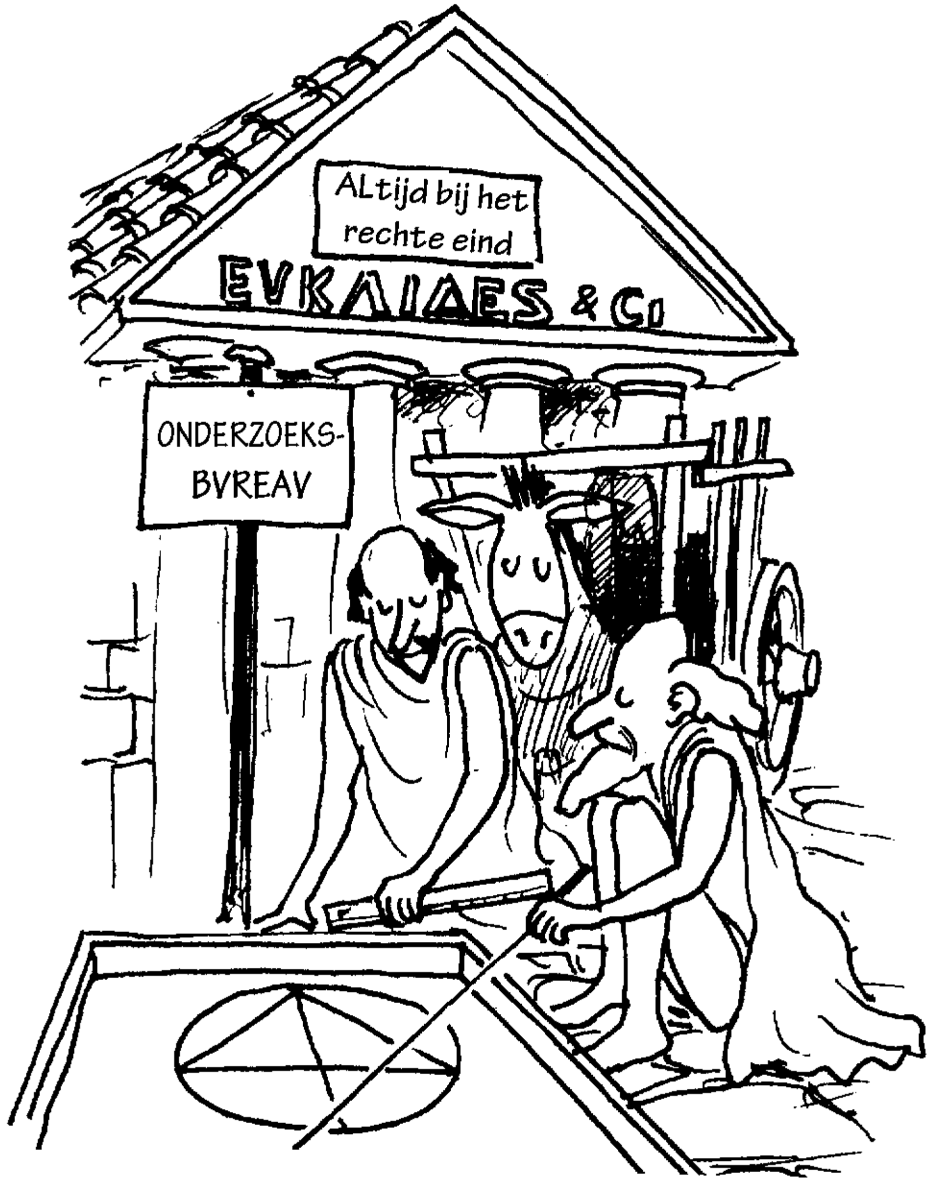
De Avonturen van Anselm Lanterlu

DE GEOMETRICON

Jean-Pierre Petit

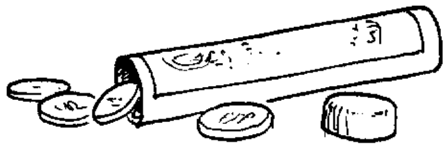


LET OP

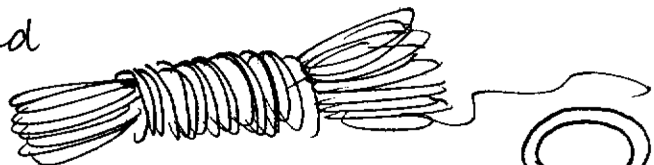
Dit is geen handleiding en ook geen cursus.
Het is simpelweg het verhaal van Anselm Lanterlu en een van zijn reizen in het land van de geometrie.

Bij voorkeur lezen met:

* Allereerst asperine



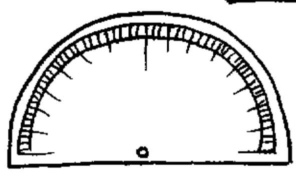
* Vervolgens draad



* Een schaar

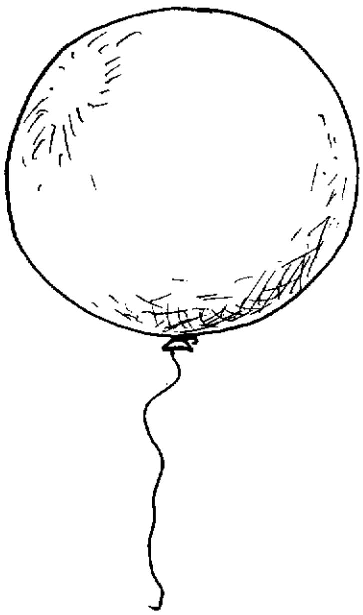
* Plakband

* Een gradenboog



* En een leuke ballon,

mooi rond...



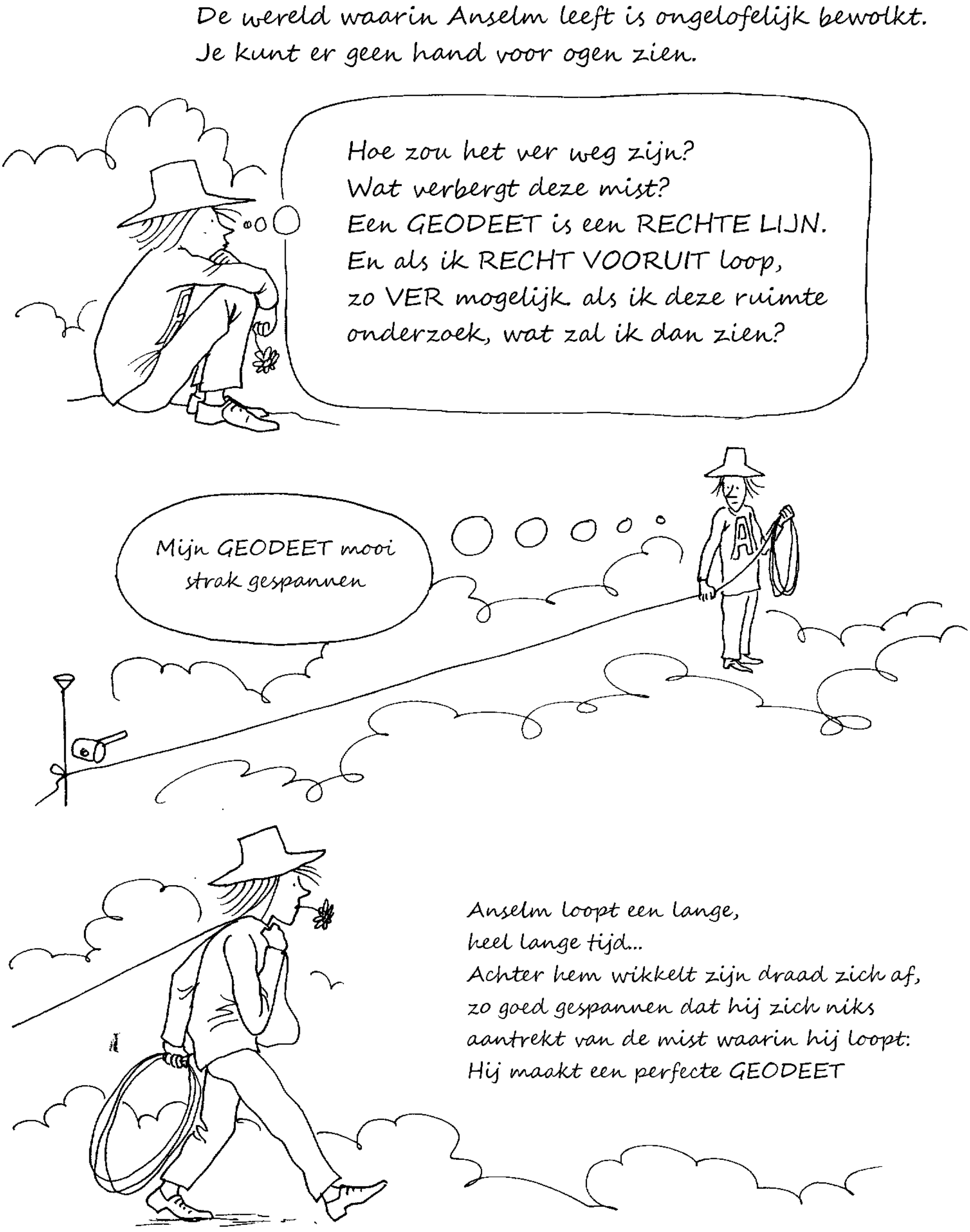
Het bedrijf Euclides & co werd opgericht in Alexandrië in de derde eeuw voor Christus. De zaak maakte een bloeiperiode door van tweeëntwintighonderd jaar. De producten werden gewaardeerd en de klanten waren trouw en tevreden.

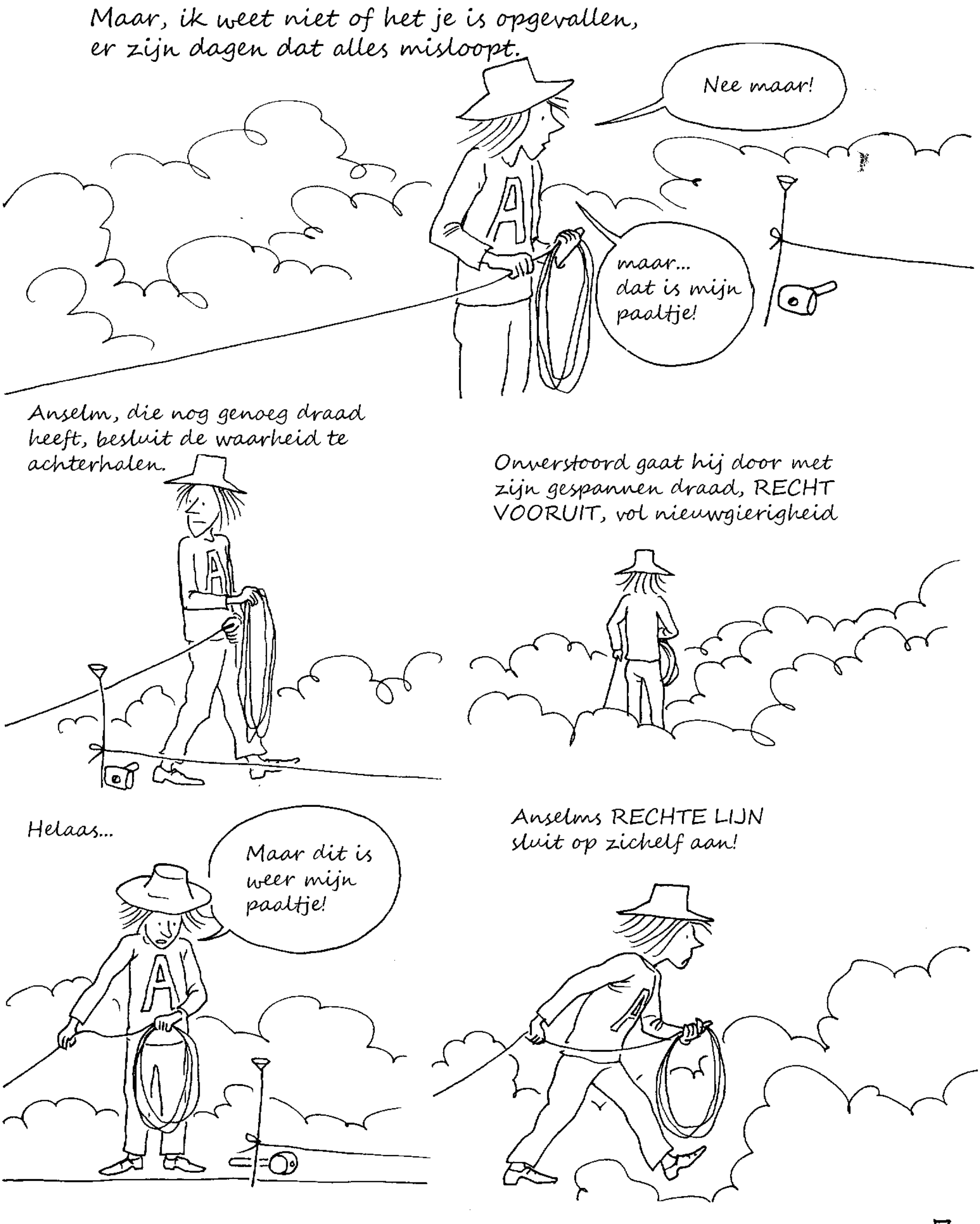
Maar, beetje bij beetje, veranderden de smaken van de klanten. Sommige mensen, die het merk vroeger altijd trouw waren geweest, begonnen zich na verschillende experimenten af te vragen: "Euclides, is het wel waar, overal en voor iedereen, dat dit de waarheid is?"

Hier vertellen wij het verhaal van een van deze mensen

PROLOOG: Op een dag besluit Anselm Lanterlu een draad te spannen tussen twee paaltjes:

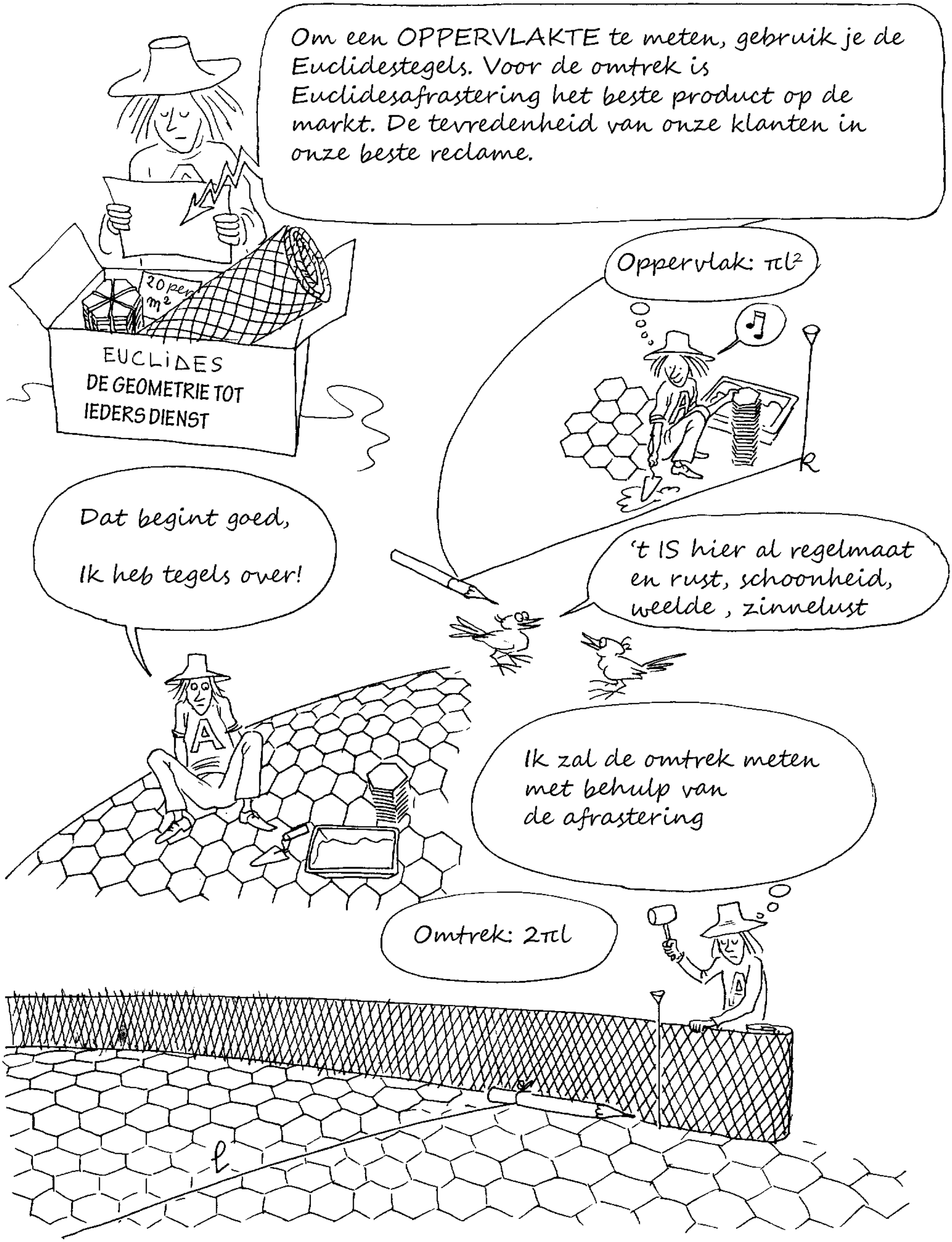

Met drie gespannen draden,
dat wil zeggen: met drie GEODETEN,
B
A
heeft Anselm een DRIEHOEK
gemaakt
Door zijn gradenboog op elke hoek van de DRIEHOEK
te plaatsen, meet hij de hoeken A, B en C en berekent
hij hun som
Volgens de uitstekende theorie van het bedrijf Euclides & co moet de som 180° zijn.
Mooi zo...
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ Ευκλιδες

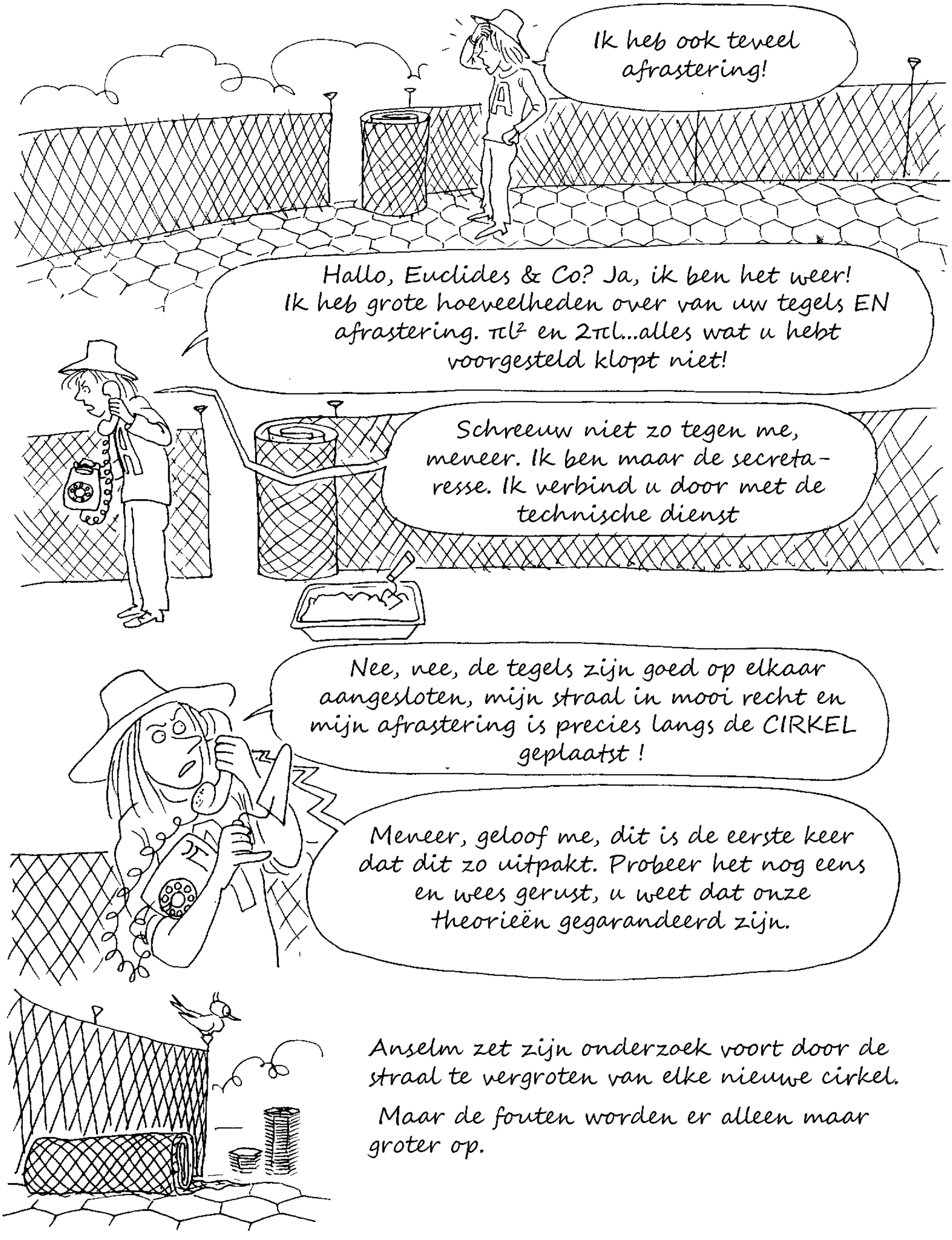

De wereld waarin Anselm leeft is ongelofelijk bewolkt.
Je kunt er geen hand voor ogen zien.
Hoe zou het ver weg zijn?
Wat verbergt deze mist?
Een GEODEET is een RECHTE LIJN.
En als ik RECHT VOORUIT loop,
zo VER mogelijk als ik deze ruimte
onderzoek, wat zal ik dan zien?
Mijn GEODEET mooi strak gespannen
Anselm loopt een lange,
heel lange tijd...
Achter hem wikkelt zijn draad zich af,
zo goed gespannen dat hij zich niks
aantrekt van de mist waarin hij loopt:
Hij maakt een perfecte GEODEET


Maar, ik weet niet of het je is opgevallen, er zijn dagen dat alles misloopt.
Nee maar!
maar... dat is mijn paaltje!
Anselm, die nog genoeg draad heeft, besluit de waarheid te achterhalen.
Onverstoord gaat hij door met zijn gespannen draad, RECHT VOORUIT, vol nieuwgierigheid
Helaas...
Maar dit is weer mijn paaltje!
Anselms RECHTE LIJN sluit op zichelf aan!


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Laten we die Euclidestheorie eens proberen. Ik ga drie GEODETEN maken met dezelfde lengte. Dan krijg ik een DRIEHOEK, waarbij de drie hoeken allemaal 60° moeten zijn en hun som zal 180° zijn.
Dat staat op dit papier.
B A C 60 60 60
∠A+∠B+∠C = 180°
We zullen zien
RATIO OMNIA VINCIT
A
Kijk eens aan, mijn tweede hoekpunt B. Om de derde te vinden moet ik de twee andere lijnen trekken
B
wat is weten-schap toch mooi
O,jee! De hoeken zijn mooi gelijk, maar ze zijn groter dan 60°.
een probleem?
C
Hun som is zeker weten meer dan 180°
EUCLIDISCHE GEOMETRIE
EUCLIDES
EUCLIDES

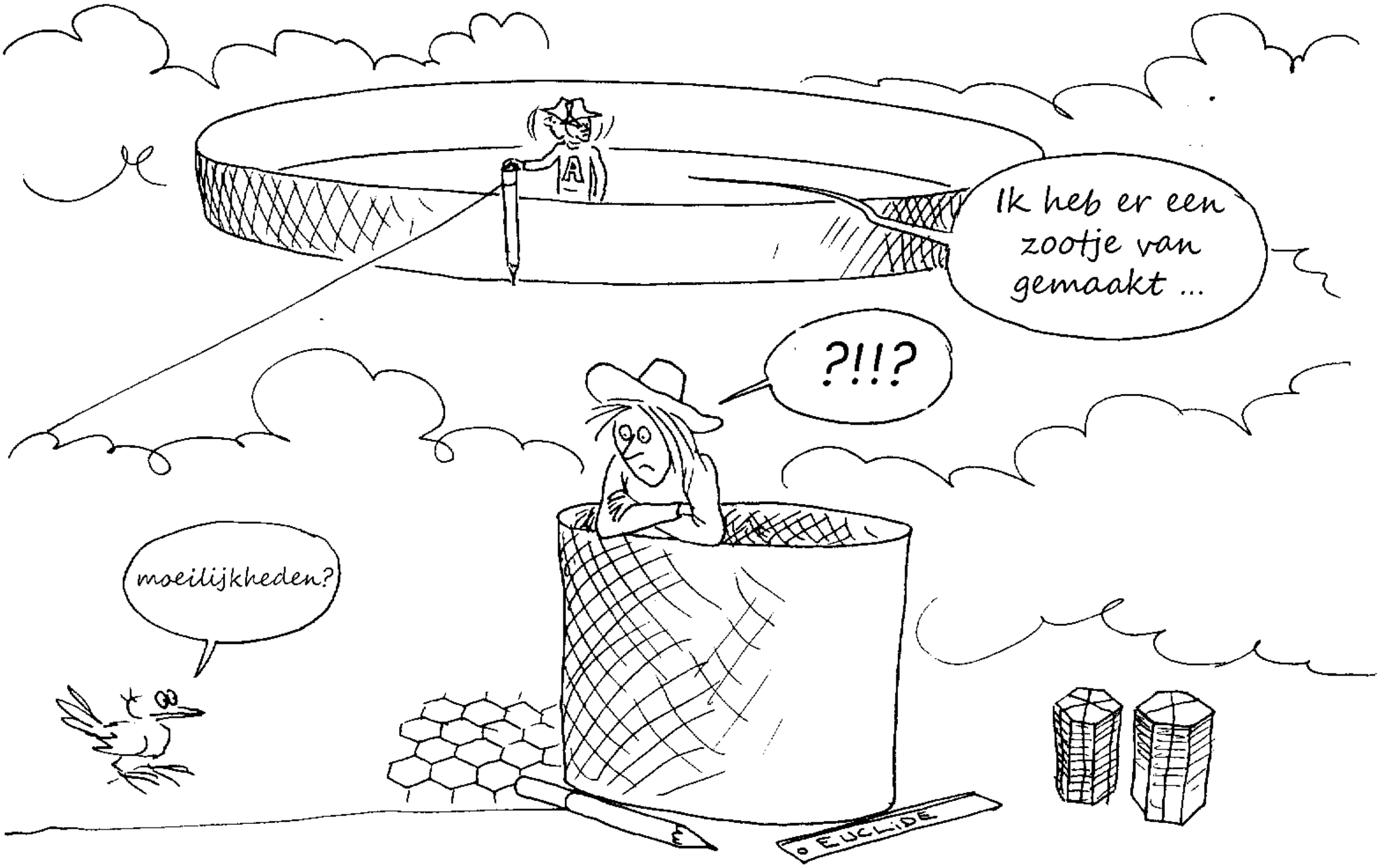

Toch, als ik mijn lineaal mooi PLAT leg, kan ik controleren dat mijn lijnen wel goed RECHT zijn.
EUCLIDES
Hallo, Euclides & co? Zeg, ik heb een probleem met uw materiaal
Momentje, ik verbind u door met de technische dienst
Problemen met onze driehoeken? Wat vreemd. Waarom probeert u onze cirkels niet? Daar zijn onze klanten erg tevreden mee.
...Een cirkel is toch het totaal van punten op afstand l vanaf een vast punt.
En u zegt: omtrek 2πl. oppervlakte πl²
Staat genoteerd
l
Tot uw Dienst


Om een OPPERVLAKTE te meten, gebruik je de Euclidestegels. Voor de omtrek is Euclidesafrastering het beste product op de markt. De tevredenheid van onze klanten in onze beste reclame.
20 per m²
EUCLIDES
DE GEOMETRIE TOT IEDERS DIENST
Oppervlak: πl²
R
Dat begint goed, Ik heb tegels over!
't IS hier al regelmaat en rust, schoonheid, weelde , zinnelust
Ik zal de omtrek meten met behulp van de afrastering
Omtrek: 2πl
l


Ik heb ook teveel afrastering!
Hallo, Euclides & Co? Ja, ik ben het weer! Ik heb grote hoeveelheden over van uw tegels EN afrastering. πl^2 en $2\pi l$...alles wat u hebt voorgesteld klopt niet!
Schreeuw niet zo tegen me, meneer. Ik ben maar de secreta-resse. Ik verbind u door met de technische dienst
Nee, nee, de tegels zijn goed op elkaar aangesloten, mijn straal in mooi recht en mijn afrastering is precies langs de CIRKEL geplaatst !
Meneer, geloof me, dit is de eerste keer dat dit zo uitpakt. Probeer het nog eens en wees gerust, u weet dat onze theorieën gegarandeerd zijn.
Anselm zet zijn onderzoek voort door de straal te vergroten van elke nieuwe cirkel.
Maar de fouten worden er alleen maar groter op.


Nee maar, nu heb ik meer dan 36% afrastering te veel ! En 19% tegels over ! en de cirkel die ik maak is zo te zien...een RECHTE LIJN !
Droom ik of wat?
EUCLIDES
Zo te zien is deze lineaal toch goed RECHT!
Anselm maakt straal l nog groter, en deze keer...
EUCLIDES
De kromming van mijn cirkel gaat nu de andere kant op
En nu, als ik l GROTER maak, wordt mijn omtrek KLEINER, het moet niet gekker worden !

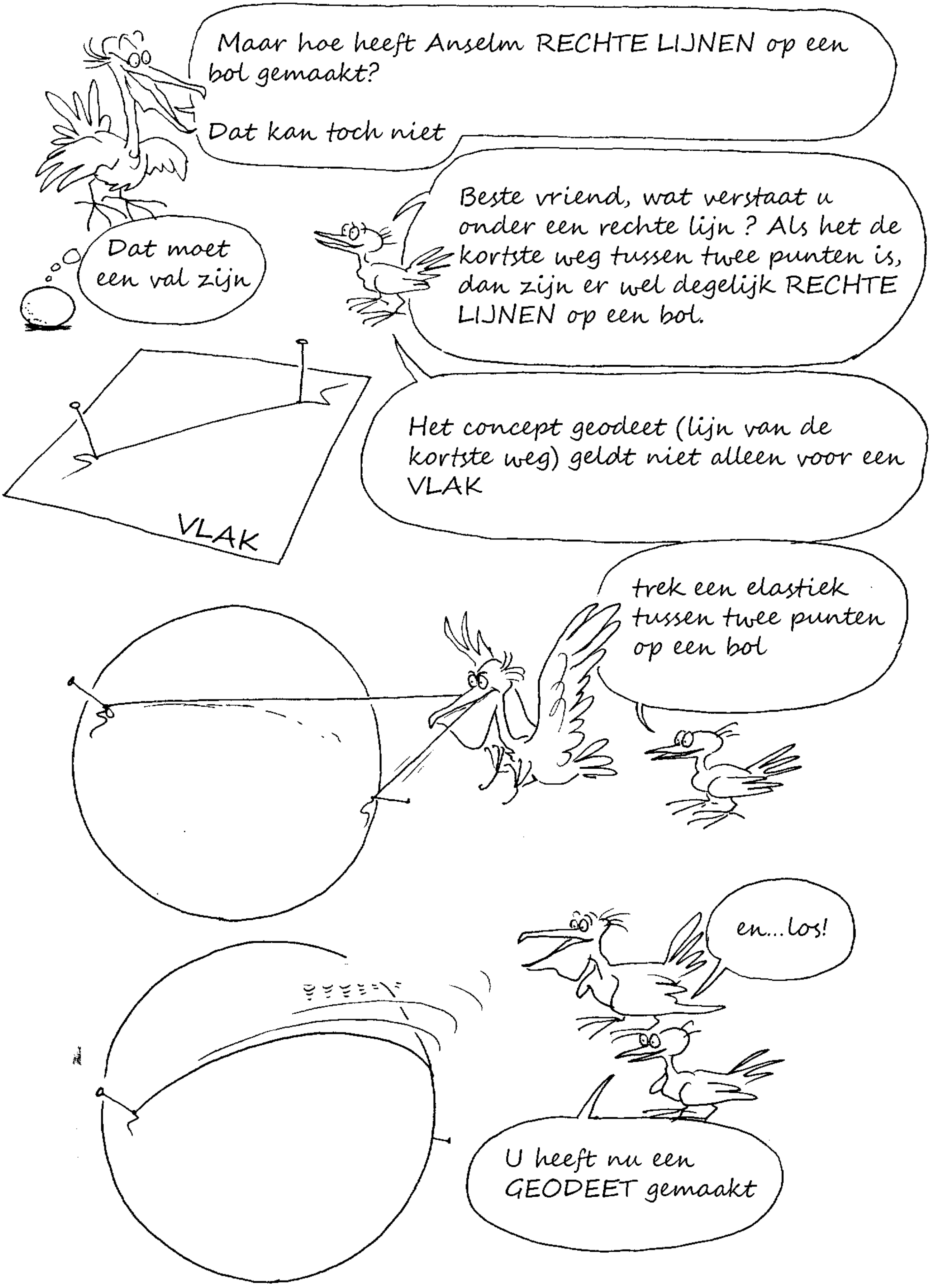
Na de laatste betegeling:

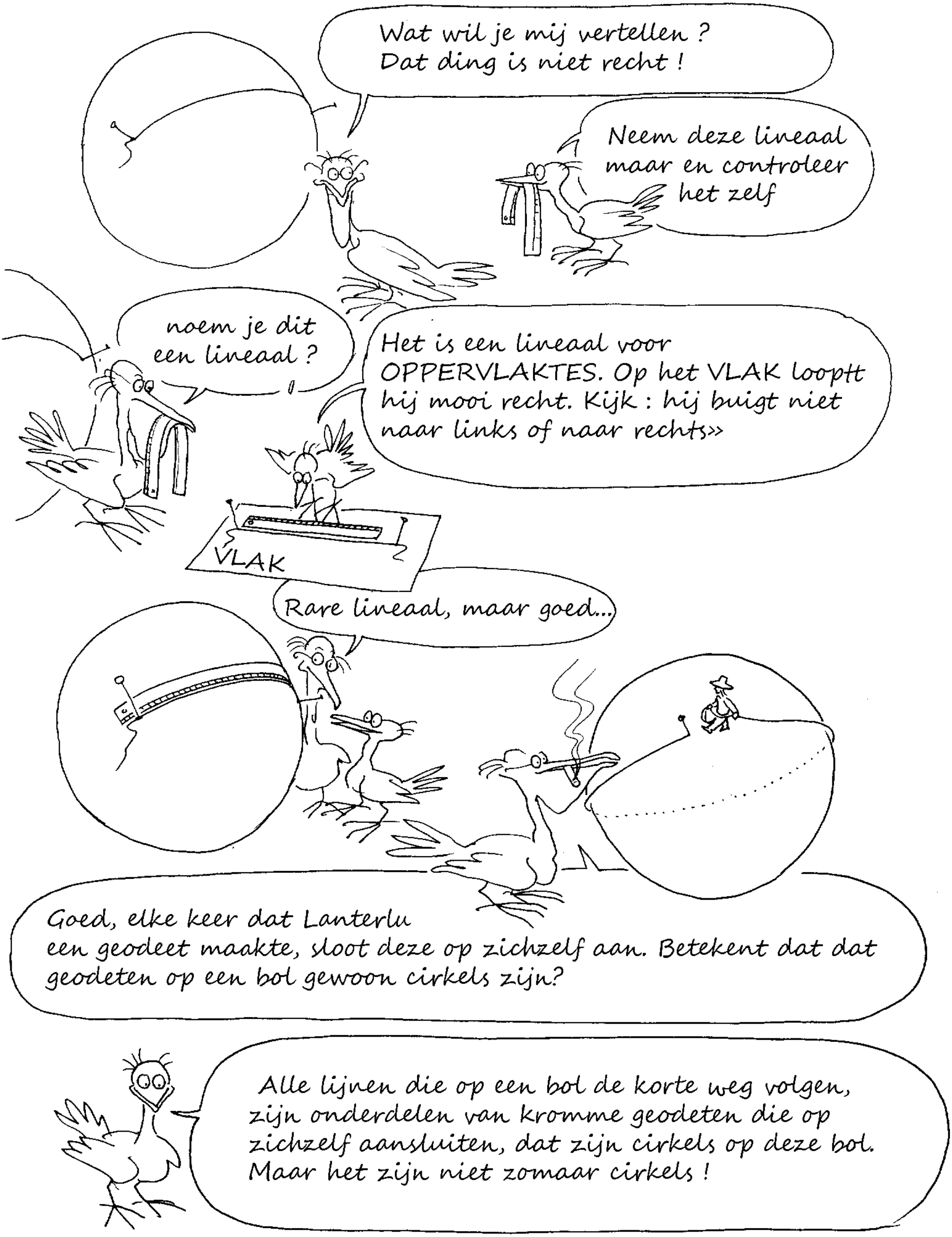


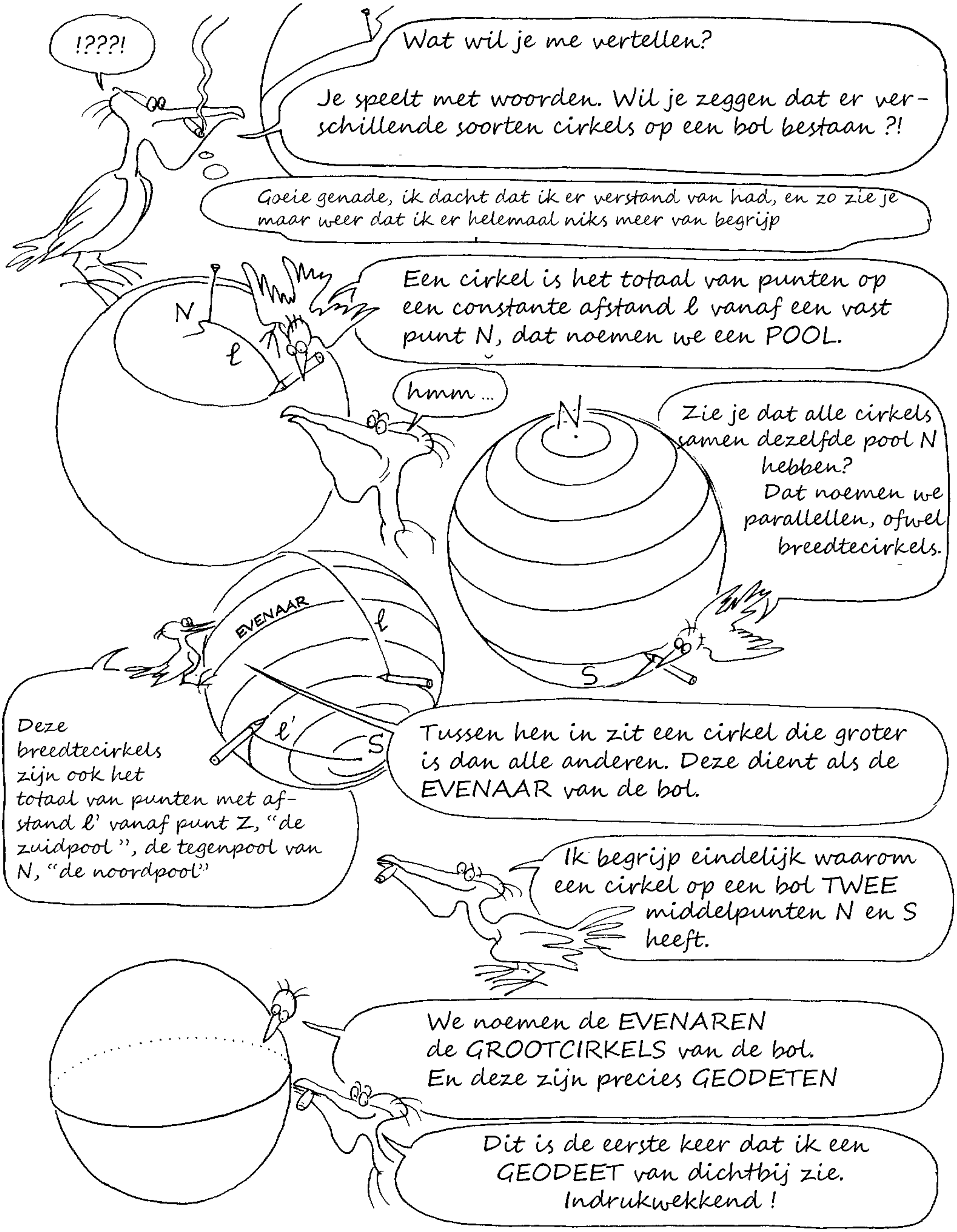
WAT IS ER GEBEURD?

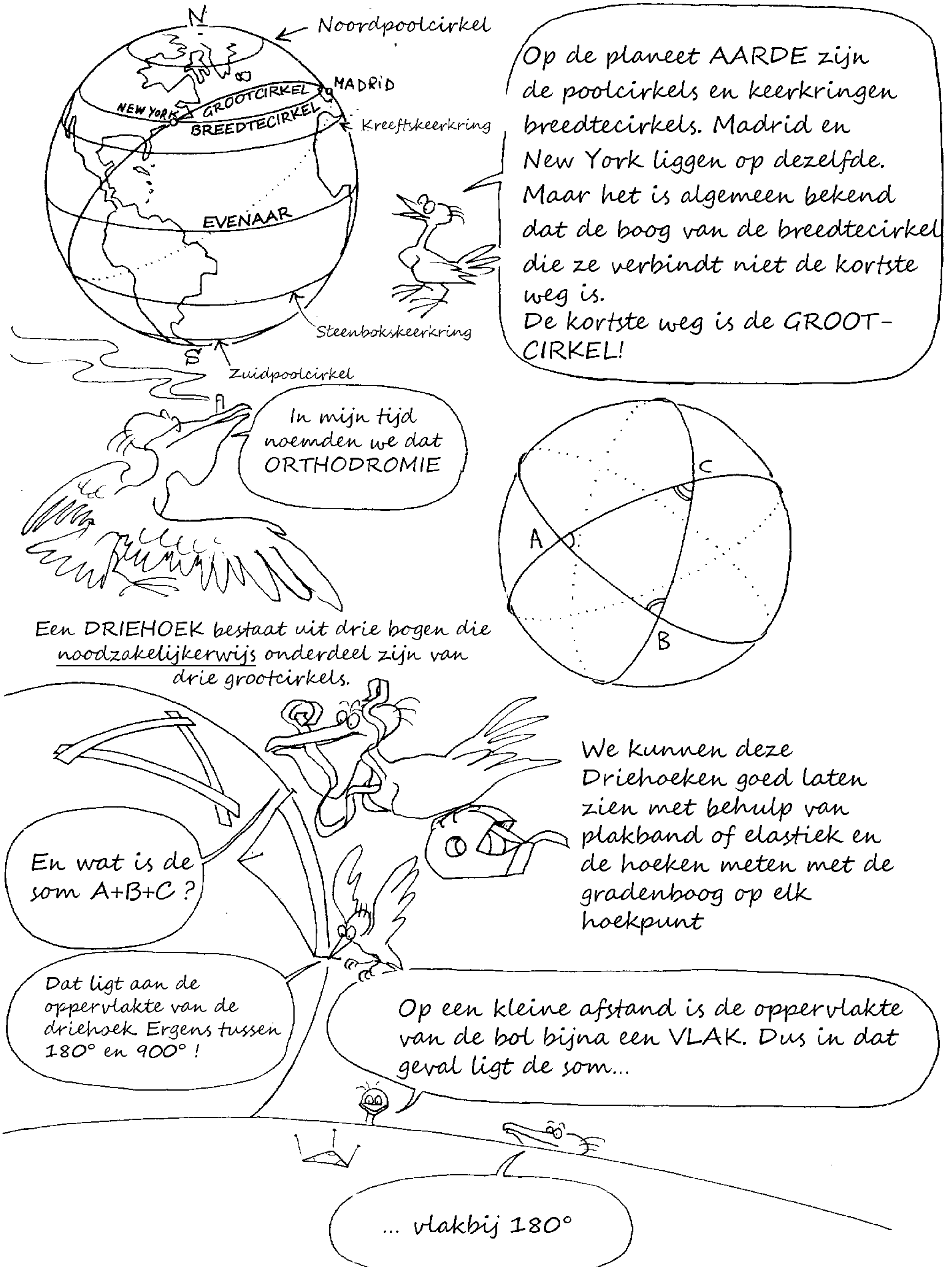
Voor wat opheldering, laten we de wolken verdrijven:

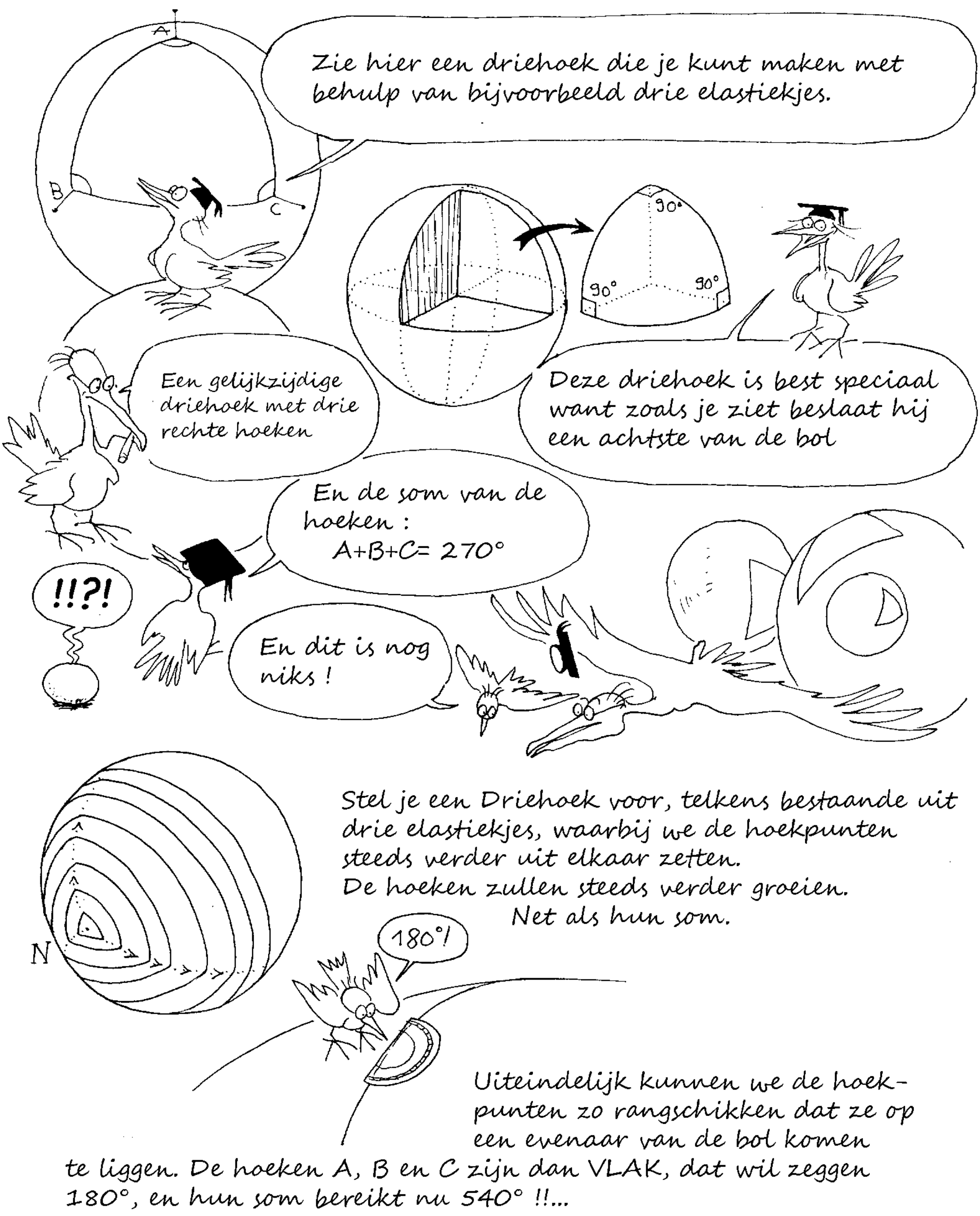
Anselm beseft ineens dat hij zich op een bol bevindt waarop hij de regels van de VLAKKE GEOMETRIE heeft toegepast

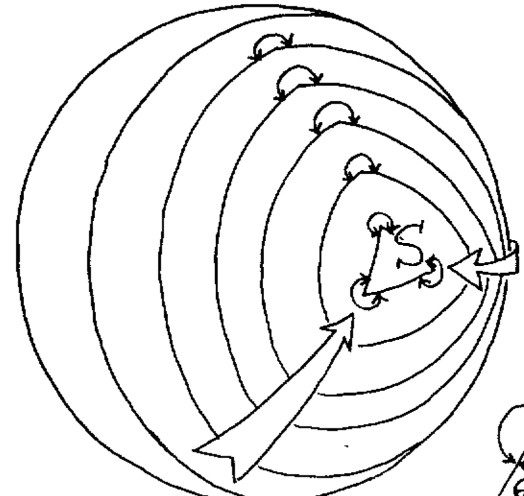

Maar hoe heeft Anselm RECHTE LIJNEN op een bol gemaakt?
Dat kan toch niet
Dat moet een val zijn
Beste vriend, wat verstaat u onder een rechte lijn ? Als het de kortste weg tussen twee punten is, dan zijn er wel degelijk RECHTE LIJNEN op een bol.
VLAK
Het concept geodeet (lijn van de kortste weg) geldt niet alleen voor een VLAK
trek een elastiek tussen twee punten op een bol
en...los!
U heeft nu een GEODEET gemaakt


Wat wil je mij vertellen ? Dat ding is niet recht !
Neem deze lineaal maar en controleer het zelf
noem je dit een lineaal ?
Het is een lineaal voor OPPERVLAKTES. Op het VLAK looptt hij mooi recht. Kijk : hij buigt niet naar links of naar rechts»
VLAK
Rare lineaal, maar goed...
Goed, elke keer dat Lanterlu een geodeet maakte, sloot deze op zichzelf aan. Betekent dat dat geodeten op een bol gewoon cirkels zijn?
Alle lijnen die op een bol de korte weg volgen, zijn onderdelen van kromme geodeten die op zichzelf aansluiten, dat zijn cirkels op deze bol. Maar het zijn niet zomaar cirkels !

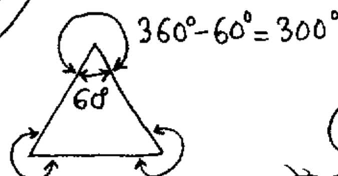

!???!
Wat wil je me vertellen?
Je speelt met woorden. Wil je zeggen dat er verschillende soorten cirkels op een bol bestaan ?!
Goeie genade, ik dacht dat ik er verstand van had, en zo zie je maar weer dat ik er helemaal niks meer van begrijp
Een cirkel is het totaal van punten op een constante afstand ℓ vanaf een vast punt N, dat noemen we een POOL.
N
ℓ
hmm ...
N
Zie je dat alle cirkels samen dezelfde pool N hebben? Dat noemen we parallellen, ofwel breedtecirkels.
S
EVENAAR
ℓ
ℓ'
S
Deze breedtecirkels zijn ook het totaal van punten met afstand ℓ' vanaf punt Z, "de zuidpool", de tegenpool van N, "de noordpool"
Tussen hen in zit een cirkel die groter is dan alle anderen. Deze dient als de EVENAAR van de bol.
Ik begrijp eindelijk waarom een cirkel op een bol TWEE middelpunten N en S heeft.
We noemen de EVENAREN de GROOTCIRKELS van de bol. En deze zijn precies GEODETEN
Dit is de eerste keer dat ik een GEODEET van dichtbij zie. Indrukwekkend !


N
Noordpoolcirkel
MADRID
NEW YORK
GROOTCIRKEL
BREEDTECIRKEL
Kreeftskeerkring
EVENAAR
Steenbokskeerkring
S
Zuidpoolcirkel
Op de planeet AARDE zijn de poolcirkels en keerkringen breedtecirkels. Madrid en New York liggen op dezelfde. Maar het is algemeen bekend dat de boog van de breedtecirkel die ze verbindt niet de kortste weg is. De kortste weg is de GROOT-CIRKEL!
In mijn tijd noemden we dat ORTHODROMIE
C
A
B
Een DRIEHOEK bestaat uit drie bogen die noodzakelijkerwijs onderdeel zijn van drie grootcirkels.
We kunnen deze Driehoeken goed laten zien met behulp van plakband of elastiek en de hoeken meten met de gradenboog op elk hoekpunt
En wat is de som A+B+C ?
Dat ligt aan de oppervlakte van de driehoek. Ergens tussen 180° en 900° !
Op een kleine afstand is de oppervlakte van de bol bijna een VLAK. Dus in dat geval ligt de som...
... vlakbij 180°

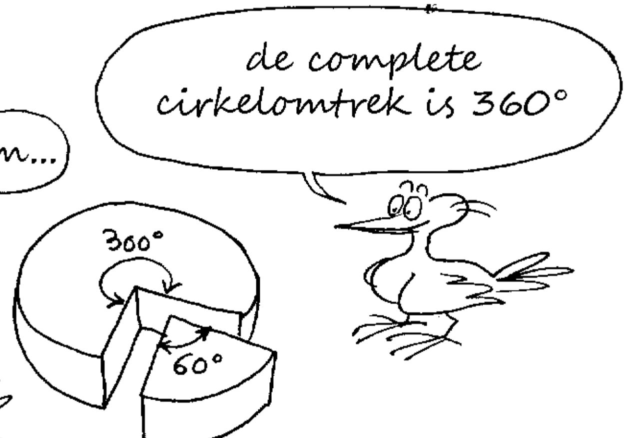

A
B
C
Zie hier een driehoek die je kunt maken met behulp van bijvoorbeeld drie elastiekjes.
90°
90°
90°
Een gelijkzijdige driehoek met drie rechte hoeken
Deze driehoek is best speciaal want zoals je ziet beslaat hij een achtste van de bol
En de som van de hoeken :
A+B+C= 270°
!!?!
En dit is nog niks !
Stel je een Driehoek voor, telkens bestaande uit drie elastiekjes, waarbij we de hoekpunten steeds verder uit elkaar zetten.
De hoeken zullen steeds verder groeien.
Net als hun som.
N
180°!
Uiteindelijk kunnen we de hoekpunten zo rangschikken dat ze op een evenaar van de bol komen te liggen. De hoeken A, B en C zijn dan VLAK, dat wil zeggen 180°, en hun som bereikt nu 540° !!...



Als we verder gaan met het verschuiven van de hoekpunten van de driehoek op het andere halfrond, nadert deze het punt Z, de tegenpool van N. Als we het blijven hebben over de hoeken van de hoekpunten zoals we begonnen zijn, zullen ze allemaal over de 180° heen gaan ! Om precies te zijn, zo worden ze elk $360° - 60° = 300°$

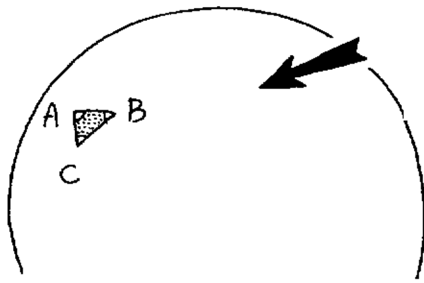


Totaal: 300 x 3 = 900°

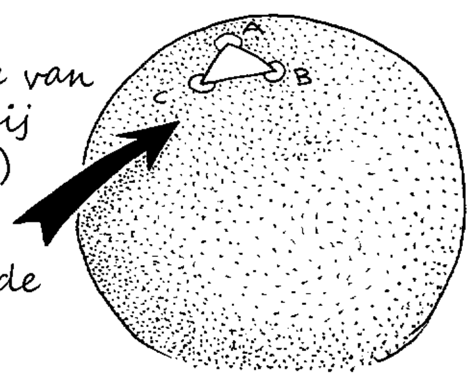


Dus op een bol kan de som van de hoeken alles zijn tussen de 180° en 900°

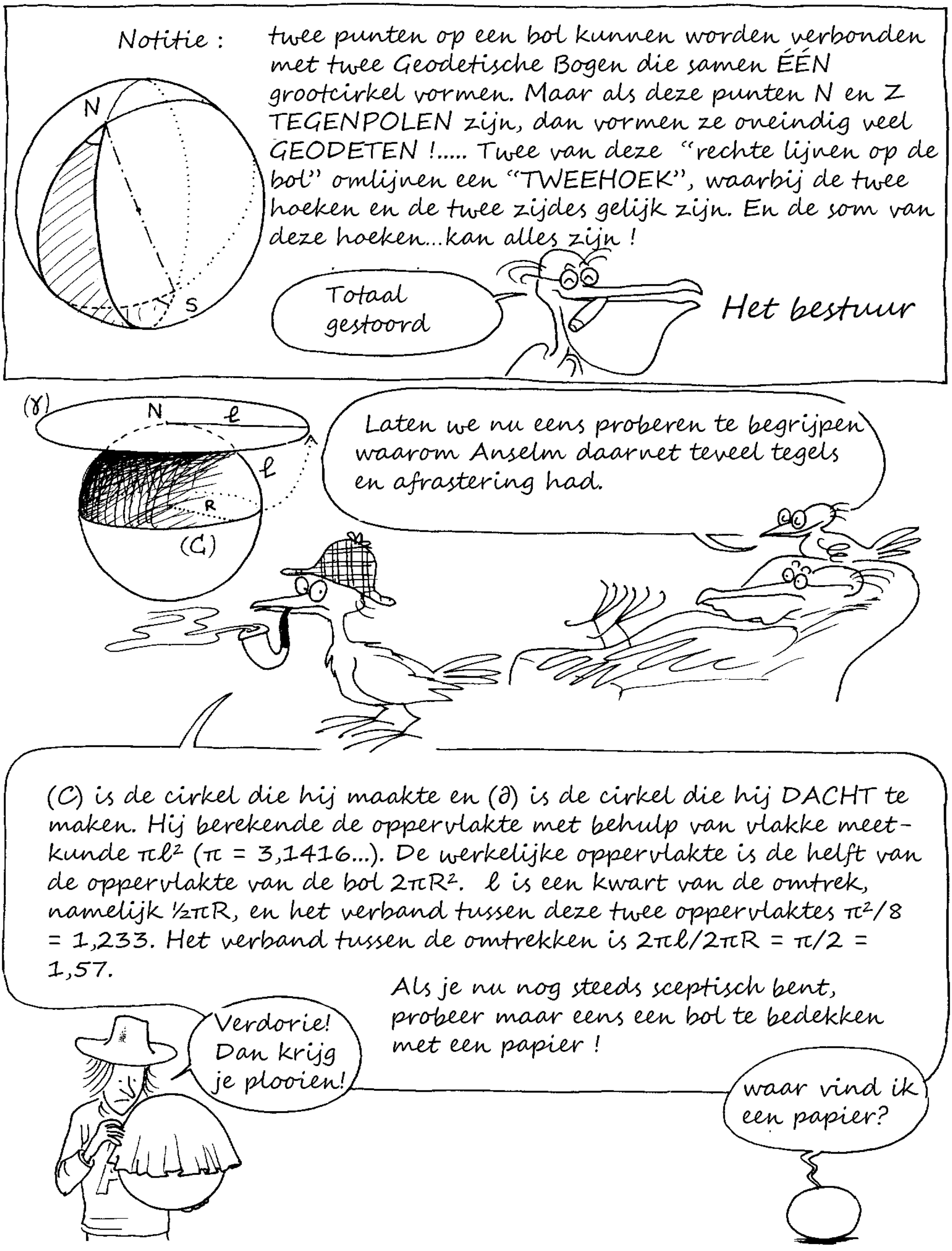
Volgens de theorie van Gauss is de som van de hoeken van een driehoek op een bol :
$A+B+C= 180(1+A/3,1416R^2)$ graden
waarbij R de straal van de genoemde bol is en A de oppervlakte van de driehoek

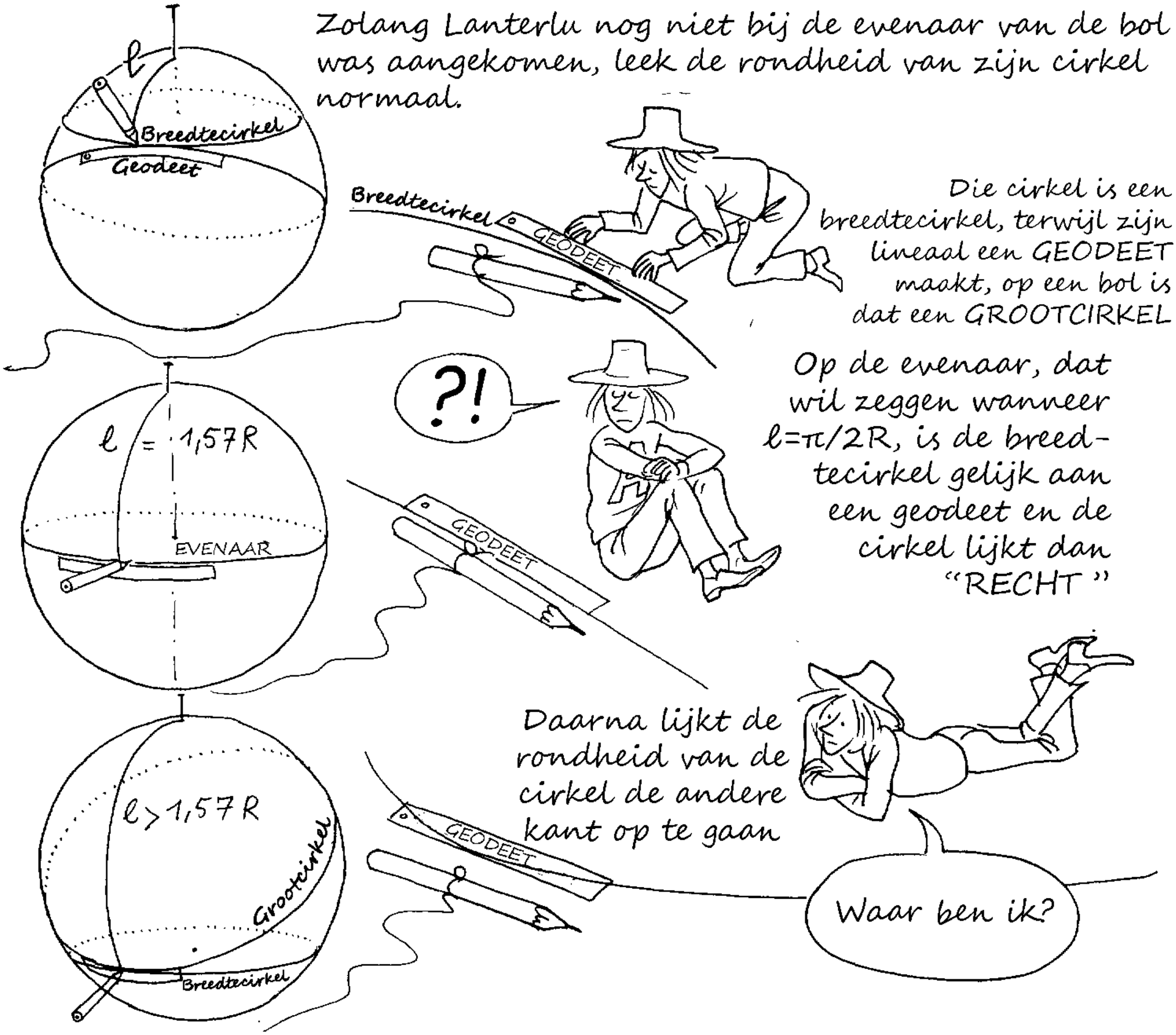


Als de driehoek een kleine oppervlakte heeft (in verhouding tot die van de bol), zijn we weer bij Euclides ($A+B+C=180°$)

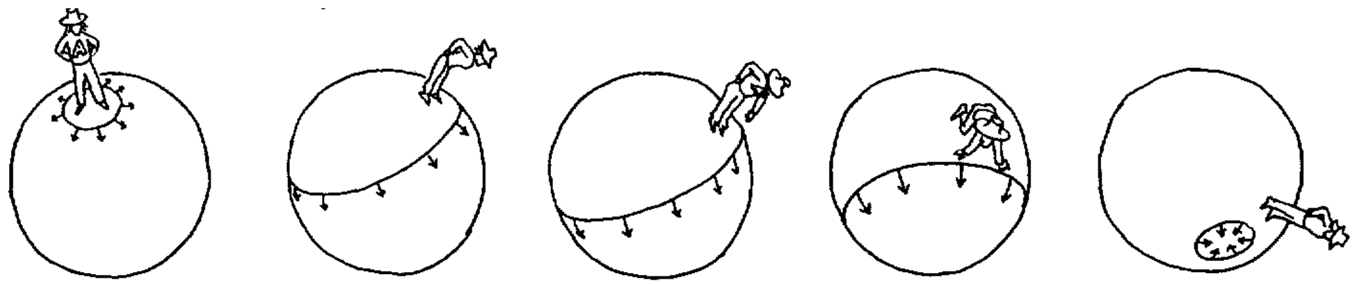


Als daarentegen de driehoek zo ongeveer de hele bol beslaat ($4 \times 3,1416 \times R^2$), dan krijgen we 900°


Notitie : twee punten op een bol kunnen worden verbonden met twee Geodetische Bogen die samen ÉÉN grootcirkel vormen. Maar als deze punten N en Z TEGENPOLEN zijn, dan vormen ze oneindig veel GEODETEN !..... Twee van deze "rechte lijnen op de bol" omlijnen een "TWEEHOEK", waarbij de twee hoeken en de twee zijdes gelijk zijn. En de som van deze hoeken...kan alles zijn !
N
S
Totaal gestoord
Het bestuur
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Laten we nu eens proberen te begrijpen waarom Anselm daarnet teveel tegels en afrastering had.
(C) is de cirkel die hij maakte en (∂) is de cirkel die hij DACHT te maken. Hij berekende de oppervlakte met behulp van vlakke meetkunde $\pi\ell^2$ ($\pi = 3{,}1416...$). De werkelijke oppervlakte is de helft van de oppervlakte van de bol $2\pi R^2$. ℓ is een kwart van de omtrek, namelijk $\frac{1}{2}\pi R$, en het verband tussen deze twee oppervlaktes $\pi^2/8 = 1{,}233$. Het verband tussen de omtrekken is $2\pi\ell/2\pi R = \pi/2 = 1{,}57$.
Als je nu nog steeds sceptisch bent, probeer maar eens een bol te bedekken met een papier !
Verdorie! Dan krijg je plooien!
waar vind ik een papier?



Dit plaatje legt uit hoe we "in" en "uit" een cirkel kunnen komen, zonder dat we ons verplaatsen, terwijl we deze op een bol tekenen. Je moet je de cirkel voorstellen als een elastische ring die we over een biljartbal laten glijden.



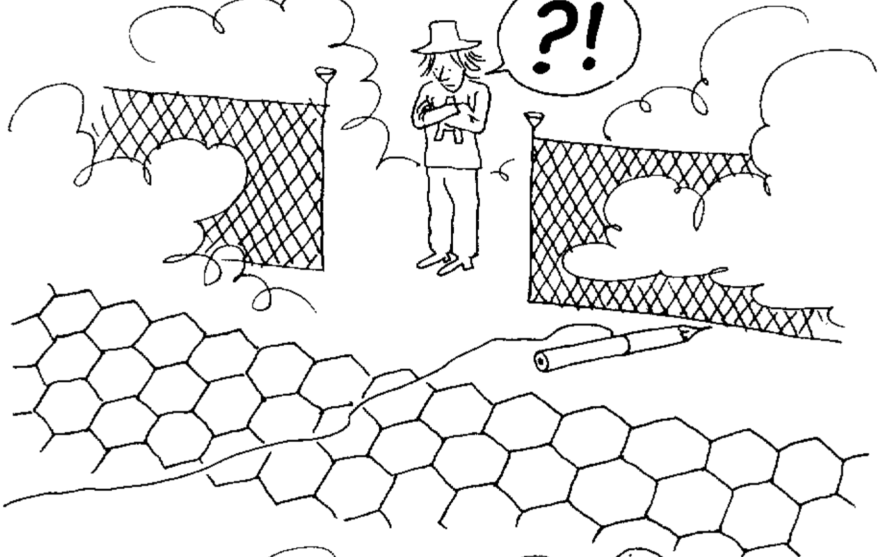
Anselm heeft even tijd nodig voor het verwerken van deze aspecten, die werden ondekt door de wiskundige Gauss (1777-1855). Hij besluit te beginnen aan de ontdekking van de wereld van OPPERVLAKTES:

Soms moet je risico's nemen voor de wetenschap

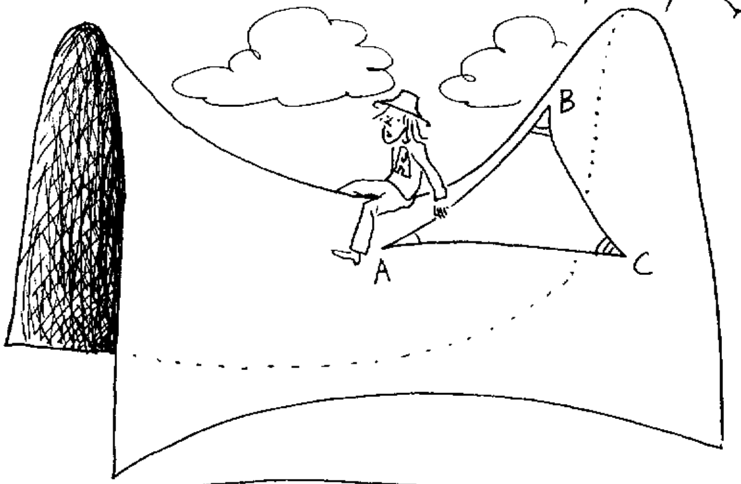
Anselm heeft een nieuwe wereld bereikt en hij maakt opnieuw een GEODEET, maar deze keer:

De geodeet sluit niet op zichzelf aan.

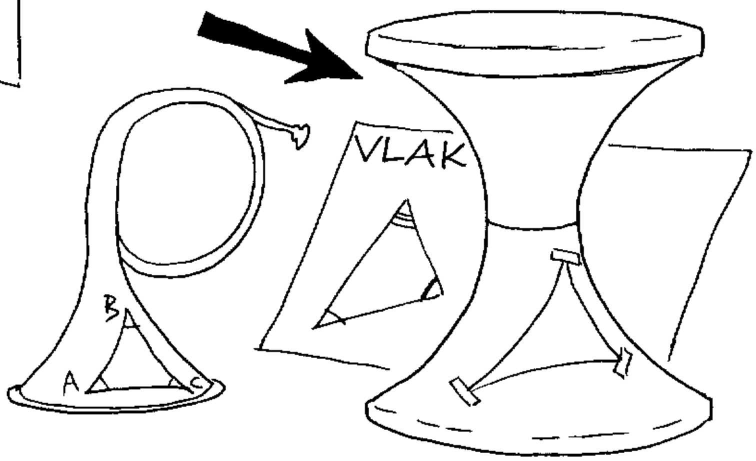
Met behulp van drie strakke lijnen maakt Anselm een driehoek, maar de som van de hoeken op de hoekpunten blijkt deze keer minder dan 180° !



Een cirkel is zoals altijd het totaal van punten op dezelfde afstand l vanaf een vast punt. De cirkel die door Lanterlu gemaakt is heeft, op deze nieuwe oppervlakte, een omtrek van meer dan $2\pi l$, en een oppervlakte groter dan πl^2. Laten we de wolken weer weghalen:



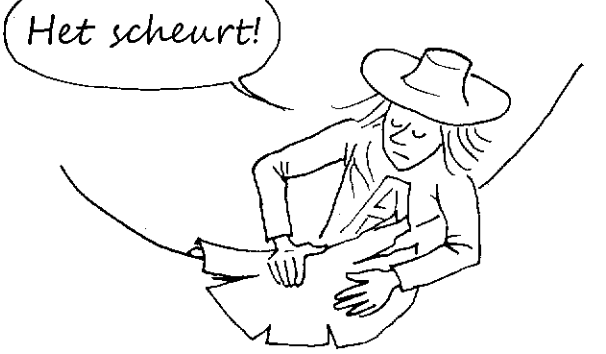
De oppervlakte lijkt deze keer op de vorm van een bergpas of een paardenzadel.
Bepaalde opjecten in ons dagelijks leven behoren hier ook toe: een tuba of een soort voetenbankje:



KROMMING

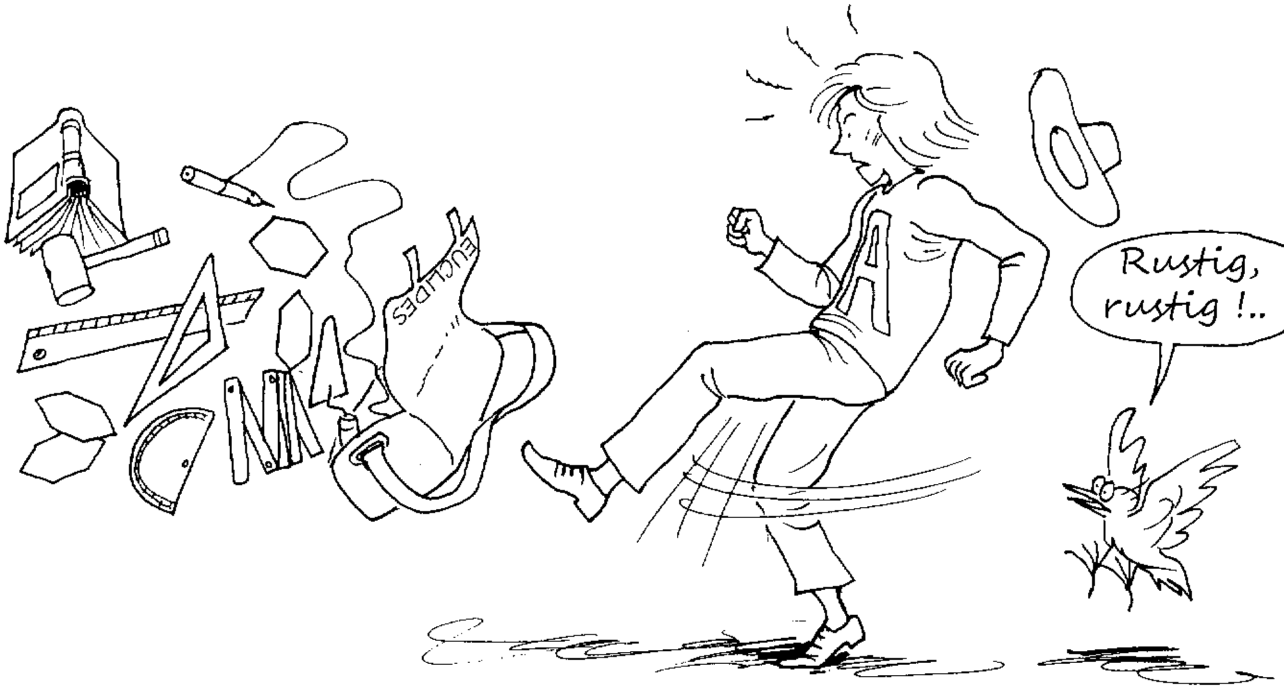
Een kromme oppervlakte is een oppervlakte waarop de Euclidische theorieën niet werken. De kromming kan positief of negatief zijn. Op een oppervlakte met POSITIEVE KROMMING is de som van de hoeken van een driehoek meer dan 180°. Als je een cirkel tekent met straal ℓ is zijn oppervlakte minder dan $\pi\ell^2$ en zijn omtrek minder dan $2\pi\ell$.
Op een oppervlakte met NEGATIEVE KROMMING is de som van de hoeken van een driehoek minder dan 180°. Als je een cirkel tekent met straal ℓ, is zijn oppervlakte meer dan $\pi\ell^2$ en zijn omtrek meer dan $2\pi\ell$.

Zonet heeft Anselm gemerkt dat er plooien ontstaan als je een bol, een oppervlakte met een positieve kromming, probeert te bekleden met een vlak. Het bekleden van een oppervlak met negatieve kromming al helemaal onmogelijk : er zullen scheurtjes in het vlak komen. Deze inpaktest is de gemakkelijkste manier om erachter te komen of een kromming positief of negatief is.



Zoals we op de vorige bladzijde hebben gezien, kunnen oppervlaktes op sommige delen positief en op andere delen negatief zijn.

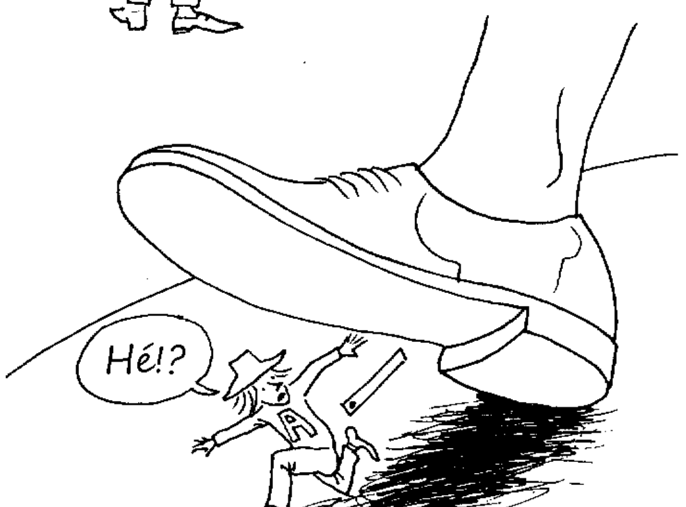

De inpaktest
Een cilinder en een kegel laten zich wel bedekken met een vlak!
Geen paniek. Ik plak drie elastiekjes, dat wil zeggen 'drie geodeten', met plakband op mijn cilinder.
B
A
C
Nu teken ik mijn geodeten OP het oppervlak..
ik leg mijn cilinder plat neer
!...
B
A
C
Volgens onze definitie zijn cilinders en kegels, die de wetten van de EUCLIDISCHE meetkunde volgen, VLAKKE OPPERVLAKTES !!

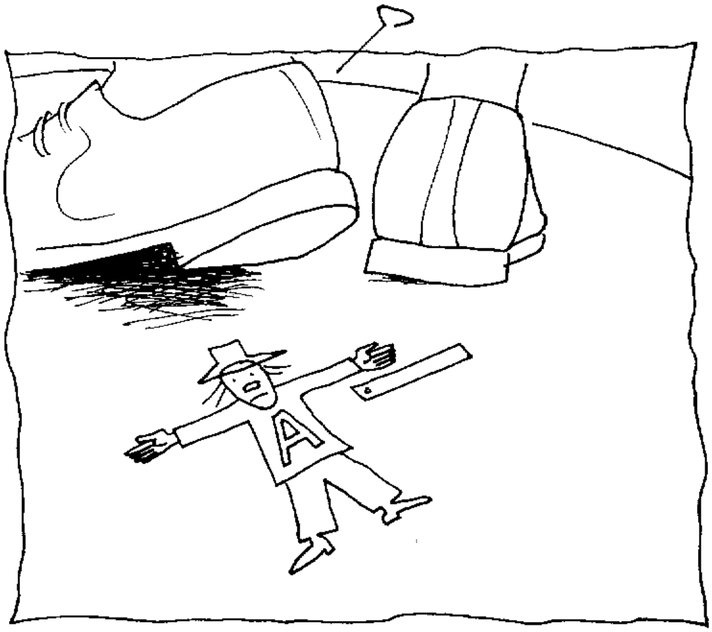


HET BESEF VAN RUIMTE:

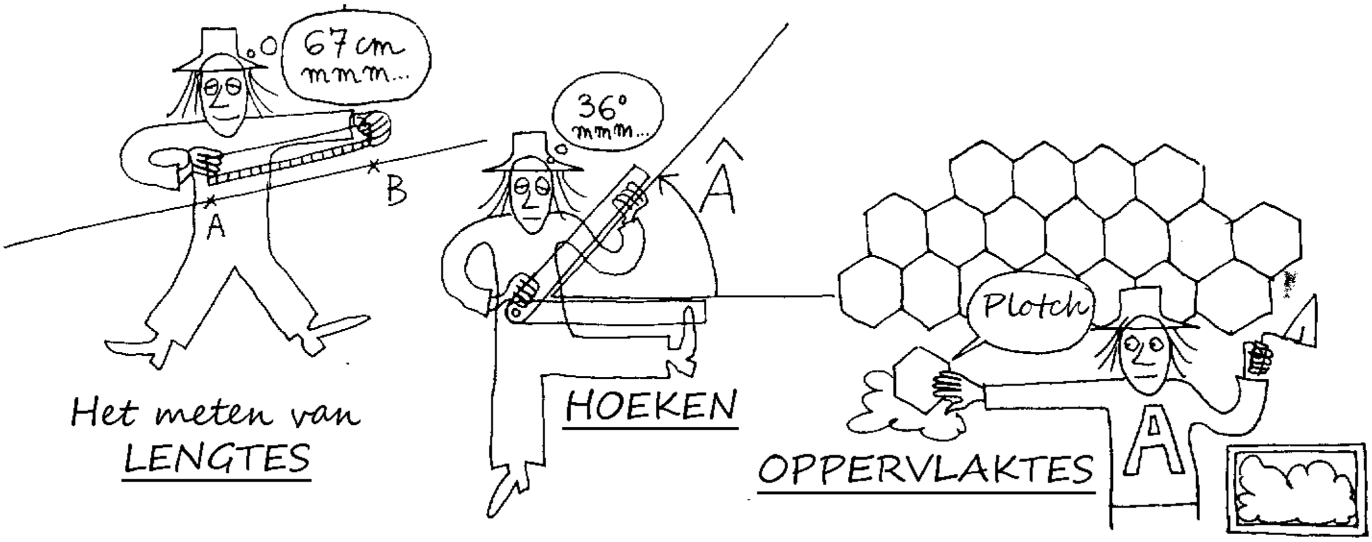
Tot nu toe zorgden de wolken ervoor dat Anselm niet verder kon kijken dan zijn eigen neus...bij wijze van spreken dan. Als dat niet het geval was geweest had hij de KROMMING van zijn BOLVORMIGE RUIMTE wel opgemerkt.

Er is een andere manier om te voorkomen dat Lanterlu deze kromming ZIET: dat is ervoor zorgen dat hij in de oppervlakte leeft, dat hij er als het ware deel van uitmaakt.

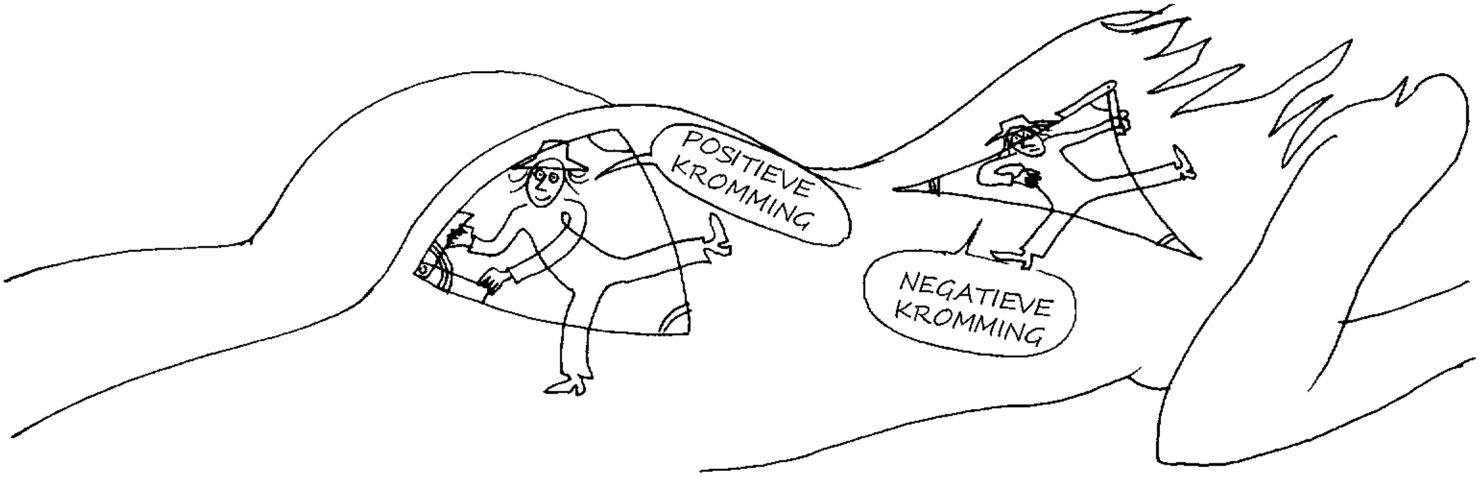




Let wel op dat deze nieuwe situatie geen effect heeft op:

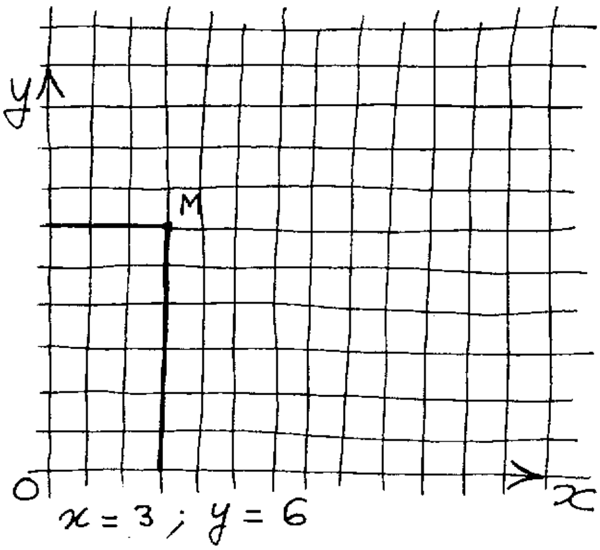


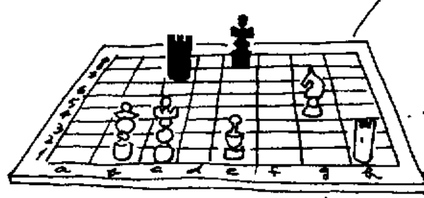
Ondanks dat hij wordt beperkt tot de oppervlakte, kan Anselm nog steeds de kromming waarnemen en definiëren (als positief of negatief) en zelfs meten, zonder dat hij deze kan ZIEN. Als de som van de hoeken van een driehoek 180° is, dan is de oppervlakte VLAK. Als de som over de 180° is, dan is de kromming positief en Anselm kan de straal van de lokale kromming R berekenen met behulp van de formule : $A+B+C=180(1+A/3{,}14R^2)$ graden waarbij A de oppervlakte van de driehoek is.
Als de som minder dan 180° is, kan je de straal van kromming R bepalen met : $A+B+C=180(1-A/3{,}14R^2)$, maar het heeft niet meer de gebruikelijke fysieke betekenis.
Merk op dat een VLAKKE oppervlakte gelijk kan zijn aan een oppervlakte met een straal van kromming R oneindige.
En opnieuw komen we terug bij Euclides' theorieën.

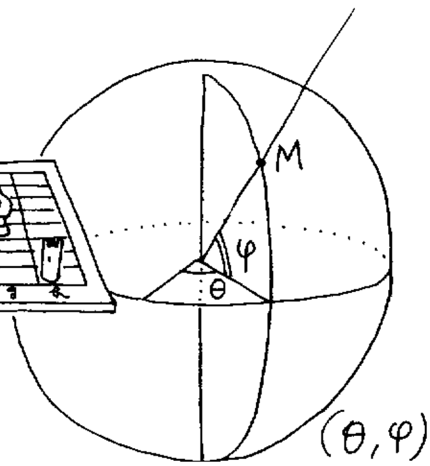


HET CONCEPT DIMENSIE

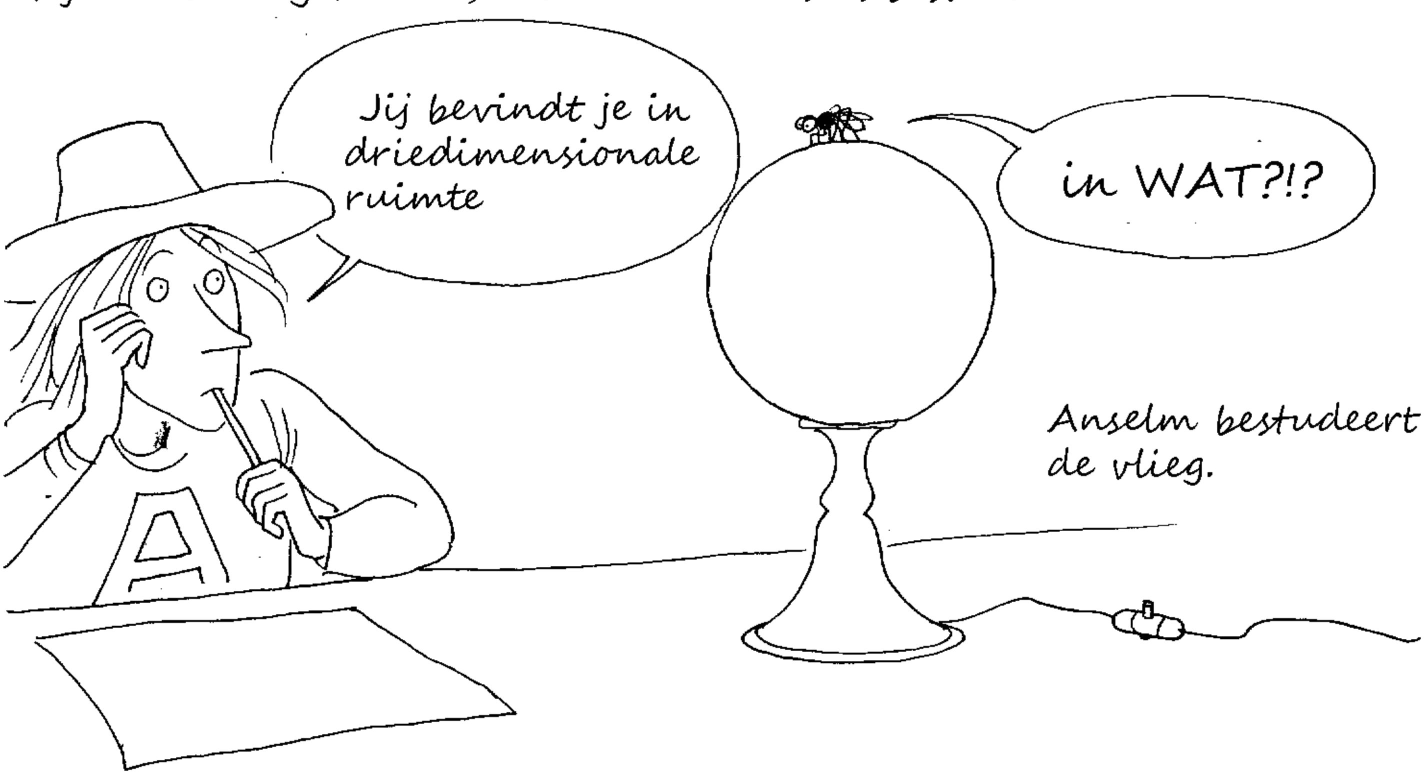
Het aantal dimensies is simpelweg het aantal vectoren, coördinaten, dat je nodig hebt in een bepaalde ruimte om de plaats van een punt te definiëren. De OPPERVLAKTES zijn de voorstellingen van ruimte met twee dimensies. De vectoren die je gebruikt zijn om een positie te bepalen kunnen vanalles zijn : lengtes, nummers, hoeken, ...

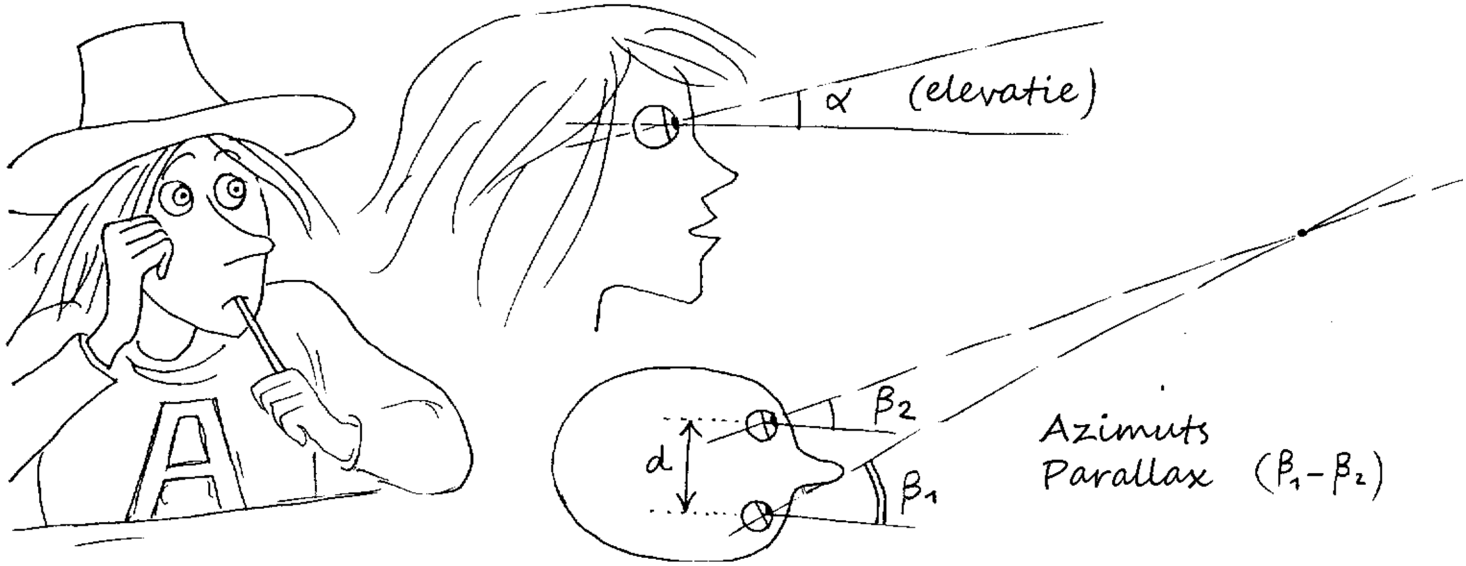






We zeggen normaal gesproken dat onze ruimte, tijd niet meegerekend, uit drie dimensies bestaat.

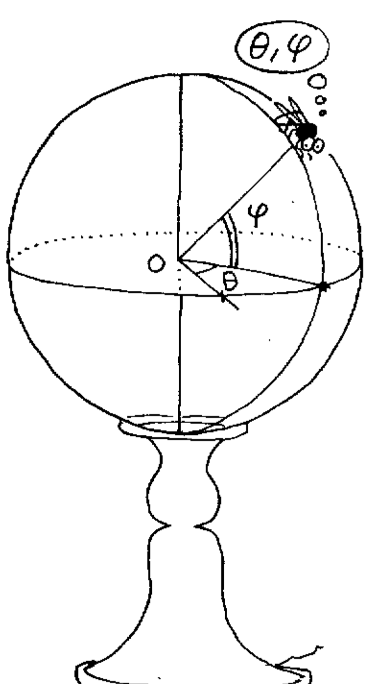




Anselm kan de positie bepalen van de objecten met behulp van zijn lichaam en hersenen.
De positie van een punt is te bepalen met drie HOEKEN : de elevatie en de azimutale afwijkingen van de twee ogen : $\beta 1$ et $\beta 2$
Het hoekverschil $\beta 1 - \beta 2$ noemen we de parallax

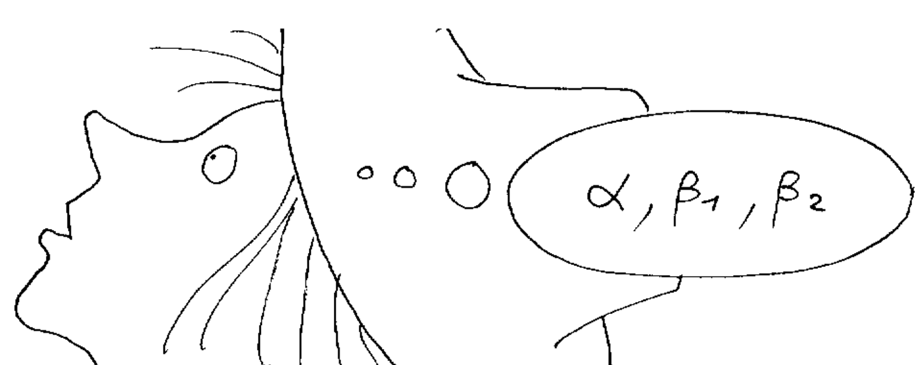
In Anselms hoofd wordt de parallax gedecodeerd en omgezet in besef van afstand.

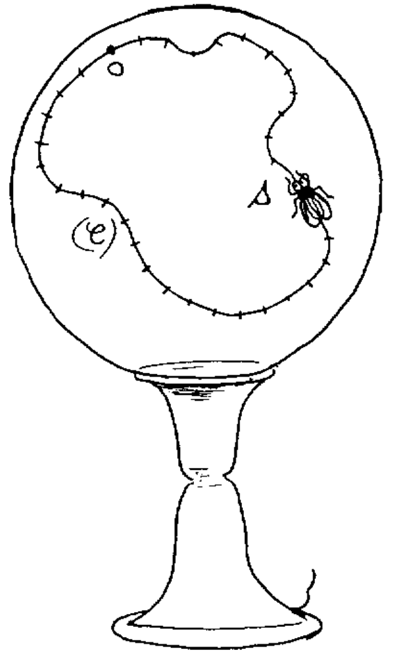
DE INBEDDING:



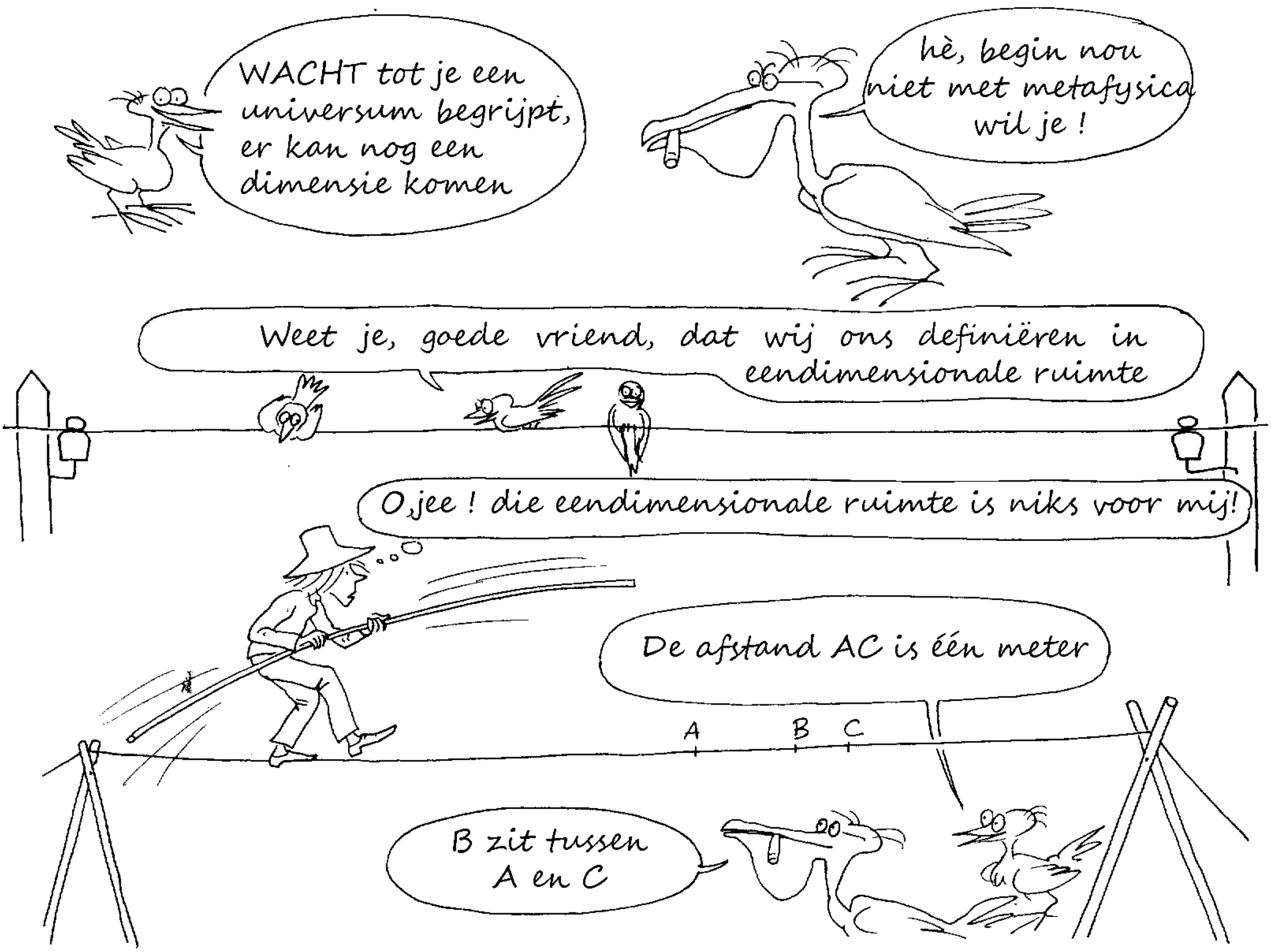
Maar de vlieg beweegt zich over de de bolvormige lamp waar zijn positie, in die tweedimensionale ruimte, kan worden bepaald met behulp van de twee hoeken θ en ϕ (lengtegraad en breedtegraad).

We zeggen dat de tweedimensionale ruimte is INGEBED in onze driedimensionale ruimte.

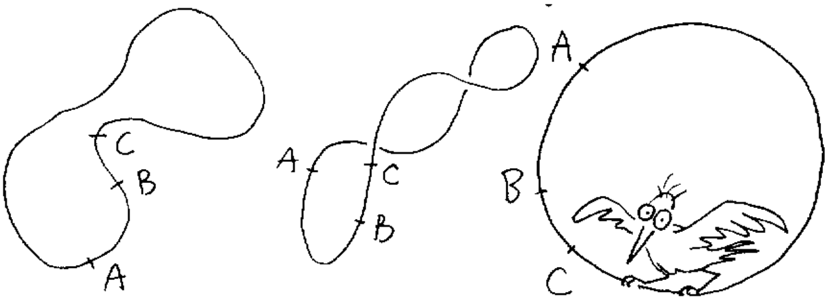




Stel je voor dat de vlieg een kromme (φ) volgt die is uitgestippeld op de bol. We kunnen zijn positie bepalen met behulp van één elkel coördinaat (zijn afstand S vanaf een startpunt, algebraïsch berekend.) Een kromme is een plaatje van EENdimensionale ruimte.
Deze eendimensionale ruimte is ingebed in een tweedimensionale ruimte (de bol), die zelf weer ingebed is in een driedimensionale ruimte.
Op die manier kan de ruimte waar wij ons in bevinden ingebed zijn in een ruimte met een hogere dimensie dan wij kunnen bevatten.



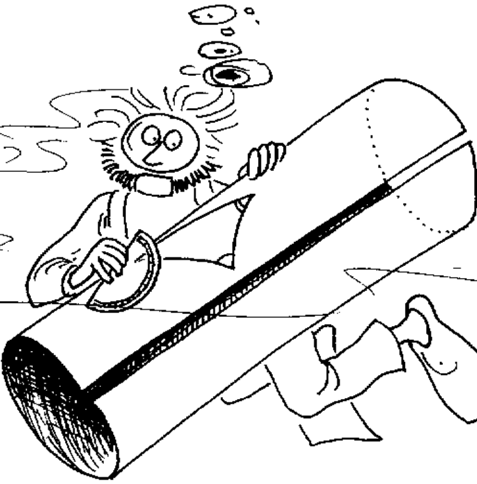
Dit suggereert dat bepaalde eigenschappen kunnen bestaan onafhankelijk van de manier waarop de inbedding tot stand is gekomen.



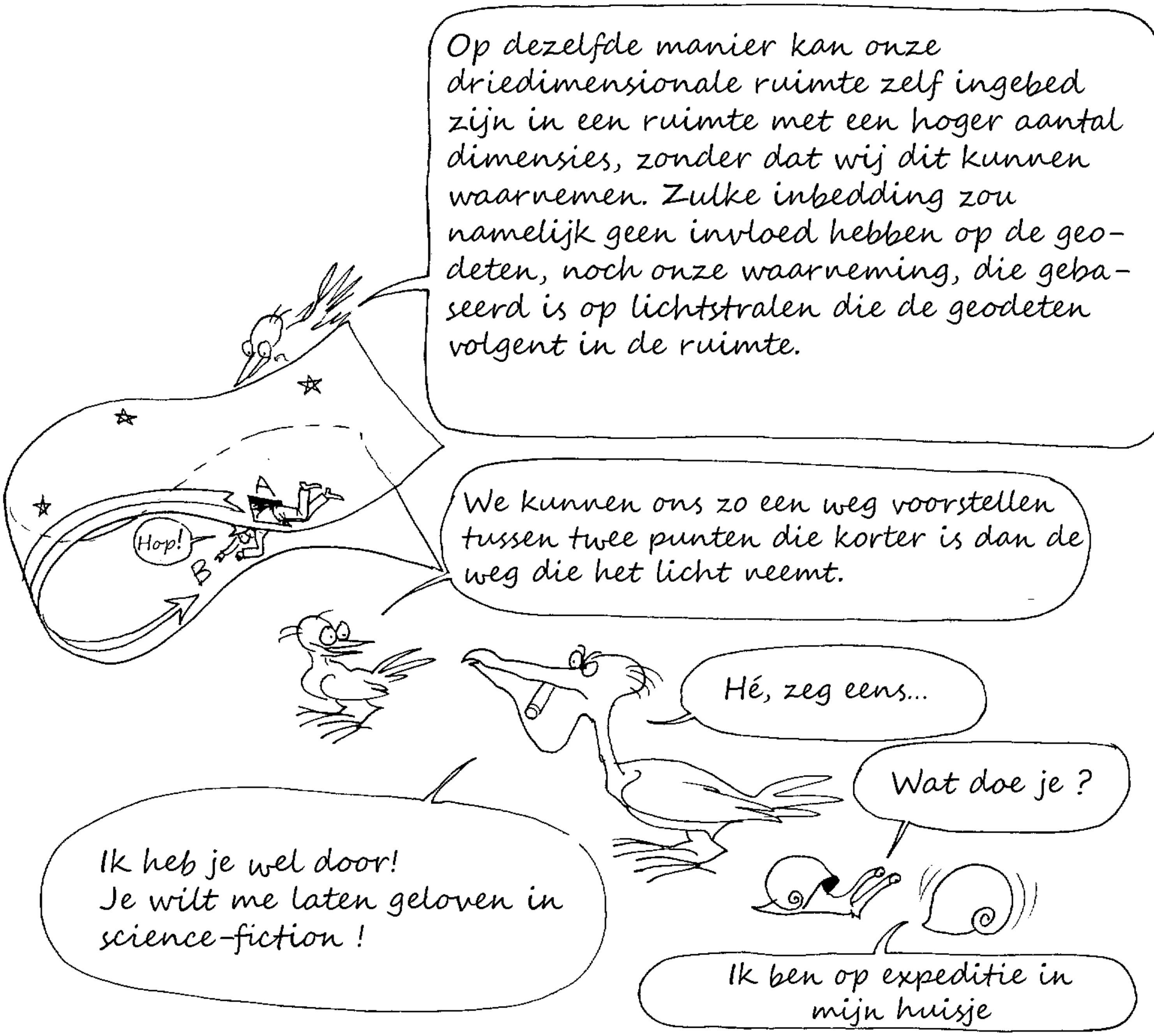
Zie de verschillende manieren van inbedden van een GESLOTEN KROMME in gewone ruimte.
Deze GESLOTENHEID is een eigenschap die onafhankelijk is van de inbedding.

Maar we zijn heel voorzichtig om uitrekken of inkrimpen van de draad te voorkomen zodat we de LENGTES tussen de punten niet veranderen. We gaan nu de OPPERVLAKTES in de gewone driedimensionale ruimte INBEDDEN

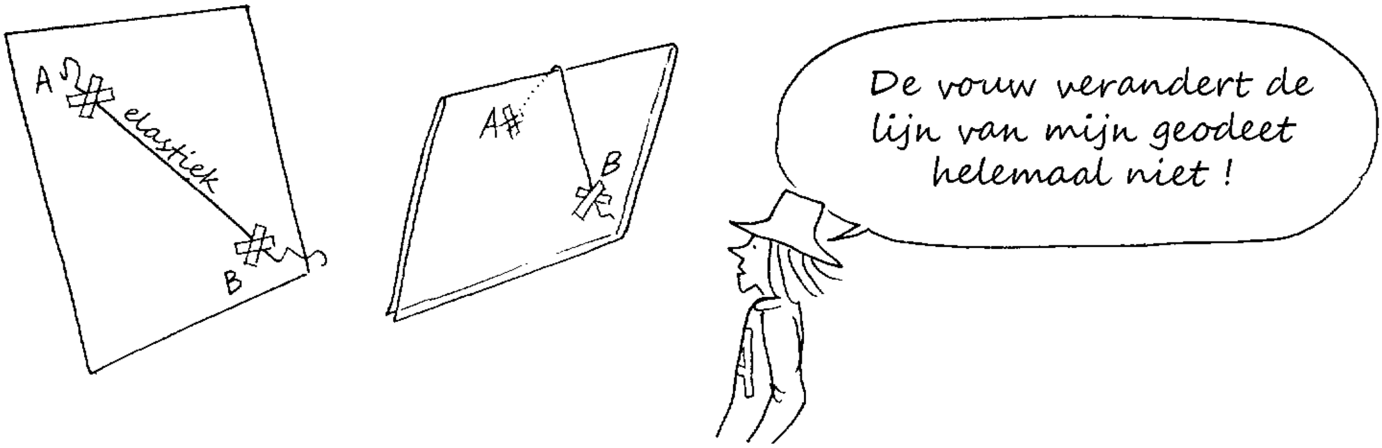
Als we een vlak INBEDDEN in gewone driedimensionale ruimte, kunnen we het verplaatsen en oprollen zonder zijn GEOMETRIE te veranderen.



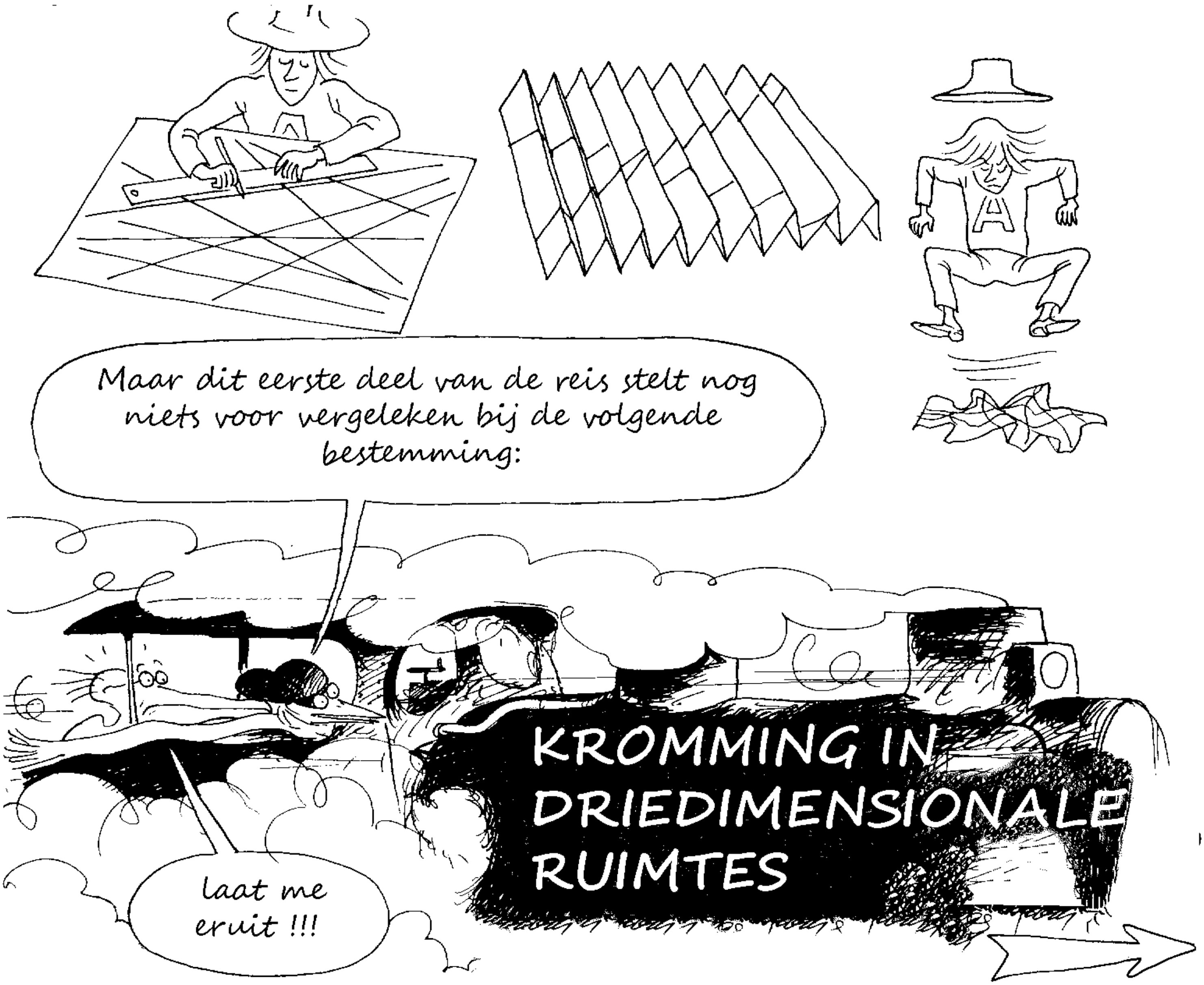
We hebben gezien dat het omvormen van een vlak naar een cylinder de geodeten en de hoeken niet verandert. In dit opzicht heeft een golfplaat altijd VLAKKE, EUCLIDISCHE geometrie. Een inwoner van zo'n tweedimensionale – eulidische – ruimte is zich op geen enkele manier bewust van verschuivingen, verdraaiingen of golven die niet meer zijn dan variaties van de manier van inbedding in de driedimensionale ruimte.

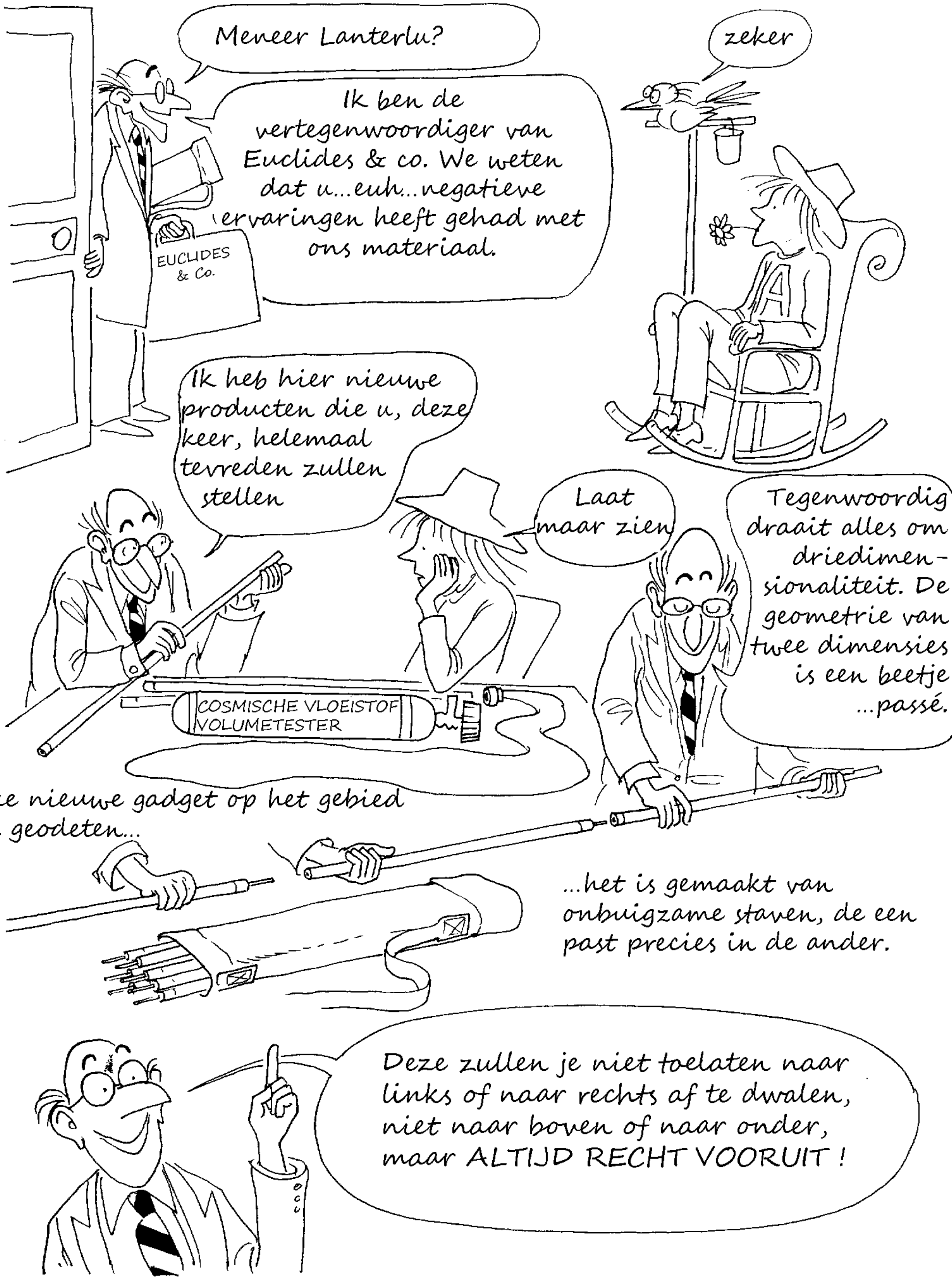


Neem een stuk van een vlak en vouw het dubbel:

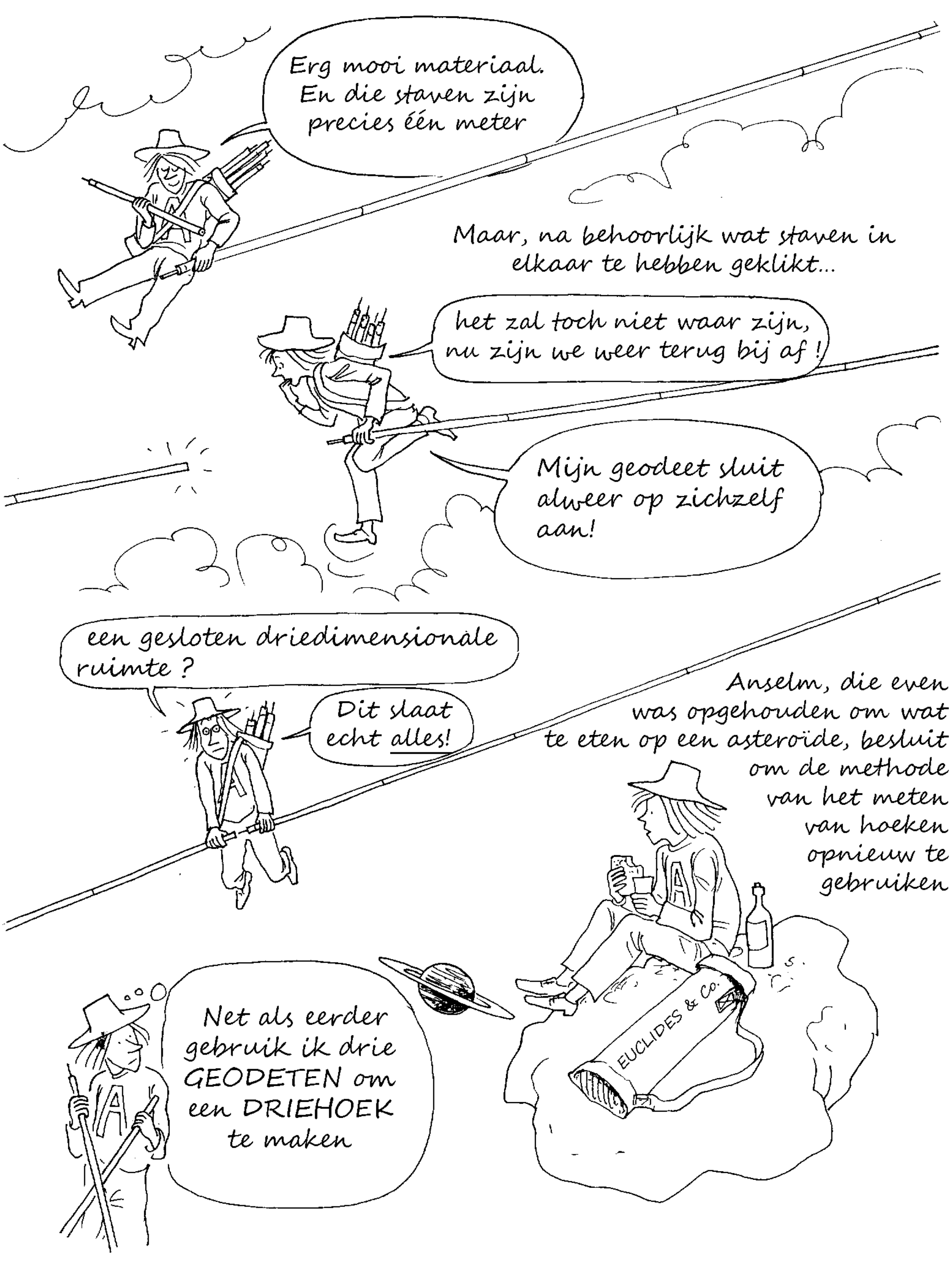


Teken op een blad papier, met behulp van een lineaal, een heleboel rechte lijnen, geodeten, en maak daarna verschillende vouwen in het blad. Het zijn nog altijd geodeten, met of zonder vouwen.




Meneer Lanterlu?
zeker
Ik ben de vertegenwoordiger van Euclides & co. We weten dat u...euh...negatieve ervaringen heeft gehad met ons materiaal.
EUCLIDES & Co.
Ik heb hier nieuwe producten die u, deze keer, helemaal tevreden zullen stellen
Laat maar zien
Tegenwoordig draait alles om driedimensionaliteit. De geometrie van twee dimensies is een beetje ...passé.
COSMISCHE VLOEISTOF VOLUMETESTER
Onze nieuwe gadget op het gebied van geodeten...
...het is gemaakt van onbuigzame staven, de een past precies in de ander.
Deze zullen je niet toelaten naar links of naar rechts af te dwalen, niet naar boven of naar onder, maar ALTIJD RECHT VOORUIT !


Om oppervlaktes te meten, gebruik je deze verf. Exact 100 gram per vierkante meter.
Geniaal
Om inhoud te meten, vul je deze met gas.
Je kunt de waarde direct aflezen op de meter van de VOLUMETESTER
en onthoud : de oppervlakte van de bol : 4πℓ², inhoud 4/3πℓ³
begrepen
EUCLIDES & CO
wat een beroep!
Anselm is deze keer geland in een driedimensionale ruimte en we zullen hem volgen tijdens zijn expeditie.


Erg mooi materiaal. En die staven zijn precies één meter
Maar, na behoorlijk wat staven in elkaar te hebben geklikt...
het zal toch niet waar zijn, nu zijn we weer terug bij af !
Mijn geodeet sluit alweer op zichzelf aan!
een gesloten driedimensionale ruimte ?
Dit slaat echt alles!
Anselm, die even was opgehouden om wat te eten op een asteroïde, besluit om de methode van het meten van hoeken opnieuw te gebruiken
EUCLIDES & Co.
Net als eerder gebruik ik drie GEODETEN om een DRIEHOEK te maken

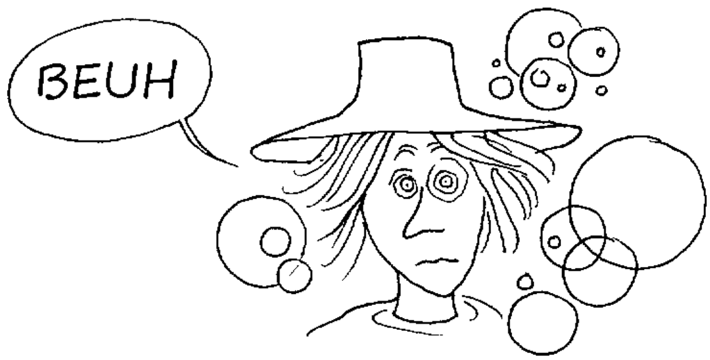

!?!
mijn geodeten zijn netjes bevestigd, en toch is de som van mijn hoeken hoger dan 180°
Goed...
VOLUMETESTER
Ik maak er een en ik zal dan zijn volume en oppervlakte meten
FSCHHHHHHHH
Een bol van straal ℓ is het totaal van punten van een vaste ℓ vanaf een bepaald punt, dat we N noemen
De oppervlakte is minder dan 4πℓ²
Zo te zien is het volume minder dan 4/3πℓ³ !
Ik heb me weer laten inpakken !


Anselm vergroot de straal l van de bol nog steeds...
FSSSCHHHH...
VOLUMETESTER
VLAK
Nee maar, nu is mijn bol...vlak !
Meer en meer...
Nu is zijn bolheid omgekeerd !
Ik snap er niks meer van
VLAK
EUCLIDES & Co.
Ietsje later:
O, nee... de wand sluit me in !
FSSCHHHHHHH
EUCLIDES
Snel de fles dicht doen !

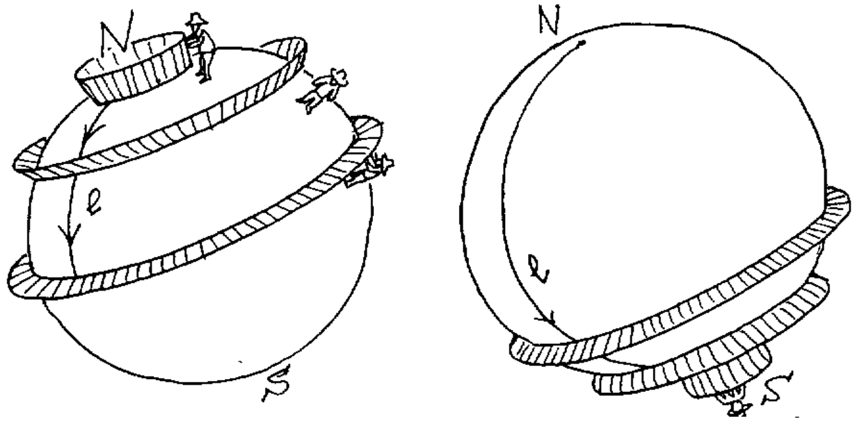
Dus, door in zijn dwaasheid een ballon op te blazen in een driedimensionale ruimte, zit Lanterlu er nu ...BINNENIN !

Als hij de gasfles niet op tijd had dichtgedraaid, zou hij platgedrukt zijn, vergelijkbaar met de situatie op pagina 13, waar Anselm gevangen zat in zijn eigen cirkel.

Met de beste wil van de wereld, kun je nog niet VISUALISEREN hoe KROMMING in die driedimensionale ruimte eruit ziet. Zijn geodeten sluiten op zichzelf aan en zijn totale volume is een EINDIG aantal kubieke meters. Net zoals de oppervlakte van onze planeet, een gesloten oppervlak, die ook maar een EINDIG aantal vierkante meterse telt.
De som van de hoeken van een driehoek, in die driedimensionale ruimte, is meer dan 180°. Om de kromming te "ZIEN", moet je in staat zijn om vier dimensies waar te nemen.



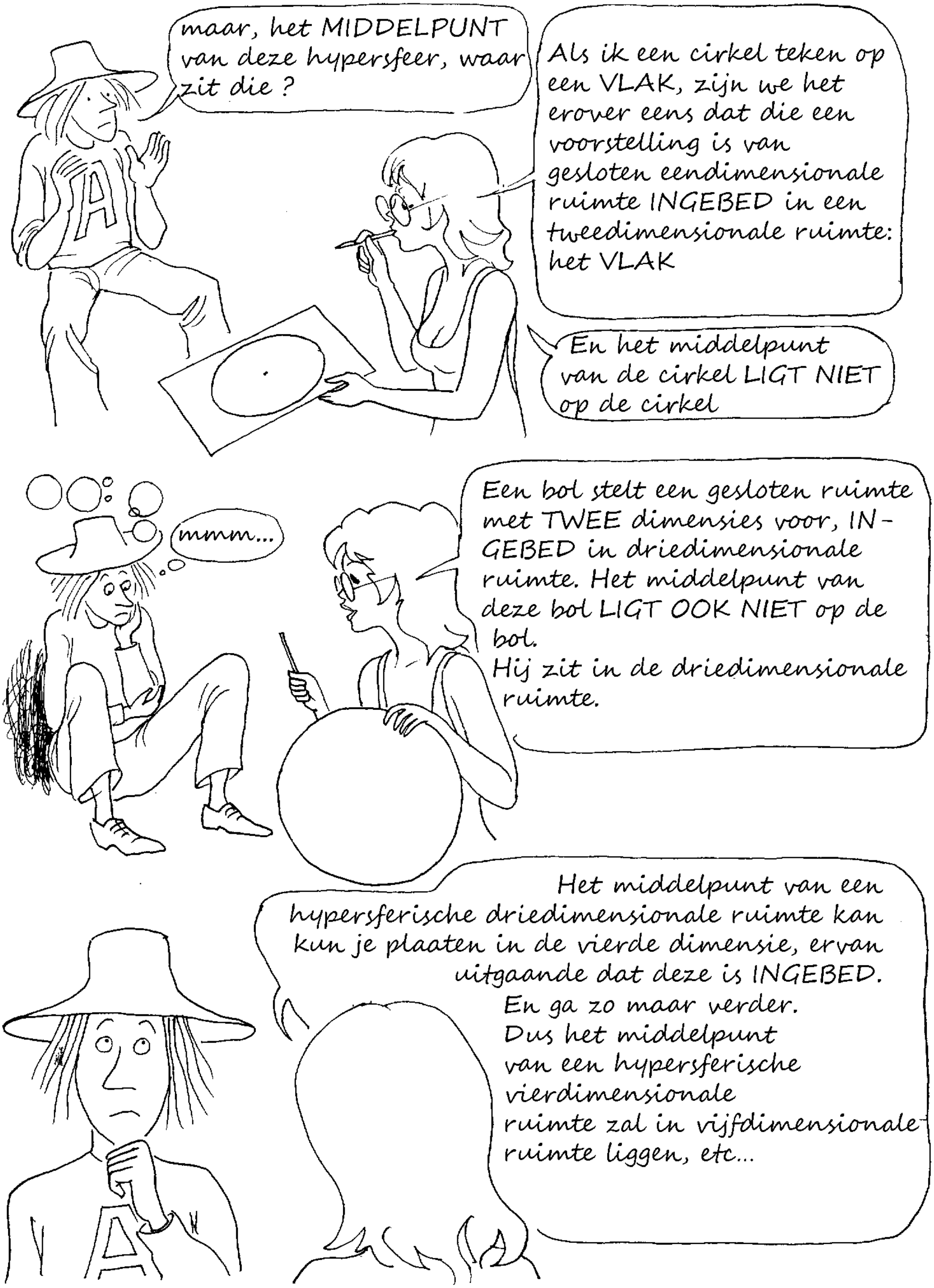
Je zou kunnen zeggen dat ons UNIVERSUM van drie dimensies een DEELRUIMTE is, ingebed is een vierdimensionale ruimte, die zelf misschien weer een deelruimte is ingebed in vijfdimensionale ruimte, etc...Maar, in onze tijd, is het niet gepast om deze dingen te zeggen.

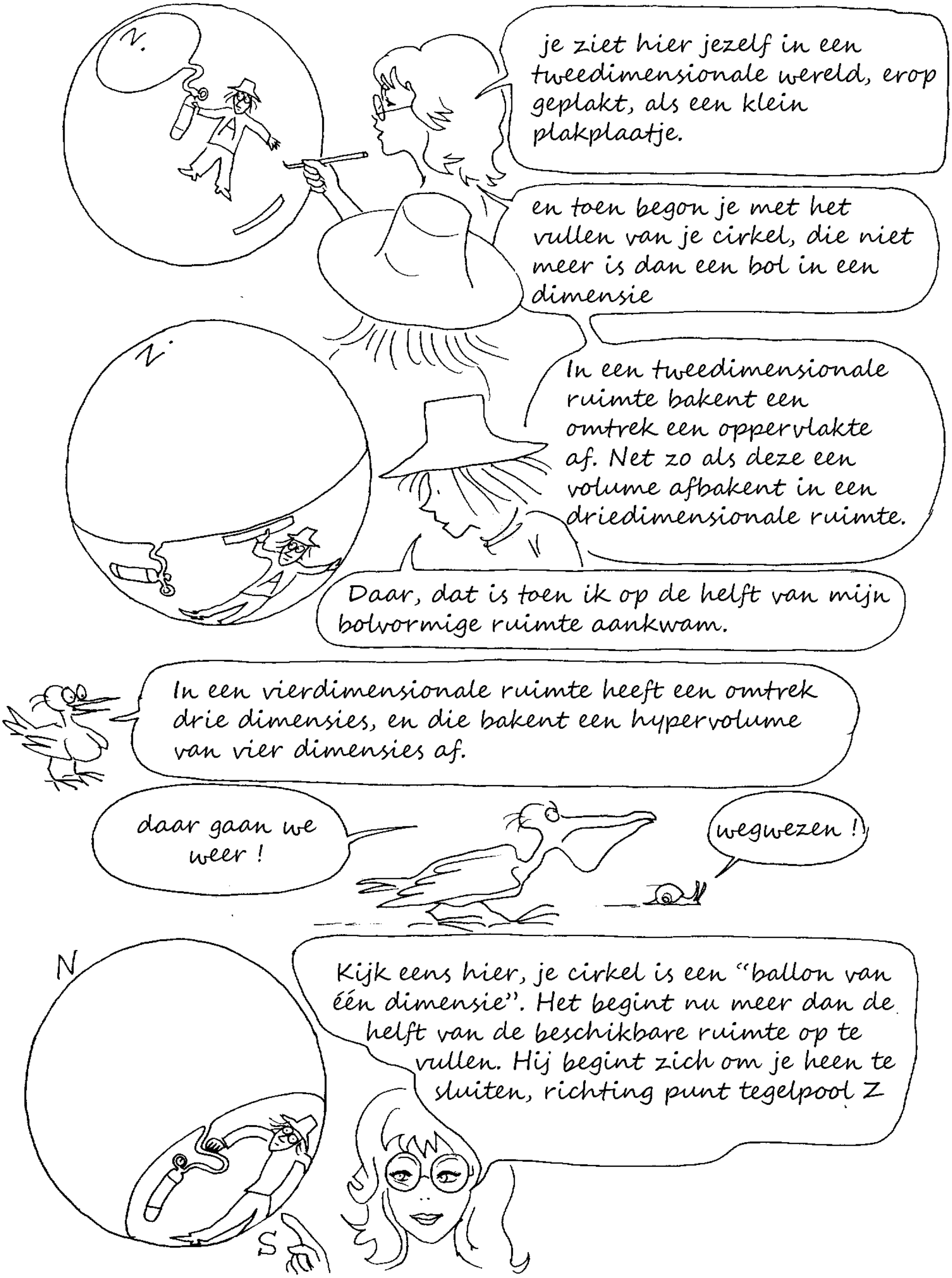


Door de straal ℓ van zijn domein te vergroten op zijn bol, kwam Lanterlu uit bij tegenpool Z van punt N, het middelpunt van zijn cirkel, ingesloten in zijn eigen afrastering.

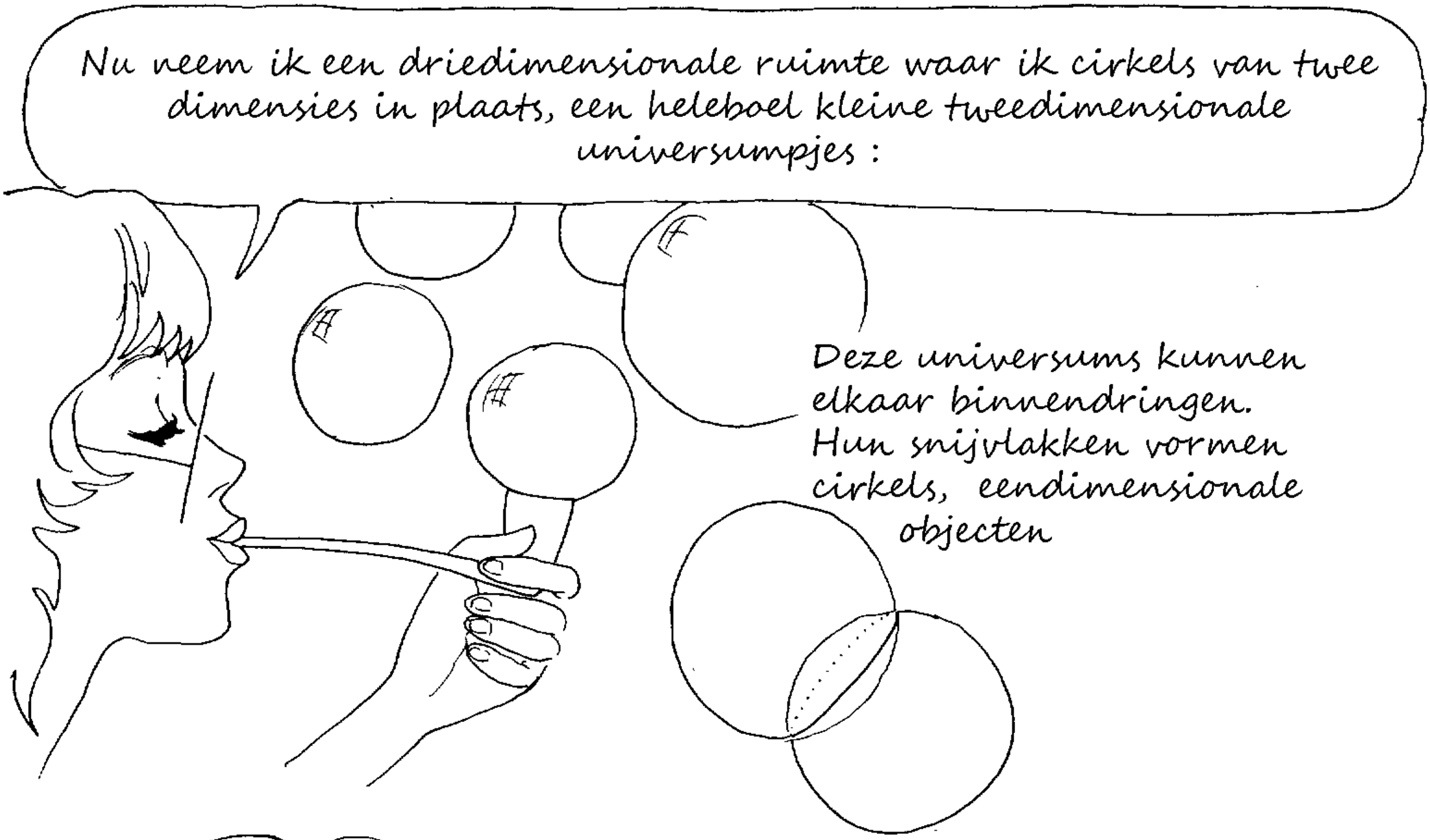
In driedimensionale ruimte met een positieve kromming, gebeurt hetzelfde. In die tweedimensionale ruimte, die de bol vormt, bereikte Anselm de EVENAAR toen hij de helft van beschikbare ruimte had omsloten. DE EVENAAR bestaat ook in HYPERSFERISCHE driedimensionale ruimte. Anselm kwam daar aan toen de ballon de helft van het totale volume had gevuld. Op de bol, leek de cirkel van de evenaar op een RECHTE LIJN. Op dezelfde manier lijkt de "ballonevenaar" op een VLAK. Nadat de evenaar is gepasseerd keert de BOLHEID van de ballon om en verandert deze automatisch naar punt Z, tegenpool van punt N, het middelpunt van de ballon.

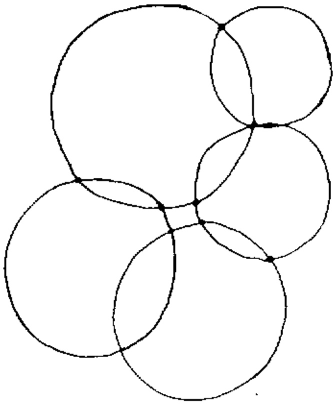

moeilijkheden?
Dat kun je wel zeggen, ja... het duizelt me allemaal een beetje.
Mijn naam is Sophie. Krommingen en rondingen zijn mijn gebied
Navigatie door de deelruimtes, is in het begin altijd een vreemde ervaring. Je moet voorkomen dat je blokkeert. Je neemt gewoon stapje voor stapje.
aha, ja...
ik ben de draad een beetje kwijt...


maar, het MIDDELPUNT van deze hypersfeer, waar zit die ?
Als ik een cirkel teken op een VLAK, zijn we het erover eens dat die een voorstelling is van gesloten eendimensionale ruimte INGEBED in een tweedimensionale ruimte: het VLAK
En het middelpunt van de cirkel LIGT NIET op de cirkel
mmm...
Een bol stelt een gesloten ruimte met TWEE dimensies voor, INGEBED in driedimensionale ruimte. Het middelpunt van deze bol LIGT OOK NIET op de bol.
Hij zit in de driedimensionale ruimte.
Het middelpunt van een hypersferische driedimensionale ruimte kan kun je plaaten in de vierde dimensie, ervan uitgaande dat deze is INGEBED.
En ga zo maar verder.
Dus het middelpunt van een hypersferische vierdimensionale ruimte zal in vijfdimensionale ruimte liggen, etc...


je ziet hier jezelf in een tweedimensionale wereld, erop geplakt, als een klein plakplaatje.
en toen begon je met het vullen van je cirkel, die niet meer is dan een bol in een dimensie
In een tweedimensionale ruimte bakent een omtrek een oppervlakte af. Net zo als deze een volume afbakent in een driedimensionale ruimte.
Daar, dat is toen ik op de helft van mijn bolvormige ruimte aankwam.
In een vierdimensionale ruimte heeft een omtrek drie dimensies, en die bakent een hypervolume van vier dimensies af.
daar gaan we weer !
wegwezen !
N
Kijk eens hier, je cirkel is een "ballon van één dimensie". Het begint nu meer dan de helft van de beschikbare ruimte op te vullen. Hij begint zich om je heen te sluiten, richting punt tegelpool Z
S


Net zoals in mijn driedimensionaal gekromde ruimte, toen ik de helft van het totale volume vulde en de ballon zich om mijn heen sluit, richting de tegenpool
Ik begrijp het !
Want de bol, in deze driedimensionale ruimte, heeft vanzelfsprekend twee middelpunten, die tegen-polen van elkaar zijn.
?!!?
Tenminste, ik weet niet precies wat ik dan begrijp, maar ik heb toch het idee dat ik iets begrijp
Wat een ellende!
Geen zorgen, Anselm, wanneer je meer dan drie dimensies hebt, moet je
EXTRAPOLEREN OM TE BEGRIJPEN
ik extrapoleer zonder het te begrijpen!
Je moet het plaatje zelf maken... ...in je hoofd !

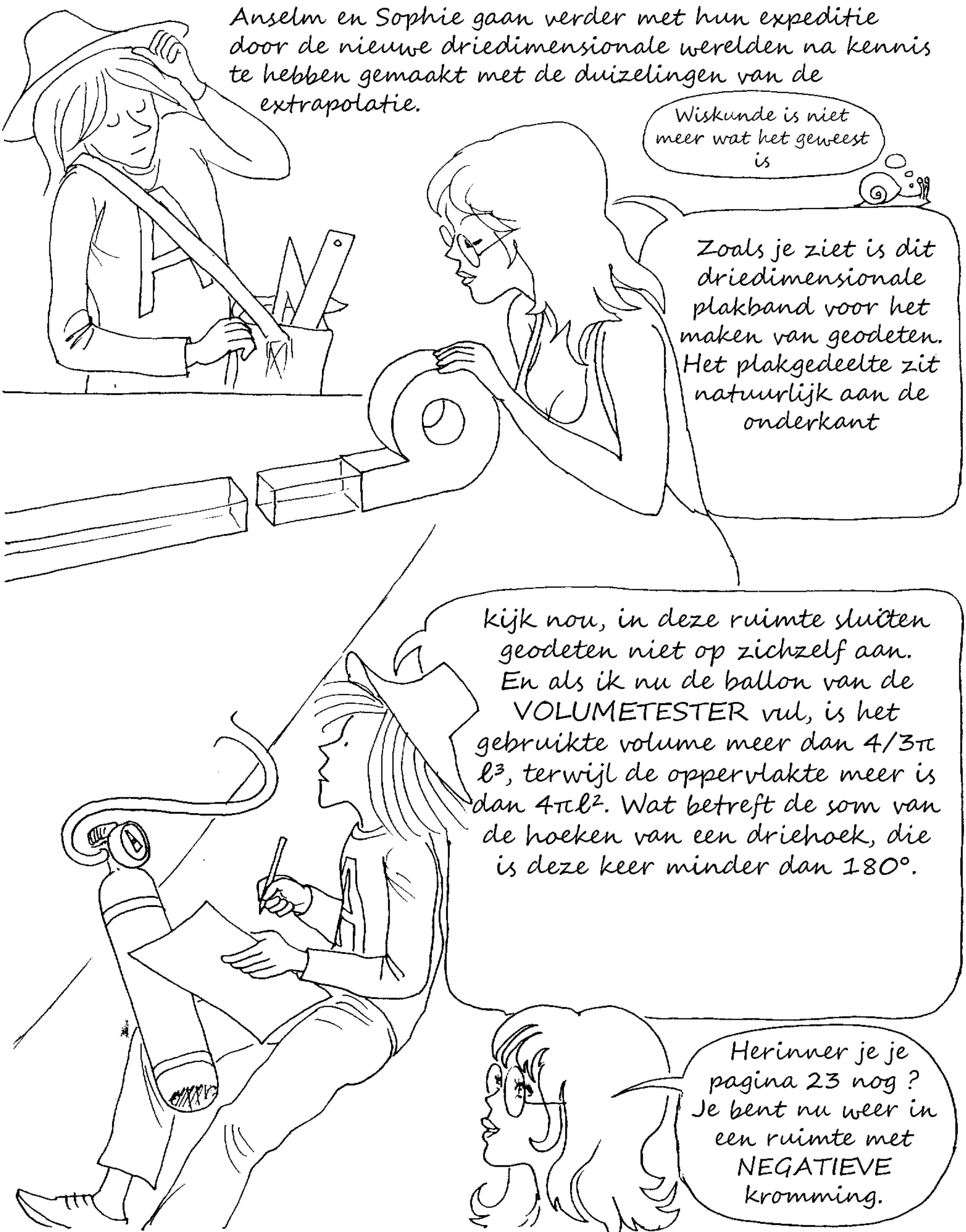




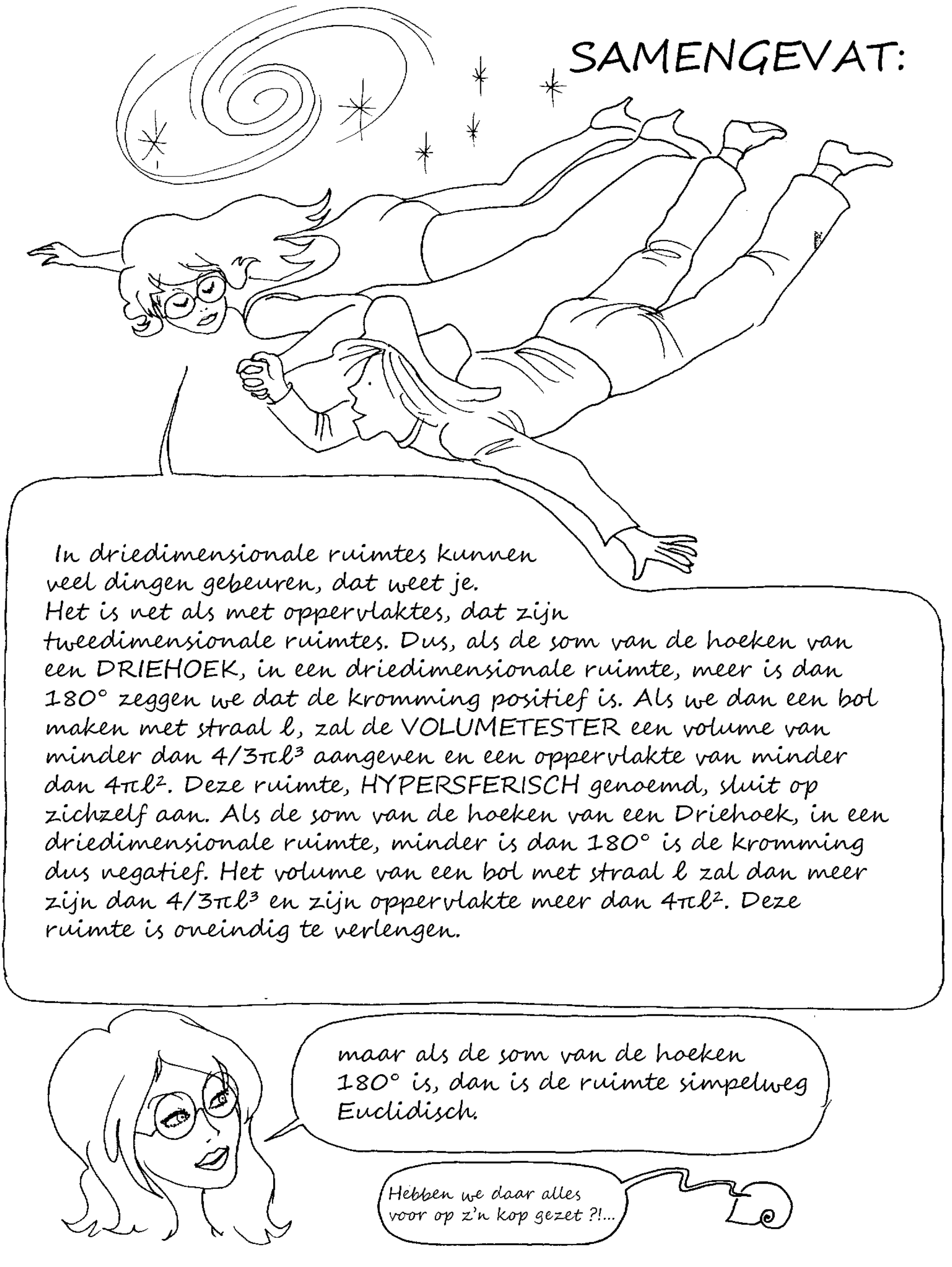
Op dezelfde manier, kun je deze eendimensionale cirkel op een papier plaatsen (twee dimensies) en verdelen in PUNTEN. (gewoonlijk zeggen we dat de PUNT geen dimensies heeft, dus nuldimensionaal is)

Een bol kan gezien worden als een kruising tussen twee driedimensionale "bellen", die bewegen in een vierdimensionale ruimte.

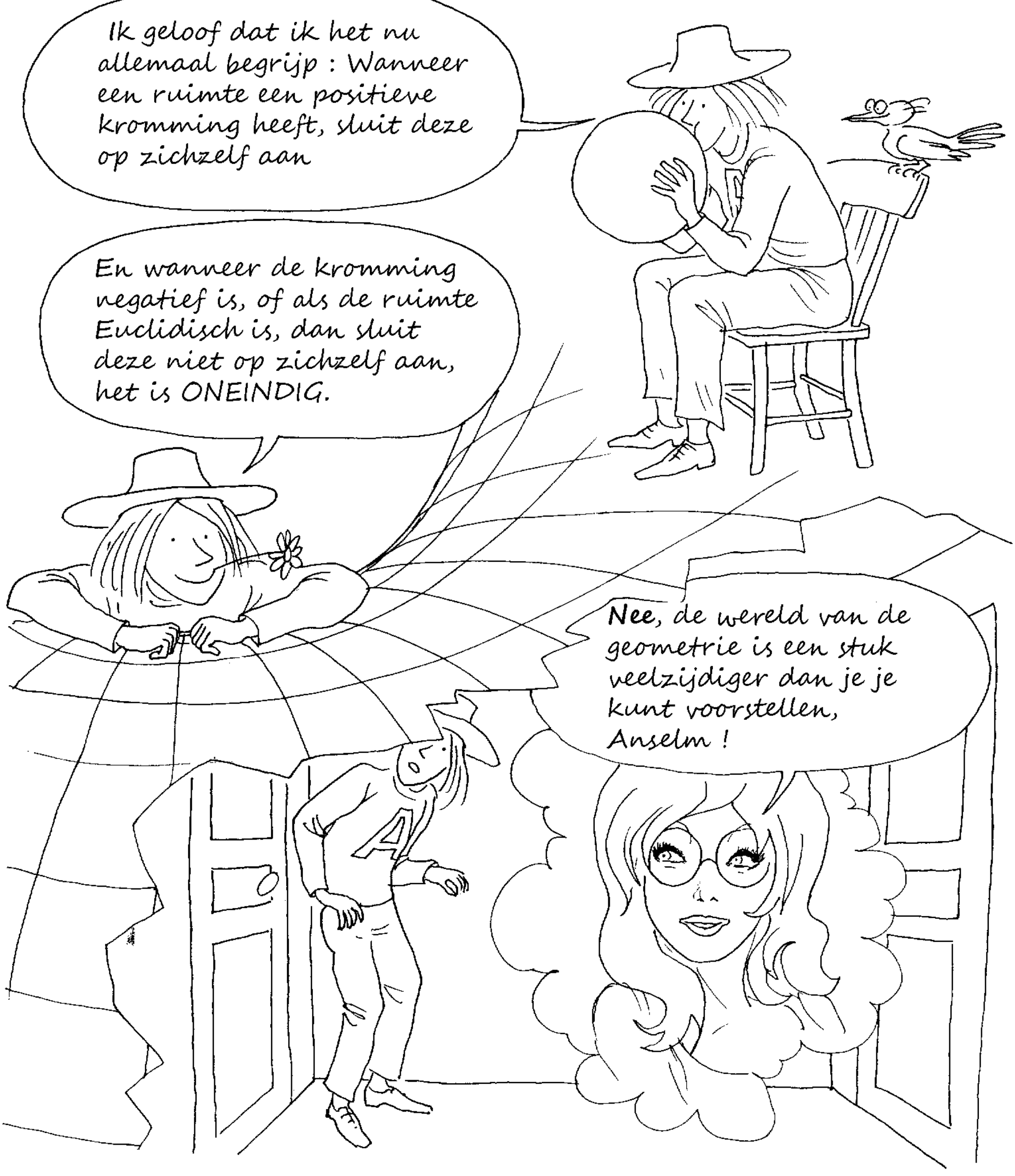
En zo gaat het door : een Driedimensionale ruimte met positieve kromming, hypersferisch, kan zelf worden gezien als een kruising van twee vierdimensionale bellen, die in vijfdimensionale ruimte beweegt.

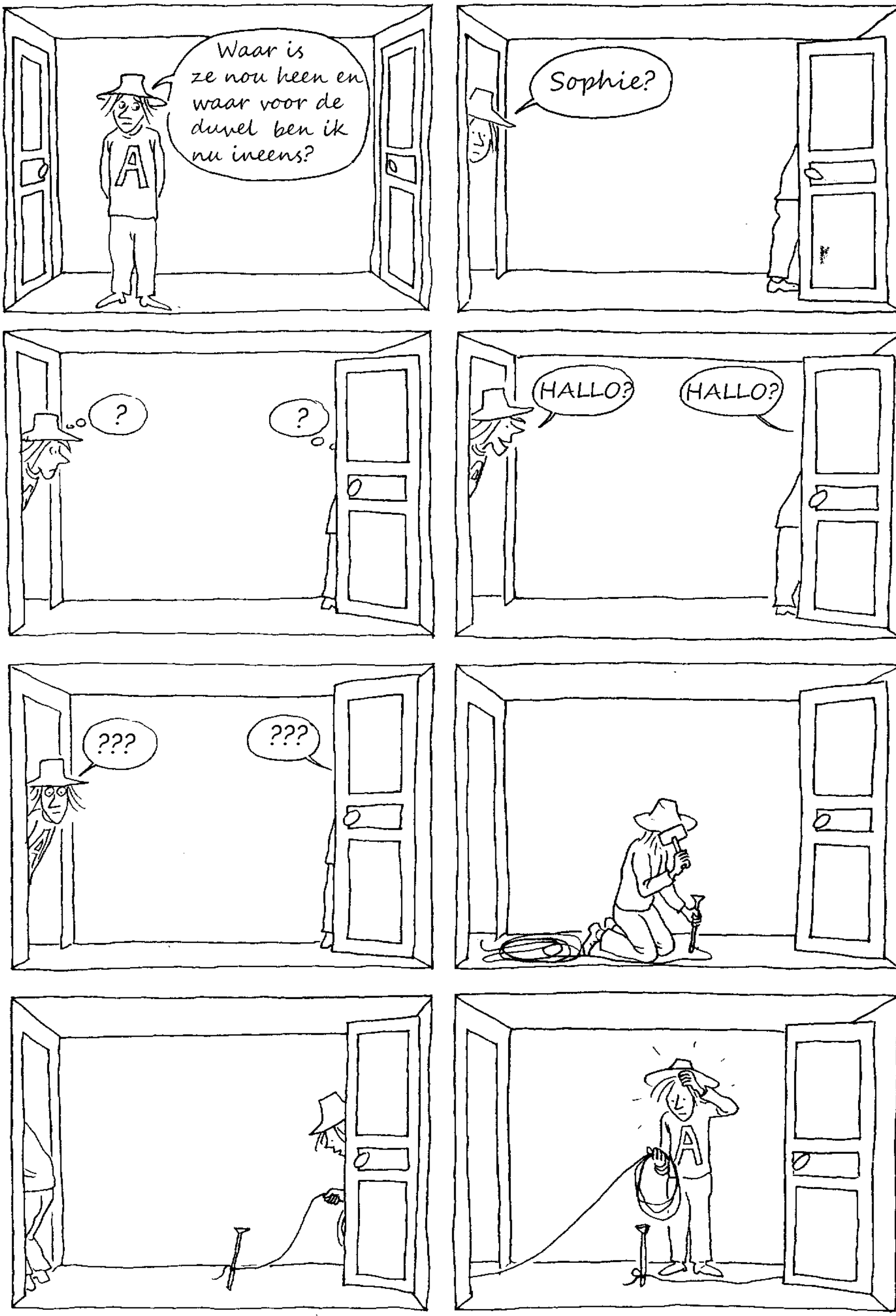


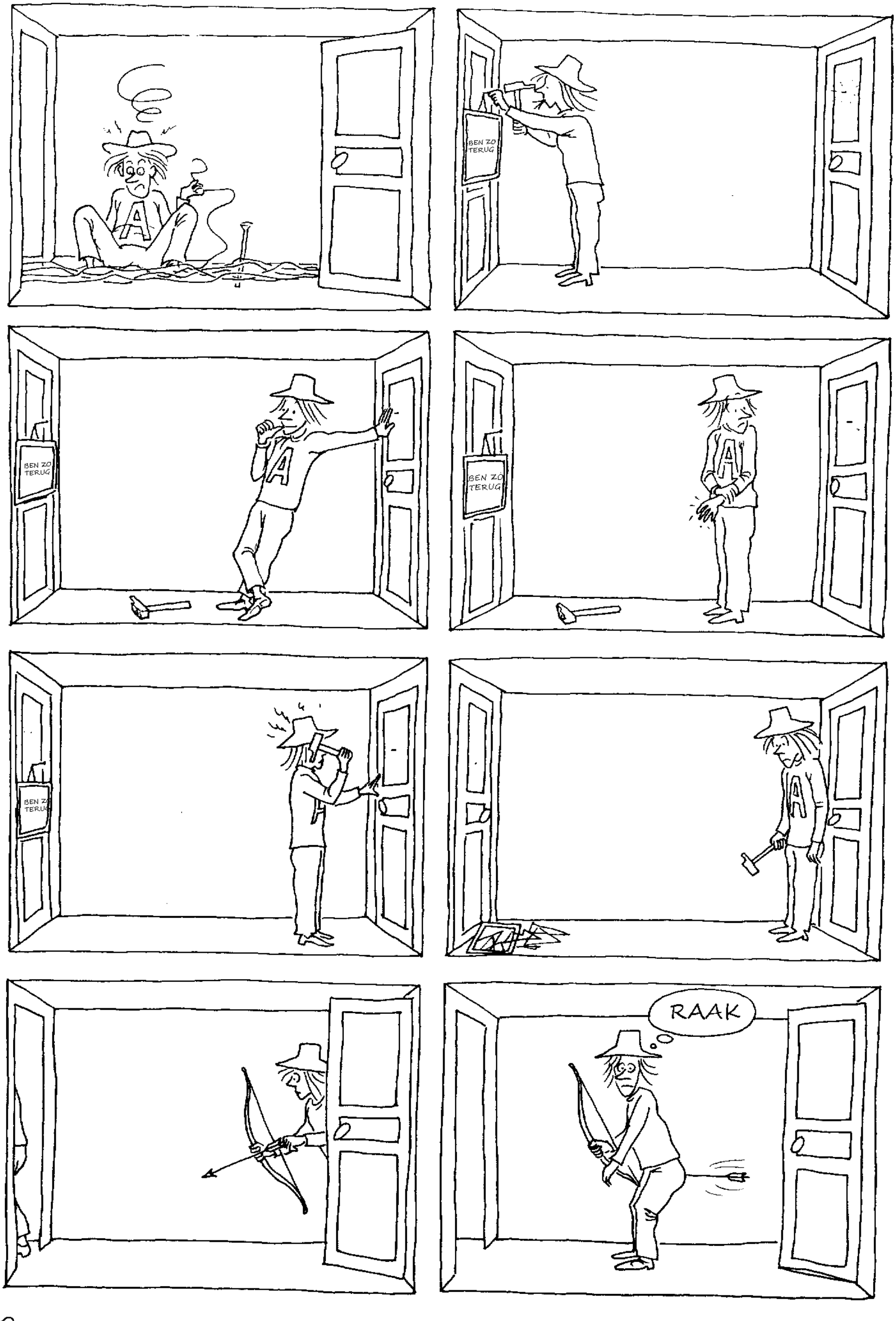
Anselm en Sophie gaan verder met hun expeditie door de nieuwe driedimensionale werelden na kennis te hebben gemaakt met de duizelingen van de extrapolatie.
Wiskunde is niet meer wat het geweest is
Zoals je ziet is dit driedimensionale plakband voor het maken van geodeten. Het plakgedeelte zit natuurlijk aan de onderkant
kijk nou, in deze ruimte sluiten geodeten niet op zichzelf aan. En als ik nu de ballon van de VOLUMETESTER vul, is het gebruikte volume meer dan 4/3π ℓ³, terwijl de oppervlakte meer is dan 4πℓ². Wat betreft de som van de hoeken van een driehoek, die is deze keer minder dan 180°.
Herinner je je pagina 23 nog ? Je bent nu weer in een ruimte met NEGATIEVE kromming.


SAMENGEVAT:
In driedimensionale ruimtes kunnen veel dingen gebeuren, dat weet je. Het is net als met oppervlaktes, dat zijn tweedimensionale ruimtes. Dus, als de som van de hoeken van een DRIEHOEK, in een driedimensionale ruimte, meer is dan 180° zeggen we dat de kromming positief is. Als we dan een bol maken met straal ℓ, zal de VOLUMETESTER een volume van minder dan $4/3\pi\ell^3$ aangeven en een oppervlakte van minder dan $4\pi\ell^2$. Deze ruimte, HYPERSFERISCH genoemd, sluit op zichzelf aan. Als de som van de hoeken van een Driehoek, in een driedimensionale ruimte, minder is dan 180° is de kromming dus negatief. Het volume van een bol met straal ℓ zal dan meer zijn dan $4/3\pi\ell^3$ en zijn oppervlakte meer dan $4\pi\ell^2$. Deze ruimte is oneindig te verlengen.
maar als de som van de hoeken 180° is, dan is de ruimte simpelweg Euclidisch.
Hebben we daar alles voor op z'n kop gezet ?!...

EEN RUIMTE IS OPEN ÓF GESLOTEN !...

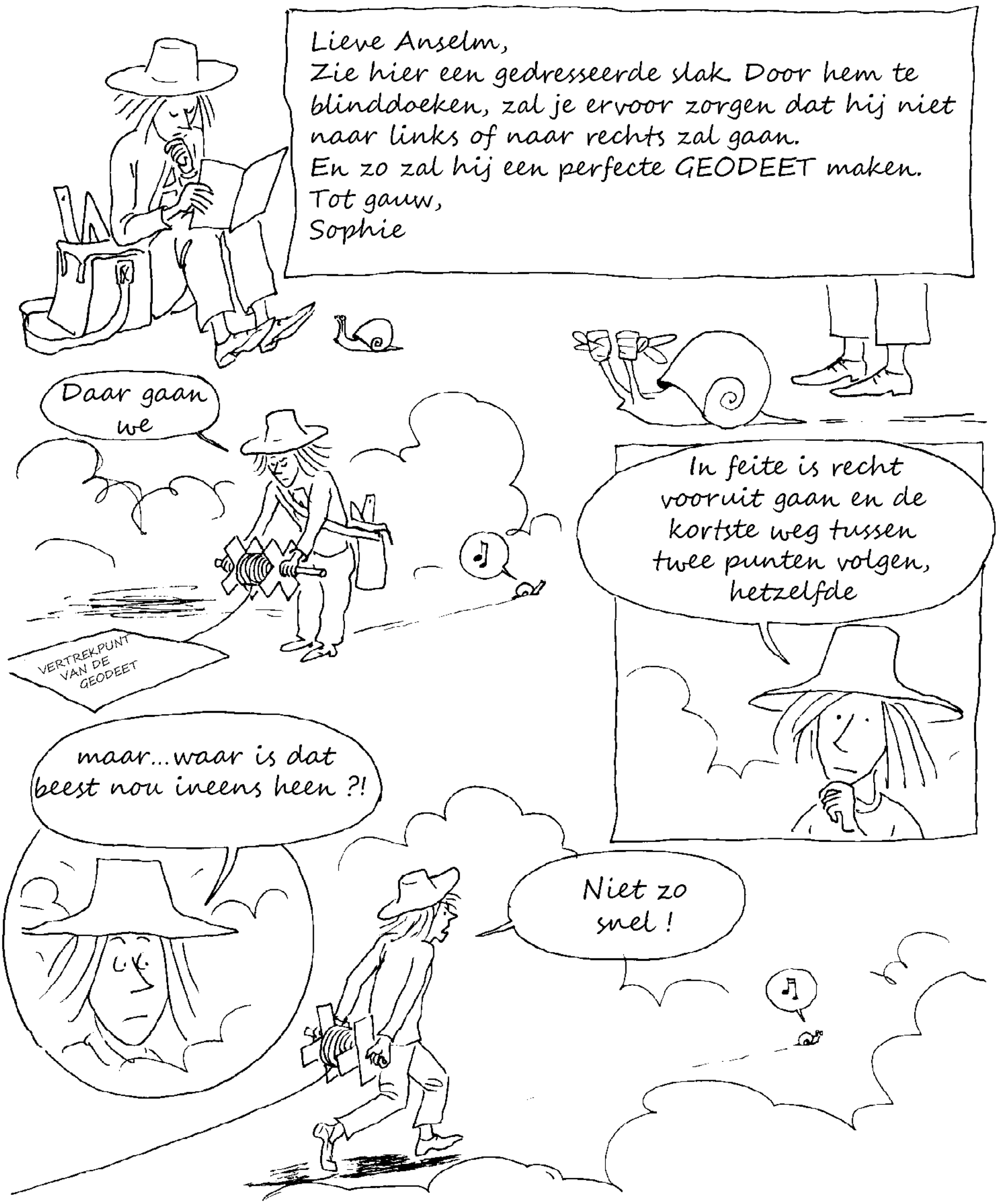



Waar is ze nou heen en waar voor de duvel ben ik nu ineens?
Sophie?
?
?
HALLO?
HALLO?
???
???


BEN ZO TERUG
BEN ZO TERUG
BEN ZO TERUG
BEN ZO TERUG
RAAK

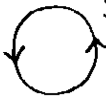

Euh, ja, Lanterlu werd vertoond in een cilindrische driedimensionale ruimte.
Hoewel deze Euclidisch is, zonder kromming (de som van de hoeken van een driehoek is precies 180°) sluit deze wereld wel op zichzelf aan.
Raak
Oké, aangenomen... bolvormige werelden, hyperbolische, cilindrische. Nu zijn we rond, toch ?
denk je dat ?
Laten we een reisje maken in de tweedimensionale wereld
Hé !?
Wolken

ONDERSTE BOVEN

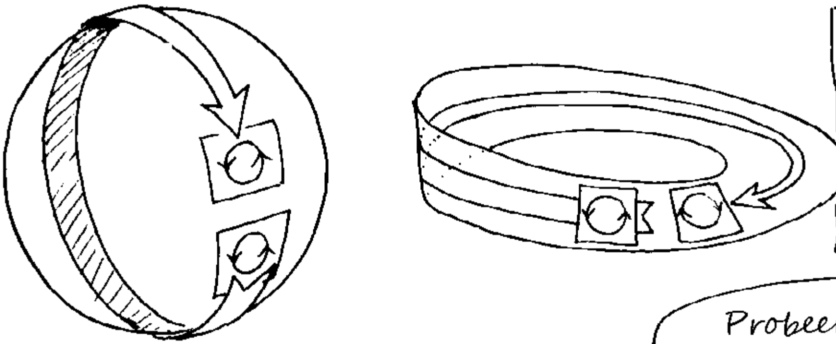



dit is weer gesloten ruimte, net als eerst
som van de hoeken: 180°. Het is hier Euclidisch. Weer een cilinder!
Of toch niet!...
!?!
Nee maar!
VERTREKPUNT VAN DE GEODEET
Anselm bevindt zich deze keer in een TWEEDIMENSIONALE NIET-ORIËNTEERBARE RUIMTE. Het bekendste voorbeeld van zo'n ruimte is de Möbiusband (1830). Dit idee was aan de Grieken ontsnapt, die toch wel over alles nadachten.
VERTREKPUNT VAN DE GEODEET
Sophie, haal me er uit

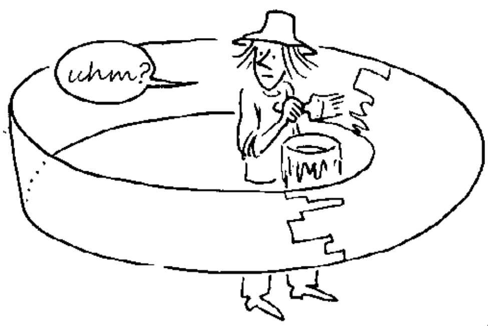
Teken een cirkel op een oppervlakte en zet er twee pijltjes op.



Stel je de cirkel voor als een klein overdrukplaatje dat we over de oppervlakte kunnen laten glijden zoveel we willen. Als de cirkel identiek blijft, noemen we die ruimte ORIËNTEERBAAR (dit is het geval bij een bol, cilinder, vlak, etc.) Maar als dit plaatje over de Möbius glijdt, gaat het er heel anders aan toe



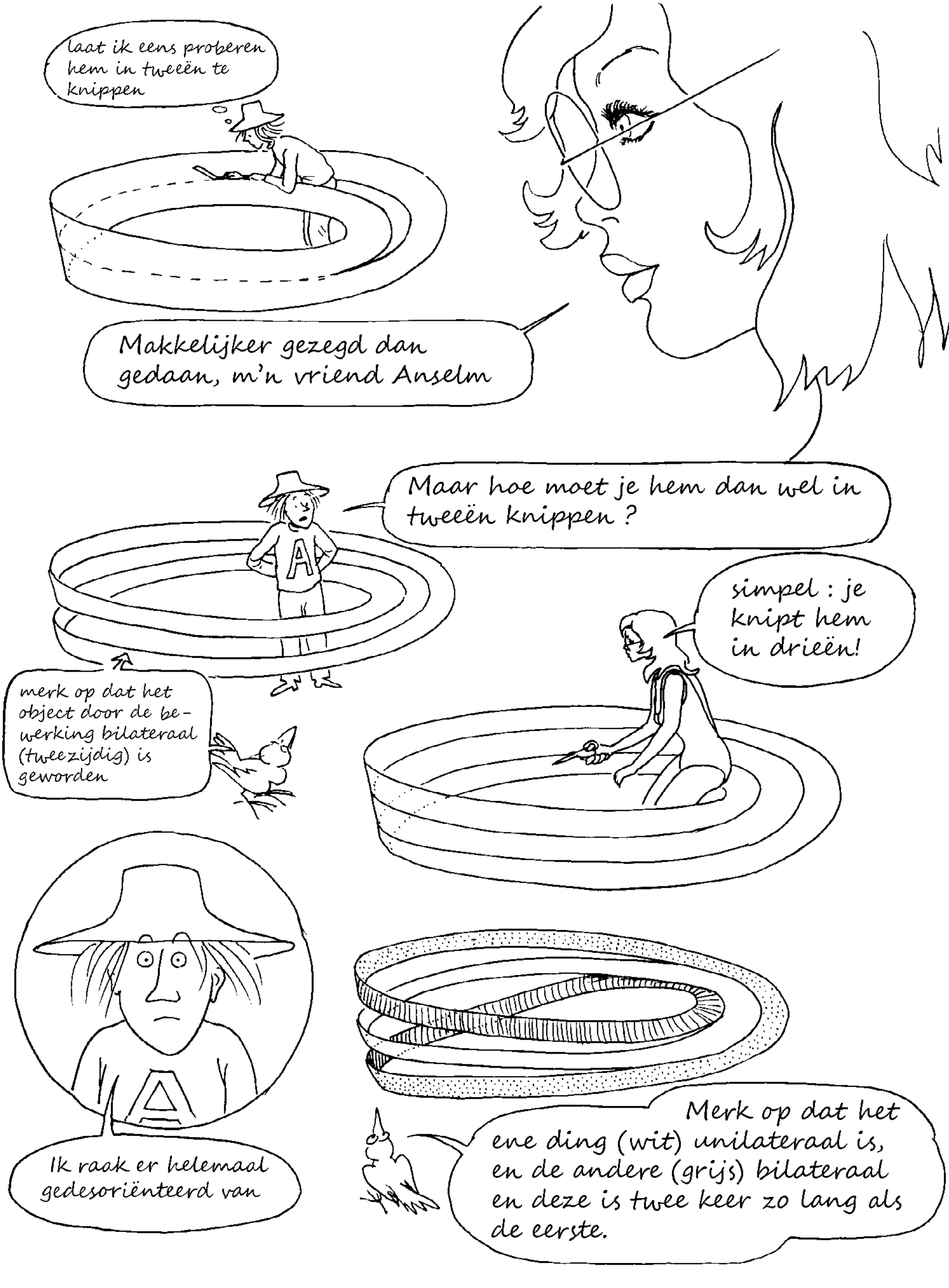
Elke keer dat hij een rondje maakt door dit tweedimensionale universum verandert de cirkel van oriëntatie



Dit betekent ook dat je de Möbius-band niet in twee verschillende kleuren kunt schilderen: hij heeft maar één kant en dat noemen we UNILATERAAL

Hij heeft maar één RAND :

Je kunt hem in één keer omzomen!

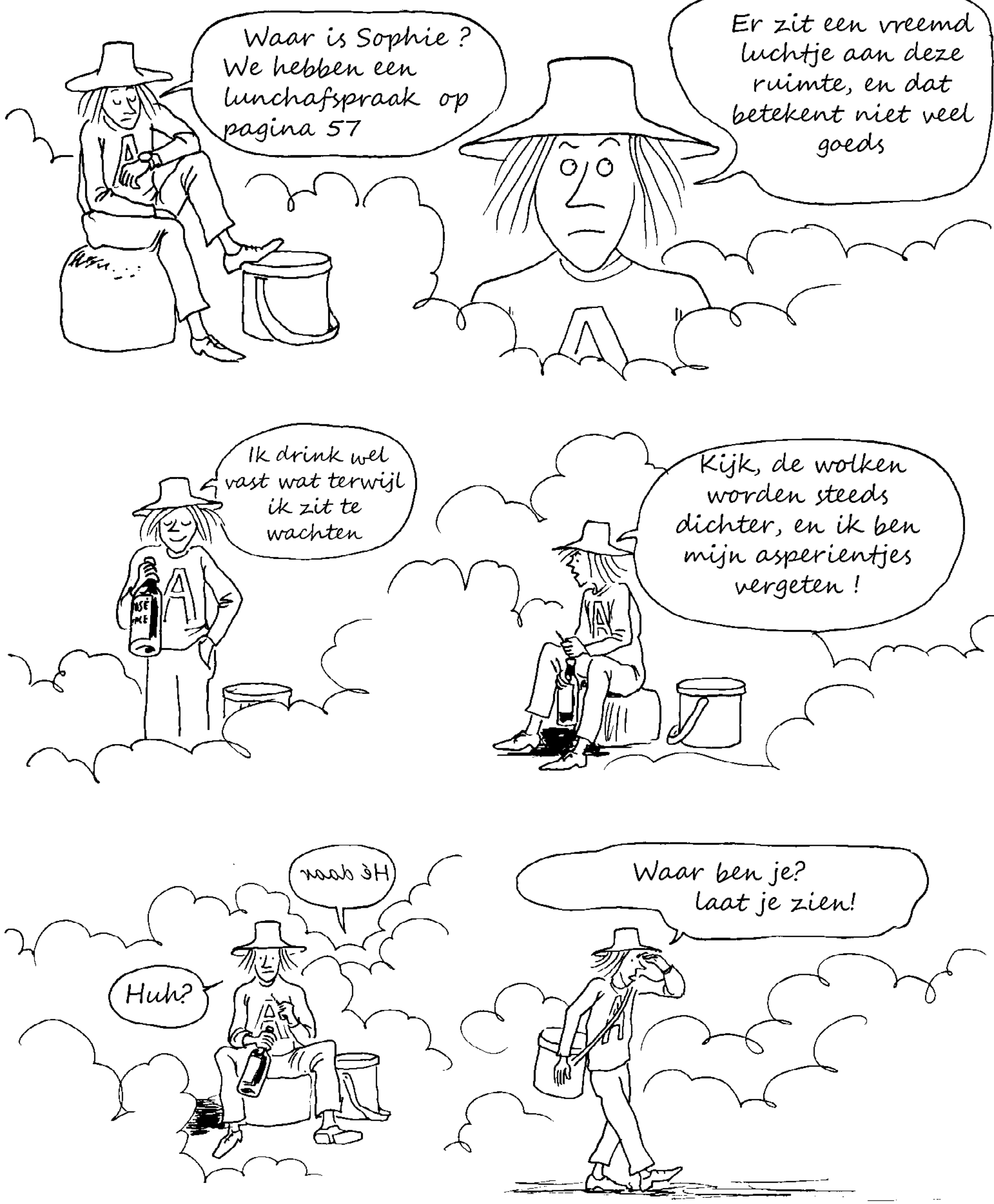


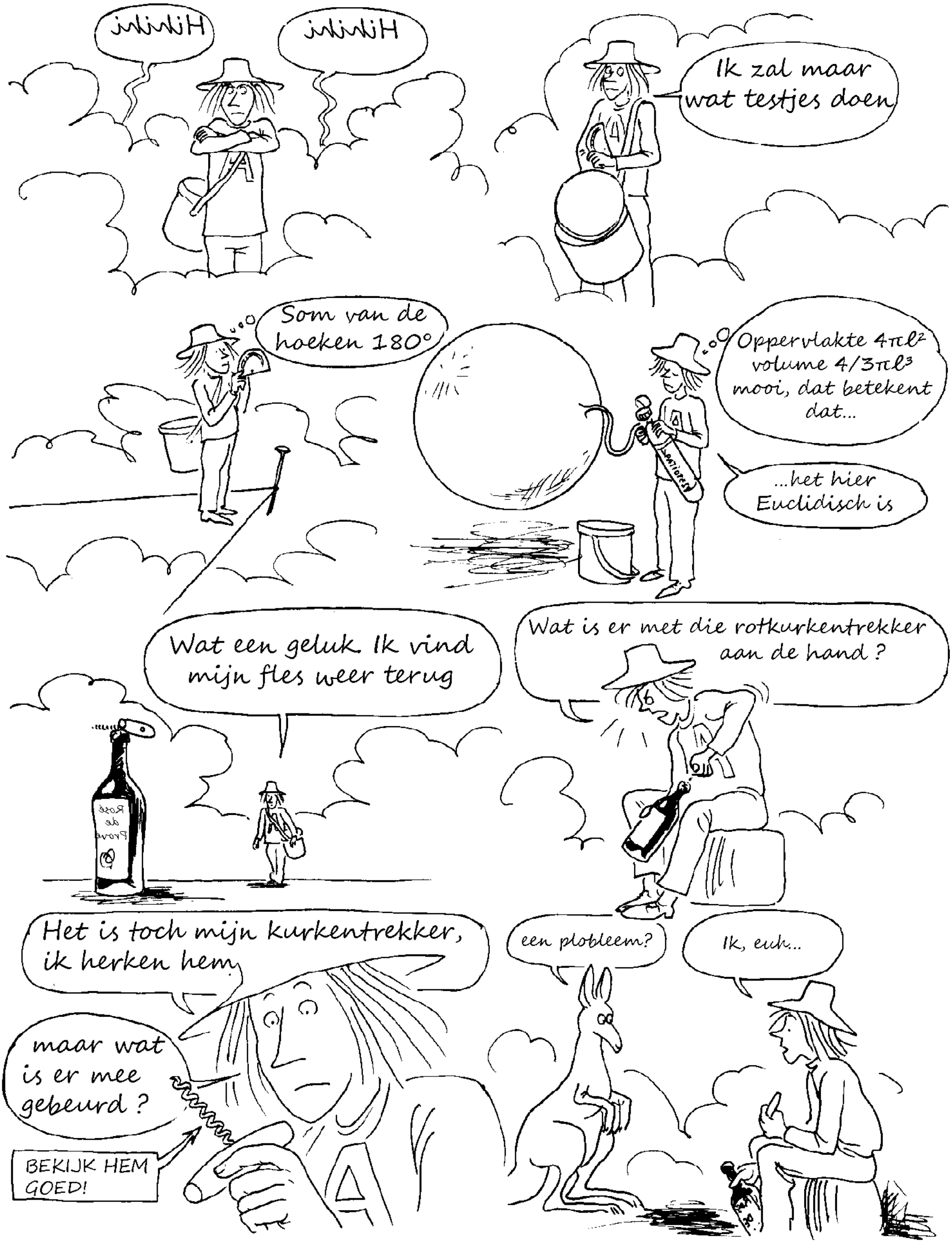
laat ik eens proberen hem in tweeën te knippen
Makkelijker gezegd dan gedaan, m'n vriend Anselm
Maar hoe moet je hem dan wel in tweeën knippen ?
simpel : je knipt hem in drieën!
merk op dat het object door de bewerking bilateraal (tweezijdig) is geworden
Ik raak er helemaal gedesoriënteerd van
Merk op dat het ene ding (wit) unilateraal is, en de andere (grijs) bilateraal en deze is twee keer zo lang als de eerste.

Na deze wandeling op de Möbiusband, gaan we weer terug naar de Euclidische driedimensionale ruimte (zonder kromming):

DE ORIËNTATIE VAN RUIMTE:

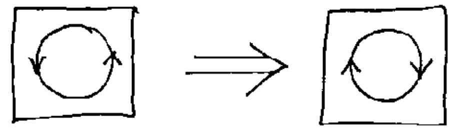
Ga mee met Anselm in zijn expeditie door de nieuwe Euclidische driedimensionale wereld (zonder kromming)



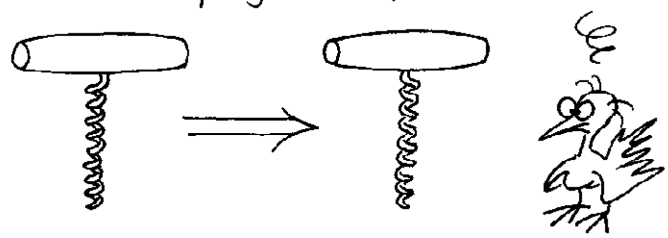

Hihihi
Hihihi
Ik zal maar wat testjes doen
Som van de hoeken 180°
Oppervlakte $4\pi l^2$ volume $4/3\pi l^3$ mooi, dat betekent dat...
...het hier Euclidisch is
Wat een geluk. Ik vind mijn fles weer terug
Wat is er met die rotkurkentrekker aan de hand ?
Het is toch mijn kurkentrekker, ik herken hem
maar wat is er mee gebeurd ?
BEKIJK HEM GOED!
een plobleem?
Ik, euh...

Ooh, een Rosé uit de Provence, de kwaliteit is middelmatig, maar ach...
heb je een kurkentrekker?
euh...ja
Zo houden zij warme voetjes, de kangoeroetjes
KLOK KLOK
Had jij niks vreemds door ?
Nee, je ziet een alleen beetje bleek, dat is alles
Neem twee keer per dag een beetje parmezaanse bisulfiet.
goede dag verder
Iemand heeft met mijn kurkentrekker geknoeid... en een dronken kangoeroe klokt mijn rosé weg.
Wat is hier aan de hand?
Verdorie
WE KUNNEN JE NIET STERK GENOEG AANRADEN OM DEZE KURKENTREKKER MET GROTE AANDACHT TE BESTUDEREN

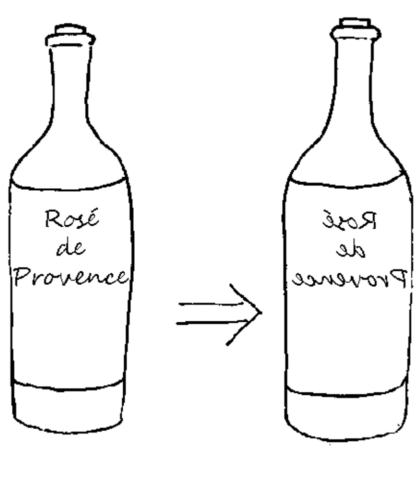
De Möbiusband (nietoriënteerbare tweedimensionale ruimte) heeft een gelijke in de driedimensionale wereld. Toen de cirkel op de Möbiusband een "rondje" door de Euclidische ruimte had gemaakt, keert zijn oriëntatie om.



Zie pagina 54



Merk op dat deze objecten zijn "gespiegeld"
De kurkentrekker, of Anselm zelf, kunnnen worden beschouwd als plaatjes in een driedimensionale ruimte. Elke keer dat een object een "reis" maakt door die driedimensionale ruimte, keert de oriëntatie om. Omdat wij Anselm moeten vergezellen in zijn ruimtereis, treffen wij de kurkentrekker vanzelfsprekend "gespiegeld" aan, net als hem, en is de kurketrekker de ongebruikelijke kant op gedraaid. Een tweede reis door dit universum zorgt ervoor dat wij de objecten weer in hun oorspronkelijke vorm zien. (op voorwaarde dat we de objecten niet verplaatsen)



Anselm en de kangoeroe (die elkaars tegenvoeters zijn) leefden in dezelfde ruimte, maar ze waren verschillend in de zin dat "de goede richting" voor de Kangoeroe "de verkeerde richting" is voor Lanterlu en vice versa.

EPILOOG:

Alles loopt door elkaar. Er is geen links en rechts meer, geen binnen- en geen buitenkant. Waar moet dit allemaal naartoe ? En welke weg moet ik nemen ?
Je moet de geodeten volgen Anselm, de geodeten van je leven
Je krijgt mij zo gek niet om te geloven dat het Universum zo raar is. Wat een wiskundige waanzin.
dit is iets voor een stripboek
Waarom zou je je hier allemaal mee bezig-houden, terwijl het toch duidelijk is dat de ruimte Euclidisch IS (*)
(*) Een standpunt gemaakt in 1830 door Ostrogradsky, professor in de wiskunde in Petrograd, na een lezing over het werk van Riemann en Lobachevsky


Stel je eens voor dat het universum niet lijkt op wat het echt is. Denk je eens in wat er zou gebeuren als dat op scholen werd onderwezen ?!!...
Een regelrechte ramp !
En wat uiteindelijk echt telt, is het leven. En voor het leven van alledag, zul je het wel met me eens zijn dat...
Maar, wat zit er nog achter dit alles?
De NATUURKUNDE schat...
Ik WIL de waarheid achterhalen!
Laten we dat concreet maken
Is daar iemand?


...als de gemiddelde dichtheid van materie in het universum minder is dan 10-29 gm.cm³...
?
...dan heeft het universum een negatieve kromming en is het oneindig lang...
...aan de andere kant, als de dichtheid groter is dan 10-29 gm/cm³
!..
...is het universum hypersferisch en sluit het op zichzelf aan...
Maar als die dichtheid precies 10-29 gm/cm³, zal het universum Euclidisch zijn.
HUM...
Doctor Einstein, neem ik aan?
Mja?
EINDE