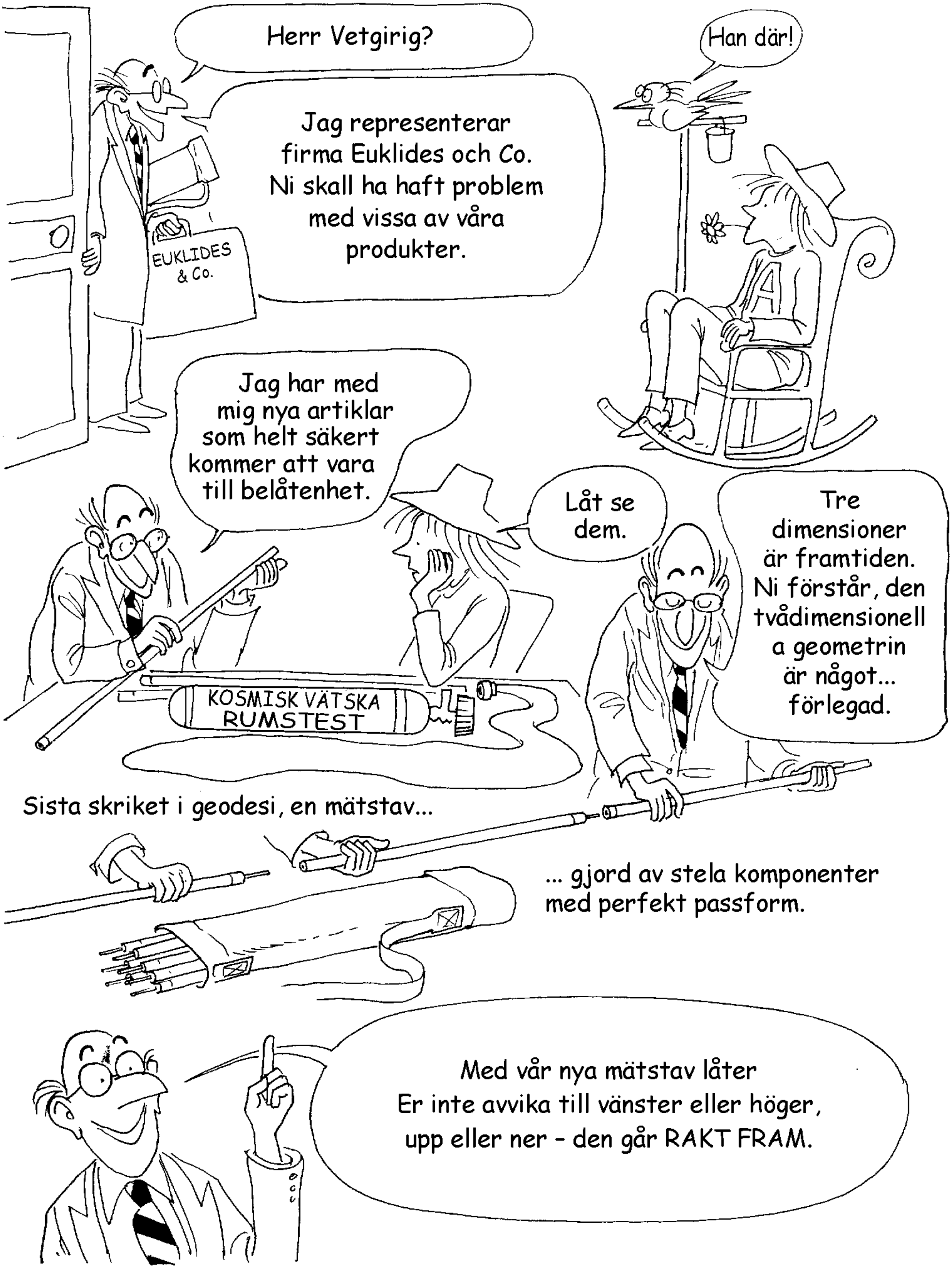


Tag en bit av planet och vik det:



Rita, med hjälp av linjal, ett antal linjer på ett ark papper. Vik sedan pappret flera gånger.
Där ser du geodeterna, med eller utan veck.





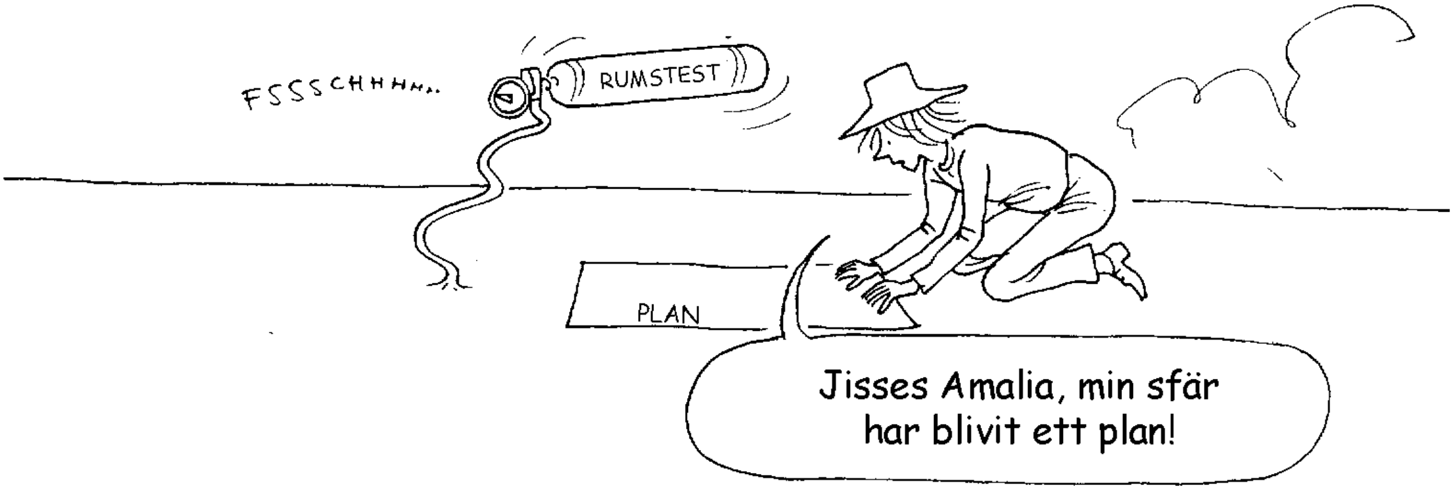
Herr Vetgirig?
Han där!
Jag representerar firma Euklides och Co. Ni skall ha haft problem med vissa av våra produkter.
EUKLIDES & Co.
A
Jag har med mig nya artiklar som helt säkert kommer att vara till belåtenhet.
Låt se dem.
Tre dimensioner är framtiden. Ni förstår, den tvådimensionella geometrin är något... förlegad.
KOSMISK VÄTSKA RUMSTEST
Sista skriket i geodesi, en mätstav...
... gjord av stela komponenter med perfekt passform.
Med vår nya mätstav låter Er inte avvika till vänster eller höger, upp eller ner – den går RAKT FRAM.


För mätning av areor, använd denna färg. Hundra gram per kvadratmeter, exakt.
Fiffigt!
För volymer, använd gas. Rumsinnehållet kan avläsas direkt från mätaren vid ventilen.
Och kom ihåg: sfärens area är $4\pi\ell^2$, dess volym $4/3\pi\ell^3$.
Uppfattat
EUKLIDES Co.
Vilket jobb!
Anselm hamnade i ett tredimensionellt rum. Vi följer honom alltjämt i spåren.

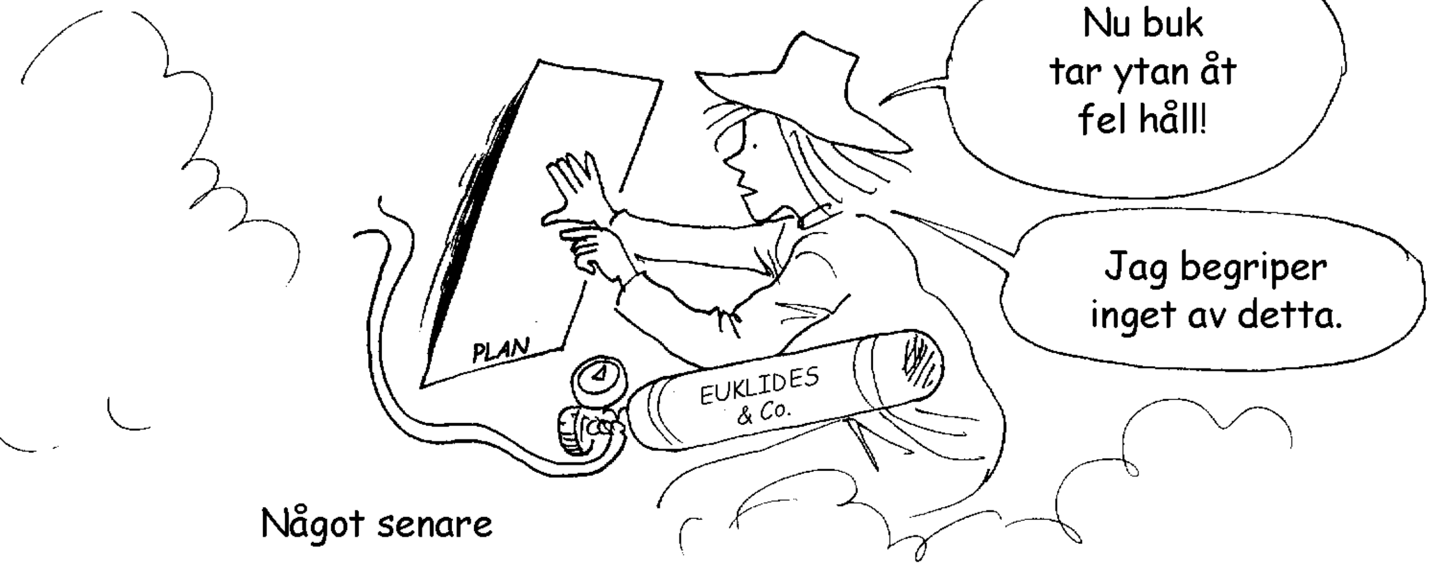

Prima vara.
Och mätstycket är
en meter jämnt.
Men efter att ha satt samman ett stort antal stavar...
Åh nej, nu börjas det igen!
Min geodetiska linje
sluter sig!
Ett slutet tredimensionellt rum?
Nu har jag
sett allt.
Efter en välbehövlig lunchrast på en asteroid beslöt Anselm att återgå till vinkelmätningar.
EUKLIDES & Co.
Som vanligt
mäter jag upp tre
geodeter för att
få en triangel.


?!?
Geodeterna är dragna, hörnen fixerade och vinkelskivorna kalibrerade, men vinkelsumman är större än 180°!
Jaha...
RUMSTEST
FSCHHHHHHHH
Jag gör mig en sfär och sedan mäter jag dess volym och area.
En sfär av radie ℓ är orten av punkter på avstånd ℓ från en given punkt, som jag kallar N.
Och arean är mindre än 4πℓ²...
Volymen är mindre än 4/3πℓ³!
Nu börjar jag få nog.

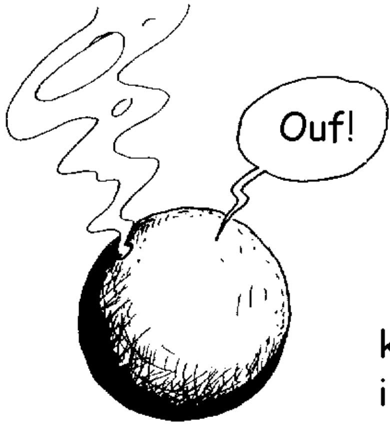
Anselm ökade sfärens radie ℓ...



Mer och mer...



Något senare

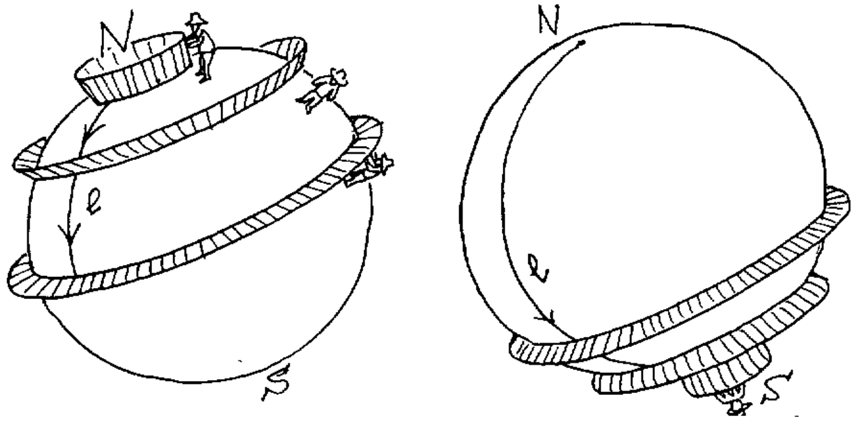


Genom att blåsa upp en ballong i ett tredimensionellt rum, hamnade Anselm – på dess insida!

Om han inte stängt av gasen i tid, hade han blivit krossad, i likhet med hur han fångades av sin egen inhägnad på sida 13.

Man kan med bästa vilja i världen inte visualisera detta tredimensionellt rums krökning. Dess geodeter sluter sig och dess volym är ÄNDLIG, på samma sätt som vår planets yta är en sluten yta med ändlig area.
En triangels vinkelsumma i detta rum är större än 180°. För att SE krökningen i strikt bemärkelse måste man kunna visualisera en fjärde dimension.

Man kan utan logisk motsägelse tänka sig att vårt UNIVERSUM är en tredimensionell HYPERYTA i ett fyrdimensionellt rum, som är en hyperyta i ett femdimensionellt rum, osv. Men att diskutera detta hör inte till god ton.



På sfären ledde Anselms försök med ökande radier till att han fann sig på sydpolen S, antipoden till cirklarnas mittpunkt N, och han fångades i sin egen inhägnad.

I ett tredimensionellt rum av konstant positiv krökning händer detsamma. Den tvådimensionella sfären har en ekvator som delar rummet i två lika stora delar. Den tredimensionella hypersfären har också en ekvator; när ballongen sammanföll med ekvatorn uppfyllde den halva rummet. På sfären ser ekvatorn ut som en rät linje; i hypersfären ser ekvatorn ut som ett plan.

Efter att ballongen passerat ekvatorn ändrade dess krökning tecken och den började krympa ihop kring den ursprungliga mittpunktens antipod.

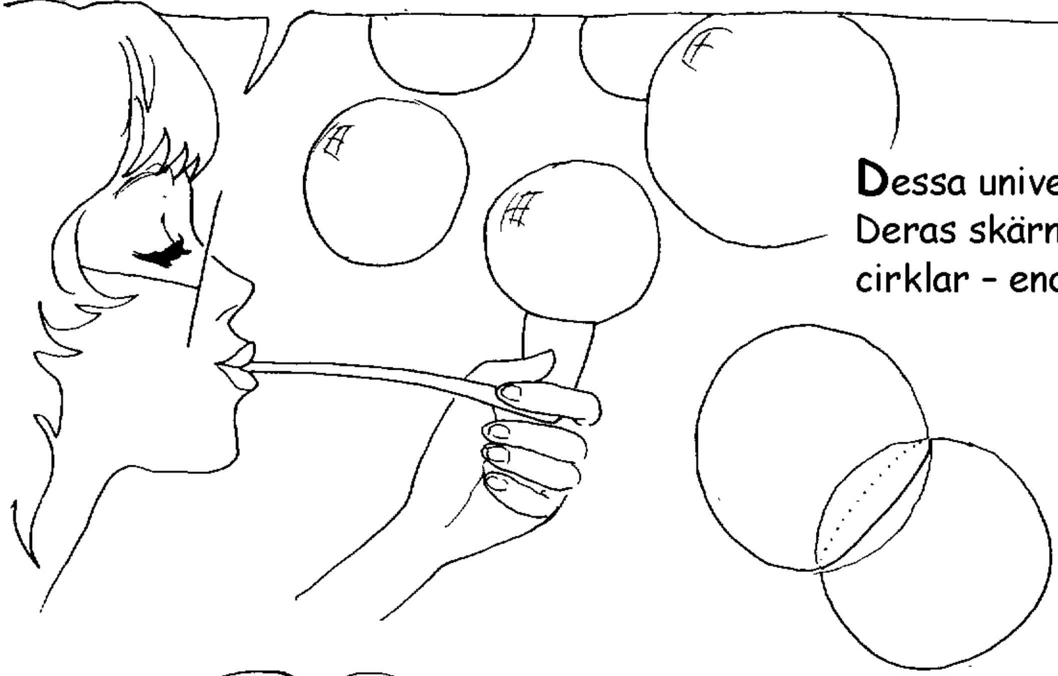

Vad står på?
Jo, alltså... eh... allt blev lite rörigt i mitt huvud, bara.
Jag heter Sofie. Kurvor av alla slag är mitt gebit.
Att navigera i en hypersfär känns alltid lite ovant i början. Man får ta det lite i sänder så att man inte blir konfys.
M-hm...
Jag har liksom tappat tråden...

Men hypersfärens MITTPUNKT, var är den?
Om jag ritar en cirkel i planet, ser du klart och tydligt att vi har ett endimensionellt rum, slutet och inbäddat i ett tvådimensionellt - nämligen planet.
Och cirkelns mittpunkt ligger inte PÅ cirkeln.
mmm...
En sfär är en sluten tvådimensionell yta, inbäddad i en tredimensionell rymd. Sfärens mittpunkt ligger inte heller PÅ sfären.
Den tredimensionella hypersfärens mittpunkt kan tänkas ligga utanför hypersfären, i ett fyrdimensionellt rum, såvida vi har bäddat in hypersfären i ett sådant. En fyrdimensionell hypersfär kan inbäddas i ett femdimensionellt rum, och så vidare...

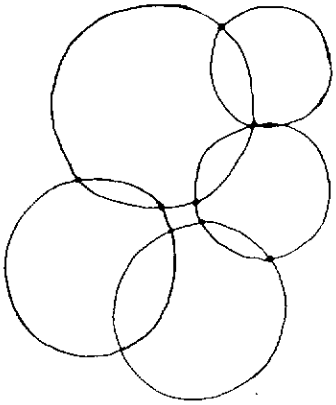

N.
Här är du, i din tvådimensionella värld, platt som ett klistermärke.
Och du börjar blåsa upp din cirkel, som är en endimensionell sfär...
N
I det tvådimensionella rummet avgränsar ballongen en yta. I ett rum med tre dimensioner avgränsar den en volym.
A
Där passerar ballongen sfärens ekvator.
I ett fyrdimensionellt rum skulle ballongen vara tredimensionell och utgöra randen av en fyrdimensionell hypervolym.
Nu börjas det igen!
Vi drar!
N
Se, här är din cirkel, den endimensionella ballongen. Den upptar nu mer än hälften av sfärens area - och har börjat sluta sig kring dig, som fångas vid antipoden S.
S

Samma sak hände i mitt krökta tredimensionella rum: när jag fyllt mer än halva volymen började ballongen välva sig kring mig och jag blev instängd vid antipoden.
Sfären, i detta krökta tredimensionella rum, har förstås två mittpunkter, som är varandras antipoder.
Jag förstår!
?!!?
Jag är inte riktigt hundra på vad jag förstått, men jag har en stark känsla av förståelse.
Vilken besvikelse.
Visst inte, Anselm. I mer än tre dimensioner är förståelse att extrapolera.
Jag extrapolerar för fullt!
Teckningen får du stå för själv, i andanom.

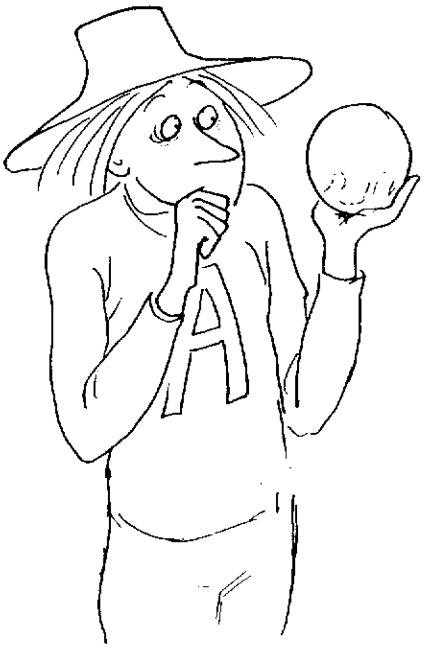
Härnäst tar jag ett tredimensionellt rum och placerar en massa tvådimensionella sfärer i det, ett multiversum i miniatyr.



Dessa universa kan mötas. Deras skärningspunkter är cirklar - endimensionella objekt.



På samma sätt kan cirklar, som är endimensionella, när de ritas på ett pappersark (två dimensioner), skära varandra i punkter (som sägs ha dimension noll).



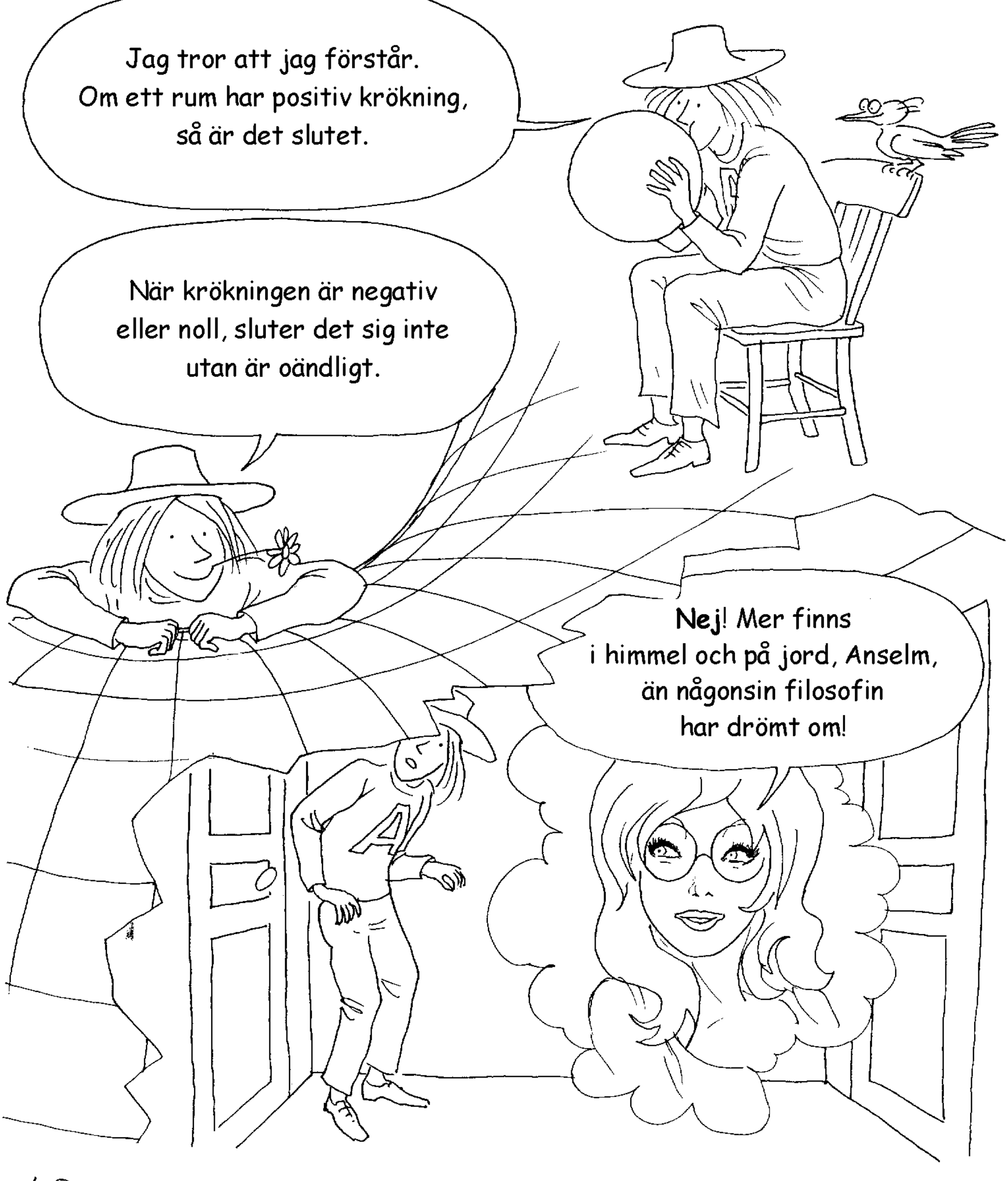
Så en sfär kan ses som skärningen av två 3-dimensionella "sfärer" i ett fyrdimensionellt rum.

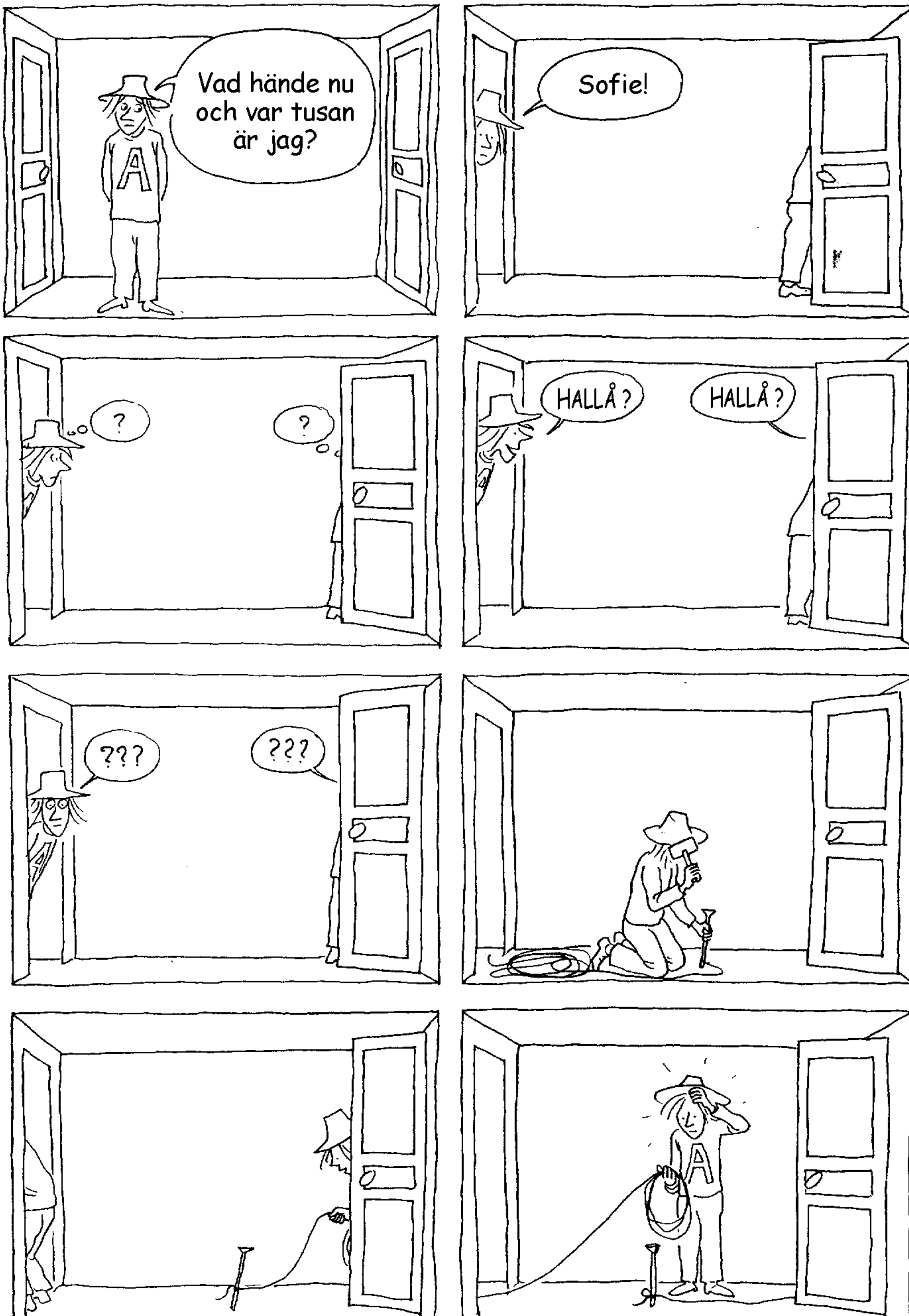
Och så vidare: ett tredimensionellt krökt rum, en hypersfär, kan ses som skärningen av två fyrdimensionella sfärer i ett femdimensionellt rum.

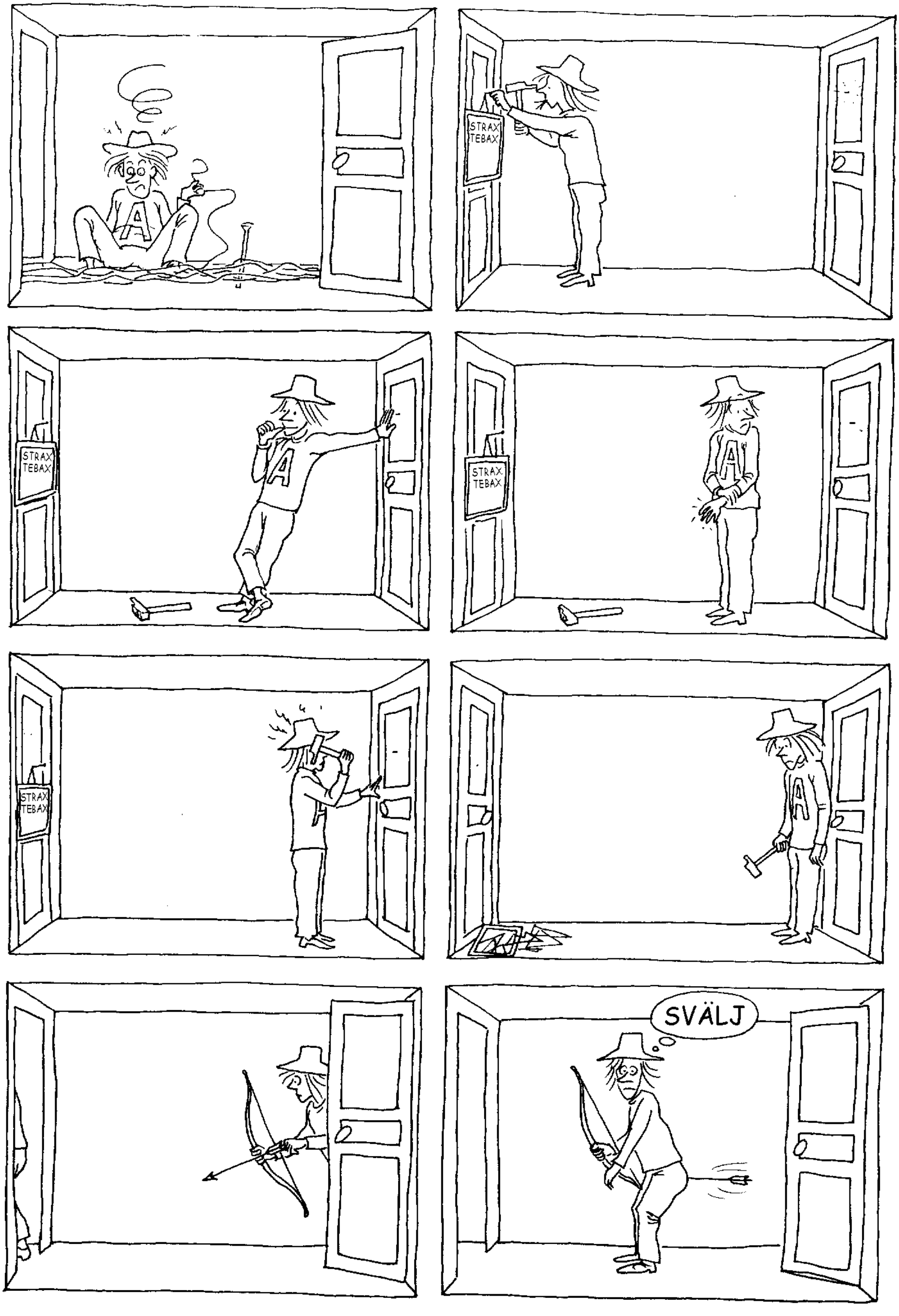

Efter dessa svindelframkallande överväganden återgår Anselm och Sofie till studiet av nya tredimensionella världar.
Matematiken är inte vad den varit.
Här har jag tredimensionell tejp, för att göra geodeter. Klistret är på undersidan... såklart.
Kolla, i det här rummet sluter sig inte geodeterna. Och när jag blåser upp ballongen är dess volym större än $4/3\pi\ell^3$, och arean större än $4\pi\ell^2$. Trianglars vinkelsummor är mindre än 180°.
Kom ihåg sida 23, så inser du att du är i ett rum med negativ krökning.


SAMMANFATTNING:
I ett tredimensionellt rum kan underliga saker hända: krökningen i en punkt kan bero på hur triangeln är orienterad! Men om vi antar att krökningen är riktningsoberoende och densamma i alla punkter, kan vi säga att positiv krökning kännetecknas av att trianglars vinkelsummor är större än 180°, en sfär av radie ℓ har en mindre area än $4\pi\ell^2$ och en mindre volym än $4/3\pi\ell^3$. Då är rummet en hypersfär, och är slutet. I det motsatta fallet, med negativ krökning, är trianglars vinkelsummor mindre än 180° och sfärens yta och volym är större än de borde.
Om alla trianglar har vinkelsumman 180°, är rummet euklidiskt.
Mycket väsen för det lilla!

ETT RUM MÅSTE VARA ÖPPET ELLER SLUTET!

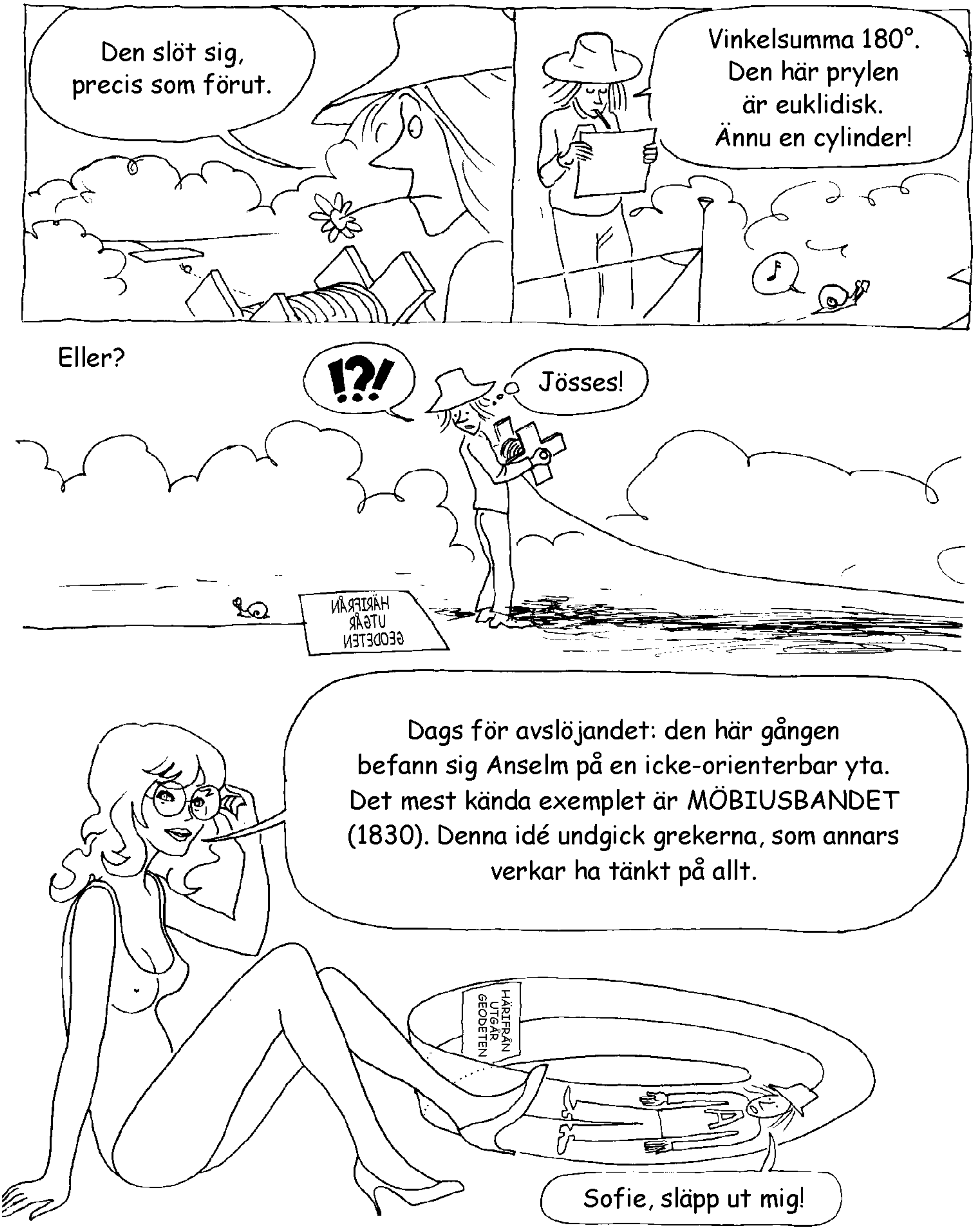



Vad hände nu
och var tusan
är jag?
Sofie!
?
?
HALLÅ?
HALLÅ?
???
???

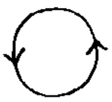

STRAX TEBAX
STRAX TEBAX
STRAX TEBAX
STRAX TEBAX
SVÄLJ


Anselm blev placerad i en tredimensionell cylinder. Trots att rummet var euklidiskt (alla trianglars vinkelsummor 180°) var denna värld sluten.
SVÄLJ
Jaha, så nu har vi sfärer, hypersfärer, cylindrar... lite väl många rum, kanske?
GEOMETRI
Tror du?
Vi tar en tripp till den tvådimensionella världen igen.
Häh!?
DIMMA

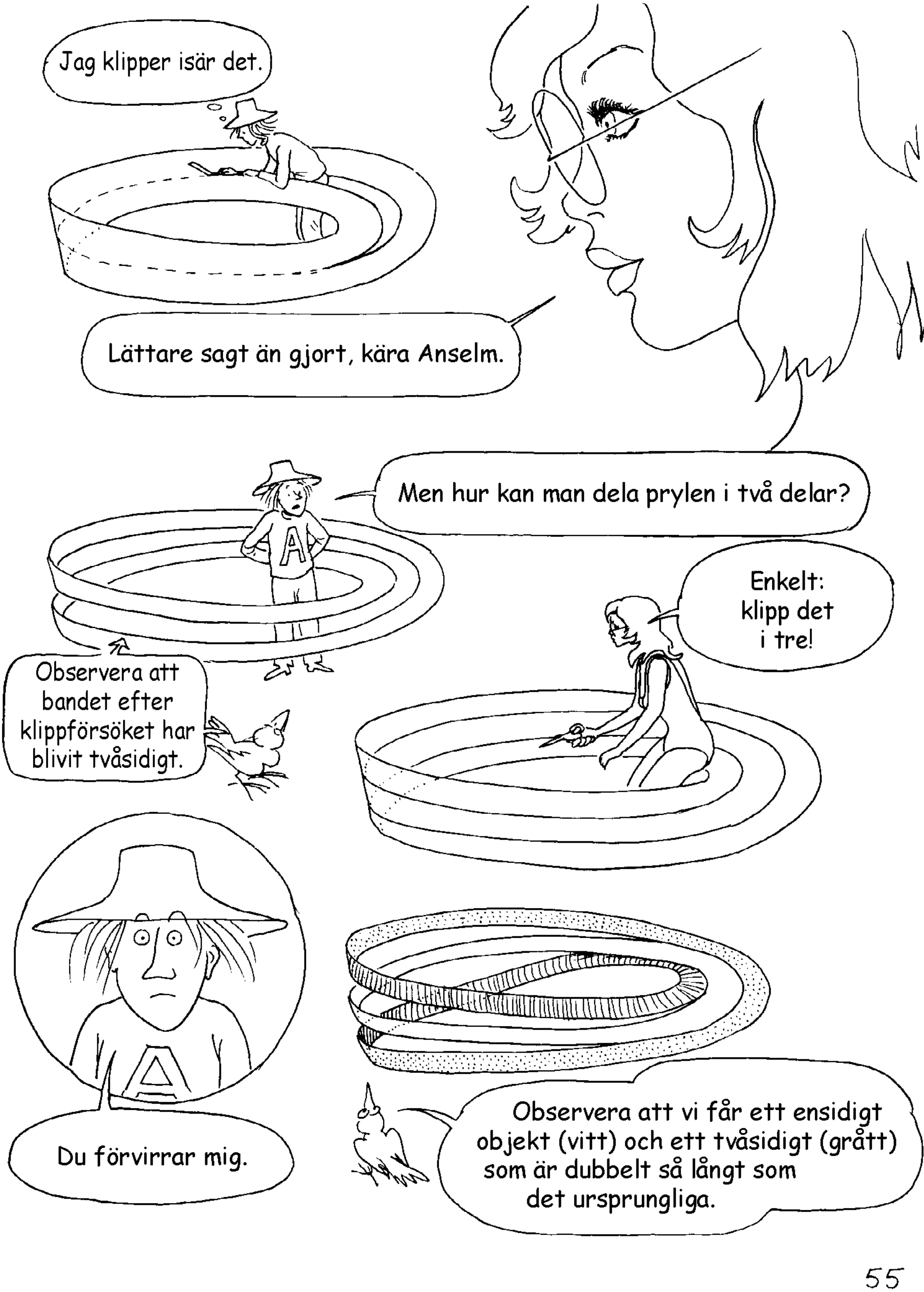
UTAN OCH INNAN :


Den slöt sig,
precis som förut.
Vinkelsumma 180°.
Den här prylen
är euklidisk.
Ännu en cylinder!
Eller?
!?!
Jösses!
Dags för avslöjandet: den här gången befann sig Anselm på en icke-orienterbar yta. Det mest kända exemplet är MÖBIUSBANDET (1830). Denna idé undgick grekerna, som annars verkar ha tänkt på allt.
HÄRIFRÅN UTGÅR GEODETEN
Sofie, släpp ut mig!

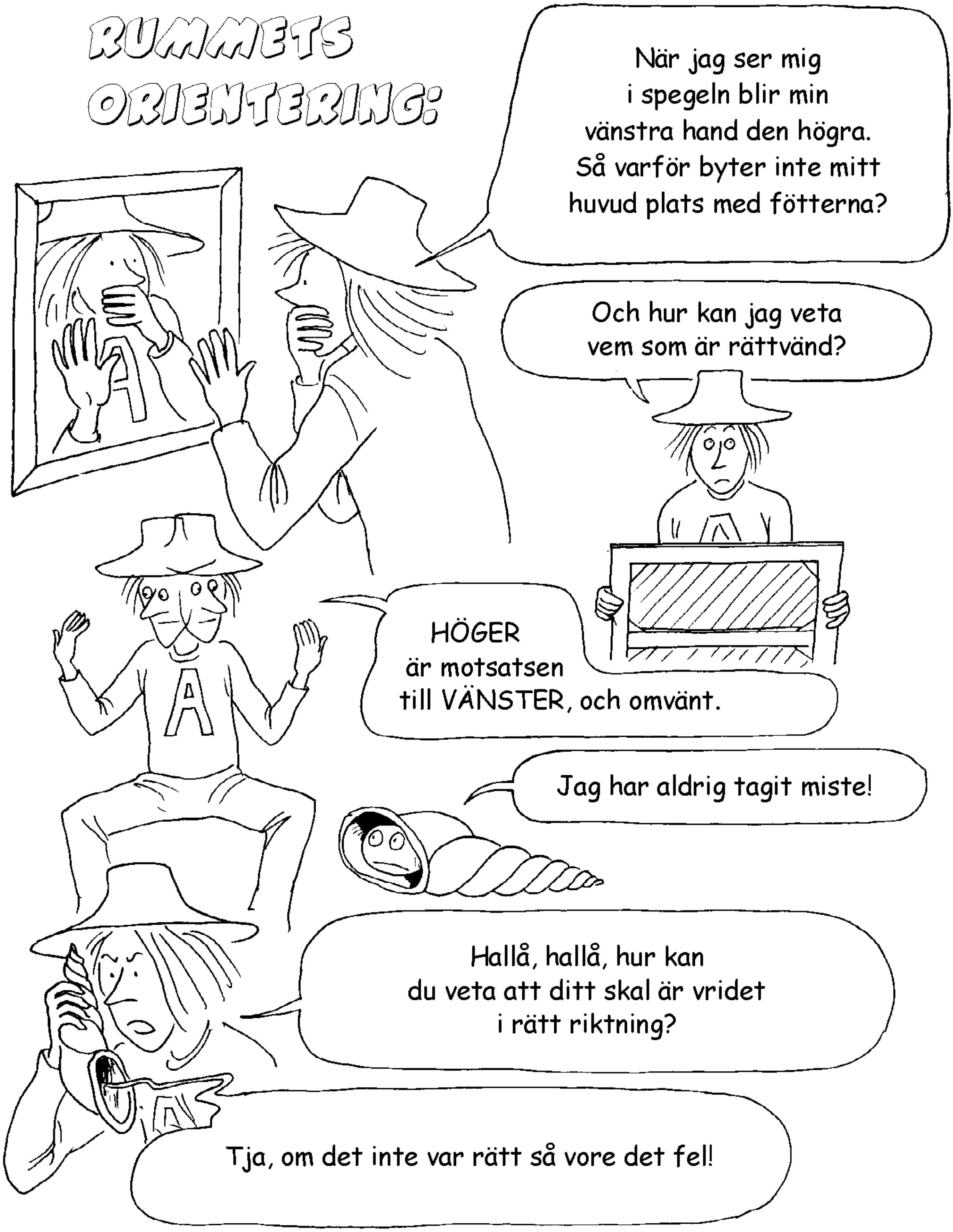
Rita en cirkel på en yta, och ge den en omloppsriktning.



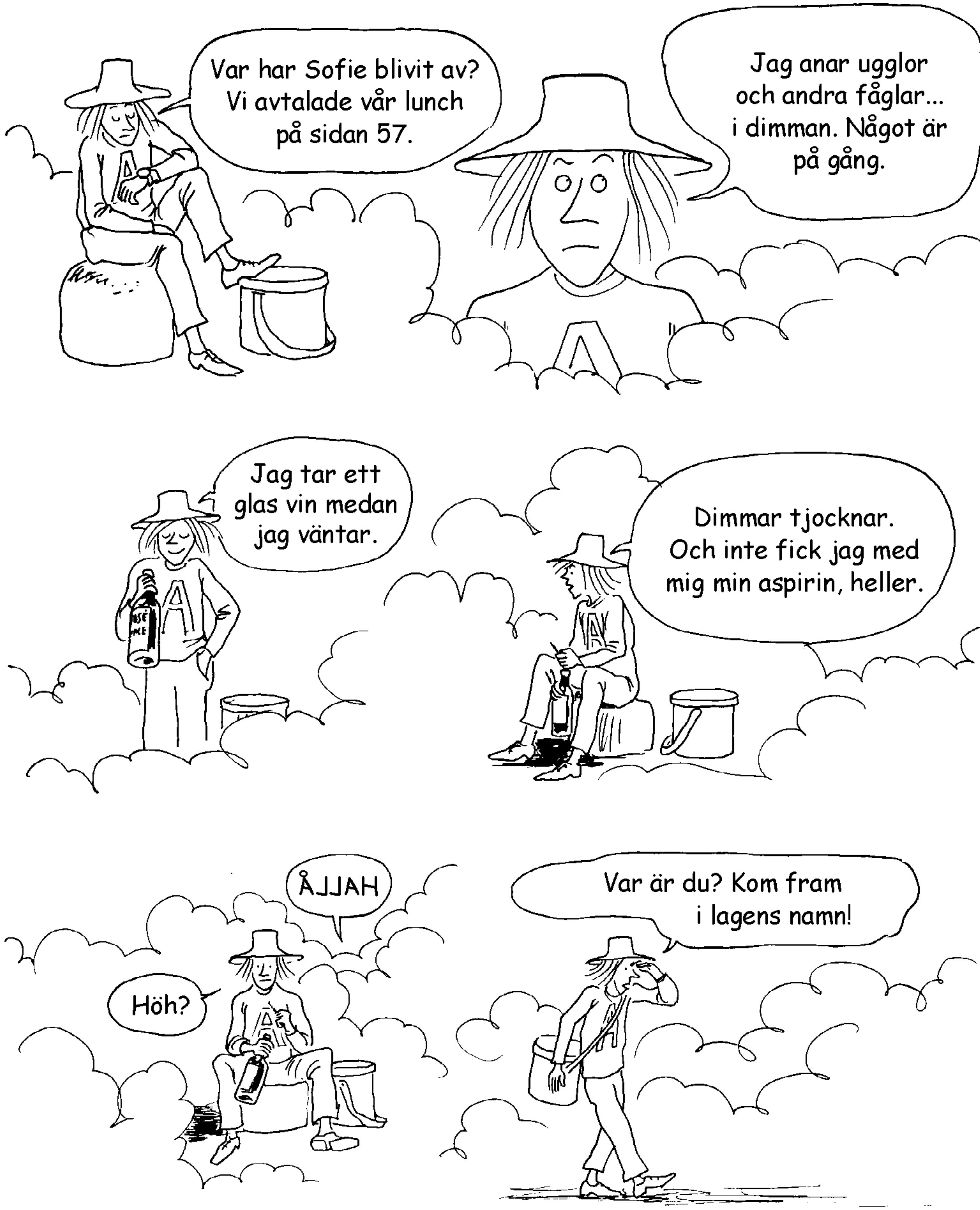
Vi tänker oss att cirkeln kan glida på ytan. Om cirkeln efter att ha genomlöpt en sluten kurva **alltid** kommer tillbaka med samma omloppsrikting, sägs ytan vara orienterbar – detta händer med sfärer, cylindar, plan osv. Men på ett möbiusband kan annat hända...


Jag klipper isär det.
Lättare sagt än gjort, kära Anselm.
Men hur kan man dela prylen i två delar?
Observera att bandet efter klippförsöket har blivit tvåsidigt.
Enkelt: klipp det i tre!
Du förvirrar mig.
Observera att vi får ett ensidigt objekt (vitt) och ett tvåsidigt (grått) som är dubbelt så långt som det ursprungliga.

Efter detta ensidiga mellanspel återgår vi till euklidiska tredimensionella rum.



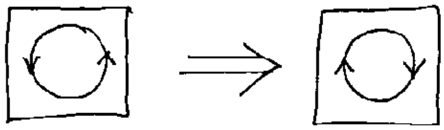
Vi slår följe med Vetgirig på ännu en expedition till en euklidisk tredimensionell värld.



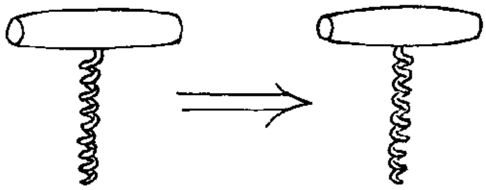

iH iH iH
!iH !iH !iH
Jag får göra några tester.
Vinkelsumma 180°...
Area $4\pi\ell^2$ volym $4/3\pi\ell^3$
RUMSTEST
Det är euklidiskt.
Vilken tur, där är min flaska.
Men vad är det för fel med korkskruven?
Jo, det är allt min korkskruv, jag känner igen den.
Vad kan ha hänt den?
Titta noga!
Problem?
Jag... eh...

En rosé från Provence, minsann. Inte fy skam...
Har du en korskskruv?
Äh... ja...
Där bränner jaaag mitt brännvin sjäääälv...
BLUB BLUB BLUB
Märker du något konstigt?
Nej, du ser lite blek ut, bara.
Lägg dig ner att vila så mår du nog bättre.
Ha're!
CLOP
CLOP
CLOP
CLOP
Någon har fifflat med min korkskruv, och en alkoholiserad känguru har druckit upp mitt vin. Vad är det egentligen som pågår?
Sablar!
SBLING!
LÄSAREN OMBEDES IAKTTA KORKSKRUVEN MED STÖRSTA MÖJLIGA NOGGRANNHET

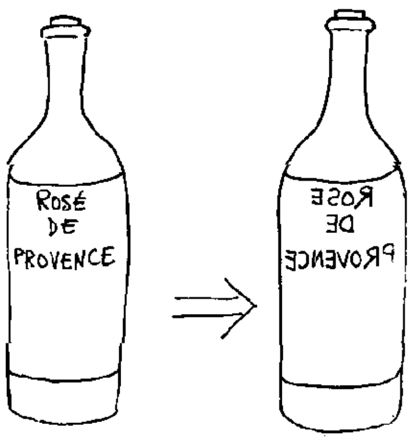
Möbiusbandet (en ickeorienterbar yta) har en tredimensionell analog. När ett kiralt objekt genomlöper en viss krets på bandet, ändras dess hänthet:



Se sida 54



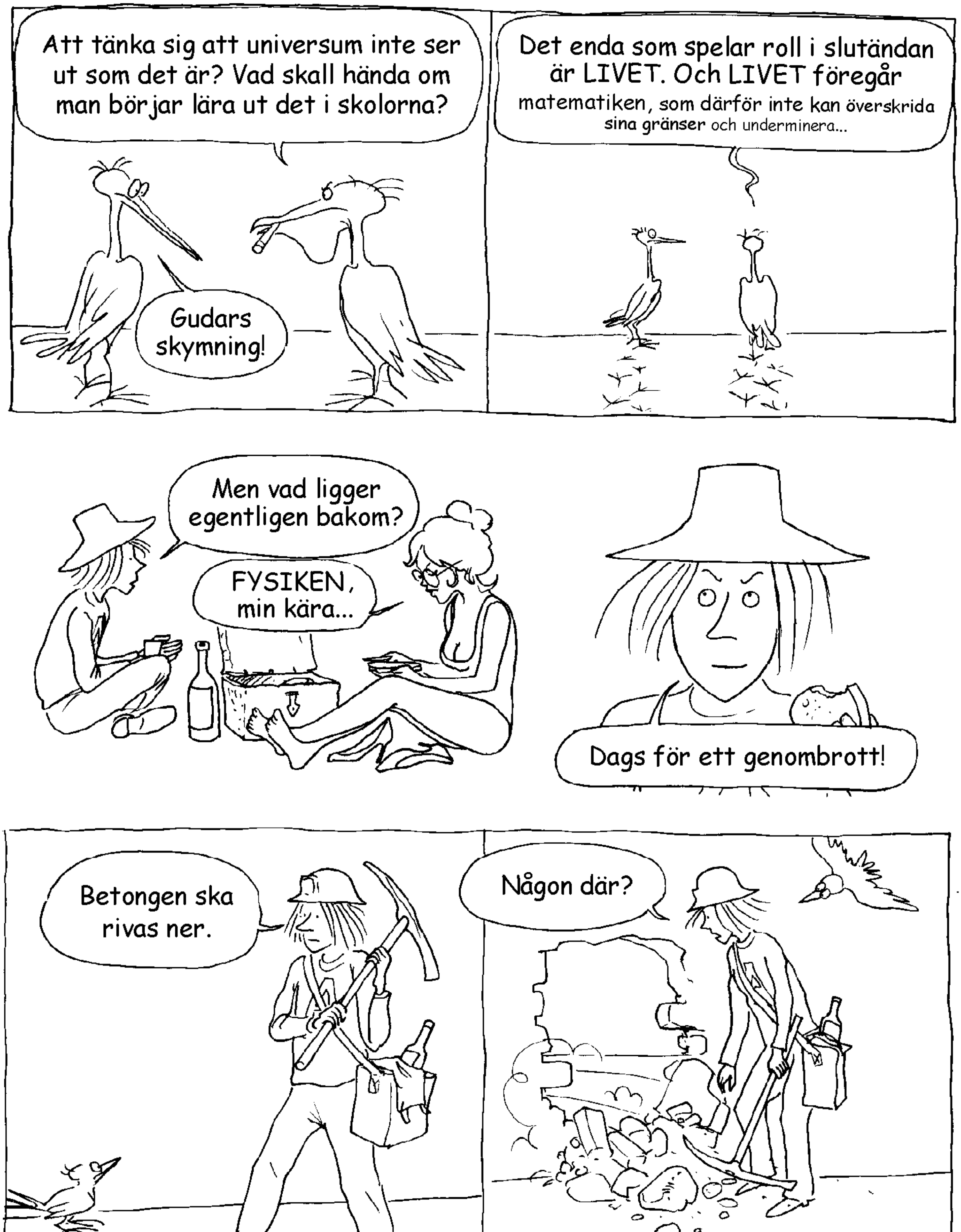
Objekten är varandras spegelbilder.
Korkskruvarna, liksom Anselm själv, kan ses som markörer.
Varje gång ett objekt genomlöper en viss krets i detta tredimensionella rum, kastas dess hänthet om. Efter att ha följt med Anselm kom vi tillbaka till korkskruven, som nu såg ut att ha fel orientering.
Ännu ett varv längs samma krets skulle återställa den ursprungliga situationen, förutsatt att vi lät korkskruven ligga.



Anselm och kängurun (en antipodal art) bebodde samma rum, men hade olika uppfattningar om vilken orientering som var den rätta.

EPiLOG:


Allt fast förflyktigas. Det finns varken vänster eller höger, medsols eller motsols. Vart ska jag ta vägen? Och vart tar vägen vägen?
Ibland är det bättre att gå på i blindo och inte tänka alltför mycket.
Ni kan aldrig få mig att tro att universum är SÅ vridet. Det är bara påhitt av stolliga matematiker.
Det liknar ett seriealbum!
Varför bry sitt huvud med sådant, när rummet uppenbarligen är euklidiskt? (*)
(*) Åsikt yttrad år 1830 av Ostrogradskij, ukrainsk matematiker verksam i St Petersburg, apropå Riemanns och Lobatjevskijs arbeten.


Att tänka sig att universum inte ser ut som det är? Vad skall hända om man börjar lära ut det i skolorna?
Gudars skymning!
Det enda som spelar roll i slutändan är LIVET. Och LIVET föregår matematiken, som därför inte kan överskrida sina gränser och underminera...
Men vad ligger egentligen bakom?
FYSIKEN, min kära...
Dags för ett genombrott!
Betongen ska rivas ner.
Någon där?


... om universums masstäthet är lägre än 10-29 gm/cm3...
?
... så kommer universum att ha negativ krökning och vara oändligt...
... om å andra sidan tätheten är högre än 10-29 gm/cm3...
!..
...blir universum en hypersfär och sluter sig...
Men om tätheten är 10-29 gm/cm3 blir universum EUKLIDISKT...
MMM
Doktor Einstein, förmodar jag?
Densamme.
SLUT