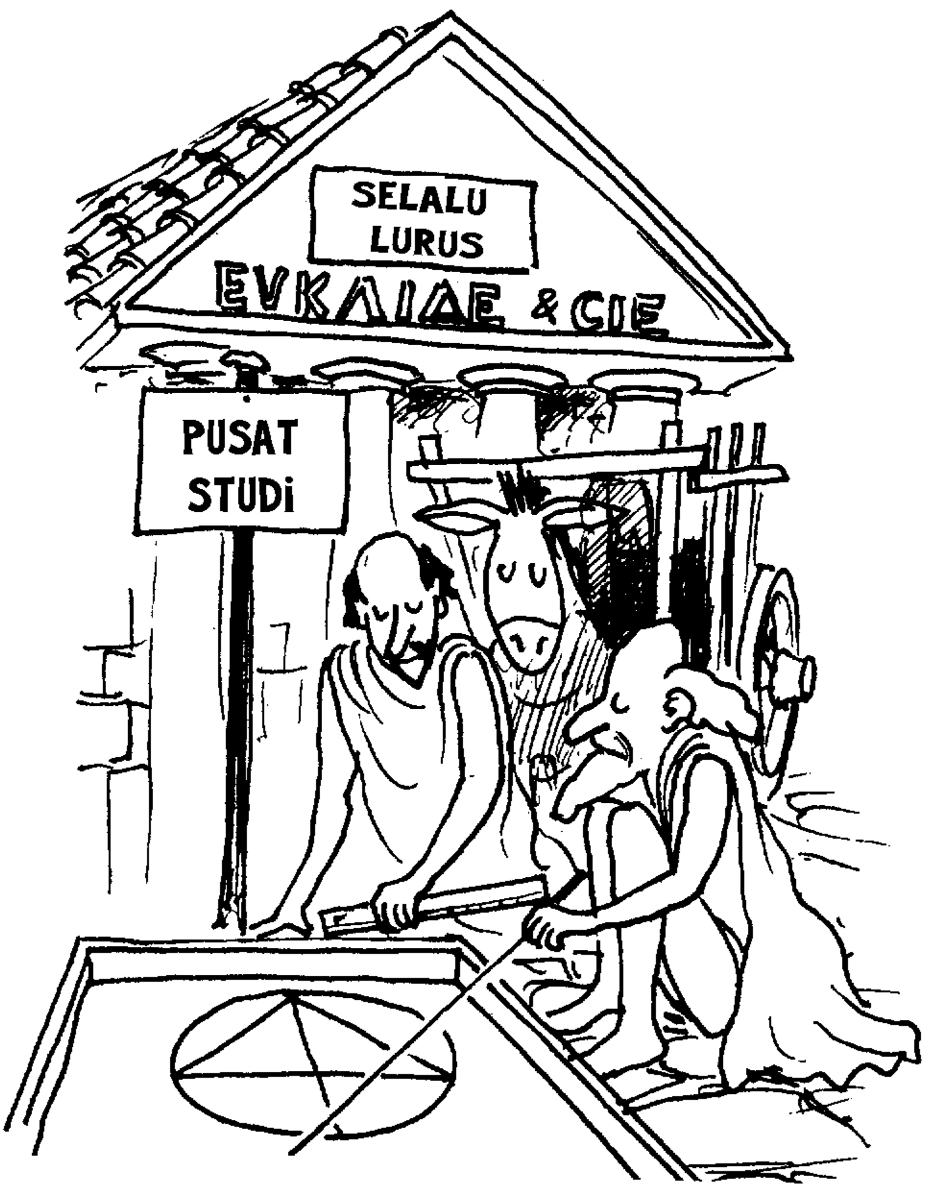
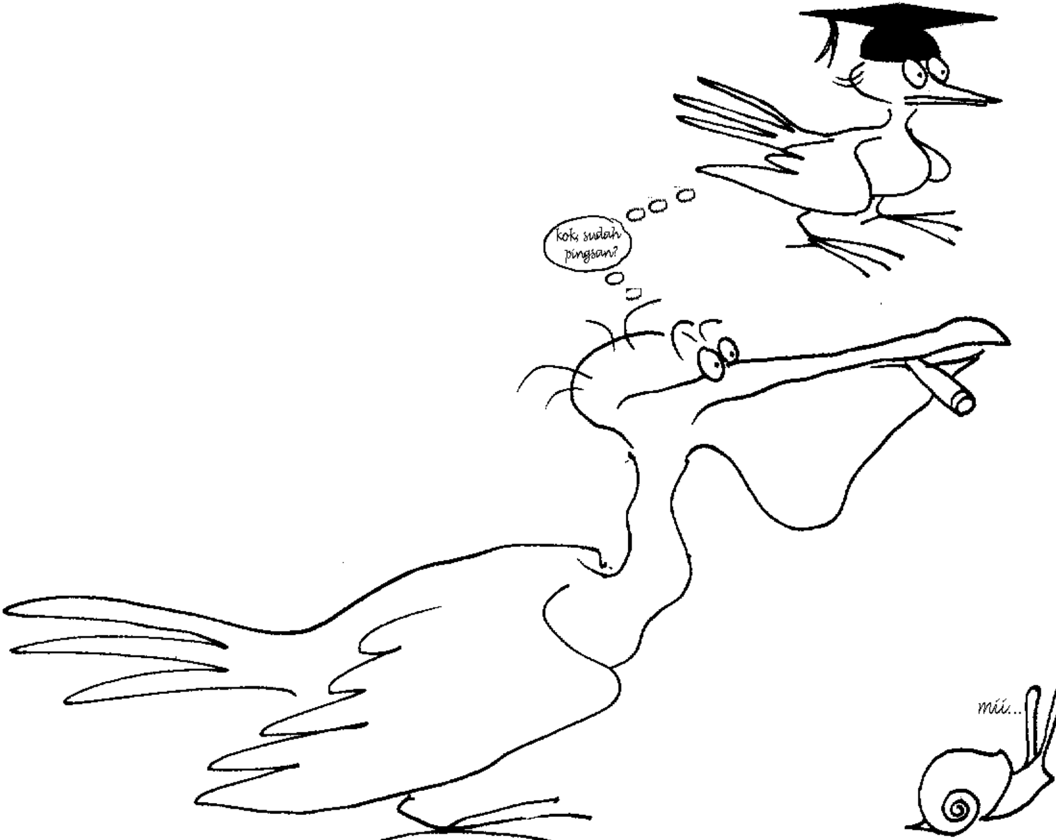
Petualangan Anselmo Lanturlu

GEOMETRIKARIA

Jean-Pierre Petit




Kok, sudah pingsan?
mii...


ADAKAH YANG PANDAI ILMU MATEMATIKA?

PERINGATAN

INI BUKANLAH SUATU KAJIAN ILMIAH MAUPUN PELAJARAN

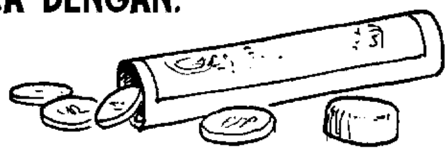
INI SEKEDAR CERITA ANSELMO LANTURLU

DAN SALAH SATU CATATAN PERJALANANNYA,

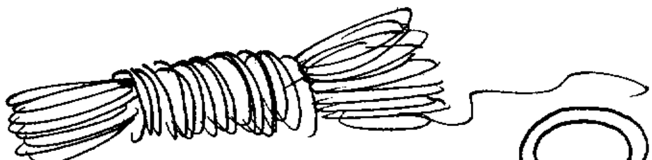
DI NEGERI GEOMETRI.

DISARANKAN MEMBACA DENGAN:

* MULA-MULA, ASPIRIN



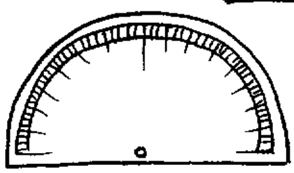
* LALU, SEUTAS TALI



* GUNTING

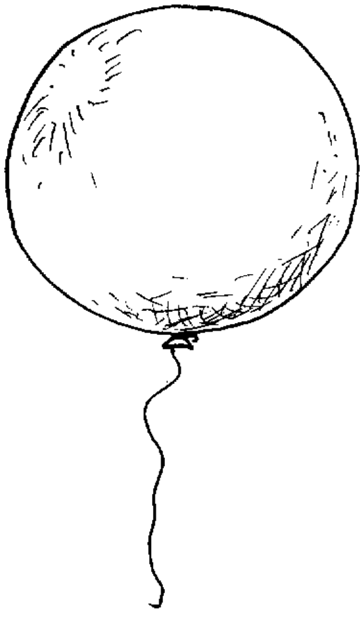
* SELOTIP

* BUSUR



* SERTA SEBUAH BALON YANG INDAH

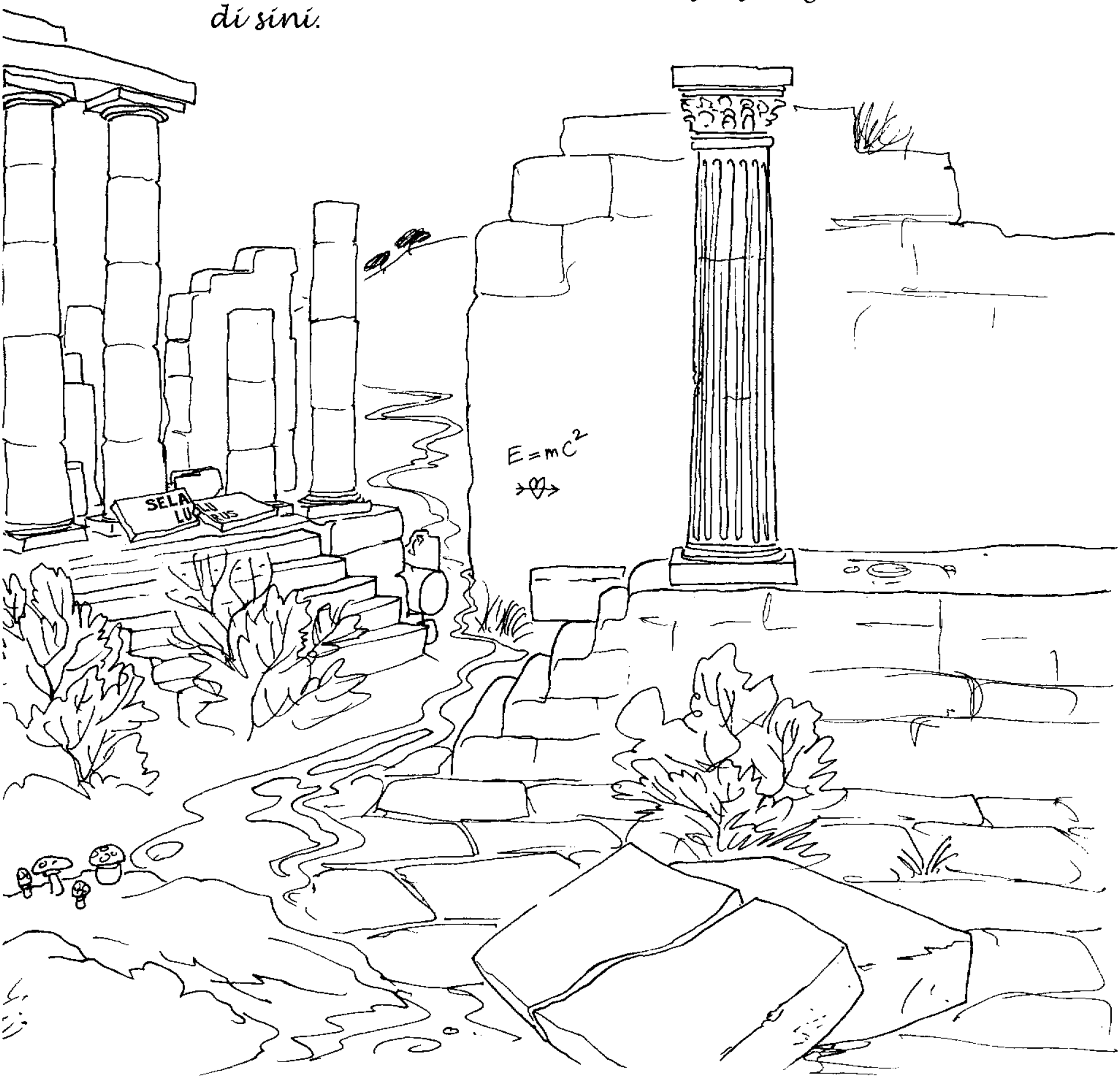
BENAR-BENAR BULAT...



Perusahaan Euclid & Co didirikan di Alexandria pada abad ketiga Sebelum Masehi. Selama dua ribu dua ratus tahun bisnisnya maju pesat. Barang-barangnya dihargai, pelanggannya pun puas dan setia.

Namun, perlahan-lahan, selera pelanggan berubah. Beberapa diantaranya, yang dulunya pengagum merek, setelah banyaknya pengalaman, bertanya-tanya:
"Euclid, apakah benar-benar, di mana-mana dan untuk semua, adakah yang lebih baik? "

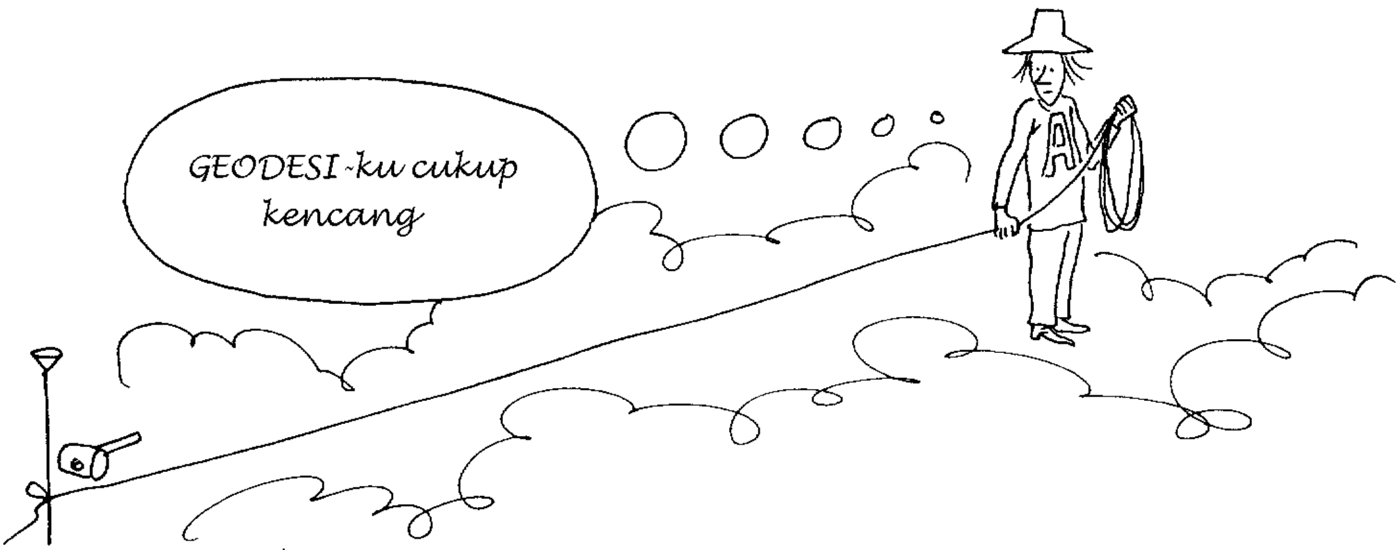
Inilah cerita satu diantaranya yang akan kami ulas di sini.



PROLOG: Suatu hari, Anselmo Lanturlu memutuskan untuk meregangkan seutas tali di antara dua tonggak:

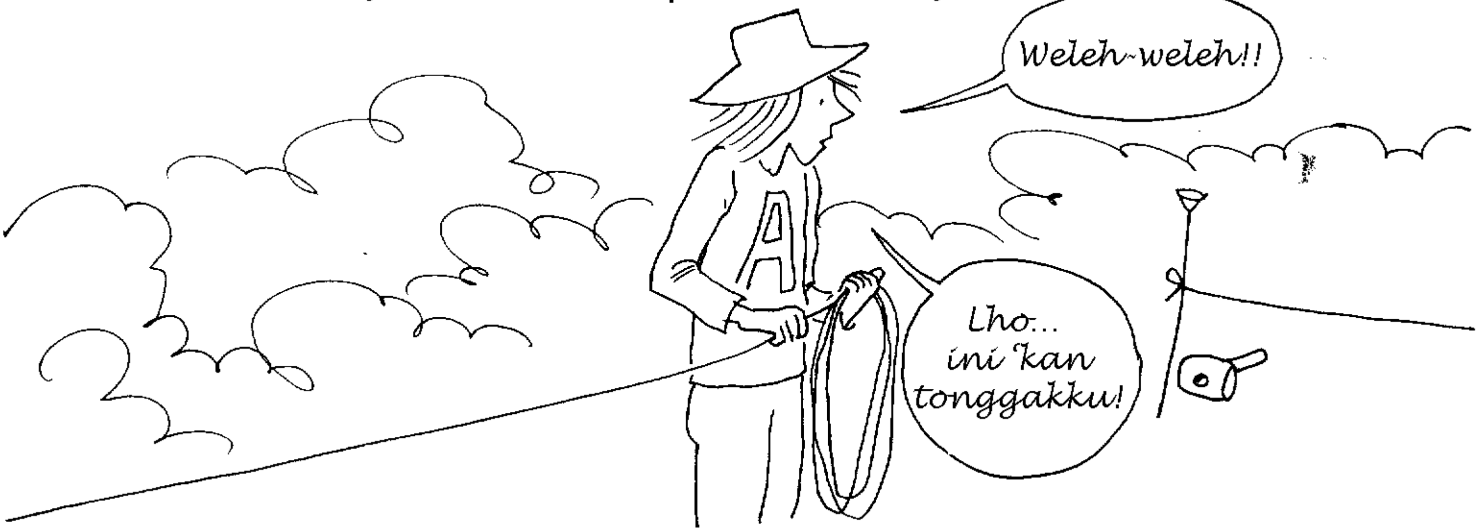

Dengan tiga tali yang kencang, berarti dengan tiga GEODESI
B
A
Anselmo telah membuat sebuah SEGITIGA
Dipasangnya busur di tiap ujung SEGITIGA itu, dia mengukur masing-masing sudut Â, B̂, Ĉ, dan menjumlahkannya.
Menurut teorema terbaiknya perusahaan Euclid & Co, jumlahnya 180o Nah..."
Â + B̂ + Ĉ = 180°
Ευκλιδε

Dunia yang ditempati Anselmo gelapnya minta ampun. Bisa-bisa membuang ingus dari hidung orang lain.

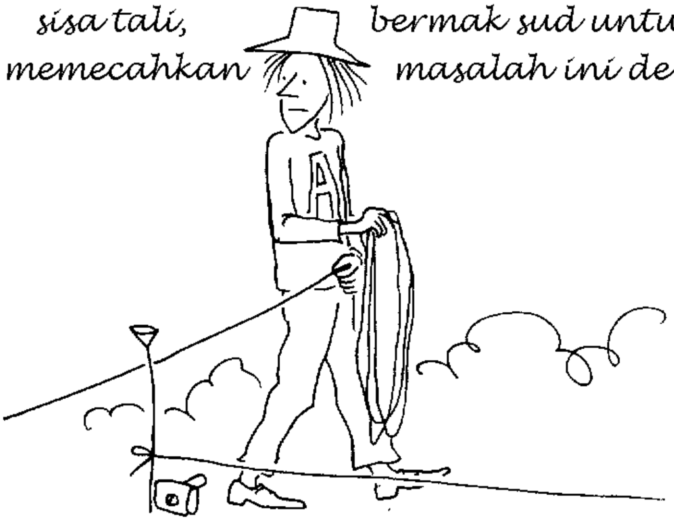


Anselmo berjalan terus dan terus....
Di belakangnya, talinya terurai,
saking kencangnya, sampai-sampai
dia tak memperdulikan langkahnya
yang tak pasti di dalam kabut: dia
membuat GEODESI yang sempurna.

Tapi, aku tak tahu kalaulah kalian memperhatikan, ada kalanya semua tampak sebaliknya.



Anselmo, yang masih memegang sisa tali, bermak sud untuk memecahkan masalah ini dengan jelas



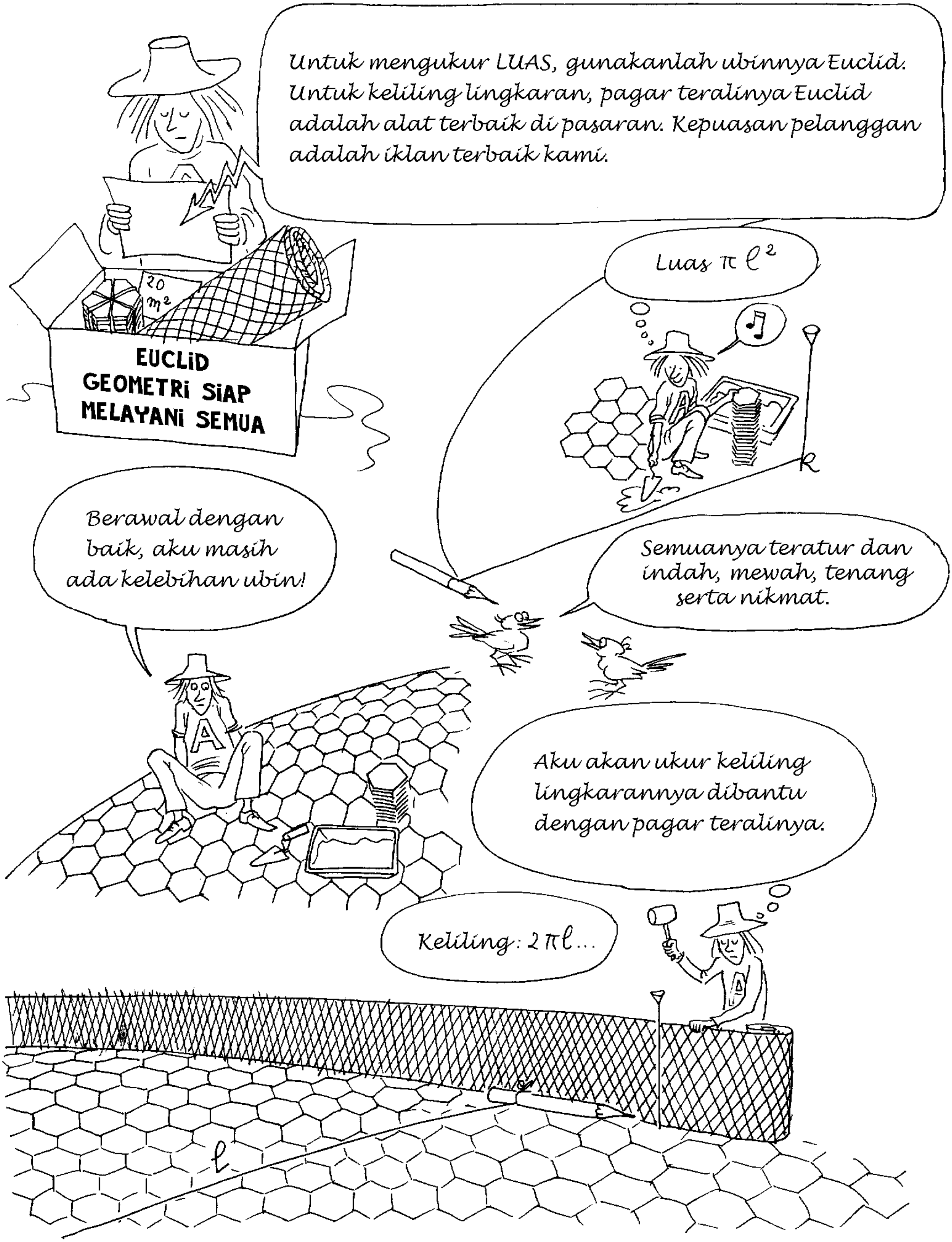
Penuh keyakinan, dia lanjutkan mengulurkan talinya, dan berjalan, LURUS KE DEPAN, penuh rasa ingin tahu.

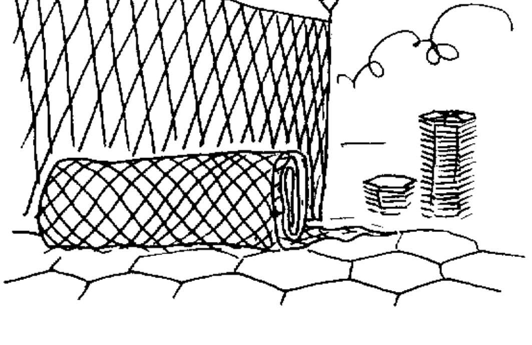
Sayang...

LURUSnya Anselmo tertutup lagi!


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Mari kita coba dalilnya Euclid. Aku akan menarik tiga GEODESI yang sama panjang. Hasilnya sebuah SEGITIGA dengan masing-masing sudutnya 60° dan jumlahnya 180°.
Tertera di catatan ini.
B 60 A 60 60 C
Â + B̂ + Ĉ = 180°
Lihat saja nanti.
RATIO OMNIA VINCIT
A
B
Inilah puncak B keduaku. Tinggal meregangkan dua tali lainnya untuk menemukan yang ketiga.
Indahnya pengetahuan
Ya ampun! Sudut-sudutnya benar-benar sama, tapi besarnya lebih dari 60°.
Ada masalah?
C
Hasilnya, pastilah lebih dari 180°!
GEOMETRI MENURUT EUCLID
EUCLIDE
EUCLIDE


Padahal, penggarisnya sudah kuletakkan RATA, sudah kuperiksa talinya pun LURUS.
EUCLIDE
Halo, balai Euclid? Saya ada masalah dengan peralatan anda.
Sebentar, saya sambungkan ke bagian teknisi.
Ada masalah dengan segitiga kami? Aneh. Kenapa tidak coba lingkaran kami? Para pelanggan kami sangat puas.
...jadi, lingkaran adalah kesatuan titik-titik y ang terletak pada suatu jarak ℓ dari satu titik y ang sudah pasti.
Dan anda bilang: keliling lingkarannya $2\pi\ell$, LUASnya $\pi\ell^2$ Sudah saya catat.
ℓ
siap membantu anda

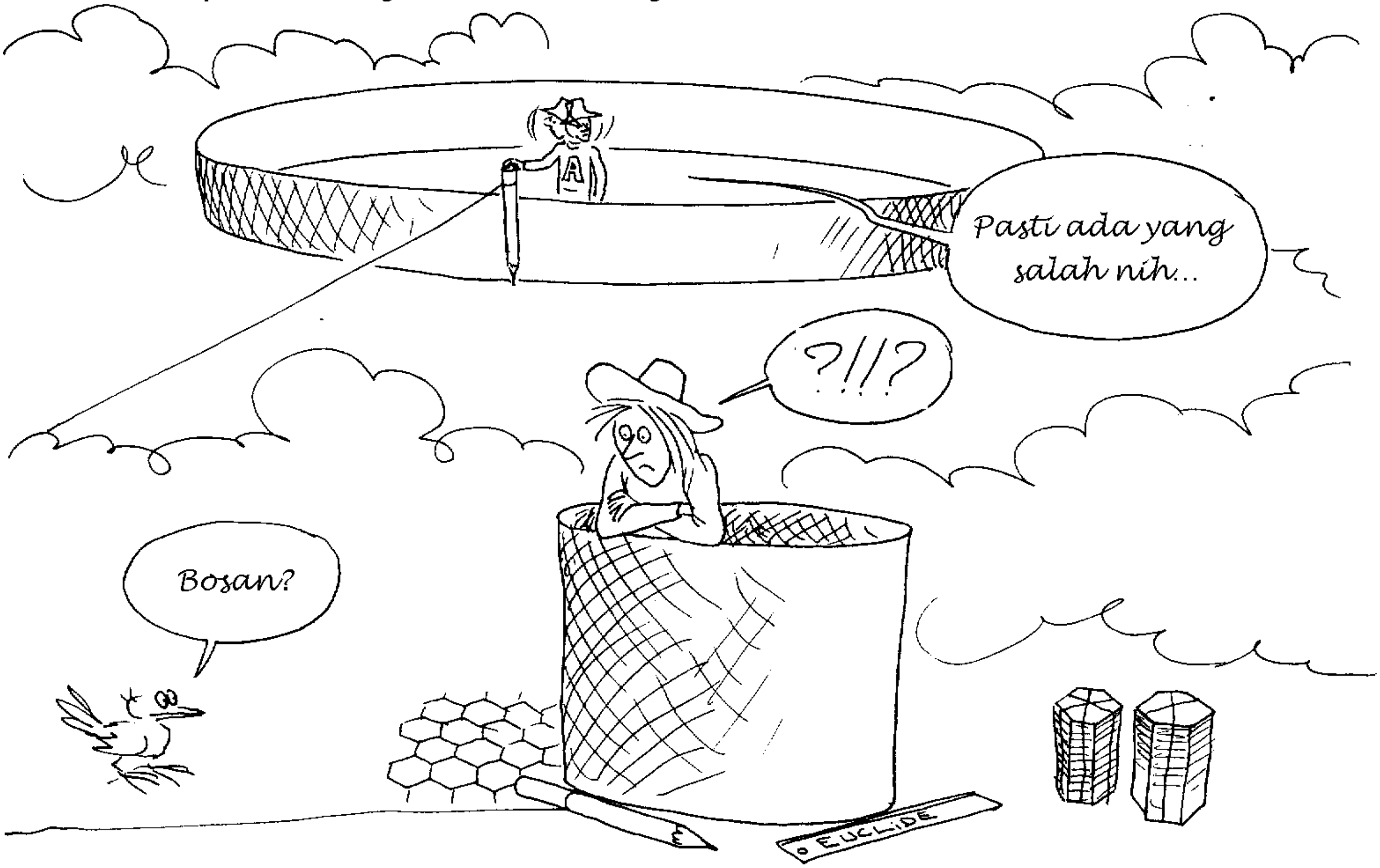

Untuk mengukur LUAS, gunakanlah ubinnya Euclid. Untuk keliling lingkaran, pagar teralinya Euclid adalah alat terbaik di pasaran. Kepuasan pelanggan adalah iklan terbaik kami.
20 m²
EUCLID GEOMETRI SIAP MELAYANI SEMUA
Luas π ℓ²
R
Berawal dengan baik, aku masih ada kelebihan ubin!
Semuanya teratur dan indah, mewah, tenang serta nikmat.
Aku akan ukur keliling lingkarannya dibantu dengan pagar teralinya.
Keliling: 2πℓ...
ℓ



Anselmo pun melanjutkan penelitiannya dengan cara menaikkan setiap kali jari-jari ℓ lingkarannya.
Tapi sisanya semakin lama semakin banyak.

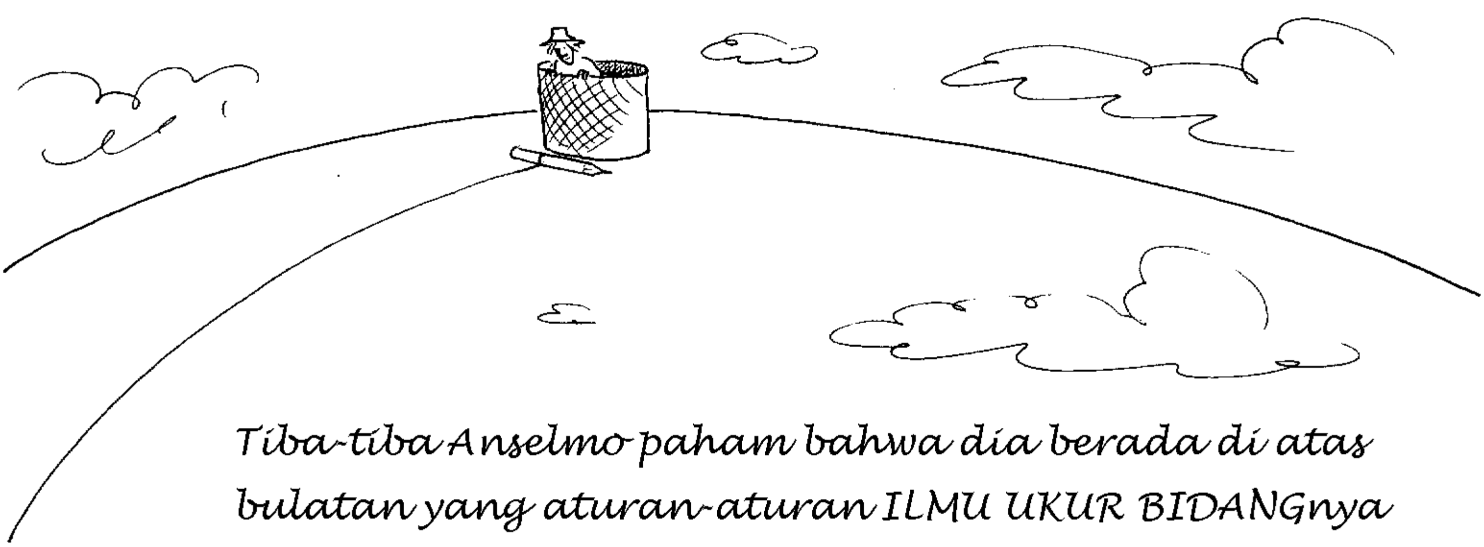

Buset, sekarang lebih dari 36% kupunya pagar terali! Dan ada sisa lebih dari 19% ubin ! Garis lingkaran yang kubuat jadi... GARIS LURUS!
Mimpikah aku?
EUCLIDE
Dari segi ruang: Penggaris ini padahal sangat LURUS!
Anselmo menaikkan lagi jari-jari l, dan kali ini...
EUCLIDE
Lengkungan lingkaranku melebar
Sekarang, ketika kuNAIKKAN l, keliling lingkarannya BERKURANG! Gila!

Setelah pemasangan ubin yang terakhir:

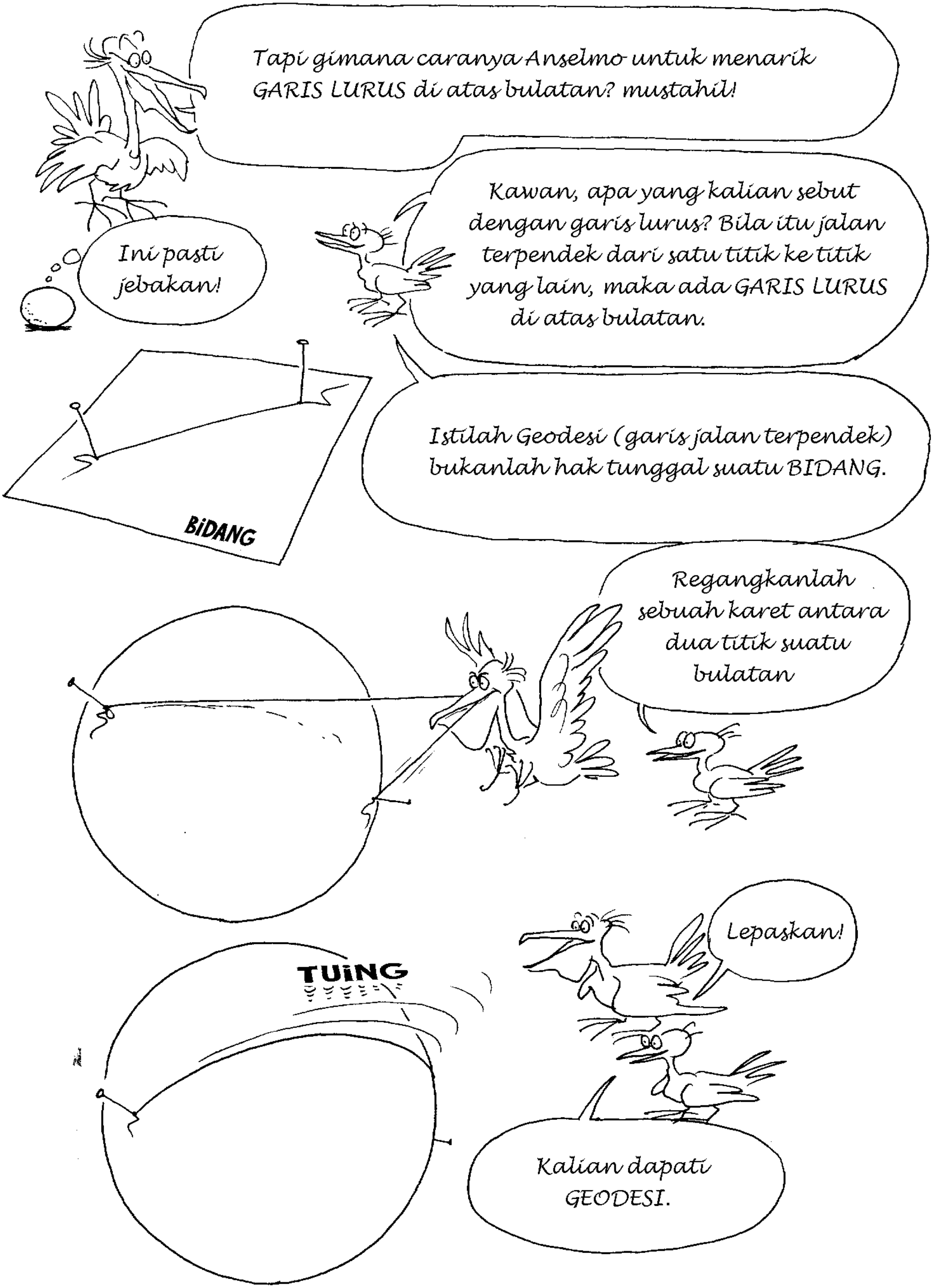


APA YANG TERJADI?

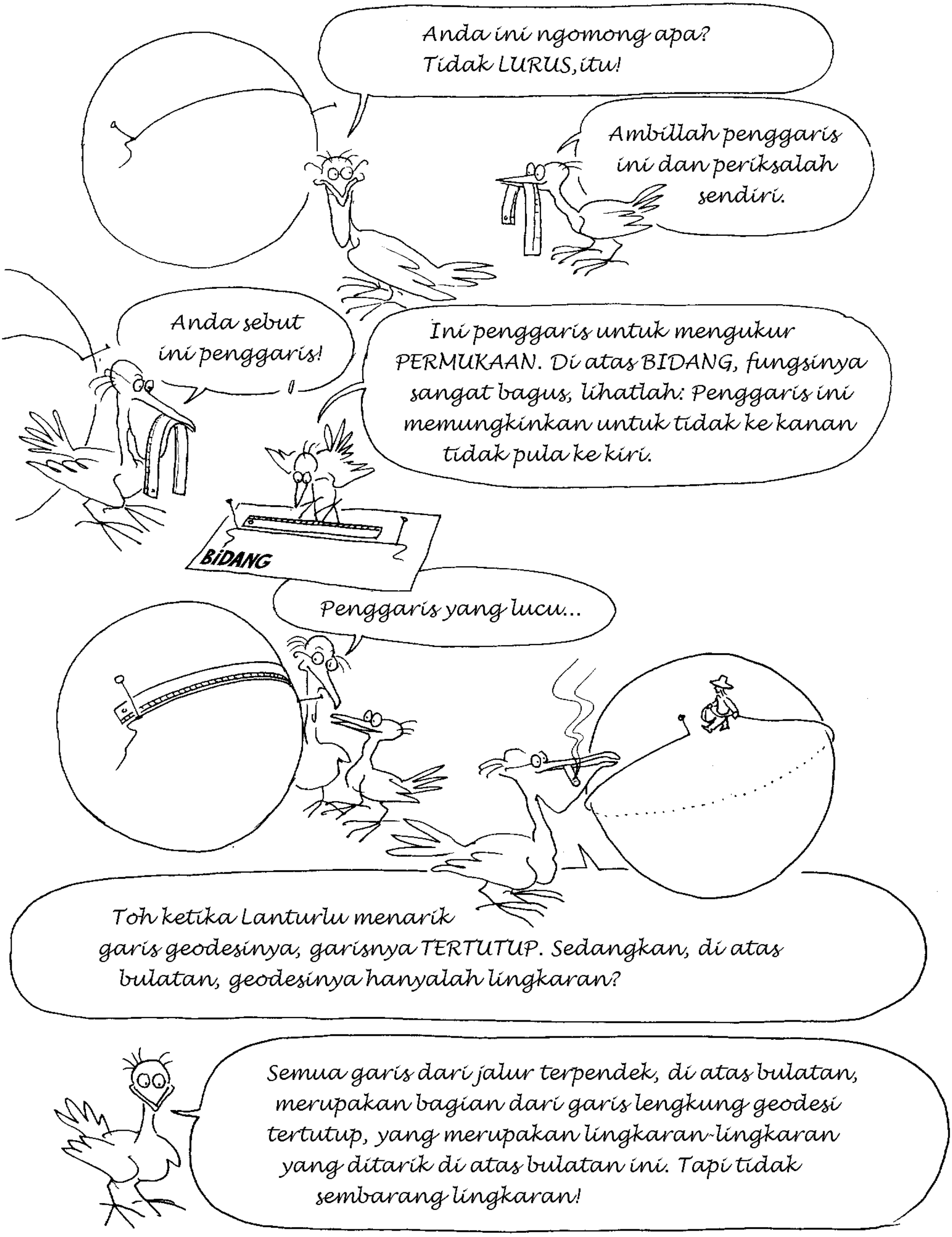
Untuk mengetahuinya, mari kita menyaput kabut:



Tiba-tiba Anselmo paham bahwa dia berada di atas bulatan yang aturan-aturan ILMU UKUR BIDANGnya telah dia kerjakan.

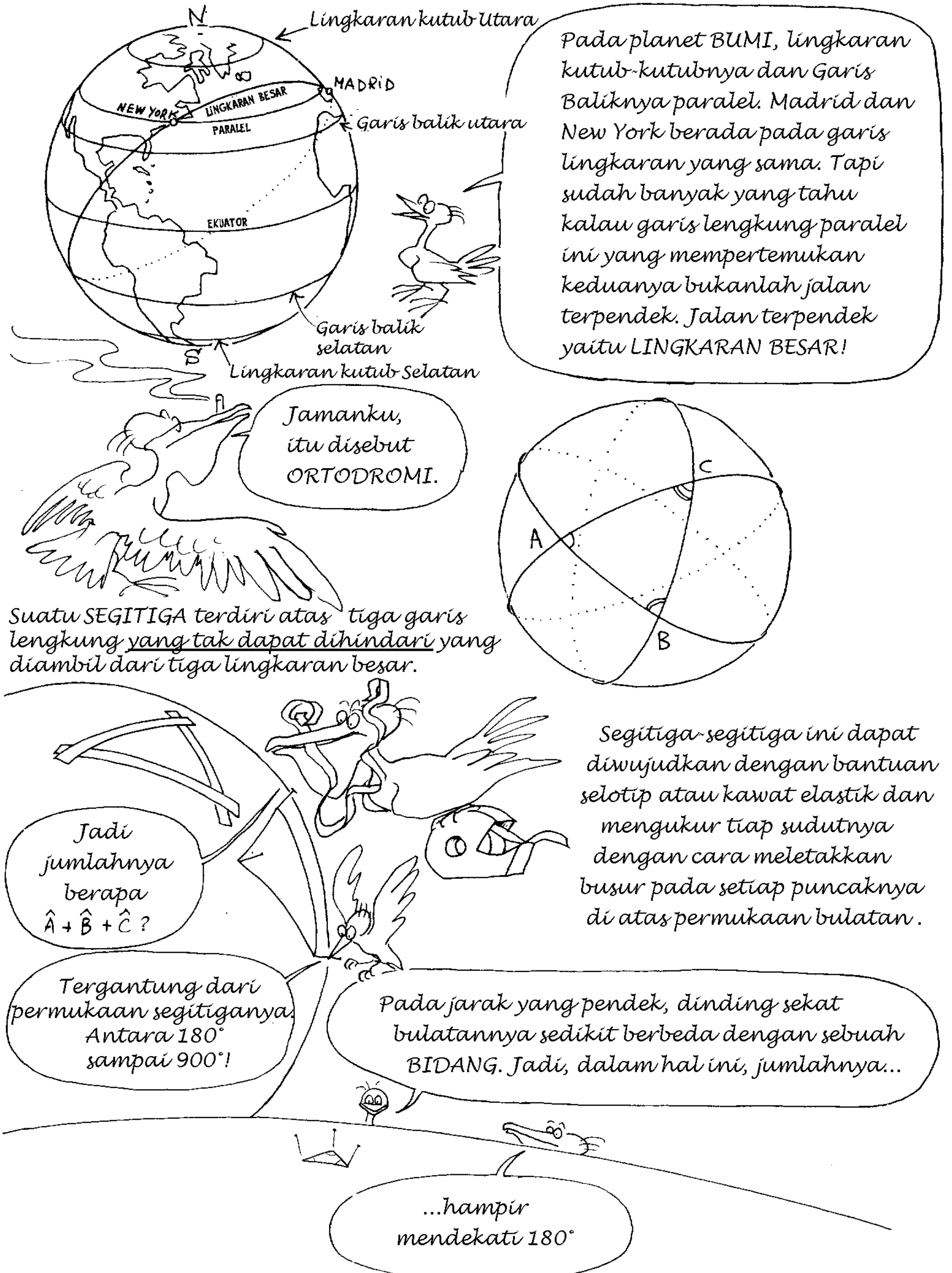


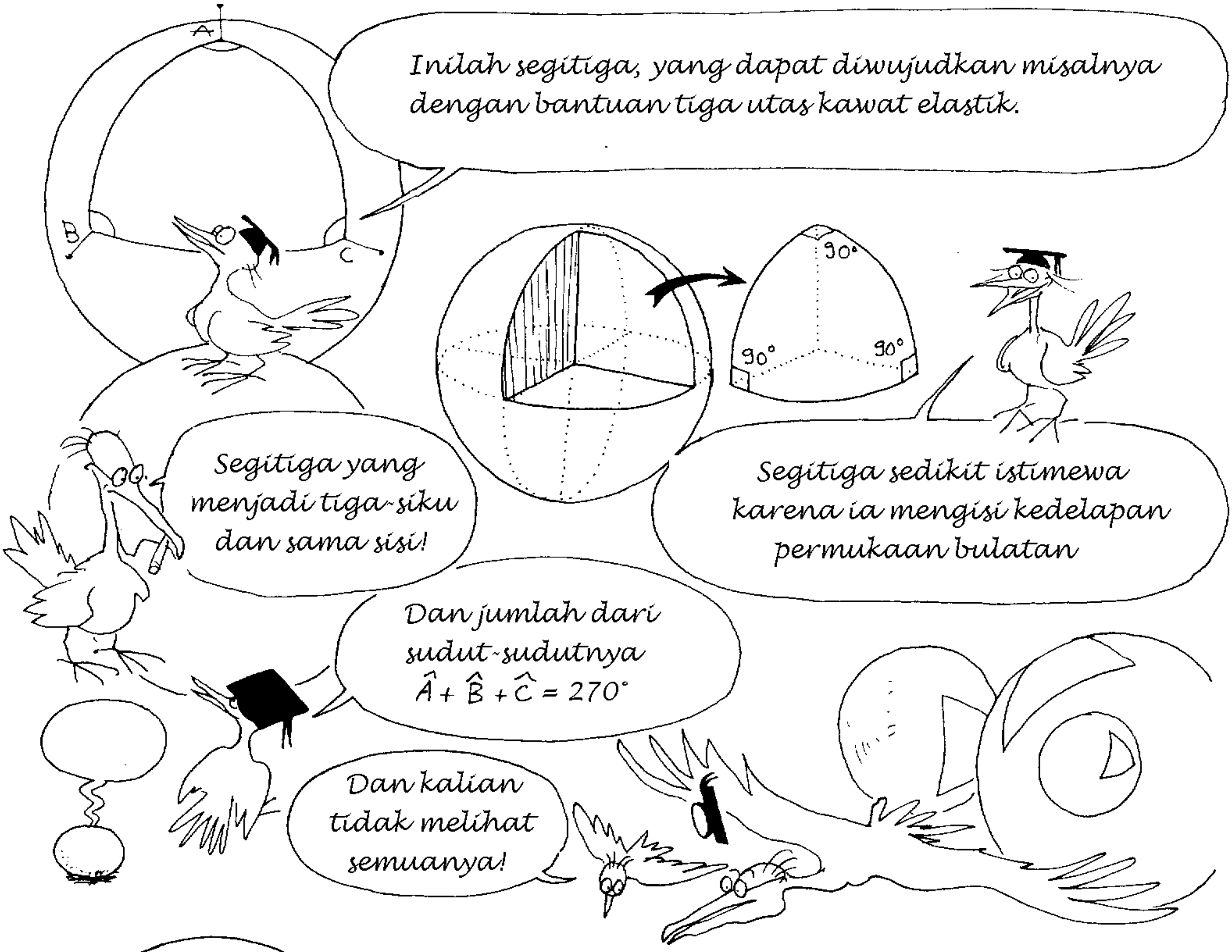
Tapi gimana caranya Anselmo untuk menarik GARIS LURUS di atas bulatan? mustahil!
Ini pasti jebakan!
Kawan, apa yang kalian sebut dengan garis lurus? Bila itu jalan terpendek dari satu titik ke titik yang lain, maka ada GARIS LURUS di atas bulatan.
BIDANG
Istilah Geodesi (garis jalan terpendek) bukanlah hak tunggal suatu BIDANG.
Regangkanlah sebuah karet antara dua titik suatu bulatan
Lepaskan!
TUING
Kalian dapati GEODESI.



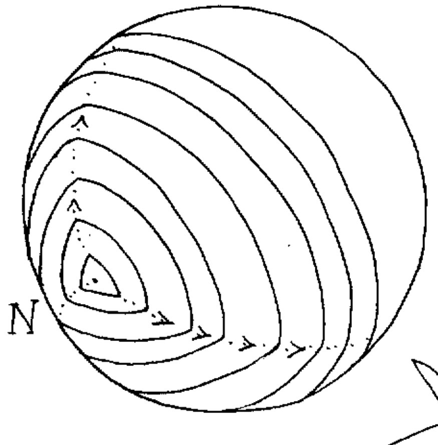
Anda ini ngomong apa? Tidak LURUS, itu!
Ambillah penggaris ini dan periksalah sendiri.
Anda sebut ini penggaris!
Ini penggaris untuk mengukur PERMUKAAN. Di atas BIDANG, fungsinya sangat bagus, lihatlah: Penggaris ini memungkinkan untuk tidak ke kanan tidak pula ke kiri.
BIDANG
Penggaris yang lucu...
Toh ketika Lanturlu menarik garis geodesinya, garisnya TERTUTUP. Sedangkan, di atas bulatan, geodesinya hanyalah lingkaran?
Semua garis dari jalur terpendek, di atas bulatan, merupakan bagian dari garis lengkung geodesi tertutup, yang merupakan lingkaran-lingkaran yang ditarik di atas bulatan ini. Tapi tidak sembarang lingkaran!


!???!
Apa-apaan ini? Anda bermain kata-kata. Maksud anda bahwa ada banyak macam lingkaran di atas bulatan?!?
Gimana sih, kupikir paham, eh ternyata aku tidak paham sama sekali...
Lingkalan melupakan keshatuan titik-titik yang telletak pada shuatu jalak yang konshtan l dali shatu titik tetap N, yang kita shebut KUTUB.
N
ℓ
mmm...
Semua ini satu kesatuan lingkaran dengan kutub N yang sama, yang disebut dengan PARALEL.
N
S
EKUATOR
ℓ
ℓ'
S
Lingkaran-lingkaran parallel ini juga merupakan titik-titik berjarak sama l' dari titik S "kutub selatan", lawan dari "kutub utara" N.
Diantaranya, terdapat satu, lebih besar dari yang lain, yang dapat dipakai sebagai EKUATOR pada bulatan.
Akhirnya aku paham kenapa sebuah lingkaran, pada suatu bulatan punya DUA pusat N dan S!
Kami menyebut EKUATOR-EKUATOR LINGKARAN BESAR dari BULATAN. Dan ini dipastikan menjadi GEODESInya.
Ini pertama kalinya aku melihat sebuah GEODESI dari dekat. Sangat mengagumkan!

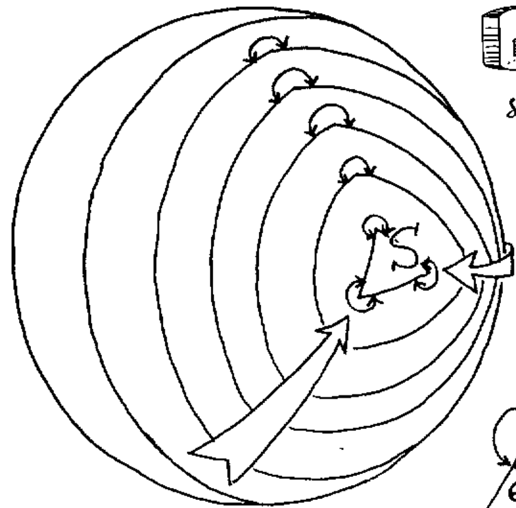

N
Lingkaran kutub Utara
MADRID
NEW YORK
LINGKARAN BESAR
PARALEL
Garis balik utara
EKUATOR
Garis balik selatan
S
Lingkaran kutub Selatan
Pada planet BUMI, lingkaran kutub-kutubnya dan Garis Baliknya paralel. Madrid dan New York berada pada garis lingkaran yang sama. Tapi sudah banyak yang tahu kalau garis lengkung paralel ini yang mempertemukan keduanya bukanlah jalan terpendek. Jalan terpendek yaitu LINGKARAN BESAR!
Jamanku, itu disebut ORTODROMI.
A
B
C
Suatu SEGITIGA terdiri atas tiga garis lengkung yang tak dapat dihindari yang diambil dari tiga lingkaran besar.
Segitiga-segitiga ini dapat diwujudkan dengan bantuan selotip atau kawat elastik dan mengukur tiap sudutnya dengan cara meletakkan busur pada setiap puncaknya di atas permukaan bulatan.
Jadi jumlahnya berapa $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$?
Tergantung dari permukaan segitiganya. Antara 180° sampai 900°!
Pada jarak yang pendek, dinding sekat bulatannya sedikit berbeda dengan sebuah BIDANG. Jadi, dalam hal ini, jumlahnya...
...hampir mendekati 180°



Bayangkan sekarang sebuah Segitiga, selalu tersusun dari beberapa utas elastik ini yang kita sisihkan puncak-puncaknya secara bertahap. Sudut-sudut puncaknya akan muncul. Dan jumlahnya pun akan sama.

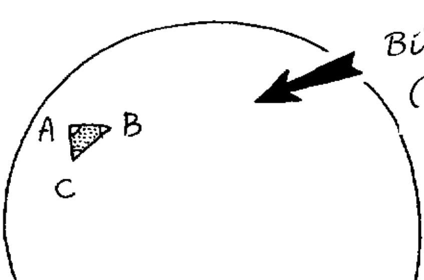


Akhirnya, bisa diatur supaya ketiga puncaknya tergambar pada ekuator bulatan. Jadi, sudut-sudut A,B dan C nya DATAR, bernilai 180° dan jumlahnya sekarang mencapai 540° !!...

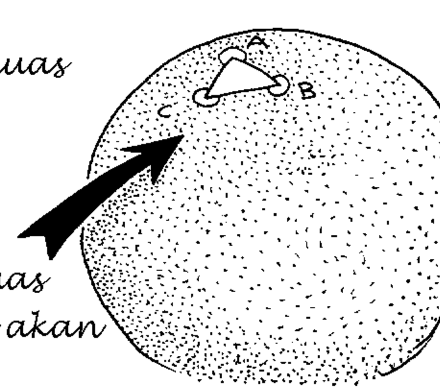


Dengan memperpanjang perpindahan puncak-puncak segitiganya ke belahan bola lainnya, maka akan bertemu pada satu titik S, lawan dari N.

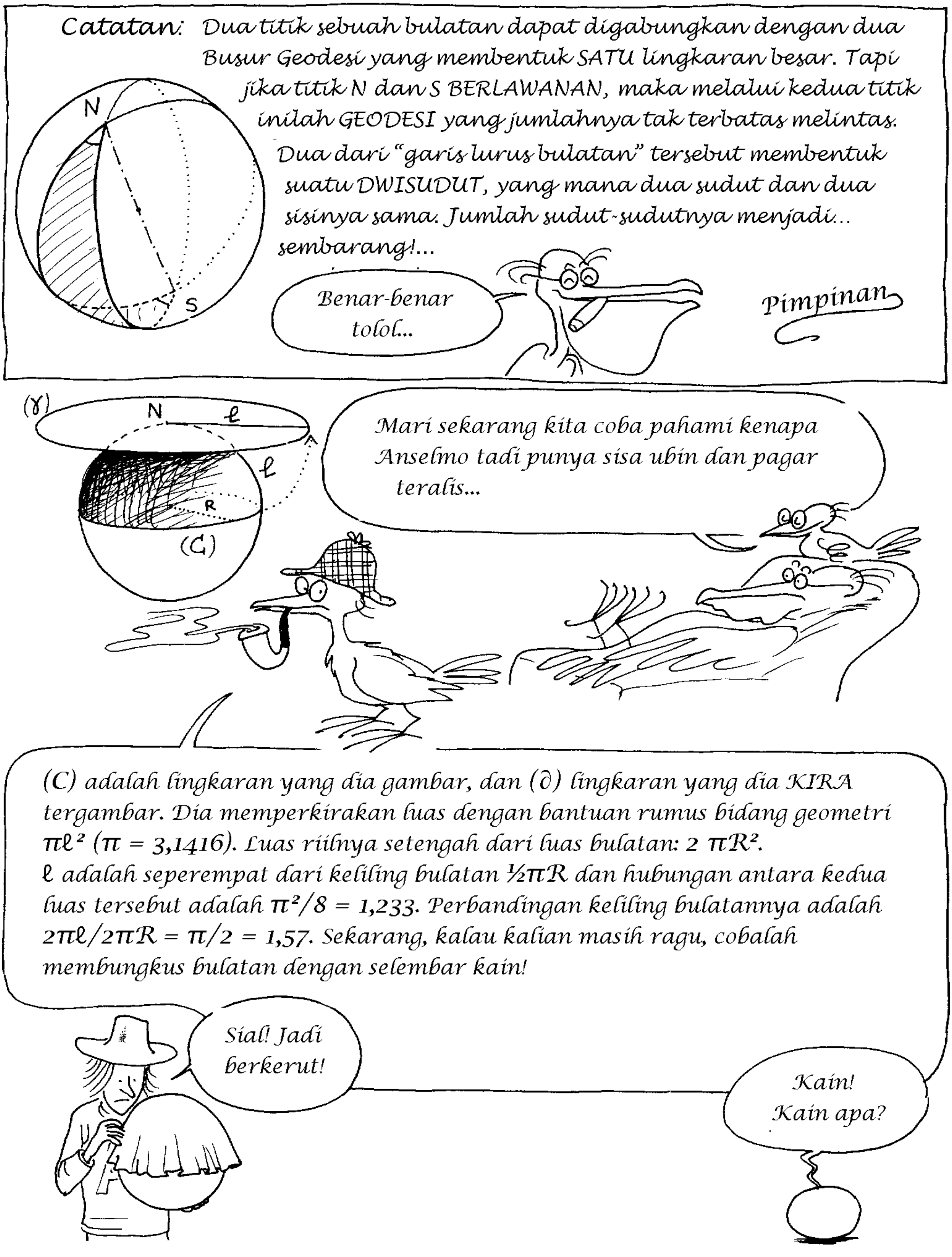
Jika sudut-sudutnya tetap pada puncaknya definisi awalnya, masing-masing jadinya bernilai lebih dari 180° ! Tepatnya, masing-masing nilainya $360° - 60° = 300°$



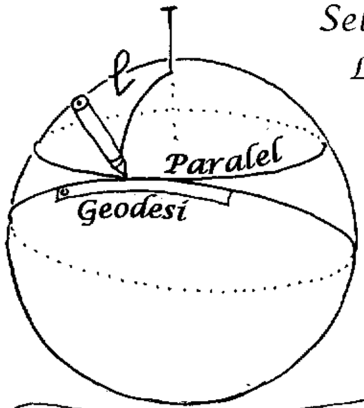
Bila luas segitiga kecil (dibandingkan dengan luas bulatan), maka akan diketahui dalil Euclid (A+B+C=180°)



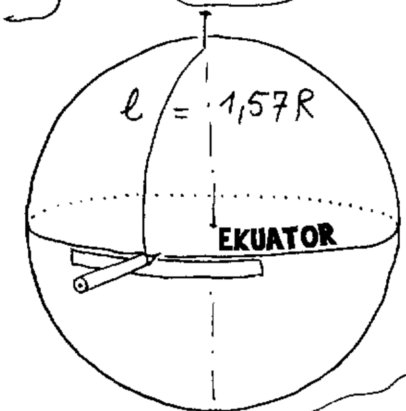
Jika, sebaliknya, luas segitiga hampir seluas permukaan bulatan ($4 \times 3{,}1416 \times R^2$), maka akan diketahui hasilnya 900°.


Catatan: Dua titik sebuah bulatan dapat digabungkan dengan dua Busur Geodesi yang membentuk SATU lingkaran besar. Tapi jika titik N dan S BERLAWANAN, maka melalui kedua titik inilah GEODESI yang jumlahnya tak terbatas melintas. Dua dari "garis lurus bulatan" tersebut membentuk suatu DWISUDUT, yang mana dua sudut dan dua sisinya sama. Jumlah sudut-sudutnya menjadi... sembarang!...
N
S
Benar-benar tolol...
Pimpinan
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Mari sekarang kita coba pahami kenapa Anselmo tadi punya sisa ubin dan pagar teralis...
(C) adalah lingkaran yang dia gambar, dan (∂) lingkaran yang dia KIRA tergambar. Dia memperkirakan luas dengan bantuan rumus bidang geometri $\pi\ell^2$ ($\pi = 3,1416$). Luas riilnya setengah dari luas bulatan: $2\ \pi R^2$. ℓ adalah seperempat dari keliling bulatan $\frac{1}{2}\pi R$ dan hubungan antara kedua luas tersebut adalah $\pi^2/8 = 1,233$. Perbandingan keliling bulatannya adalah $2\pi\ell/2\pi R = \pi/2 = 1,57$. Sekarang, kalau kalian masih ragu, cobalah membungkus bulatan dengan selembar kain!
Sial! Jadi berkerut!
Kain! Kain apa?

Selama Lanturlu tidak mencapai ekuator bulatan, maka LENGKUNGAN lingkarannya nampak normal:

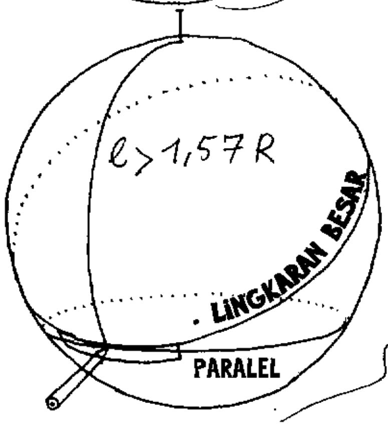


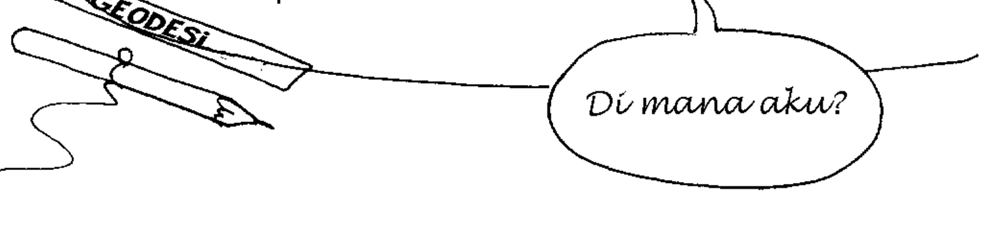
Lingkaran ini adalah sebuah paralel, sedangkan penggarisnya mengikuti GEODESI, maksudnya LINGKARAN BESAR dari bulatan.



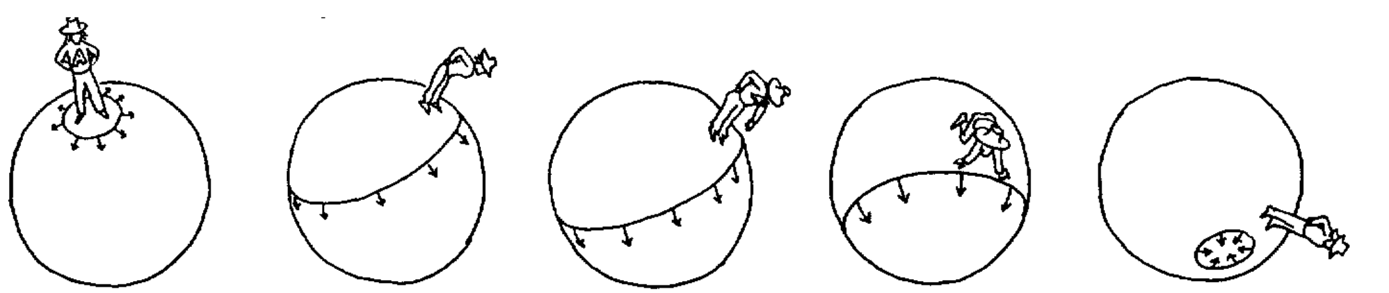
Pada ekuator, artinya ketika $\ell = \pi/2R$, maka paralel berbaur dengan geodesi dan lingkarannya nampak "LURUS".

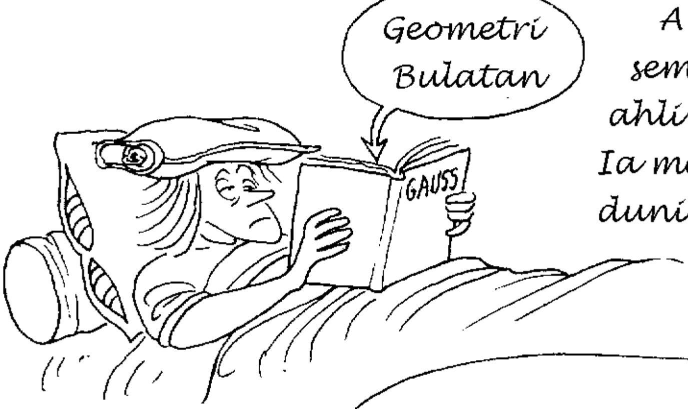
Di luar itu, kelengkungan lingkarannya nampak terbalik.



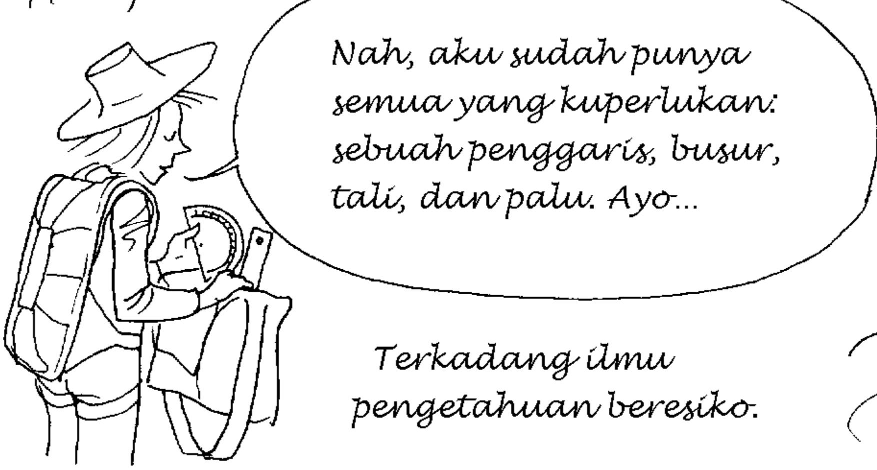


Ini menjelaskan bagaimana kita bisa "masuk" atau "keluar" dari sebuah lingkaran, tanpa melaluinya, pada saat digambarkan di atas bulatan. Sebaiknya membayangkan lingkaran itu seperti cincin elastis yang digelindingkan di atas bola bilyar.





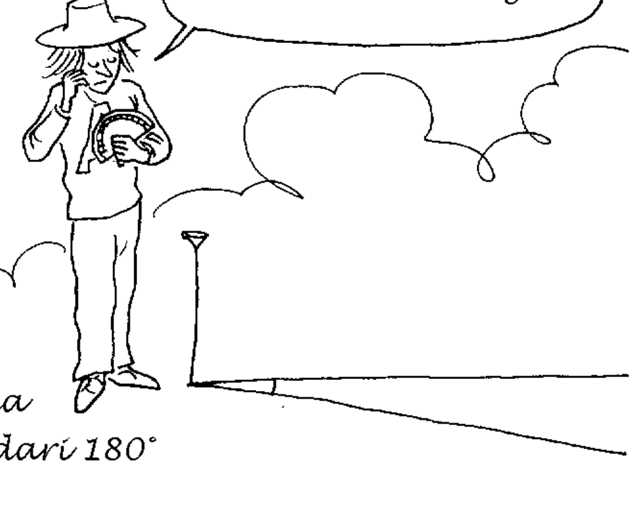
Anselmo perlu waktu untuk mencerna semua aspek tersebut, ditemukan oleh ahli matematika Gauss (1777-1885). Ia memutuskan pergi menemukan dunia PERMUKAAN:



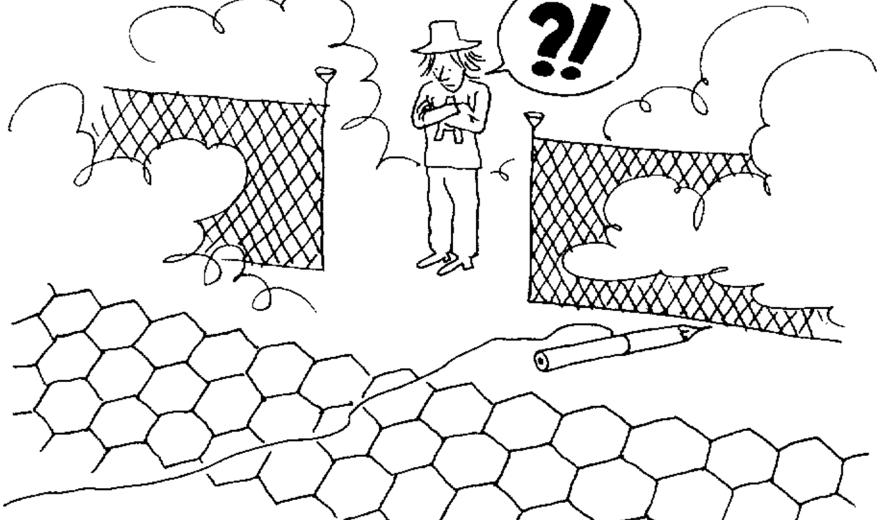
Terkadang ilmu pengetahuan beresiko.

Setelah pendaratannya di dunia yang baru, Anselmo mengurai sekali lagi sebuah GEODESI, namun kali ini:

Geodesi tidak tertutup.

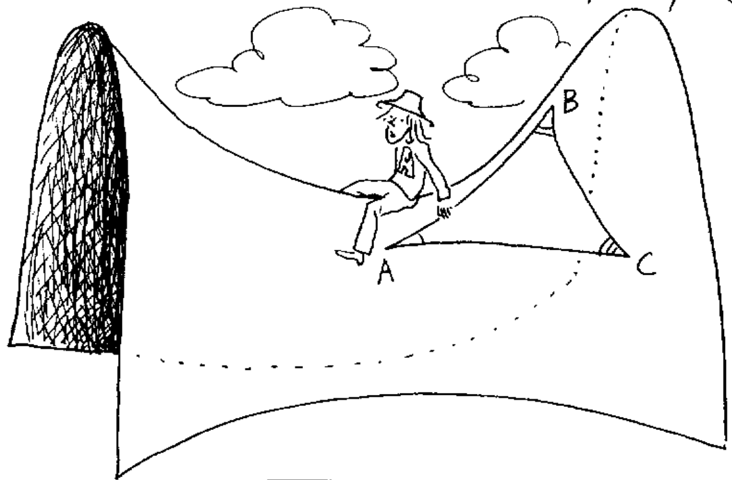


Menggunakan tiga utas tali yang sangat kencang, Anselmo membentuk sebuah segitiga, tapi jumlah sudut pada puncaknya kali ini diketahui kurang dari 180°

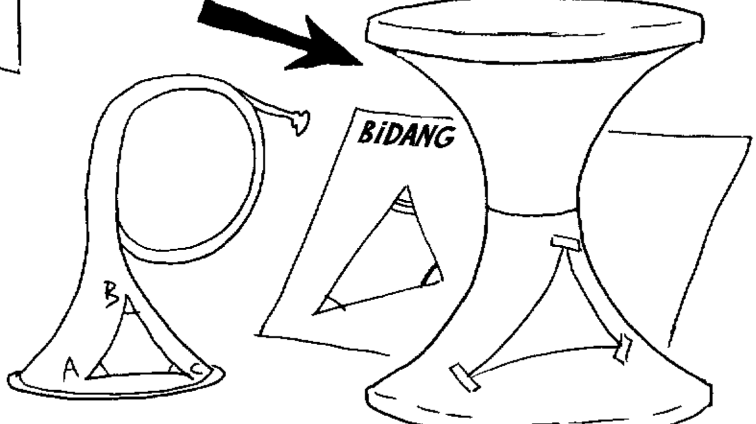


Selamanya, lingkaran itu merupakan satu kesatuan dari titik-titik yang terletak pada jarak ℓ yang sama dari satu buah titik yang tetap, Lanturlu menyatakan bahwa lingkaran itu, ditarik pada permukaan yang baru tersebut, memiliki keliling lingkaran LEBIH BESAR dari $2\pi\ell$, sedangkan luasnya MELEBIHI $\pi\ell^2$.

Mari kita lenyapkan gumpalan awan:



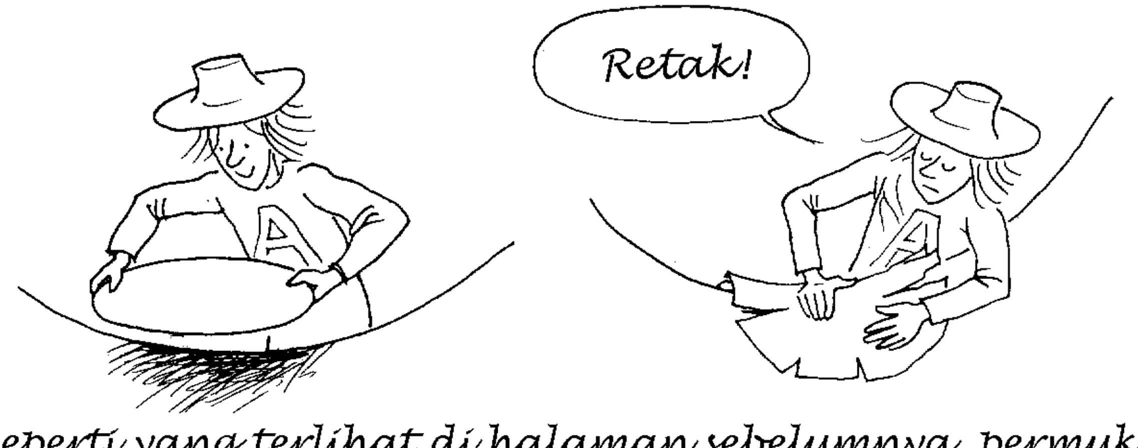
Kali ini, permukaan menyerupai sela gunung atau pelana kuda. Benda-benda tertentu dalam kehidupan sehari-hari kalian dapat juga sama : terompet atau bangku tipe ini:



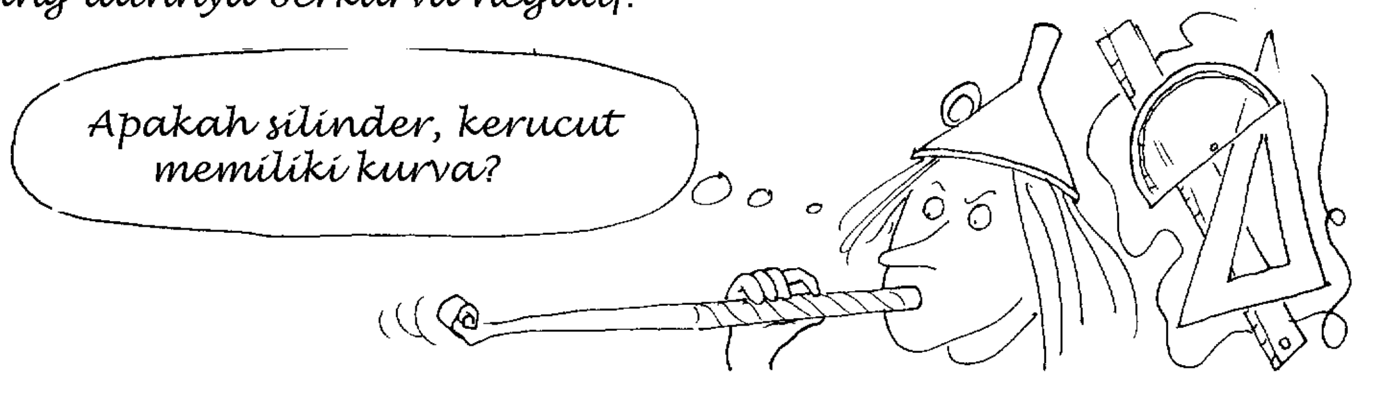
KURVA:

Permukaan kurva adalah sebuah permukaan dimana dalil-dalil Euclid tidak berfungsi. Kurva bisa positif atau negatif.
Pada permukaan berkurva positif, jumlah sudut-sudut segitiganya lebih besar dari 180°. Jika dilukiskan jari-jari lingkaran ℓ, maka permukaannya lebih kecil dari $\pi\ell^2$ dan kelilingnya kurang dari $2\pi\ell$.
Pada permukaan berkurva negatif, jumlah sudut-sudut segitiganya lebih kecil dari 180°. Jika dilukiskan jari-jari lingkaran ℓ, maka permukaannya lebih besar dari $\pi\ell^2$ dan kelilingnya lebih dari $2\pi\ell$.

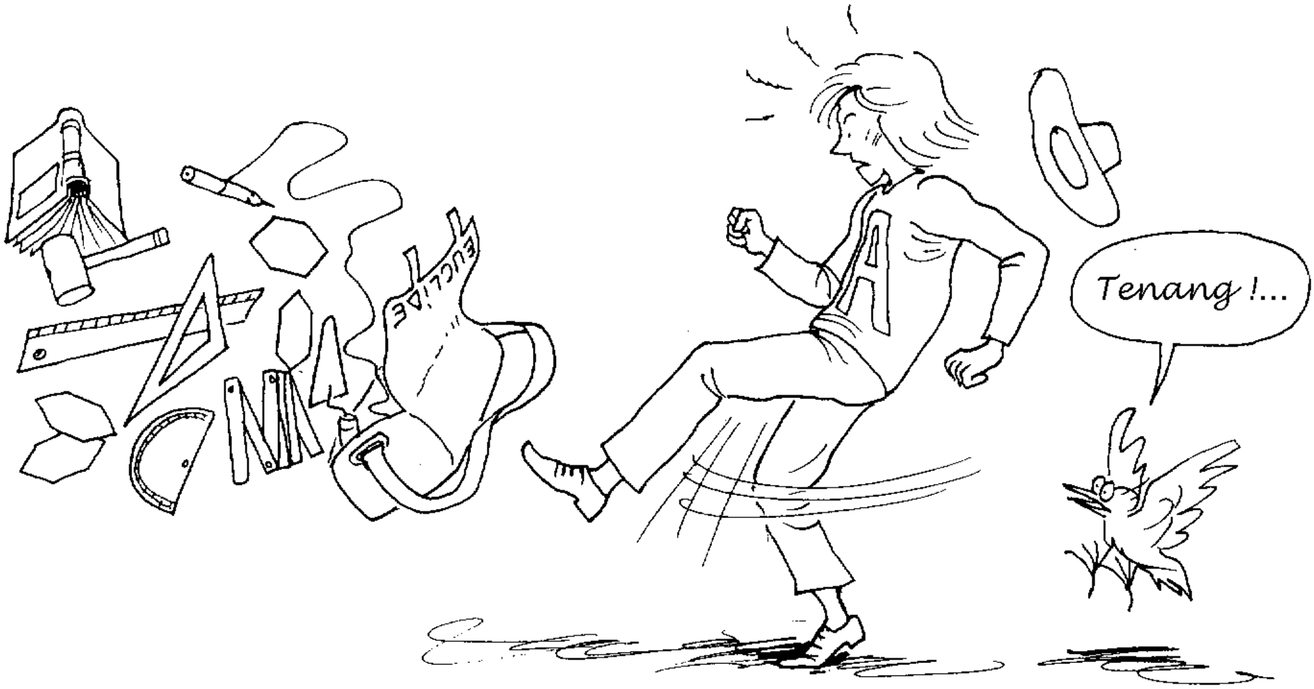
Tadi, Anselmo telah menyatakan bahwa dengan mencoba MEMBUNGKUS sebuah bulatan, permukaan berlengkung positif, dengan sehelai kain, muncullah kerutan-kerutan. Pembungkusan sebuah permukaan berlengkung negatif dengan sehelai kain pun tidak mungkin: retakan muncul. Test pembungkusan inilah yang paling mudah untuk menentukan apakah kurva itu positif atau negatif.



Seperti yang terlihat di halaman sebelumnya, permukaan dapat menunjukkan daerah-daerah berkurva positif, dan yang lainnya berkurva negatif.



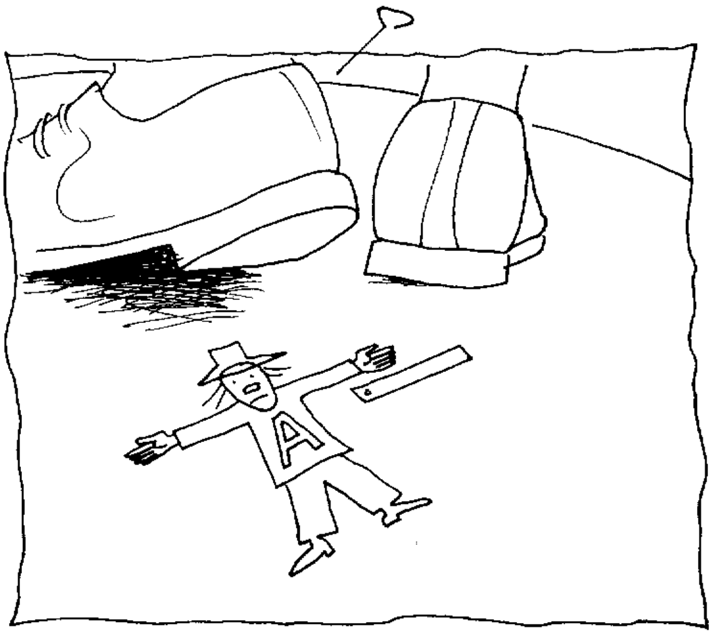

Uji pembungkusan
Silinder, kerucut, tertutupi oleh sehelai kain!
Jangan panik. Aku menempelkan tiga karet, maksudnya tiga geodesi, di atas silinderku dengan bantuan selotip...
B
A
C
...Sekarang aku menandai geodesiku DI ATAS permukaan...
Kuletakkan silinderku MENDATAR
!...
B
A
C
Menurut definisi kita, silinder dan kerucut, yang mengikuti aturan geometri EUCLID, merupakan PERMUKAAN DATAR !!!



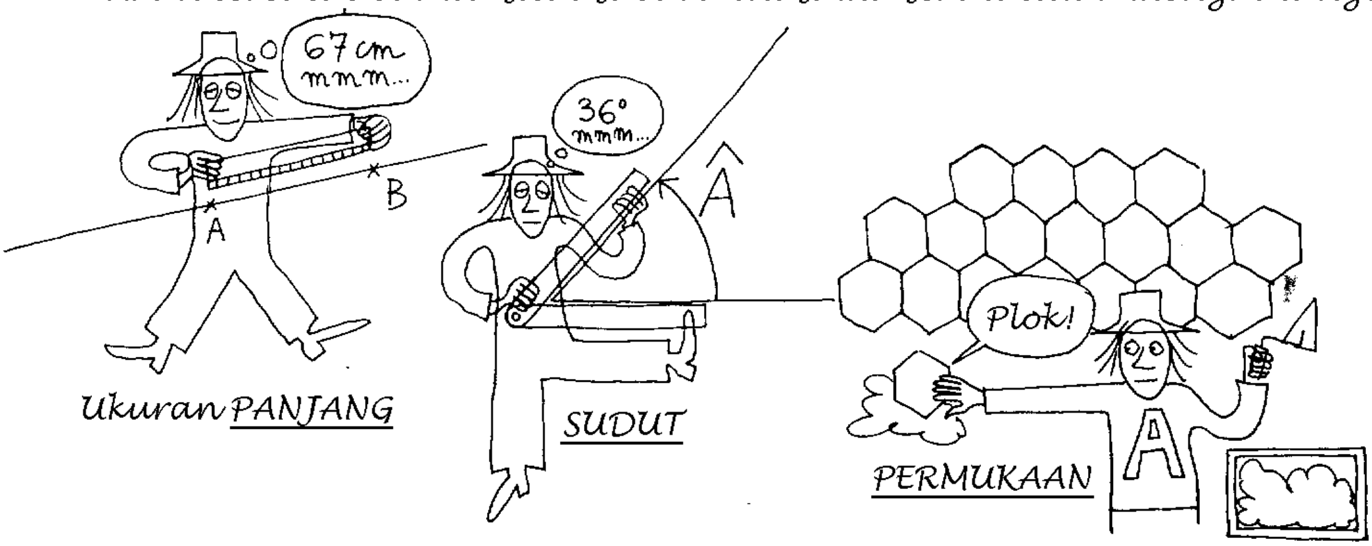
MAKNA RUANG:

Tadi, awan-awan menghalangi Anselmo untuk melihat lebih jauh... atau hampir. Jikalau tidak demikian, kemungkinan ia dapat melihat KURVA dari RUANG BUNDARnya.

Ada satu cara lain untuk menghalangi Lanturlu MELIHAT kurva ini: yaitu dengan menempatkannya pada permukaan, dengan begitu dia bagian dari permukaan ini.



Akan tercatat bahwa situasi baru ini sama sekali tidak menghalangi:



Walaupun terkurung DI DALAM permukaan, Anselmo bisa mengamati kurva dengan baik dan mendefinisikan tandanya (positif atau negative), dan bahkan mengukurnya, tanpa harus MELIHATnya. Jika jumlah sudut-sudut sebuah segitiga adalah 180°, maka permukaannya DATAR.

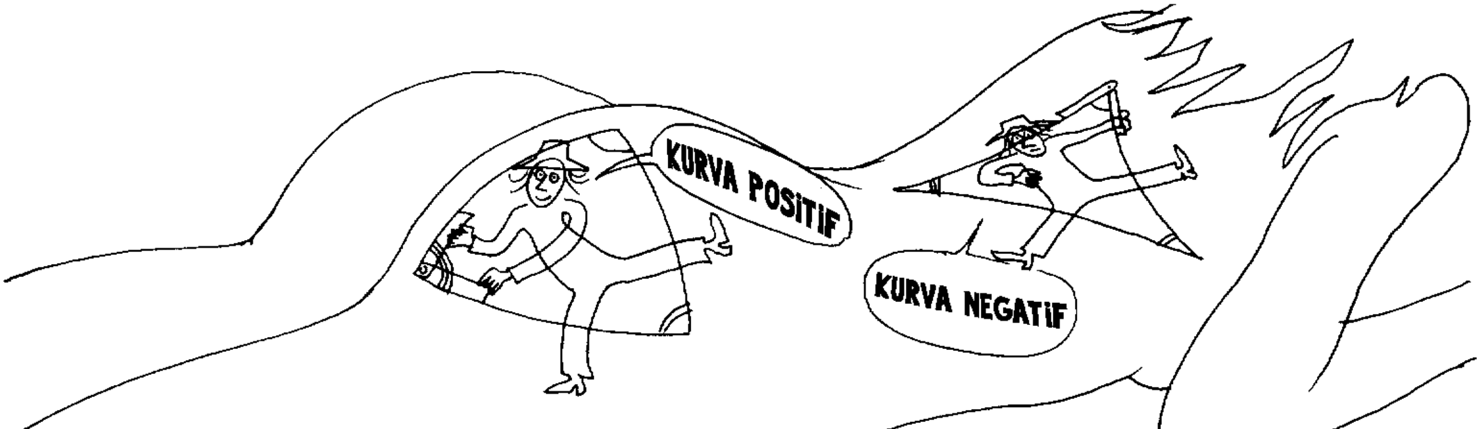
Jika jumlahnya melebihi 180°, kurvanya positif dan Anselmo dapat menghitung jari-jari kurva lokal R dengan rumus:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180(1 + A/3{,}14R^2)$ derajat dimana A adalah luas segitiga.

Jika jumlahnya kurang dari 180°, bisa ditentukan jari-jari kurva R, dengan rumus:

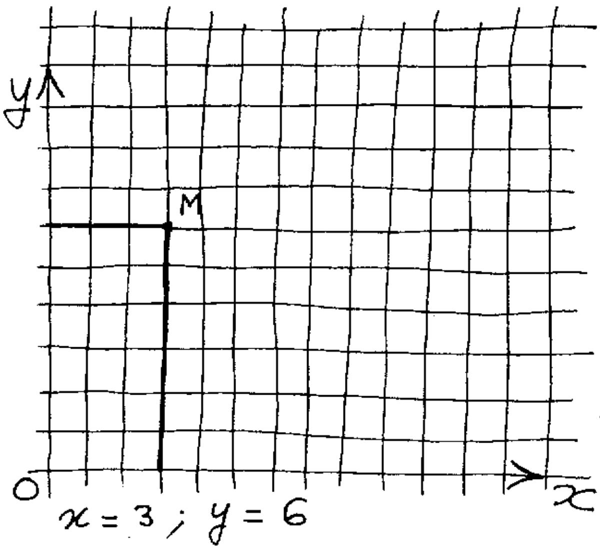
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180(1 - A/3{,}14R^2)$ tapi kurva ini tidak lagi memiliki arti fisik yang lazim.

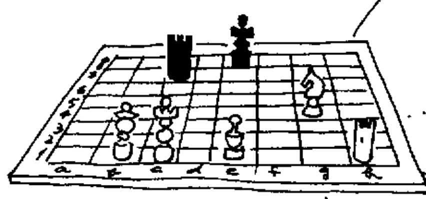
Jadi, suatu BIDANG dapat diasimilasikan dengan sebuah permukaan yang berjari-jari dari kurva R tanpa batas. Sehingga semua dalil Euclid telah ditemukan.



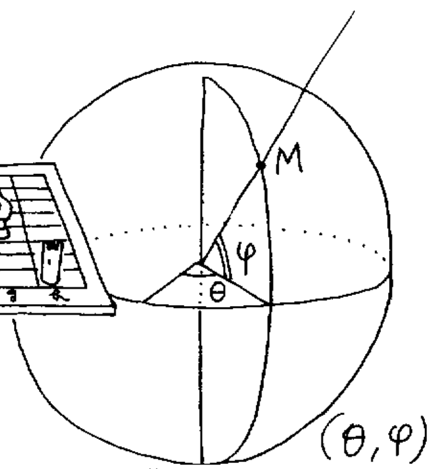
KONSEP DIMENSI

Jumlah dimensi yaitu jumlah kuantitas, koordinat, yang seharusnya dihasilkan, dalam sembarang ruang, untuk menentukan sebuah TITIK.
PERMUKAAN-PERMUKAAN merupakan gambaran ruang-ruang dengan dua dimensi. Kuantitas yang digunakan sebagai penentu bisa berupa panjang, jumlah, sudut ...



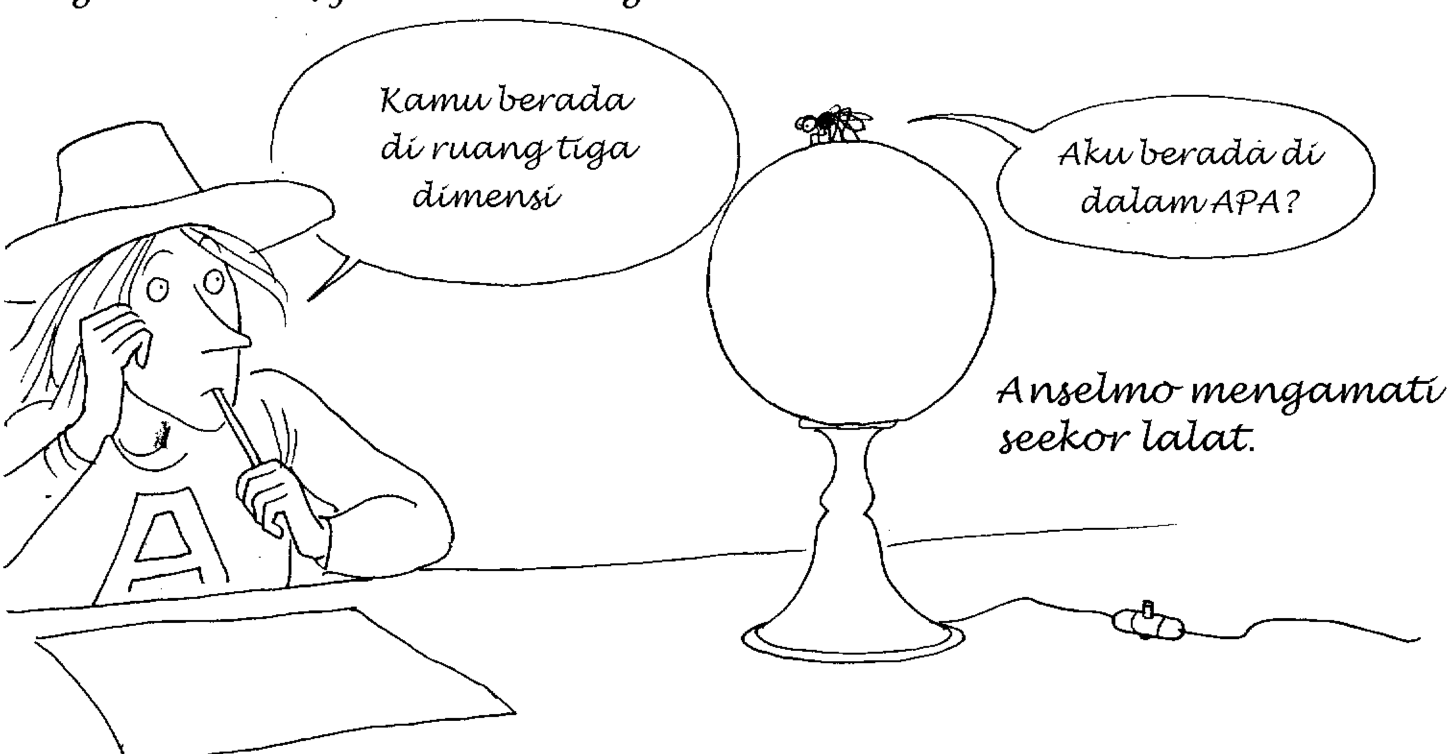


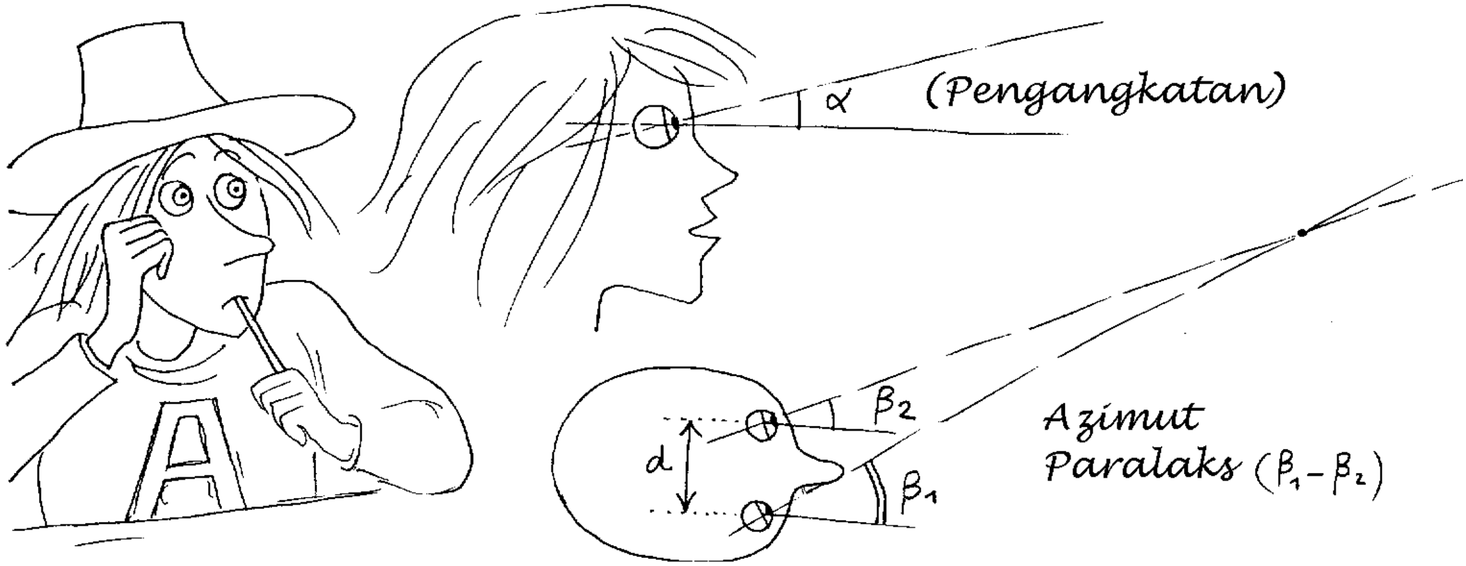
Kuda di petak g 4



Garis bujur, garis lintang

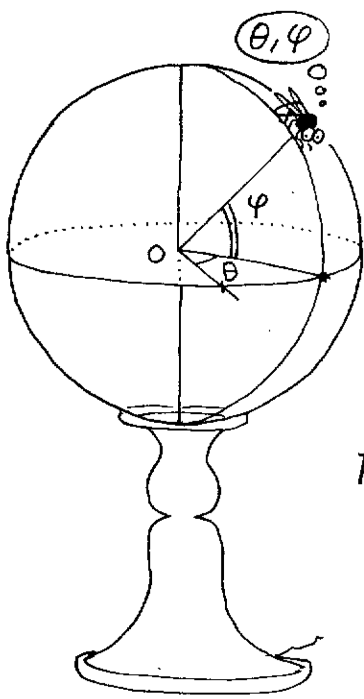
Biasanya kita mengatakan bahwa ruang kita tiga dimensi, jika kita mengecualikan waktu.





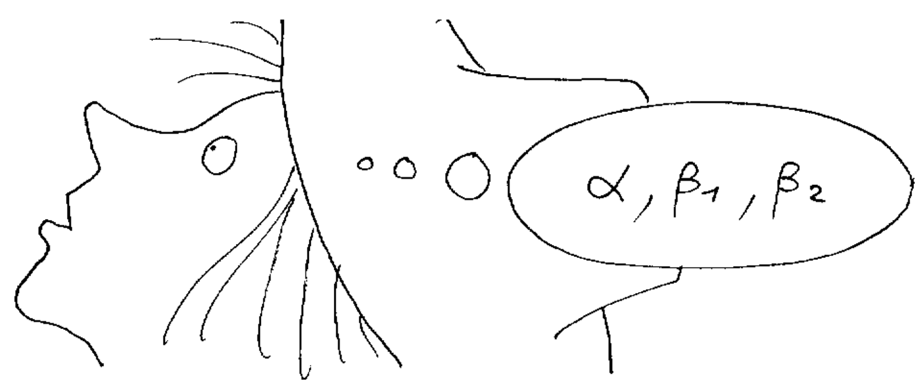
Anselmo mengenali beberapa benda mengenai tubuhnya, tempurung kepalanya. Posisi sebuah benda yang berupa titik dibantu dengan tiga SUDUT: elevasi α, dan deviasi yang bersifat azimutal dari kedua matanya: $\beta 1$ dan $\beta 2$.
Selisih siku $\beta 1 - \beta 2$ disebut PARALAKS.
Di dalam otaknya Anselmo, terbentuk suatu sandi yang mengubah paralaks itu menjadi jarak.

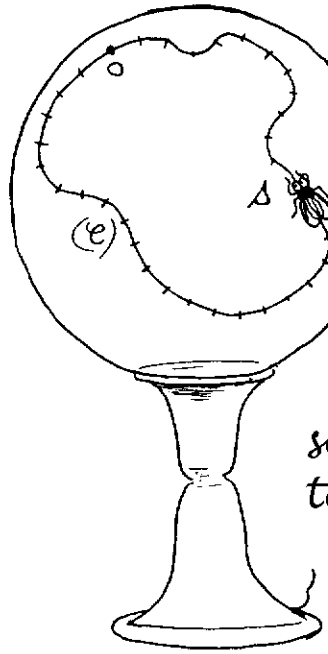
PENCELUPAN:



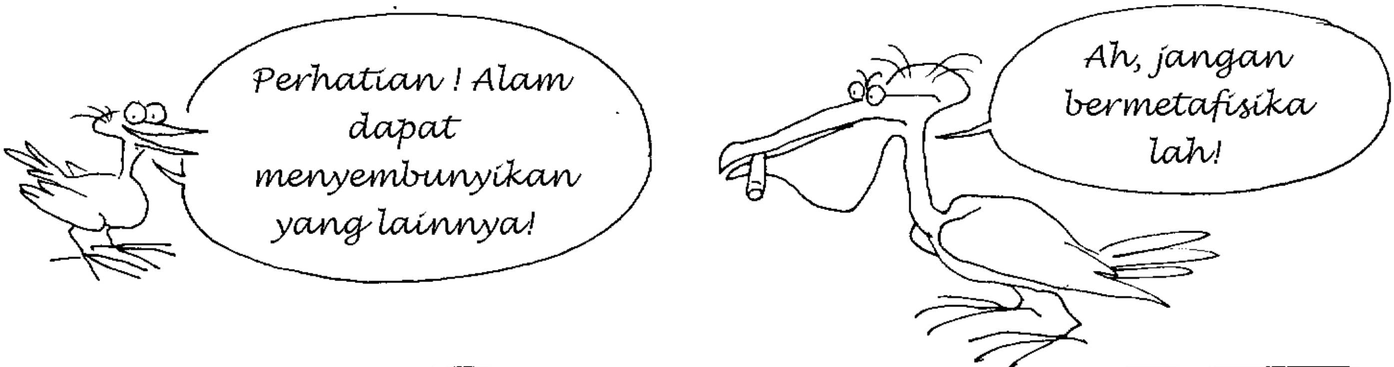
Tetapi lalat juga bergerak di atas globe bundar dari sebuah lampu di mana posisinya, dalam ruang dwi dimensi ini, dapat dikenali dengan bantuan dua sudut θ and φ (garis bujur dan garis lintang).

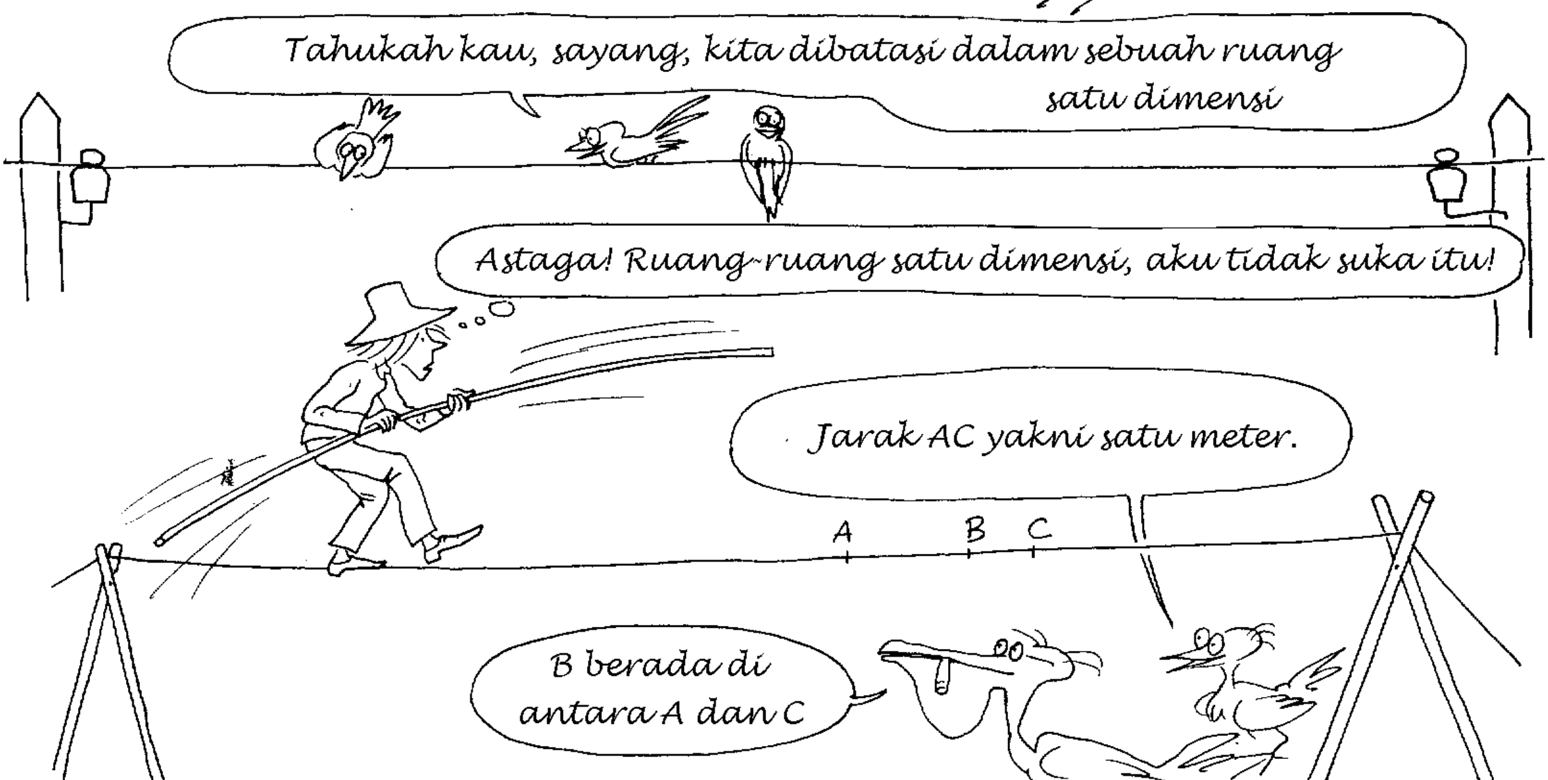
Katakanlah bahwa ruang dwi dimensi ini terCELUP dalam ruang tiga dimensi kita.

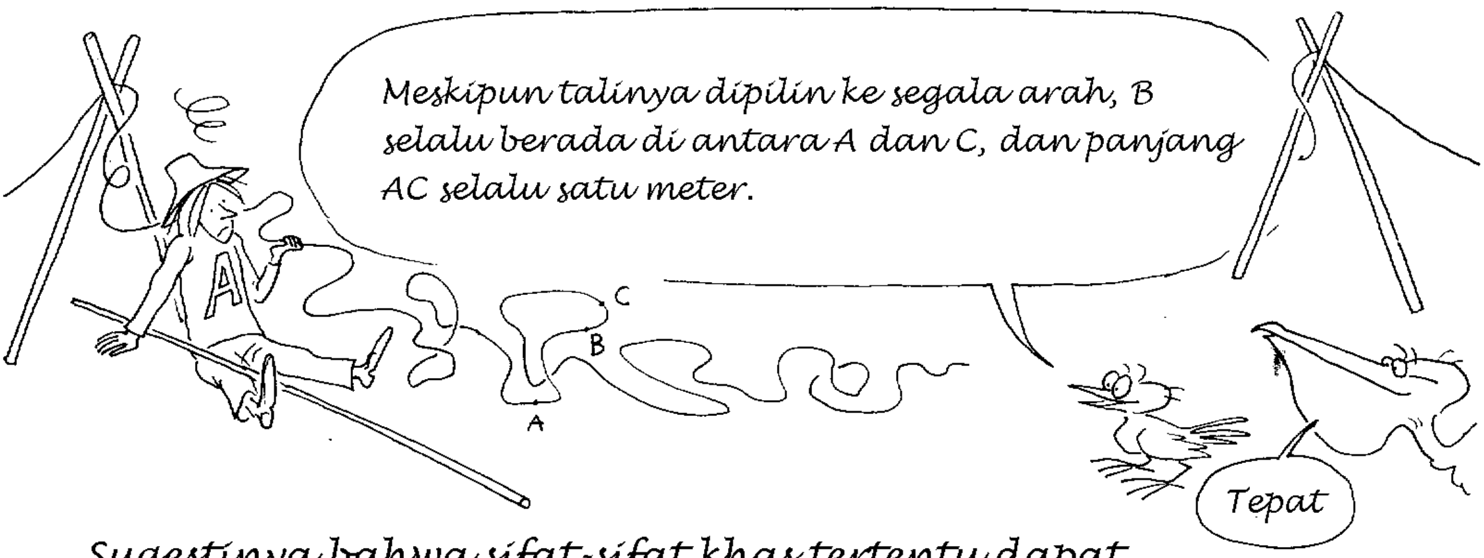




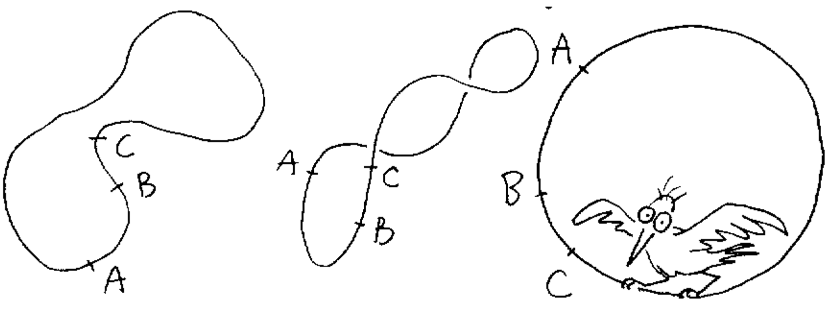
Misalkan lalat mengikuti sebuah kurva (φ) yang ditarik dari sebuah bulatan. Maka bisa dikenali posisinya dengan bantuan satu kordinat saja (jaraknya s dengan titik asal, dihitung secara aljabar).
Kurva adalah suatu gambaran dari sebuah ruang SATU dimensi.
Ruang satu dimensi ini tercelup dalam sebuah ruang dua dimensi (bulat) yang terCELUP dalam ruang tiga dimensi.
Dengan ruang yang demikian dimana kita bergerak kemungkinan tercelup dalam ruang berdimensi lebih tinggi tanpa kita sadari.







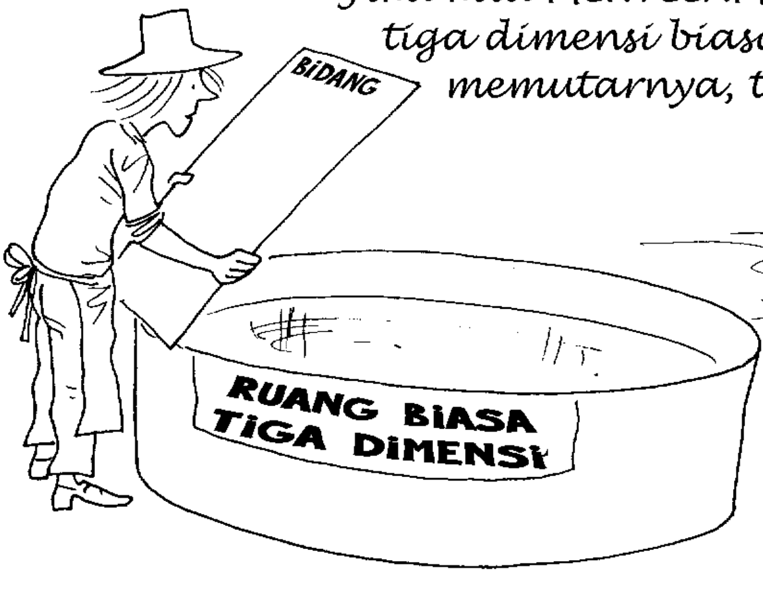
Sugestinya bahwa sifat-sifat khas tertentu dapat independen dari cara pencelupannya

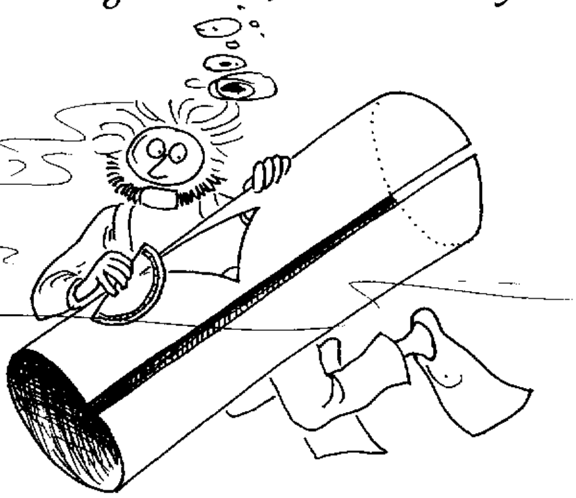


Inilah macam-macam cara untuk MEMBENAMKAN sebuah KURVA TERTUTUP dalam ruang biasa. PENUTUPnya merupakan sifat khas yang tidak tergantung dari proses pembenaman.

Tapi kita harus berhati-hati untuk meregangkan atau mengencangkan talinya agar tidak mengubah PANJANG antar titik-titik yang berurutan. Kita sekarang akan MENYELAMI PERMUKAAN di dalam ruang tiga dimensi biasa.

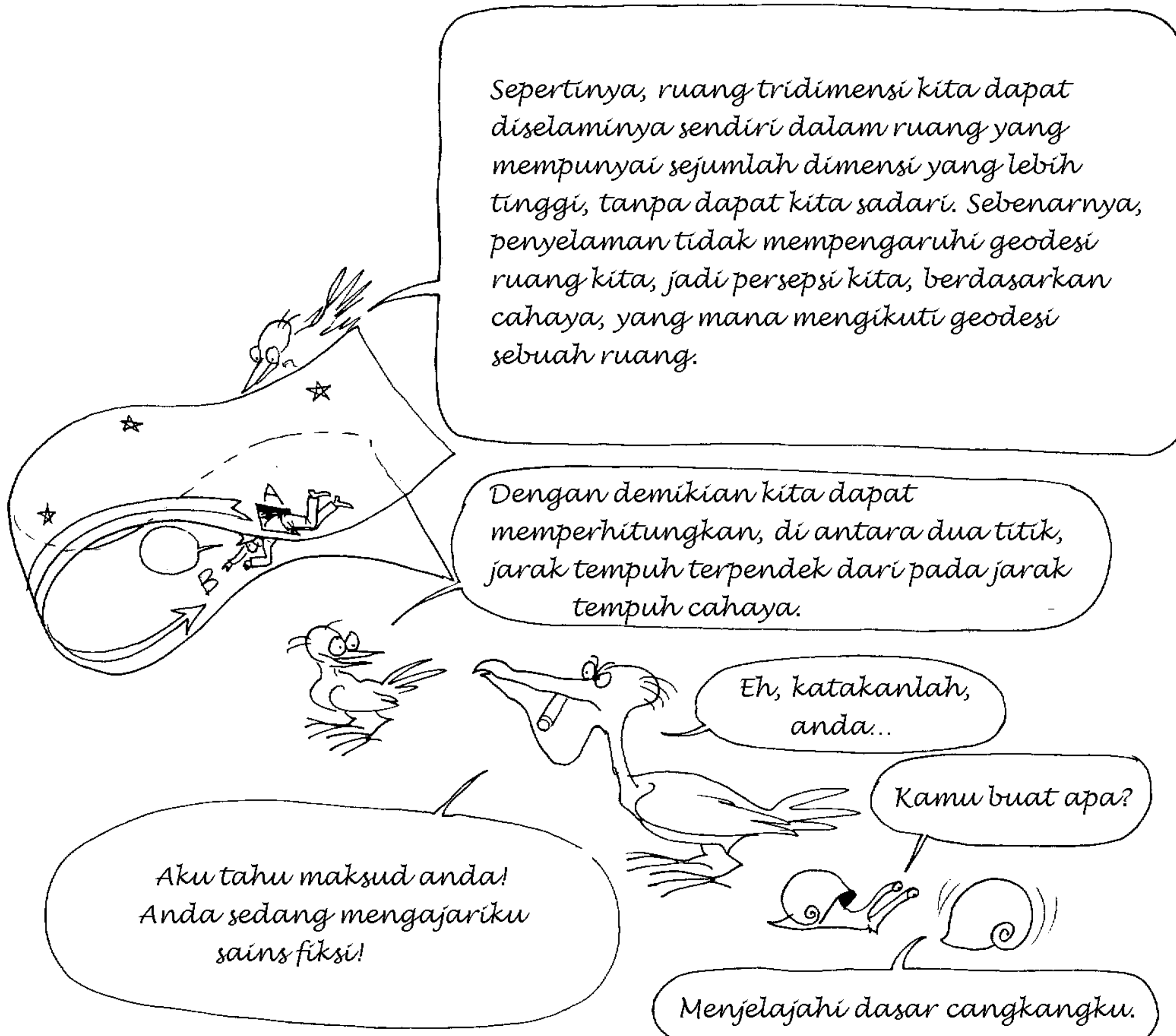
Jika kita MENYELAMI sebuah BIDANG di ruang tiga dimensi biasa, kita dapat memindahkannya, memutarnya, tanpa mengubah GEOMETRInya.



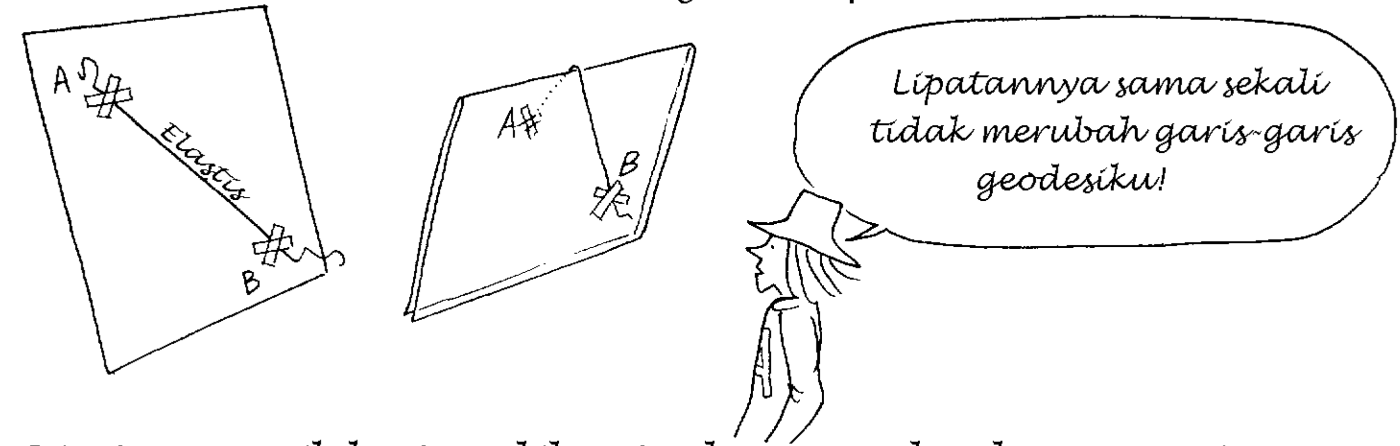


Telah kita lihat bahwa dengan memutarbalikkan sebuah bidang yang mengikuti sebuah silinder tidak mengubah geodesinya dan sudut-sudutnya.
Dilihat dari sudut pandang itu, sebuah seng bergelombang selalu memiliki geometri DATAR, DALIL EUCLID.

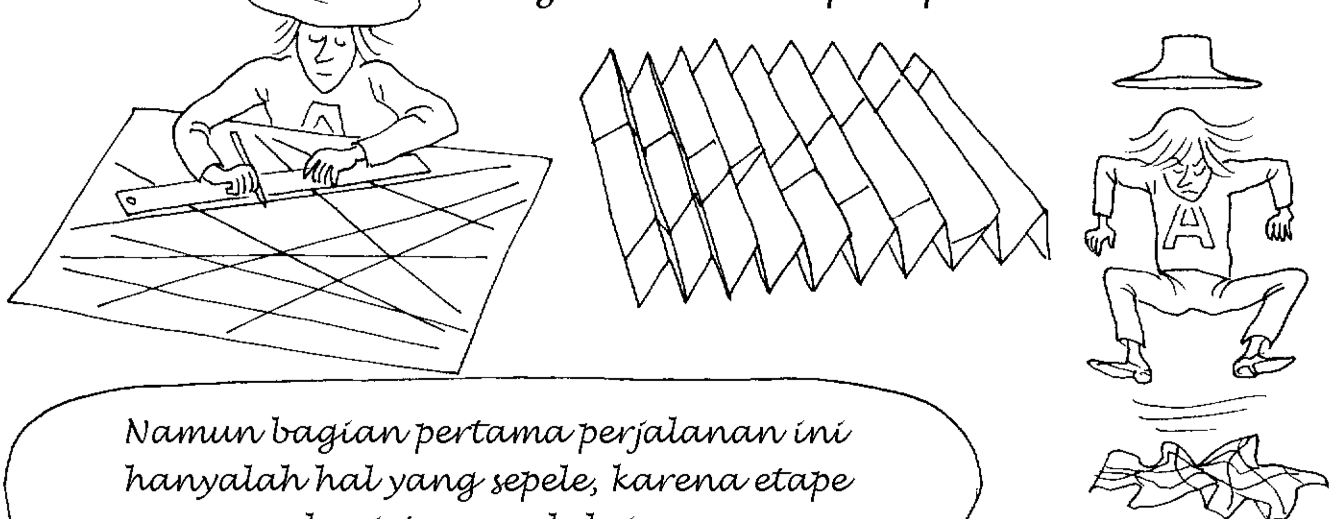
Penghuni ruang dwidimensi, dalil euclid, sama sekali tidak menyadari adanya translasi (gerak bergeser), rotasi (gerak memutar) maupun gerak meliuk-liuk, yang hanyalah variasi cara penyelaman di dalam ruang tridimensi.



Ambillah sebuah elemen bidang dan lipatlah:



Di atas secarik kertas, dibantu dengan sebuah penggaris, membuat garis lurus, geodesi, sebanyak-banyaknya, lalu lipat-lipatlah kertas.
Kalian selalu melihat geodesi permukaannya, dengan atau tanpa lipatan!



Tuan Lanturlu?
Saya adalah sales dari balai Euclid & Co. Setahu kami anda punya... anu... kekecewaan dengan produk kami.
Tak ayal lagi
EUCLIDE C^ie
Saya bawa barang-barang baru yang pasti memberikan kepuasan pada anda kali ini.
Tunjukkanlah
Masa depan berada di tridimensi. Anda lihat, geometri dua dimensi sedikit... ...kuno
CAiRAN KOSMiK SPASiOTES
Perlengkapan geodesi terbaru kami...
... terbuat dari batang-batang yang kaku, yang benar-benar pas satu sama lain.
yang tidak akan berkelok ke kanan, ke kiri, ke atas maupun ke bawah, tapi LURUS!


Untuk ukuran permukaan, cat ini. Seratus gram per meter kubik, tepatnya.
Cerdik!
Untuk ukuran volumenya, isilah dengan gas. Anda baca secara langsung nilainya pada debimeter SPASIOTESnya.
Ingatkah anda : permukaan bulatan 4πℓ², volume 4/3πℓ³.
Paham
EUCLiD & CO
Pekerjaan yang ribet!
Anselmo telah mendarat, kali ini, di ruang tridimensi dan kami mengikuti eksplorasinya


Barang yang bagus. Dan batang-batang ini pas satu meter.
Tapi, setelah meletakkan beberapa batang...
ya ampun, kembali lagi seperti tadi!
Geodesiku tertutup!
Ruang tridimensi tertutup?
Tak ada lagi yang bisa kukerjakan
Anselmo, yang berhenti untuk mengisi perutnya duduk di atas sebuah asteroid, memutuskan untuk kembali ke metode pengukuran sudut.
Seperti tadi, aku akan menggunakan tiga GEODESI, untuk menyusun sebuah SEGITIGA.
EUCLIDE


?!?
Geodesi-geodesiku tersusun dengan rapi, namun demikian jumlah ketiga sudutnya lebih b esar dari 180° !!.
Baiklah...
SPATIOTES
FSCHHHHHHHH
Aku akan membuatnya sebuah dan kuukur volume dan permukaannya.
Lingkaran berjari-jari ℓ merupakan satu kesatuan beberapa titik yang berada pada jarak ℓ dari sebuah titik tetap yang kusebut N.
Permukaannya kurang dari 4πℓ²
Nah ini volumenya kurang dari 4/3πℓ³!
Aku masih saja ketipu.

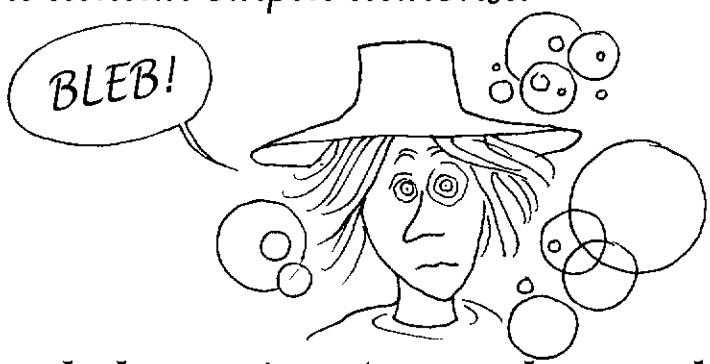

Anselmo memperbesar lagi jari-jari l lingkaran
FSSSCHHHH...
SPATIOTES
BIDANG
Buset, lingkaranku jadi... datar!
Lagi dan lagi...
Sekarang kecekungannya terbalik!
Nggak ngerti sama sekali nih.
EUCLIDE Cie
Tak lama kemudian:
heh... dindingnya tertutup kembali ke arahku!
FSSCHHHHHHH
EUCLIDE
Cepat, putuskan tabungnya!

Jadi, dengan menggelembungkan sebuah balon begitu saja di sebuah ruang tiga dimensi, Lanturlu mengakhirinya dengan berada.... DI DALAMNYA!

Kalau saja dia tidak memutuskan tabungnya tepat waktu, kemungkinan dia sudah terhimpit, seperti dia berakhir terpenjara karena penutupnya, di halaman 13.

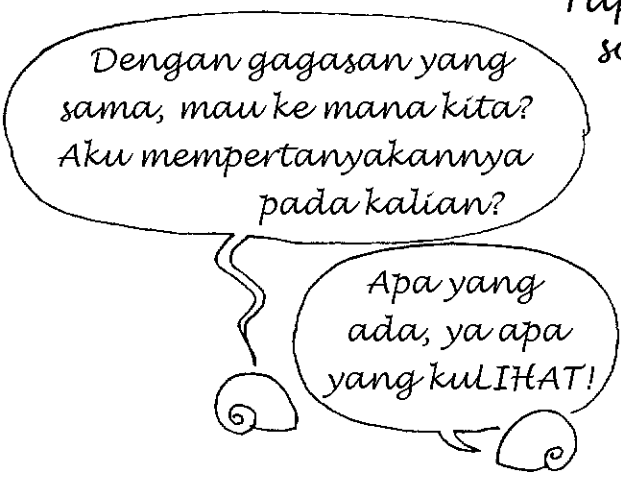
Dengan kemauan terbaik banyak orang, kita sekarang tidak dapat lagi MEMPERLIHATKAN KURVA dari ruang tridimensi ini. Geodesinya menutup kembali dan volumenya hanya menunjukkan jumlah meter kubik yang TERBATAS, begitu pula dengan permukaan planet kita, permukaan yang tertutup, hanya menawarkan jumlah meter persegi yang TERBATAS.

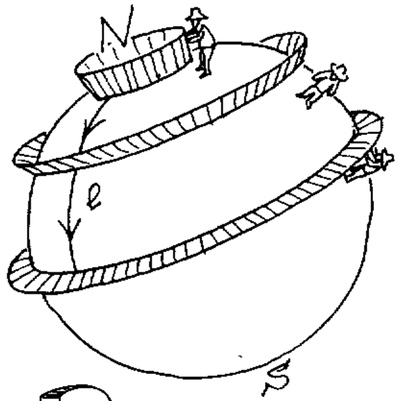
Jumlah sudut-sudut segitiga, dari ruang tiga dimensi ini, lebih besar dari 180°. Untuk « MELIHAT » kurvanya, sebaiknya dapat di pahami dalam empat dimensi.

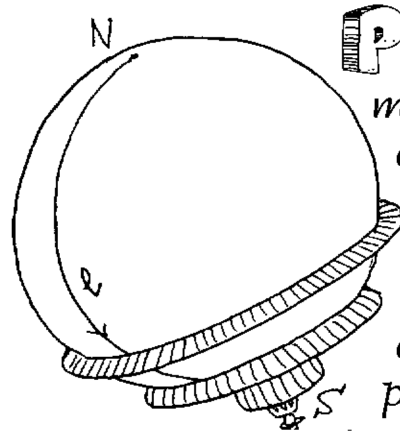


Bisa dikatakan bahwa SEMESTA tiga dimensi kita adalah sebuah PERMUKAAN YANG BESAR SEKALI, tenggelam dalam sebuah ruang empat dimensi, ruang itu pun mungkin juga permukaan yang besar sekali dan tenggelam dalam ruang lima dimensi, dll...

Tapi, di masa kita sekarang ini, tidaklah sopan mengatakan hal demikian.







Pada bulatannya, dengan memperbesar jari-jarinya l dari bidangnya, Lanturlu berakhir dengan berada di belahan S dari titik U, pusat dari lingkarannya, dan tertahan oleh pagarnya sendiri.

Dalam ruang tridimensi berkurva positif, sama saja. Dalam ruang dwi dimensi inilah terdapat bulatan, Anselmo menemukan EKUATOR ketika ia telah menutup sebagian dari permukaan yang ada. EKUATOR dari ruang tridimensi dengan LINGKARAN YANG BESAR SEKALI juga ada.
Anselmo tiba di ruang ini pada saat balonnya menduduki sebagian volume yang tersedia. Pada bulatannya, lingkaran ekuator baginya nampak seperti LURUS. Begitu pula, dalam ruang yang lingkarannya besar sekali, "balon ekuator" baginya nampak sebuah BIDANG.

Di luar ekuator, KELENGKUNGAN balon terbalik dan secara otomatis berpusat pada titik belahan S dari titik U, pusat balon.

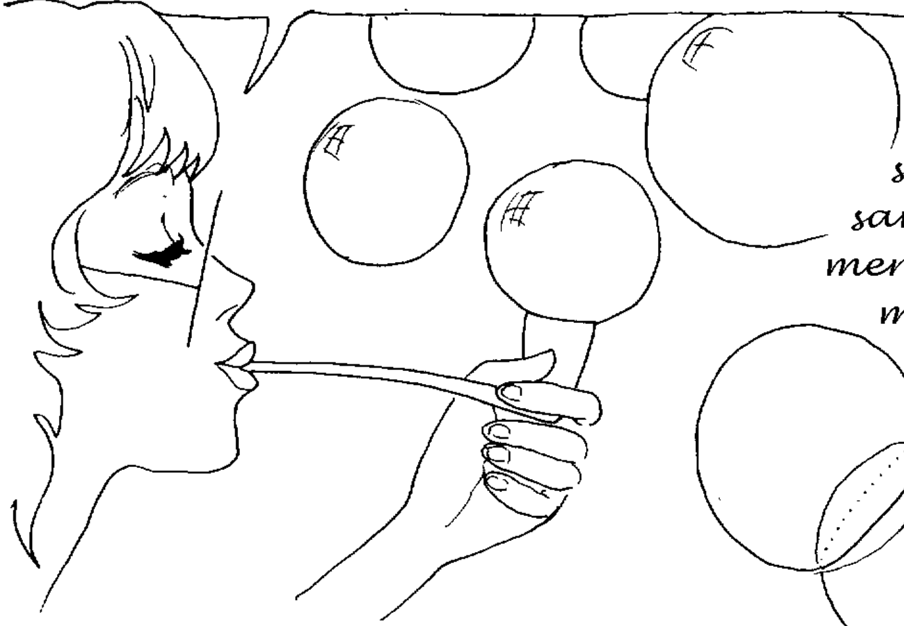

Bosan?
Maksudku, anu... semua bercampur sedikit di pikiranku.
Namaku Sofia. Kurva dengan segala macam bentuk adalah keahlianku.
Navigasi pada lingkaran yang sangat besar selalu saja mengejutkan pada awalnya. Jangan sampai tidak bereaksi. Sedikit demi sedikit kita akan terbiasa.
y...ya
Aku sedikit kehilangan arah...


Tapi, PUSAT lingkaran besarnya ini, di mana?
Jika kugambar sebuah lingkaran di atas sebuah BIDANG, kita setuju 'kan kalau ini merupakan sebuah perwakilan dari suatu ruang satu dimensi, tertutup, TERBENAM dalam sebuah ruang dua dimensi: BIDANG.
Dan pusat lingkaran TIDAK terletak pada lingkarannya.
mmm...
Benda bulat menunjukkan sebuah ruang tertutup dengan DUA dimensi, TERBENAM dalam sebuah ruang tiga dimensi. Pusat dari benda bulat ini TIDAK lagi pada benda itu, tapi berada dalam ruang tiga dimensi.
Pusat dari ruang berlingkaran besar dengan tiga dimensi dapat terletak dalam sebuah ruang empat dimensi, dengan mengandaikan bahwa pusatnya TERBENAM di dalamnya.
Begitulah seterusnya...
Dengan demikian, pusat dari ruang berlingkaran besar empat dimensi berada dalam ruang lima dimensi, dan seterusnya...

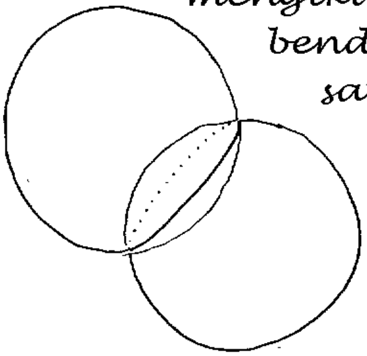

Nah, sampailah kamu di sini lagi, di dalam dunia dua dimensimu, terlekat diatasnya, seperti jiplakan kecil.
Dan kamu mulai menggelembungkan lingkaranmu, yang hanya sebuah bulatan satu dimensi
Di sebuah ruang dua dimensi, perbatasan membatasi permukaan. Sedangkan, dalam sebuah ruang tiga dimensi, perbatasannya membatasi volume.
Itu, ketika aku sampai pada setengah dari ruang bulat ini.
Di dalam ruang empat dimensi, perbatasannya memiliki tiga dimensi, dan membatasi hiper volume empat dimensi.
mulai lagi deh!
ayo pergi saja!
N
Lihat, di sini, lingkaranmu, yang berupa "balon satu dimensi" mulai berisi lebih dari separuh ruangan yang ada. Lingkarannya mulai menutupimu, menuju ke arah titik yang berlawanan S.
S

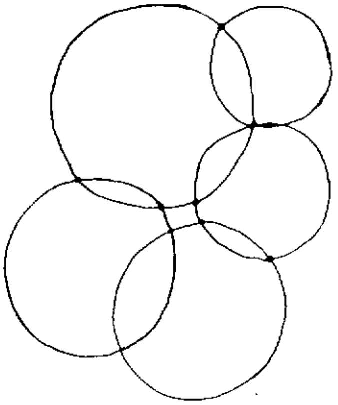
Begitu pula, di dalam ruang kurva tiga dimensiku, ketika kusuntikkan lebih dari setengah volume keseluruhan, balonnya menutupiku, kea rah titik yang berlawanan.
Karena benda bulat, dalam ruang tiga dimensi melengkung, terbukti mempunyai dua pusat, yang berlawanan.
Aku mengerti!
?!!?
Akhirnya, aku tidak tahu benar apa yang kumengerti, tapi kesannya aku telah mengerti sesuatu.
Mencemas-kan!
Tidaklah, Anselmo, ketika ada lebih dari tiga dimensi, MENGERTI YAITU MENGEKSTRAPOLASI
Aku mengek-strapolasi tanpa menge-tahuinya
Gambarnya, andalah yang akan membuatnya... ... di benak anda!

Sekarang, aku ambil sebuah ruang tiga dimensi di mana aku letakkan bulatan-bulatan dua dimensi, setumpuk alam kecil dwidimensi.



Alam-alam ini dapat saling meresapi satu sama lain. Titik-titik mereka yang sama terbagi mengikuti lingkaran, benda-benda pada satu dimensi.





Begitu pula, lingkaran-lingkaran, benda-benda pada satu dimensi, diletakkan di atas selembar kertas (2 dimensi) terpotong mengikuti TITIK-TITIK. (Biasa dikatakan bahwa TITIK memiliki dimensi kosong)

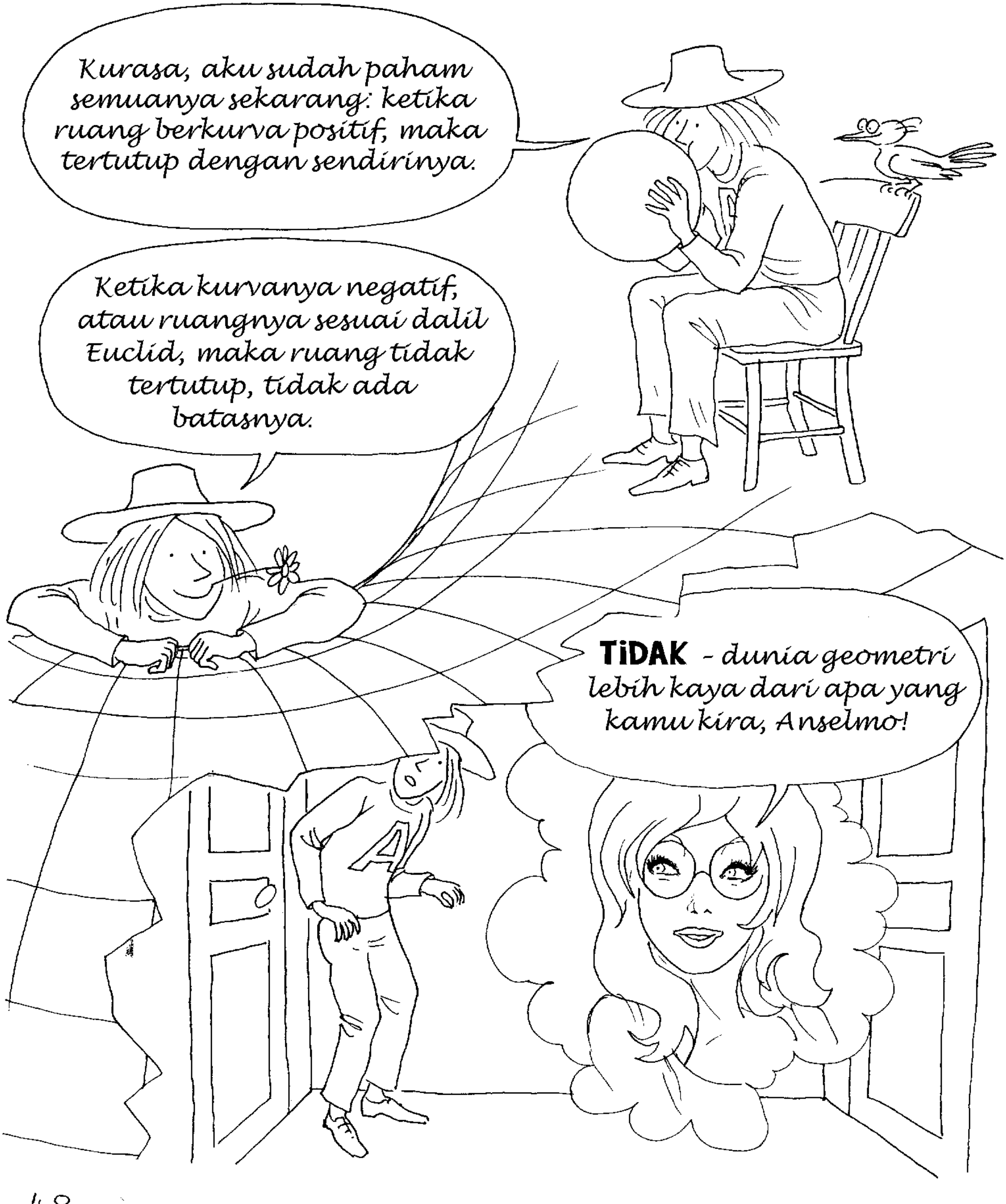
Sebuah bulatan dapat dianggap sebagai titik temu dari dua "gelembung » tiga dimensi, yang berkembang dalam satu ruang empat dimensi.

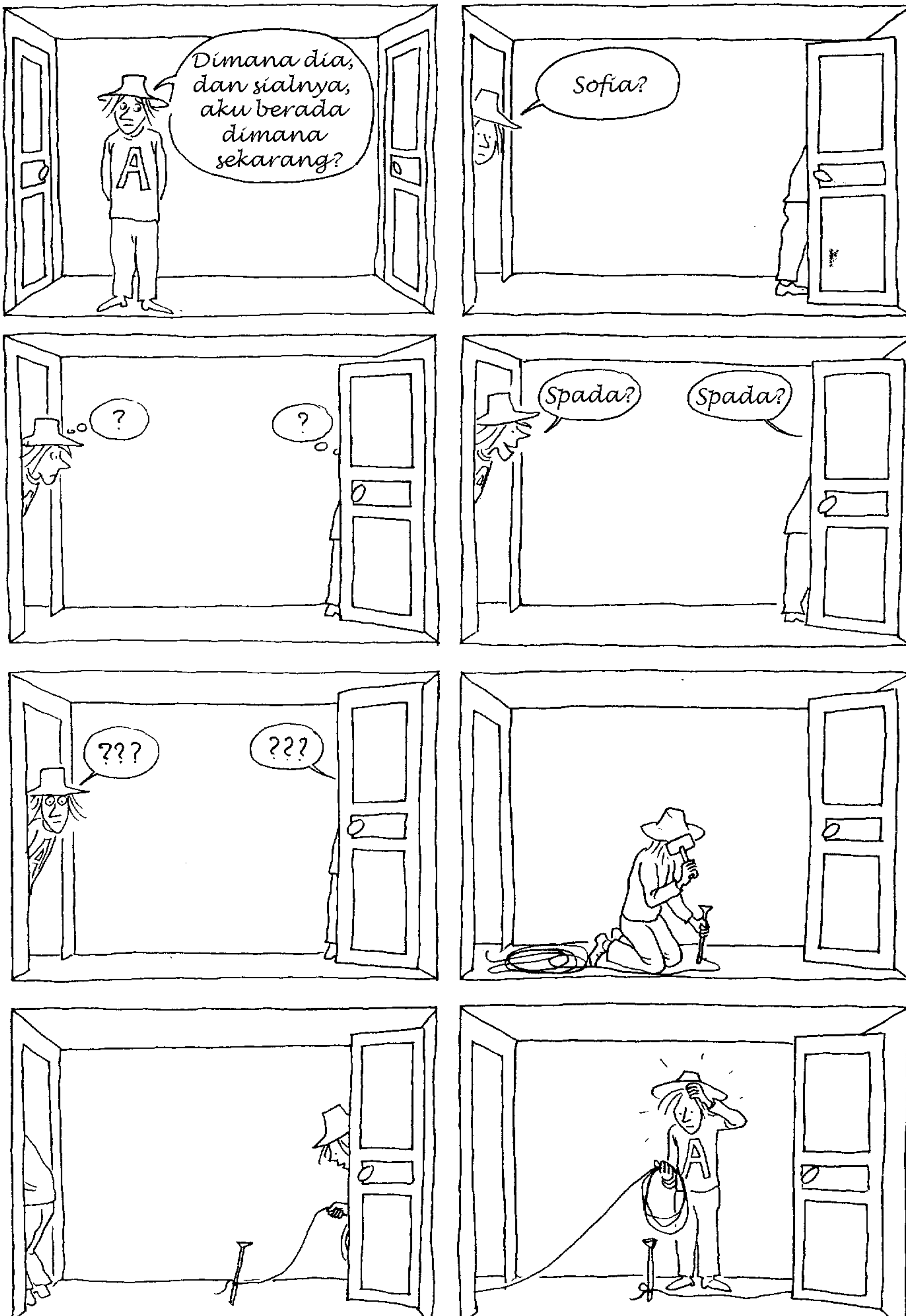
Dan begitu pula selanjutnya: sebuah ruang Tiga dimensi melengkung, bulatan yang sangat besar, dapat dianggap sebagai titik temu dari dua gelembung sabun empat dimensi, yang berkembang dalam satu ruang lima dimensi.

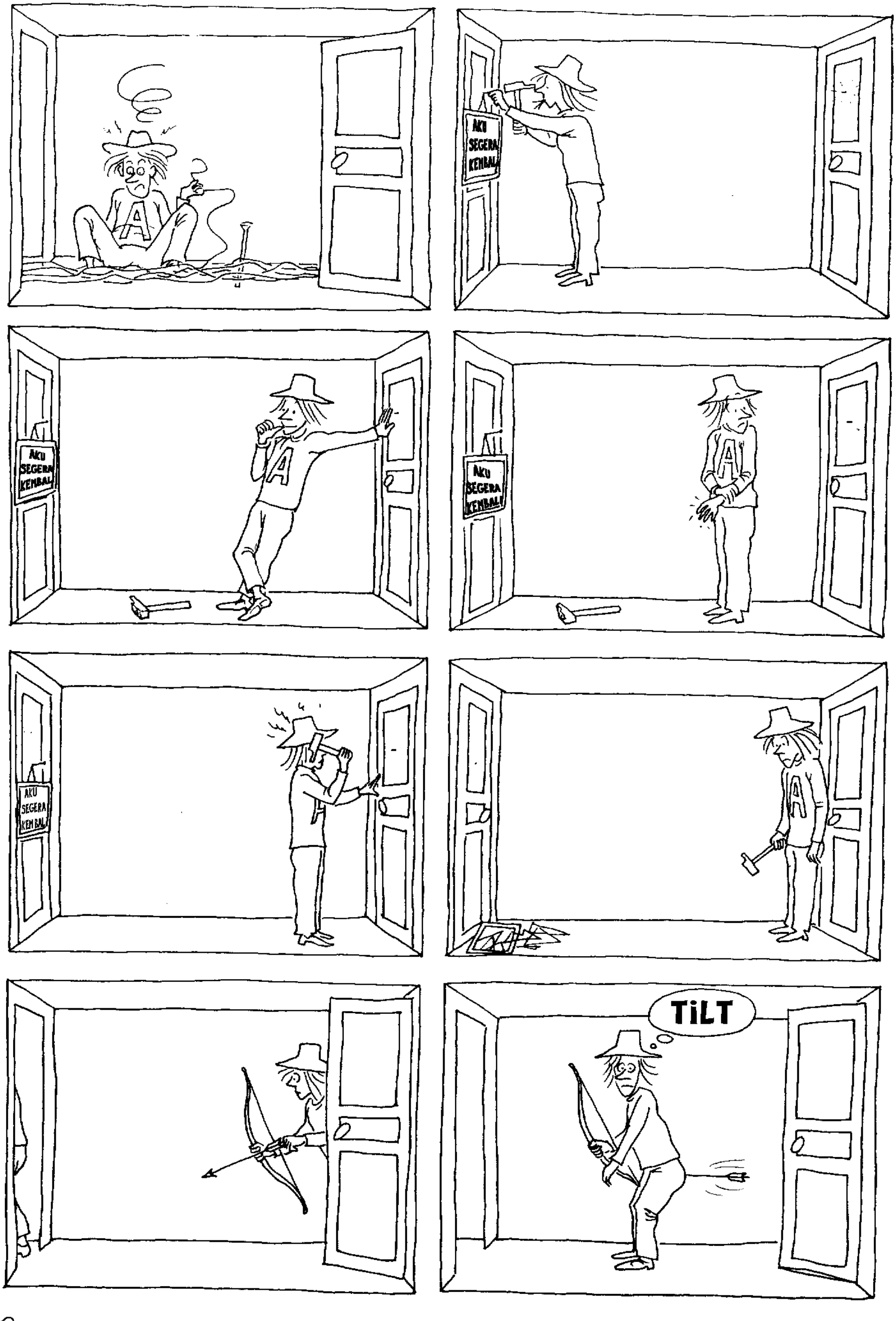

Anselmo dan Sofia, setelah mengenal kegamangan ekstrapolasi, mulai lagi untuk eksplorasi dunia tiga dimensi yang baru.
Matematika tidak lagi seperti matematika terdahulu
Kau tahu, ini adalah selotip tiga dimensi, bagi geodesi. Bagian yang lengket ada di ujung... tentu saja.
Heh, di dalam ruang ini, geodesi-geodesinya tidak Nampak tertutup. Dan sekarang ketika kutiup balon SPASIOTES, volume yang disalurkan di atas 4/3πl³; sedangkan permukaannya di atas 4πl². Adapun jumlah sudut-sudut dari sebuah segitiga, kali ini di bawah 180°.
Kamu ingat di halaman 23, kamu berada lagi di dalam ruang berkurva NEGATIF.


RESUME:
Di dalam ruang-ruang tiga dimensi, banyak hal yang mungkin terjadi, kau tahu itu.Sama seperti permukaan-permukaan, yang berada pada ruang-ruang dwi dimensi.
Jadi, jika jumlah sudut-sudut sebuah SEGITIGA, dalam sebuah ruang tiga dimensi, lebih besar dari 180°, maka kurvanya positif. Dengan terbentuknya sebuah bulatan dari jari-jari l, kamu akan ketahui dari SPASIOTES volumenya kurang dari $4/3\pi l^3$ dan permukaan kurang dari $4\pi l^2$. Ruang ini, disebut LINGKARAN BESAR, akan tertutup dengan sendirinya. Jika jumlah dari ketiga sudut segitiga, di dalam ruang tridimensi, kurang dari 180°, maka kurvanya akan negatif. Volume sebuah lingkaran dari jari-jari l akan lebih besar dari $4/3\pi l^3$ dan permukaannya lebih besar dari $4\pi l^2$. Ruang tersebut akan memiliki perluasan tanpa batas.
tetapi jika jumlah sudut-sudutnya adalah 180°, maka ruangnya itu berdalil Euclid.
semua itu hanya untuk mencapai disitu!

RUANG SEHARUSNYA TERBUKA ATAU TERTUTUP! ...




Dimana dia, dan sialnya, aku berada dimana sekarang?
Sofia?
?
?
Spada?
Spada?
???
???

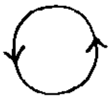

AKU SEGERA KEMBALI
AKU SEGERA KEMBALI
AKU SEGERA KEMBALI
AKU SEGERA KEMBALI
TiLT


Ya, Lanturlu terhempas di sebuah ruang silinder tiga dimensi. Meskipun sesuai dalil euclid, tanpa kurva (jumlah ketiga sudut segitiganya sama dengan 180°) dunia ini tertutup sendiri.
TILT
Nah, akuilah... dunia bulat, hiperbolis, silindris. Sudah berkeliling, kan?
GEOMETRI
Kamu percaya?
Mari kita kembali sebentar ke dwidimensi.
EH!?
AWAN

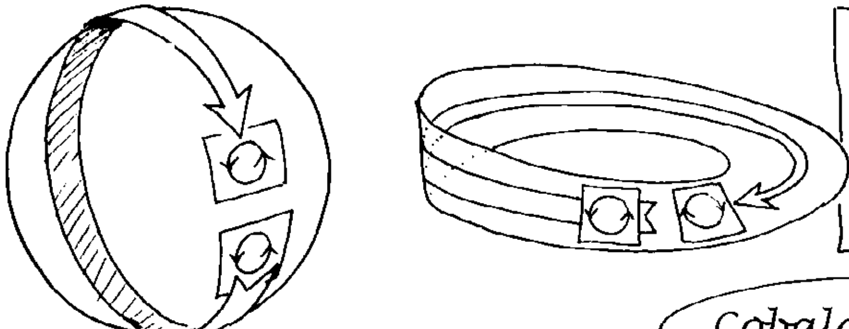
TANPA ATAS BAWAH:

Tertutup lagi, seperti tadi.
Jumlah sudut-sudutnya: 180°. Berdalil Euclid barang ini. Masih tentang silinder!
Nggak tuh!...
!?!
Gila!
TITIK AWAL GEODESI
Intinya, Anselmo, kali ini berada di dalam sebuah RUANG DWIDIMENSI TAK TERARAHKAN. Gambaran yang paling terkenal dari ruang seperti ini adalah Möbius Strip atau Pita Möbius (1830). Toh gagasan ini lolos dari pemikiran orang-orang Yunani, yang berpikir tentang segalanya.
TITIK AWAL GEODESI
Sofia, keluarkan aku dari sini!

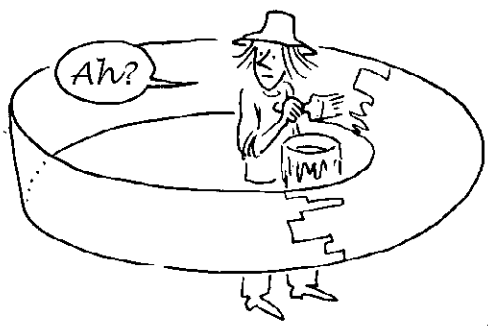
Yuk kita gambar sebuah lingkaran di atas permukaan, lalu beri tanda panah sesukanya.



Bayangkan lingkarannya itu sebuah replika kecil yang dapat digeser semaunya di atas permukaan tersebut. Jika lingkarannya berada sama persis dengan lingkaran itu sendiri, maka dapat dikatakan bahwa permukaannya DAPAT DIARAHKAN (tepatnya untuk lingkaran, silinder, bidang, dll). Namun jika replika ini meluncur di atas pita Möbius, maka arahnya berbeda sama sekali...



Setiap kali benda ini mengitari dunia dua dimensi ini, lingkaran berubah arah.



Secara, pita Möbius tidak dapat dilukiskan dengan dua warna berbeda: karena pita ini hanya memiliki satu sisi, sebutannya UNILATERAL

Hanya punya satu SISI:

Bisa dilipat sekali saja!

Anselmo memutuskan memaku untuk menandai bagian dalam dan luar.

Tindakannya berakhir gagal, karena pita ini...


mari coba potong jadi dua
Lebih mudah mengatakannya dari pada melakukannya Anselmo, kawanku.
gimana caranya untuk memotongnya menjadi dua?
Mudah sekali, kamu potong saja jadi tiga!
Perhatikan, dalam operasi ini, benda ini menjadi bilateral
Aku jadi bingung
Perhatikan, sekarang ada satu benda bersisi satu (putih) dan satu benda dua sisi (abu-abu) yang panjangnya dua kali lipat dari yang pertama.

Setelah menyusuri pita Möbius, mari kembali lagi ke ruang Euclid (tanpa kurva) tiga dimensi:

ARAH RUANG:

Yuk kita temani Lanturlu di penjelajahan dunia tridimensi Euclid (tanpa kurva) barunya.