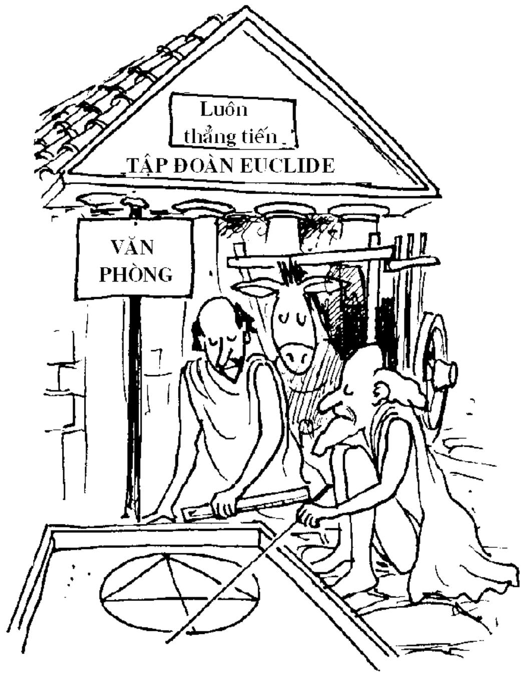
NHỮNG CUỘC PHIÊU LƯU CỦA ANSELME LANTURLU

THẾ GIỚI HÌNH HỌC

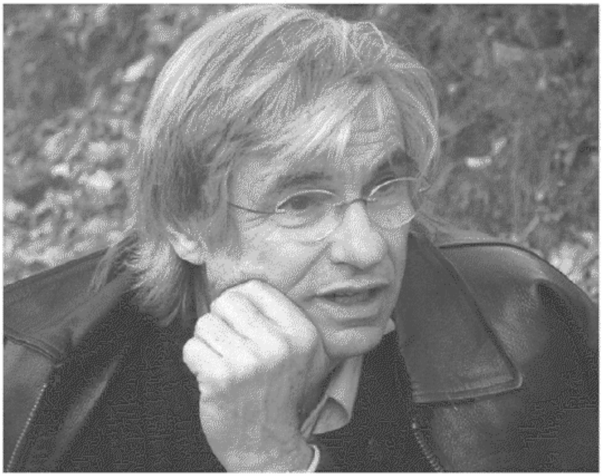
Jean-Pierre Petit



Tri thức không biên giới

Thành lập theo Luật Hiệp hội 1901
Villa Jean-Christophe, 206 đường Montagnère, 84120, Pháp

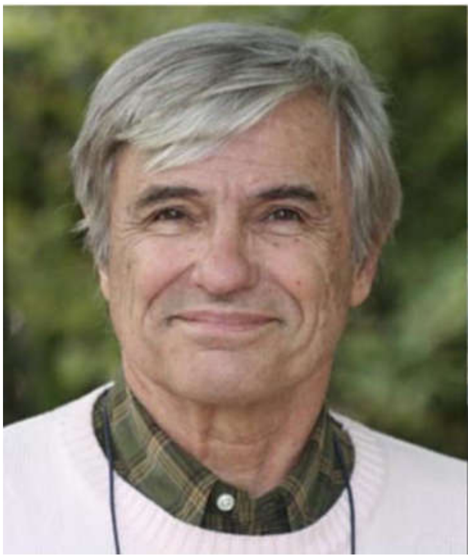
http://www.savoir-sans-frontieres.com



Jean-Pierre Petit, chủ tịch hiệp hội : Từng phụ trách nghiên cứu tại Trung tâm Nghiên cứu Khoa học Quốc gia Pháp (CNRS), chuyên gia nghiên cứu vũ trụ, người sáng lập ra một thể loại truyện tranh mới : truyện tranh khoa học. Năm 2005, ông đã quyết định đưa hơn 20 tác phẩm của mình lên mạng và cho phép người xem tải miễn phí từ trang web của ông. Ông cũng là người thành lập hiệp hội Tri thức không biên giới, hoạt động phi lợi nhuận vì mục đích phổ biến các kiến thức khoa học kỹ thuật đi khắp thế giới. Từ những nguồn đóng góp tự nguyện, năm 2006, Hiệp hội trích ra 150 euros trả cho mỗi dịch giả (bao gồm cả phí chuyển tiền). Mỗi ngày đều có rất nhiều người tham gia dịch, góp phần làm tăng số lượng các tập truyện được dịch (năm 2005, truyện đã được dịch ra 18 thứ tiếng, có cả tiếng Lào và tiếng Ruanda).
Các giáo viên có thể tải truyện về dưới dạng tập tin PDF, sử dụng toàn bộ hoặc một phần tác phẩm để phục vụ cho việc giảng dạy nếu đó là hoạt động phi lợi nhuận. Truyện cũng có thể được đưa vào thư viện địa phương, thư viện các trường phổ thông và đại học dưới dạng sách in hoặc lưu trên mạng nội bộ.
Tác giả cũng đã bắt đầu viết những tập truyện đơn giản dễ hiểu hơn (dành cho lứa tuổi 12), bổ sung cho bộ truyện hiện có. Ngoài ra hiệp hội cũng đang chuẩn bị để cho ra đời các tập truyện « nói » dành cho người không biết chữ và truyện « song ngữ » giúp người đọc học tiếng nước ngoài từ tiếng mẹ đẻ.
Hiệp hội vẫn đang không ngừng tìm kiếm các dịch giả có kiến thức về lĩnh vực khoa học kỹ thuật để có thể chuyển ngữ các tập truyện sang ngôn ngữ mẹ đẻ của họ một cách chính xác nhất.
Hiệp hội cũng rất mong nhận được sự đóng góp của mọi người (dưới dạng ngân phiếu chuyển cho Hiệp hội Savoir sans Frontières). Phần lớn nguồn tài chính của hiệp hội vào năm 2006 được dùng để chi trả cho công tác dịch thuật

Kiến thức không biên giới

Hiệp hội phi lợi nhuận được thành lập vào năm 2005 và do hai nhà khoa học người Pháp quản lý. Mục đích: phổ biến kiến thức khoa học bằng cách sử dụng ban nhạc được vẽ qua các tệp PDF có thể tải xuống miễn phí. Năm 2020: 565 bản dịch sang 40 ngôn ngữ đã đạt được. Với hơn 500.000 lượt tải xuống.

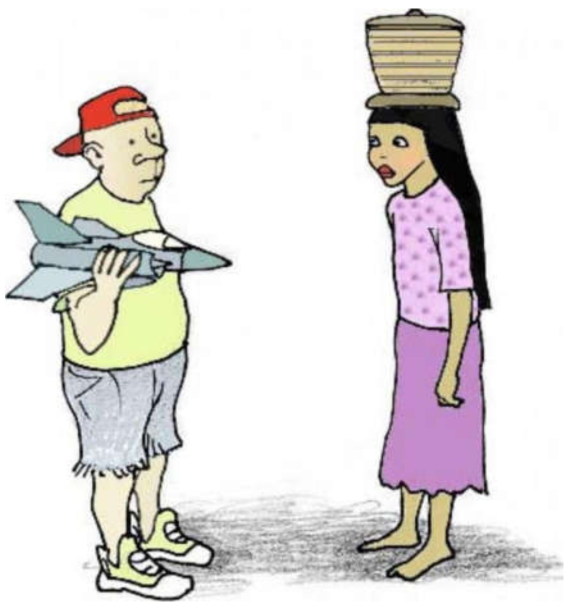


Jean-Pierre Petit

Gilles d'Agostini

Hiệp hội là hoàn toàn tự nguyện. Số tiền quyên góp hoàn toàn cho các dịch giả.

Để đóng góp, hãy sử dụng nút PayPal trên trang chủ:



http://www.savoir-sans-frontieres.com

PayPal FAIRE UN DON

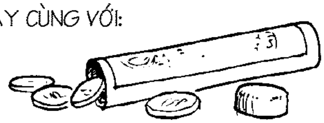
KHUYẾN CÁO

ĐÂY KHÔNG LÀ MỘT HIỆP ƯỚC, CŨNG KHÔNG PHẢI LÀ BÀI GIẢNG,

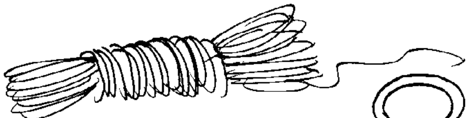
ĐÂY CHỈ LÀ CÂU CHUYỆN VỀ ANH CHÀNG ANSELME LANTURLU & CHUYẾN DU HÀNH CỦA ANH ĐẾN XỨ SỞ HÌNH HỌC.

CÁC BẠN NÊN ĐỌC CÂU CHUYỆN NÀY CÙNG VỚI:

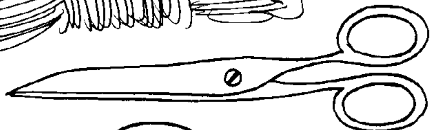
* ĐẦU TIÊN LÀ VỚI THUỐC ASPIRIN



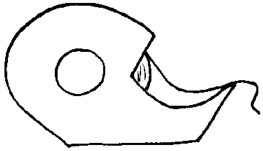
* MỘT CUỘN DÂY



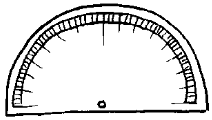
* MỘT CÁI KÉO



* BĂNG DÍNH

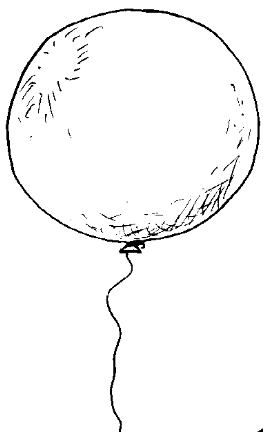


* MỘT CÂY THƯỚC ĐO ĐỘ



* VÀ MỘT QUẢ BÓNG XINH XINH

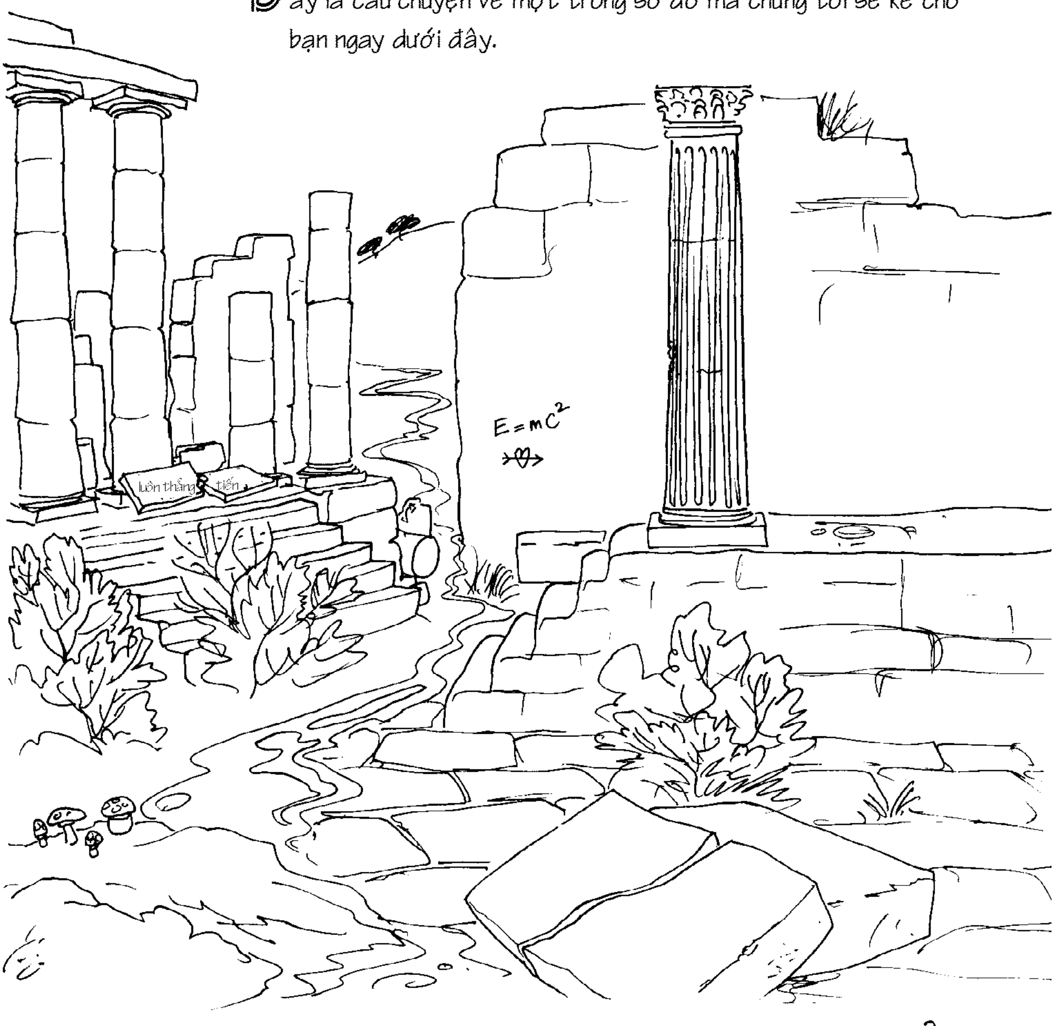
THẬT TRÒN ...



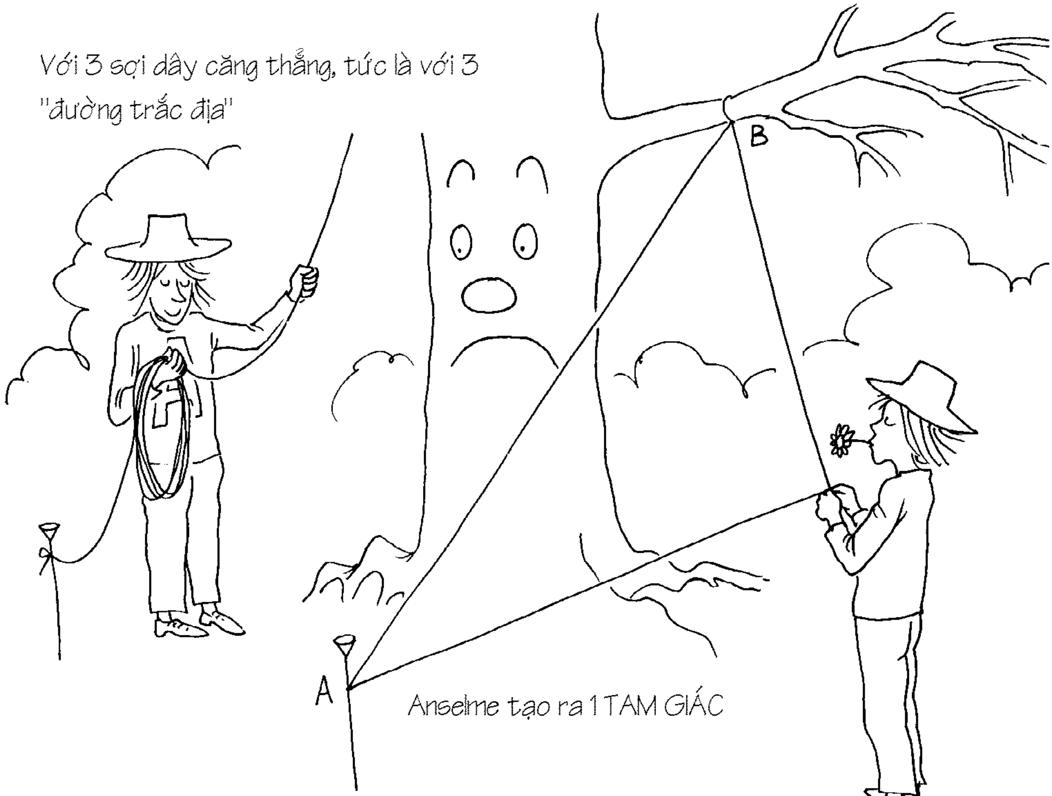
Tập đoàn Euclide ra đời tại Alexandrie (Ai Cập) vào thế kỷ thứ III trước Công nguyên. Trong 2200 năm qua, tập đoàn làm ăn rất phát đạt. Sản phẩm của họ được đánh giá cao, khách hàng cũng rất tín nhiệm và trung thành.

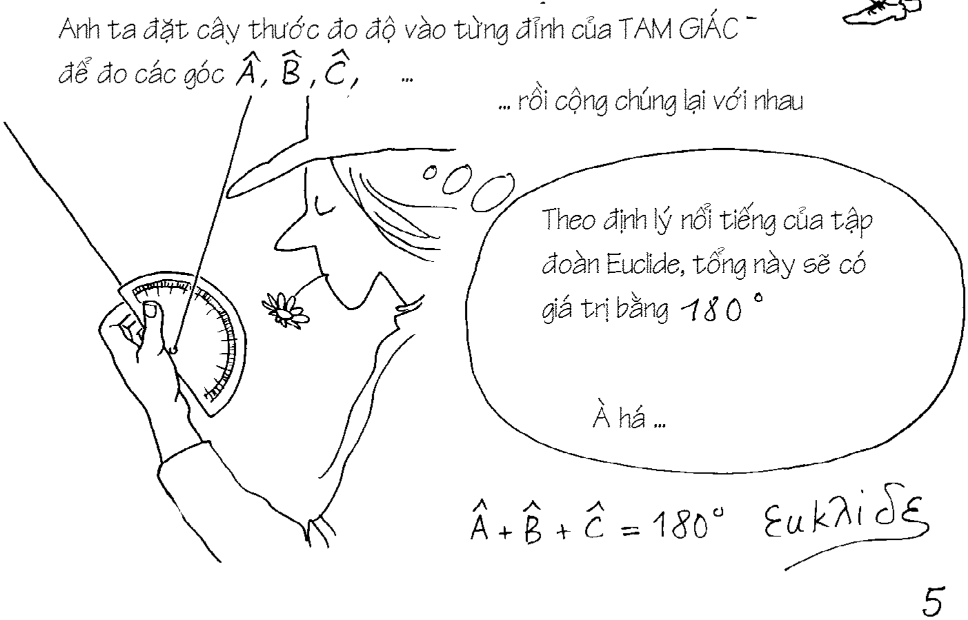
Thế nhưng, càng ngày thị hiếu khách hàng càng thay đổi, một số người ngày xưa trung thành vô điều kiện với nhãn hiệu, sau những trải nghiệm, đã tự hỏi: "Euclide, đây có phải thứ tốt nhất thế gian và dành cho tất cả mọi người hay không?

Đây là câu chuyện về một trong số đó mà chúng tôi sẽ kể cho bạn ngay dưới đây.

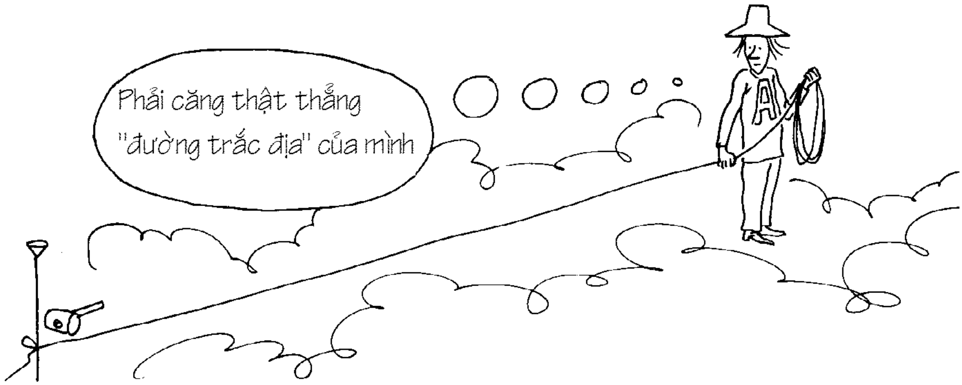


MỞ ĐẦU : một ngày nọ, Anselme Lanturlu quyết định căng một sợi dây giữa hai cái cột :


Với 3 sợi dây căng thẳng, tức là với 3 "đường trắc địa"
B
A
Anselme tạo ra 1 TAM GIÁC


Anh ta đặt cây thước đo độ vào từng đỉnh của TAM GIÁC để đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, ...
... rồi cộng chúng lại với nhau
Theo định lý nổi tiếng của tập đoàn Euclide, tổng này sẽ có giá trị bằng 180°
À há ...
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ ευκλιδε

Thế giới Anselme đang sống hết sức mập mờ đến nỗi người ta có thể hỉ nhầm sang mũi người khác.

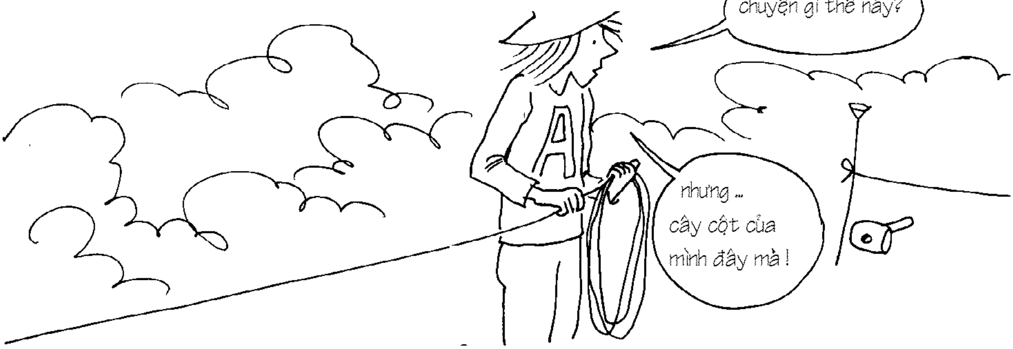


Anselme đi mãi, ...

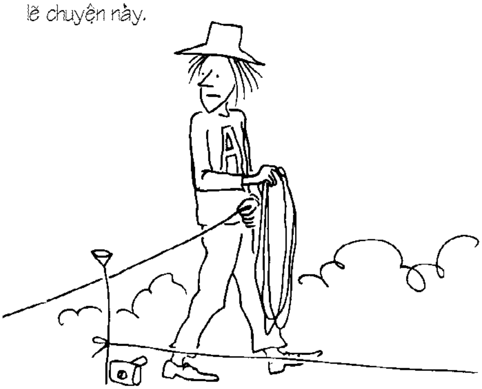
... đi mãi,

Sau lưng anh sợi dây cứ trải dài, thẳng tắp. Anh đi mà không cần biết chân đưa mình đến đâu : miễn là anh tạo ra được một "đường trắc địa" thật hoàn hảo.

Thế nhưng, không biết bạn có để ý không, có những ngày mà mọi chuyện trở nên đảo lộn.

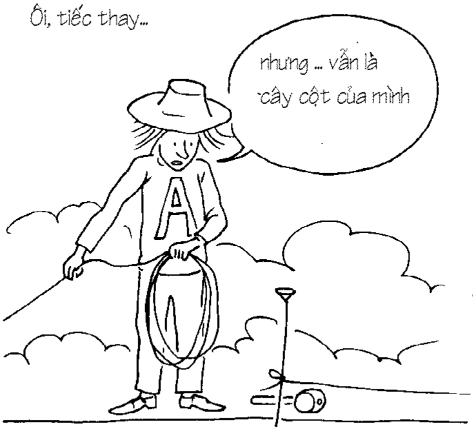


Sợi dây vẫn còn đó, Anselme quyết định làm cho ra lẽ chuyện này.



vì thế, anh ta vẫn tiếp tục căng dây, tiến THẲNG VỀ TRƯỚC và lòng đầy thắc mắc.

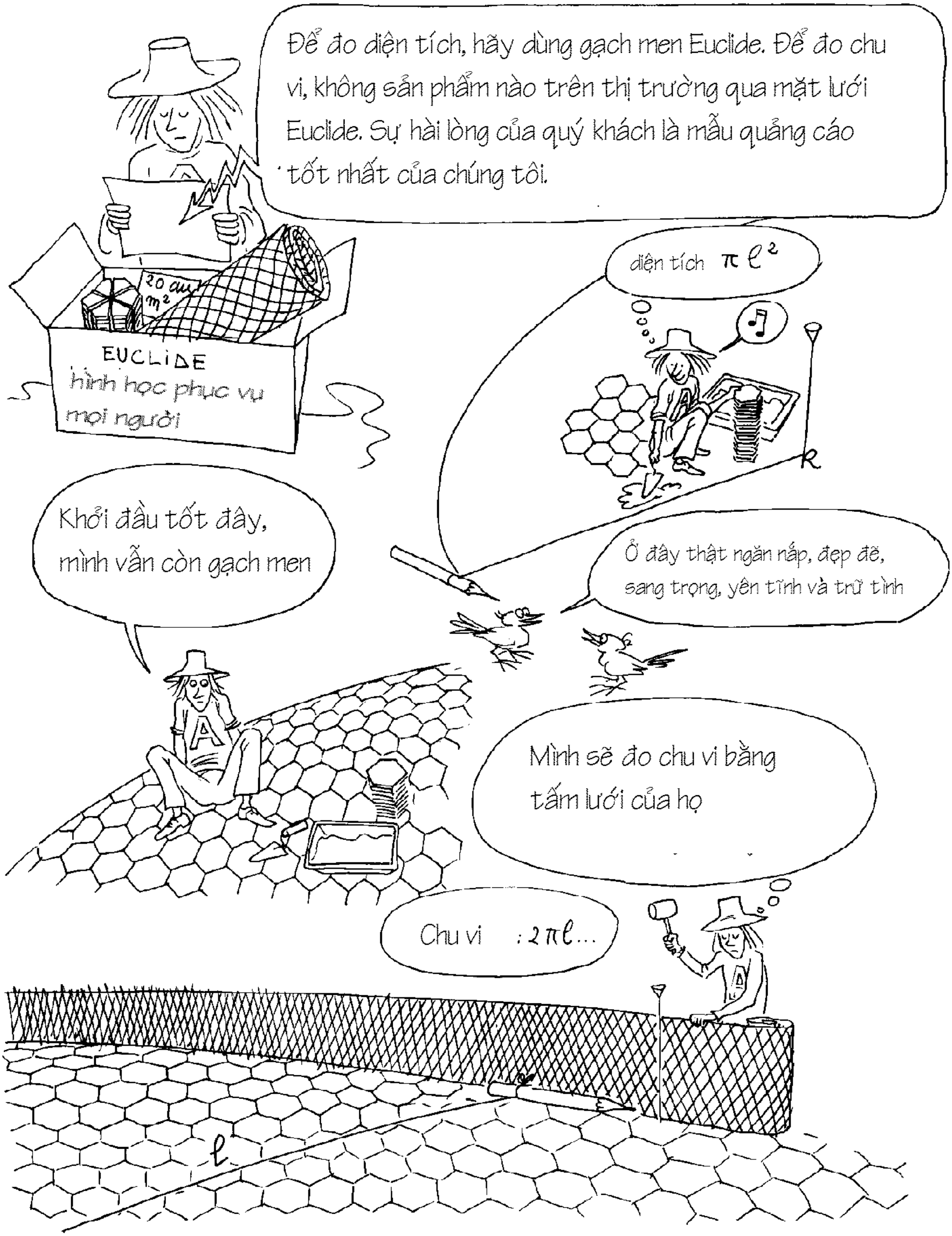
Ôi, tiếc thay...



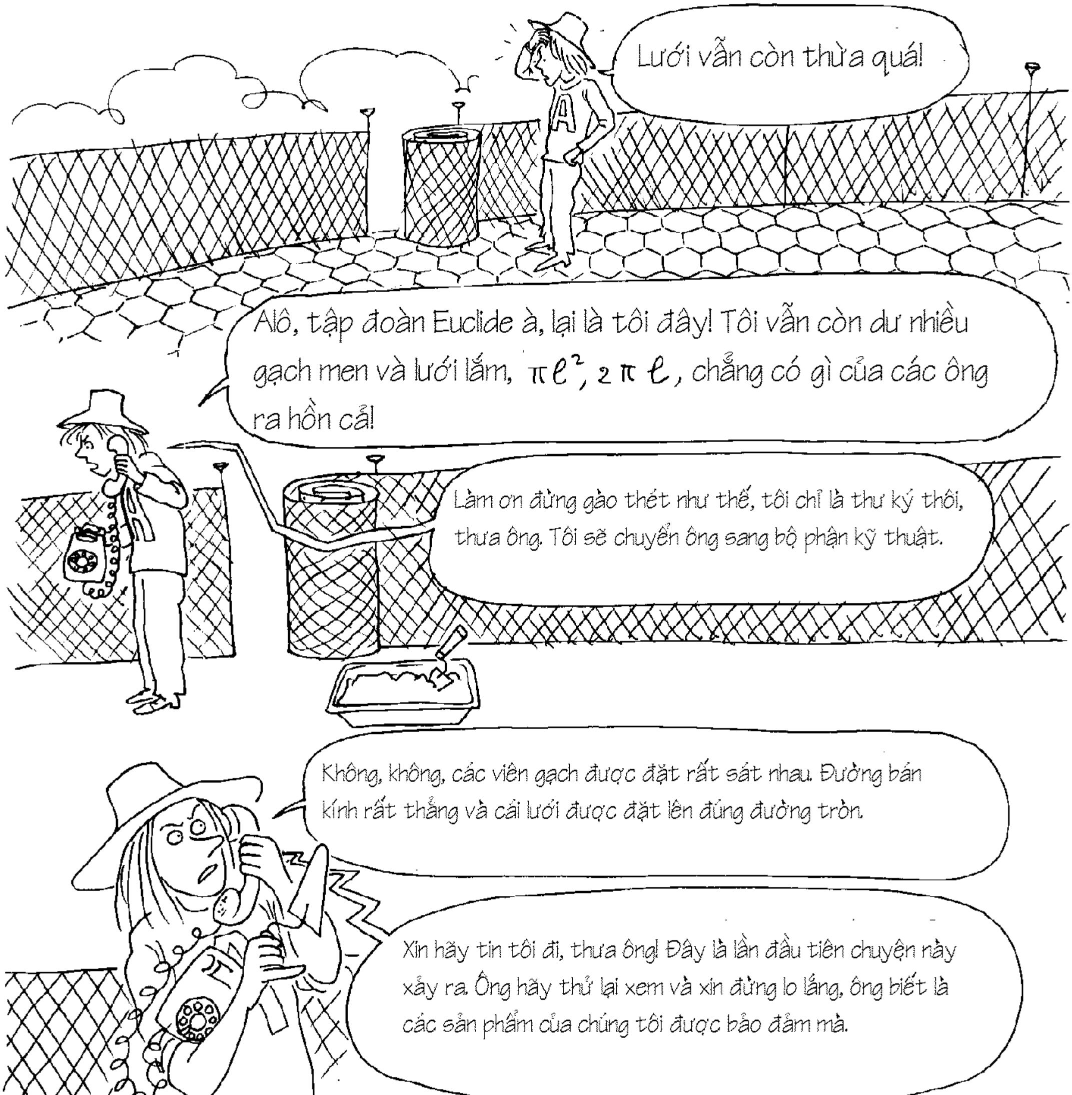
ĐƯỜNG THẲNG của Anselme hóa ra lại khép kín !

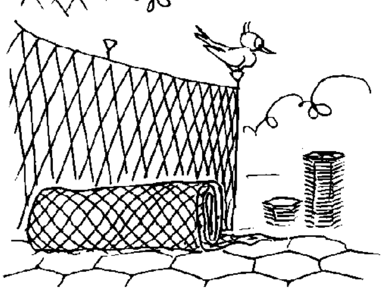

? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Hãy thử xem định lý của nhà Euclide nào! Tôi sẽ kéo 3 "đường trắc địa" có chiều dài bằng nhau để tạo thành TAM GIÁC với 3 góc phải đều có số đo là 60°; tổng của chúng phải là 180°. Tờ hướng dẫn đã ghi vậy!
B
60
60
60
A
C
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$
RATIO OMNIA VINCIT
sau đó, ta sẽ xem sao
A
B
A
Đây rồi, đỉnh thứ 2, đỉnh B, chỉ cần căng thêm 2 sợi dây là biết đỉnh thứ 3
Ôi, khoa học thật tuyệt diệu
B
Ôi, chuyện gì thế này? Các góc đúng là bằng nhau, nhưng chúng lại lớn hơn 60°.
Tổng của chúng chắc hẳn phải lớn hơn 180°
Có vấn đề gì sao ?
C
A
EUCLIDE
hình học Euclide
EUCLIDE

Hừm, rõ ràng mình đã đặt thước sát đất và kiểm tra các sợi dây sao cho thật thẳng.
EUCLIDE
Alô, tập đoàn Euclide phải không? Tôi gặp chút phiền toái với dụng cụ của quý vị đây!
Anh vui lòng đợi tí, tôi sẽ chuyển cho bộ phận kỹ thuật !
Sao cơ, phiền toái với các tam giác à ?
Lạ thật ! À, sao ông không thử mấy cái đường tròn của chúng tôi, khách hàng của chúng tôi đang rất hài lòng đấy!
... đường tròn là một tập hợp các điểm cách đều một điểm cố định một khoảng cách !
Ông nói gì ạ, chu vi $2\pi\ell$, diện tích $\pi\ell^2$, vâng tôi ghi lại rồi.
ℓ
hân hạnh phục vụ quý khách

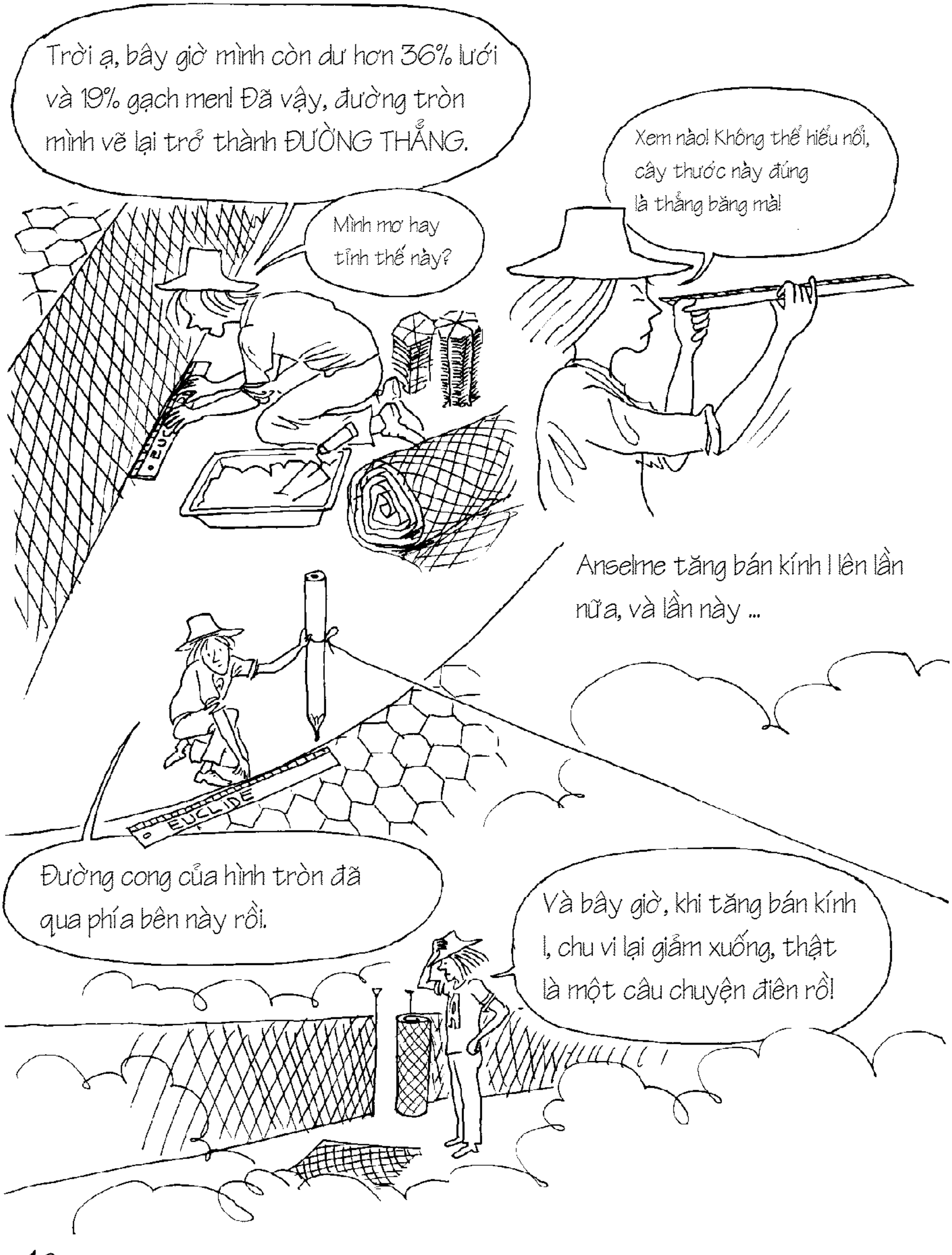


Để đo diện tích, hãy dùng gạch men Euclide. Để đo chu vi, không sản phẩm nào trên thị trường qua mặt lưới Euclide. Sự hài lòng của quý khách là mẫu quảng cáo tốt nhất của chúng tôi.
EUCLIDE
hình học phục vụ mọi người
diện tích $\pi \ell^2$
Khởi đầu tốt đây, mình vẫn còn gạch men
Ở đây thật ngăn nắp, đẹp đẽ, sang trọng, yên tĩnh và trữ tình
Mình sẽ đo chu vi bằng tấm lưới của họ
Chu vi : $2\pi\ell$...

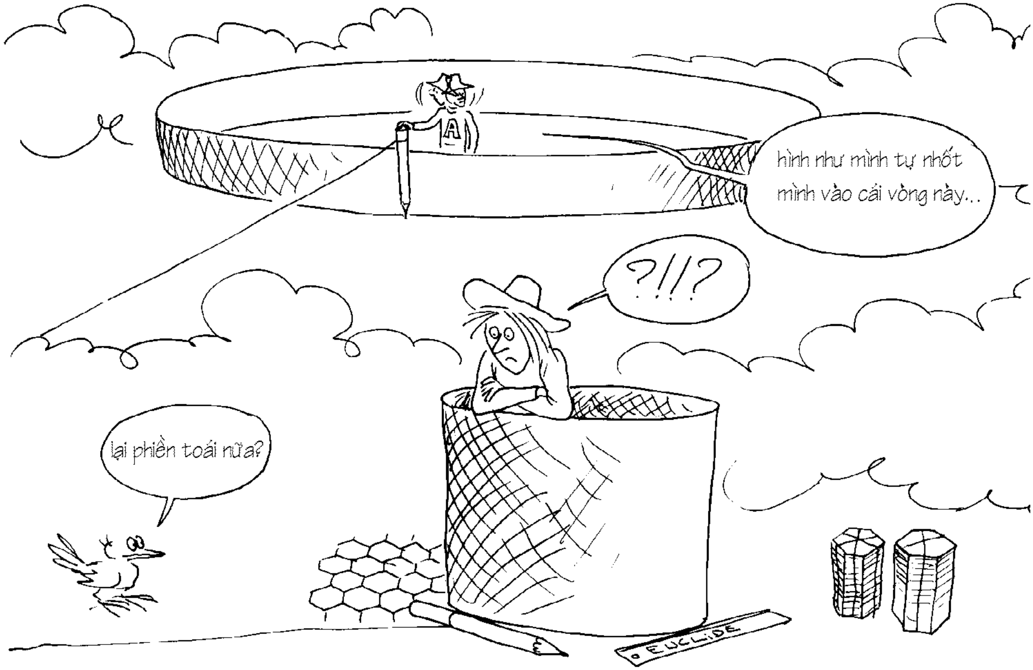




Anselme tiếp tục cuộc khám phá của mình, anh tăng dần bán kính l của đường tròn. Nhưng ... càng ngày càng dư nhiều gạch men và lưới.


Trời ạ, bây giờ mình còn dư hơn 36% lưới và 19% gạch men! Đã vậy, đường tròn mình vẽ lại trở thành ĐƯỜNG THẲNG.
Xem nào! Không thể hiểu nổi, cây thước này đúng là thẳng băng mà!
Mình mơ hay tỉnh thế này?
EUCLIDE
Anselme tăng bán kính l lên lần nữa, và lần này ...
EUCLIDE
Đường cong của hình tròn đã qua phía bên này rồi.
Và bây giờ, khi tăng bán kính l, chu vi lại giảm xuống, thật là một câu chuyện điên rồ!

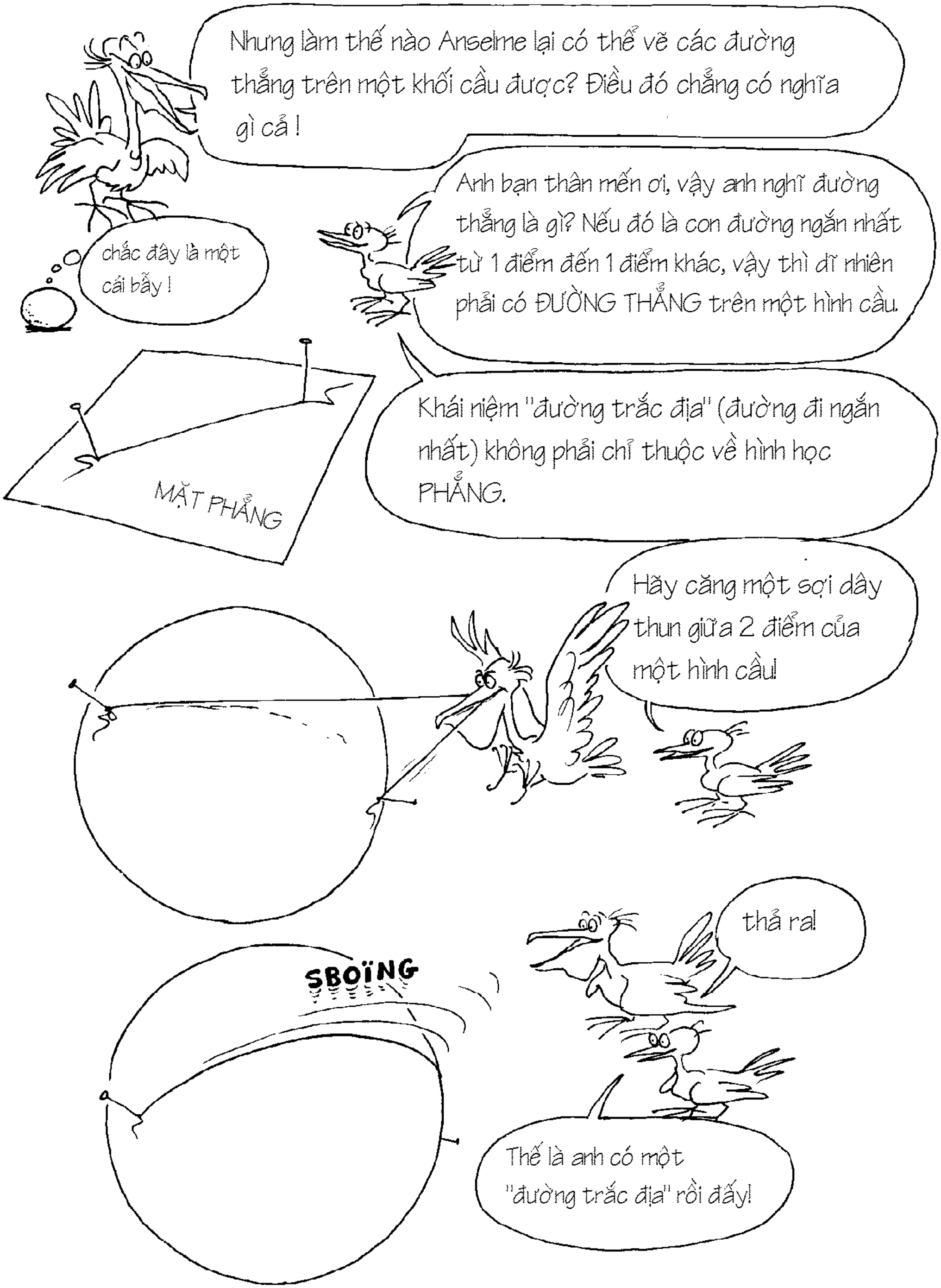
Sau một lần lát gạch cuối cùng:

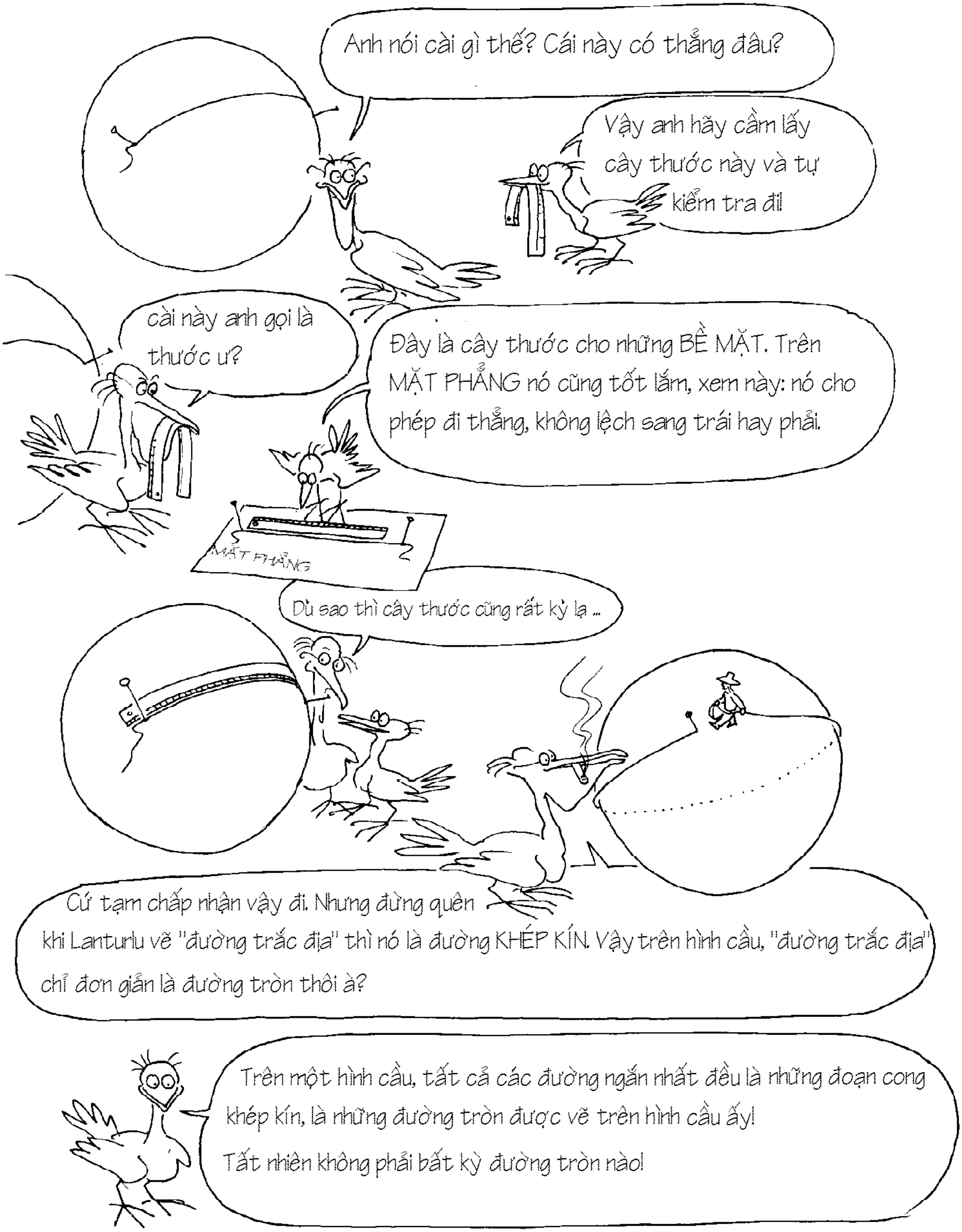


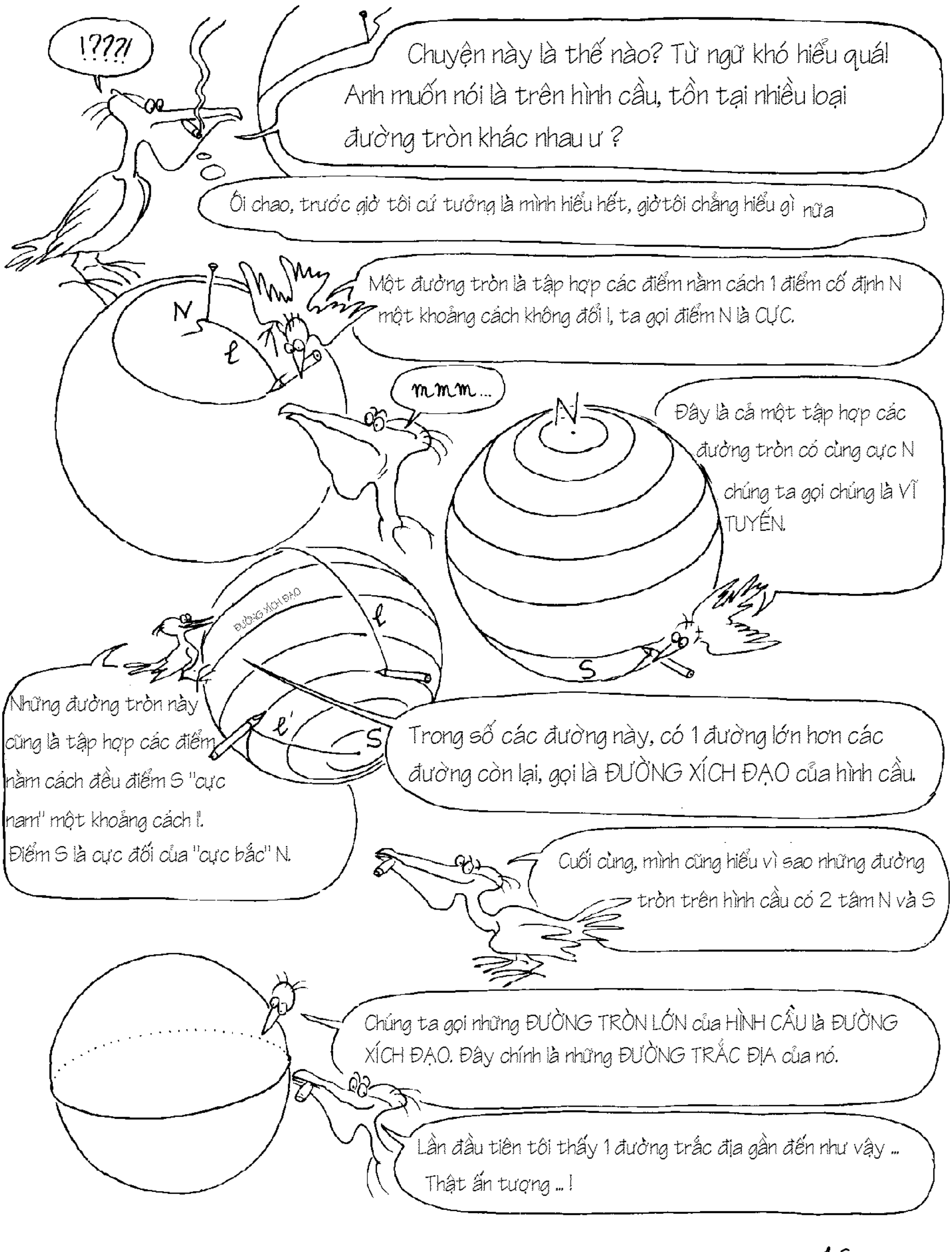
ĐIỀU GÌ ĐÃ XẢY RA ?

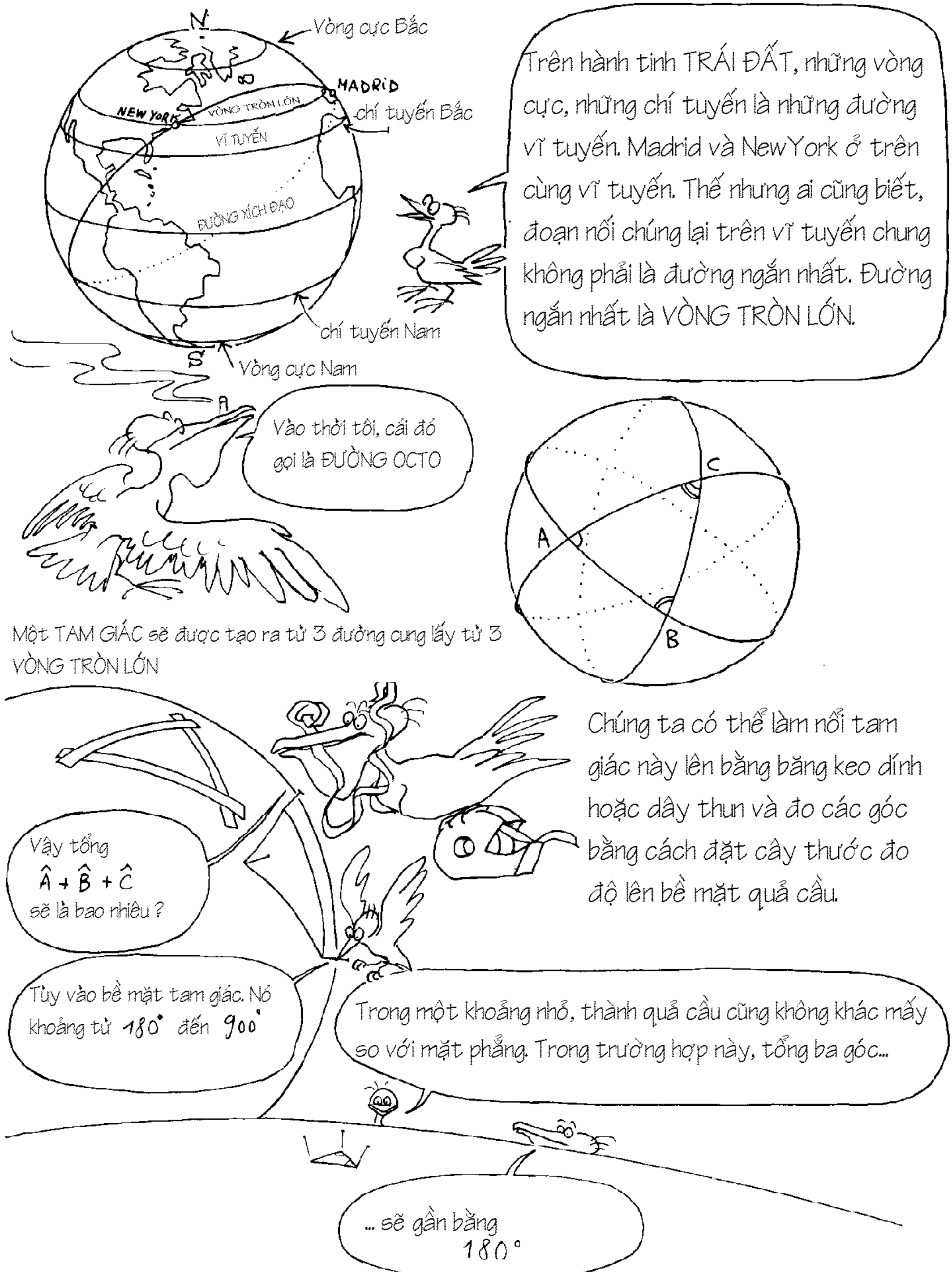
Để biết được, hãy phá tan những đám mây mù bao quanh

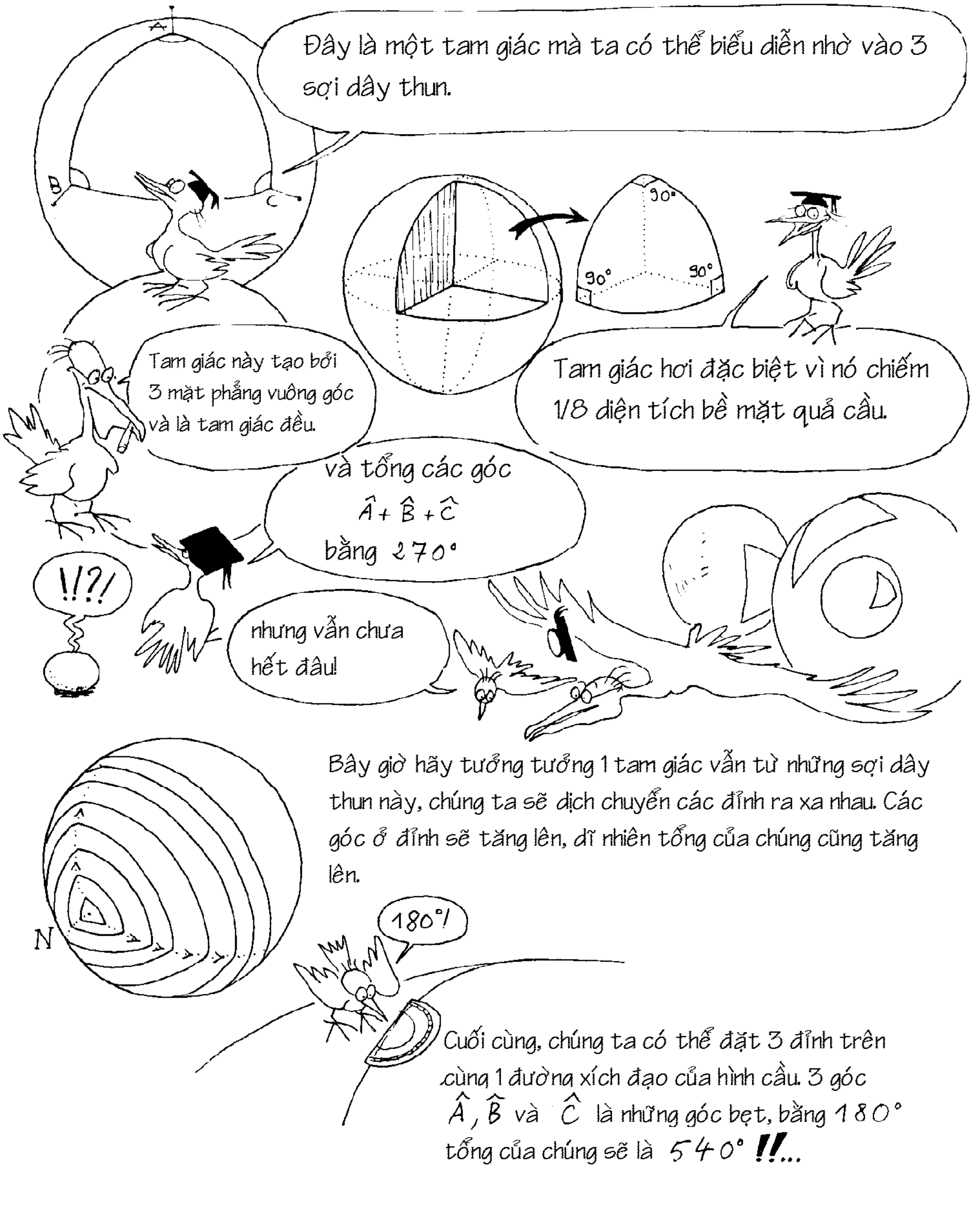
Anselme chợt hiểu rằng anh ta đang đứng trên một quả cầu mà anh ta đang áp dụng nhưng quy tắc của HÌNH HỌC PHẲNG.


Nhưng làm thế nào Anselme lại có thể vẽ các đường thẳng trên một khối cầu được? Điều đó chẳng có nghĩa gì cả !
chắc đây là một cái bẫy !
Anh bạn thân mến ơi, vậy anh nghĩ đường thẳng là gì? Nếu đó là con đường ngắn nhất từ 1 điểm đến 1 điểm khác, vậy thì dĩ nhiên phải có ĐƯỜNG THẲNG trên một hình cầu.
MẶT PHẲNG
Khái niệm "đường trắc địa" (đường đi ngắn nhất) không phải chỉ thuộc về hình học PHẲNG.
Hãy căng một sợi dây thun giữa 2 điểm của một hình cầu!
SBOÏNG
thả ra!
Thế là anh có một "đường trắc địa" rồi đấy!

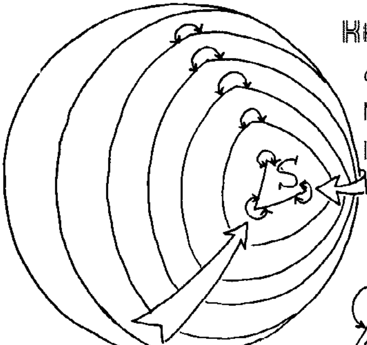

Anh nói cài gì thế? Cái này có thẳng đâu?
Vậy anh hãy cầm lấy cây thước này và tự kiểm tra đi!
cài này anh gọi là thước ư?
Đây là cây thước cho những BỀ MẶT. Trên MẶT PHẲNG nó cũng tốt lắm, xem này: nó cho phép đi thẳng, không lệch sang trái hay phải.
MẶT PHẲNG
Dù sao thì cây thước cũng rất kỳ lạ ...
Cứ tạm chấp nhận vậy đi. Nhưng đừng quên khi Lanturlu vẽ "đường trắc địa" thì nó là đường KHÉP KÍN. Vậy trên hình cầu, "đường trắc địa" chỉ đơn giản là đường tròn thôi à?
Trên một hình cầu, tất cả các đường ngắn nhất đều là những đoạn cong khép kín, là những đường tròn được vẽ trên hình cầu ấy!
Tất nhiên không phải bất kỳ đường tròn nào!


!???!
Chuyện này là thế nào? Từ ngữ khó hiểu quá! Anh muốn nói là trên hình cầu, tồn tại nhiều loại đường tròn khác nhau ư ?
Ôi chao, trước giờ tôi cứ tưởng là mình hiểu hết, giờ tôi chẳng hiểu gì nữa
Một đường tròn là tập hợp các điểm nằm cách 1 điểm cố định N một khoảng cách không đổi l, ta gọi điểm N là CỰC.
N
l
mmm...
Đây là cả một tập hợp các đường tròn có cùng cực N chúng ta gọi chúng là VĨ TUYẾN.
N
S
ĐƯỜNG XÍCH ĐẠO
l
l'
S
Những đường tròn này cũng là tập hợp các điểm nằm cách đều điểm S "cực nam" một khoảng cách l. Điểm S là cực đối của "cực bắc" N.
Trong số các đường này, có 1 đường lớn hơn các đường còn lại, gọi là ĐƯỜNG XÍCH ĐẠO của hình cầu.
Cuối cùng, mình cũng hiểu vì sao những đường tròn trên hình cầu có 2 tâm N và S
Chúng ta gọi những ĐƯỜNG TRÒN LỚN của HÌNH CẦU là ĐƯỜNG XÍCH ĐẠO. Đây chính là những ĐƯỜNG TRẮC ĐỊA của nó.
Lần đầu tiên tôi thấy 1 đường trắc địa gần đến như vậy ... Thật ấn tượng ... !


N
Vòng cực Bắc
MADRID
NEW YORK
VÒNG TRÒN LỚN
chí tuyến Bắc
VĨ TUYẾN
ĐƯỜNG XÍCH ĐẠO
chí tuyến Nam
S
Vòng cực Nam
Trên hành tinh TRÁI ĐẤT, những vòng cực, những chí tuyến là những đường vĩ tuyến. Madrid và NewYork ở trên cùng vĩ tuyến. Thế nhưng ai cũng biết, đoạn nối chúng lại trên vĩ tuyến chung không phải là đường ngắn nhất. Đường ngắn nhất là VÒNG TRÒN LỚN.
Vào thời tôi, cái đó gọi là ĐƯỜNG OCTO
C
A
B
Một TAM GIÁC sẽ được tạo ra từ 3 đường cung lấy từ 3 VÒNG TRÒN LỚN
Chúng ta có thể làm nổi tam giác này lên bằng băng keo dính hoặc dây thun và đo các góc bằng cách đặt cây thước đo độ lên bề mặt quả cầu.
Vậy tổng $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ sẽ là bao nhiêu ?
Tùy vào bề mặt tam giác. Nó khoảng từ 180° đến 900°
Trong một khoảng nhỏ, thành quả cầu cũng không khác mấy so với mặt phẳng. Trong trường hợp này, tổng ba góc...
... sẽ gần bằng 180°

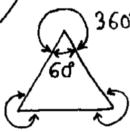


Đây là một tam giác mà ta có thể biểu diễn nhờ vào 3 sợi dây thun.
A
B
C
90°
90°
90°
Tam giác này tạo bởi 3 mặt phẳng vuông góc và là tam giác đều.
Tam giác hơi đặc biệt vì nó chiếm 1/8 diện tích bề mặt quả cầu.
và tổng các góc $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$ bằng 270°
!/?/
nhưng vẫn chưa hết đâu!
Bây giờ hãy tưởng tượng 1 tam giác vẫn từ những sợi dây thun này, chúng ta sẽ dịch chuyển các đỉnh ra xa nhau. Các góc ở đỉnh sẽ tăng lên, dĩ nhiên tổng của chúng cũng tăng lên.
N
180°!
Cuối cùng, chúng ta có thể đặt 3 đỉnh trên cùng 1 đường xích đạo của hình cầu. 3 góc $\hat{A}$, $\hat{B}$ và $\hat{C}$ là những góc bẹt, bằng 180° tổng của chúng sẽ là 540° !!...



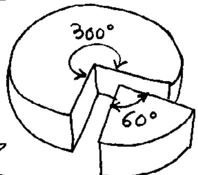
Khi tiếp tục dịch chuyển các đỉnh tam giác sang bên kia bán cầu, chúng sẽ dần tập trung về điểm S, cực đối của điểm N. Nếu chúng ta giữ nguyên định nghĩa các góc, mỗi góc sẽ lớn hơn 180°! Nói chính xác hơn, mỗi góc sẽ bằng

$360° - 60° = 300°$



Tổng : $300 \times 3 = 900°$

Mỗi đường tròn có số đo 360°

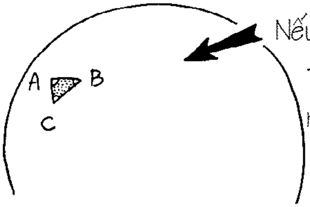


Như vậy, trên khối cầu, tổng các góc 1 tam giác nằm giữa 180° và 900°

Theo định lý Gauss, tổng các góc của 1 tam giác trên 1 khối cầu bằng

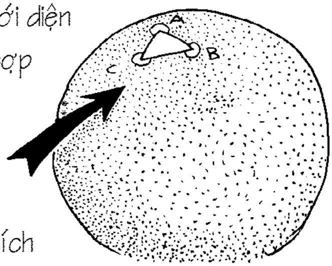
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}1416 R^2}\right)^{\circ}$$

Trong đó R là bán kính khối cầu, A là diện tích tam giác.

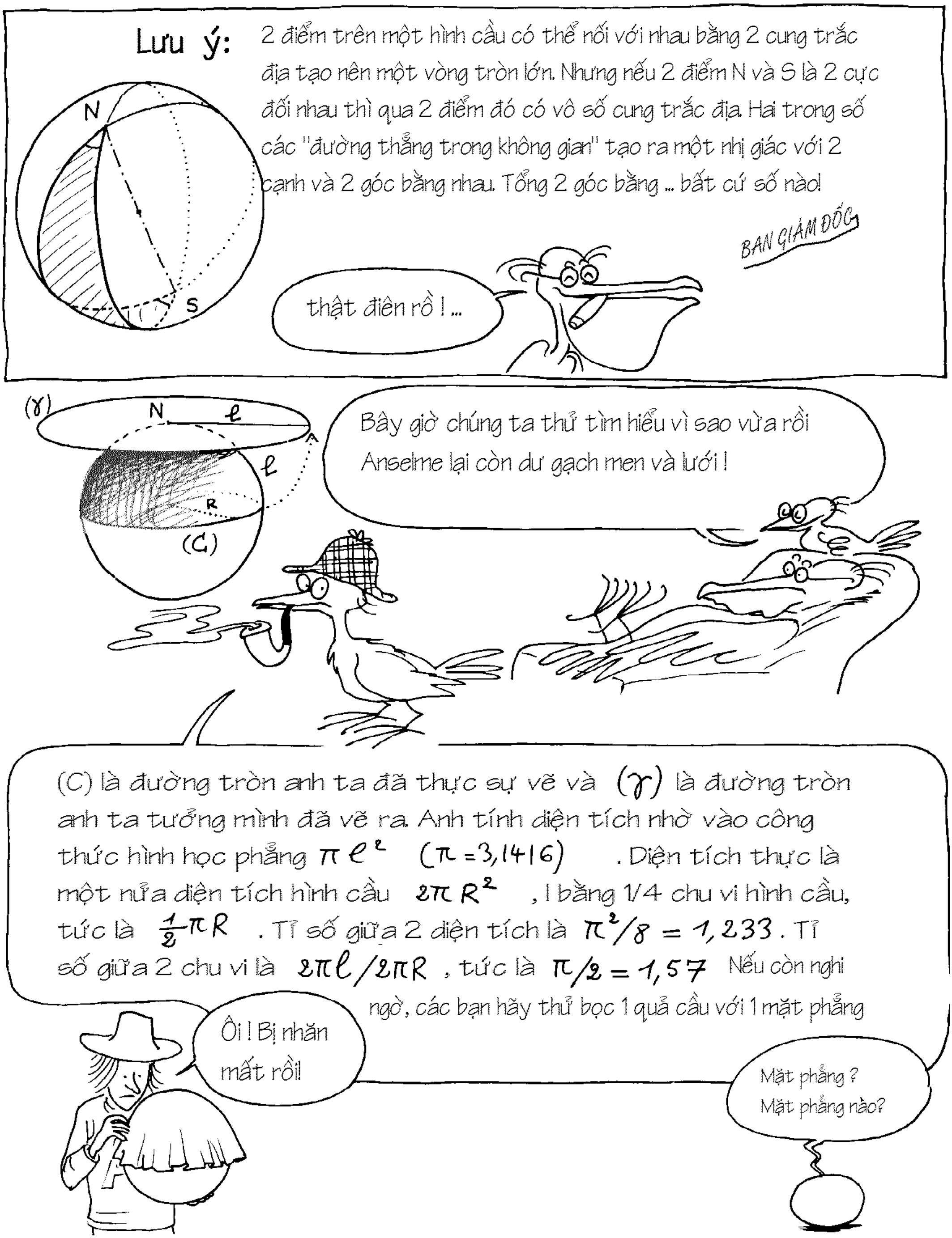


Nếu diện tích tam giác nhỏ so với diện tích khối cầu, ta có trường hợp mà định lý Euclide đúng:

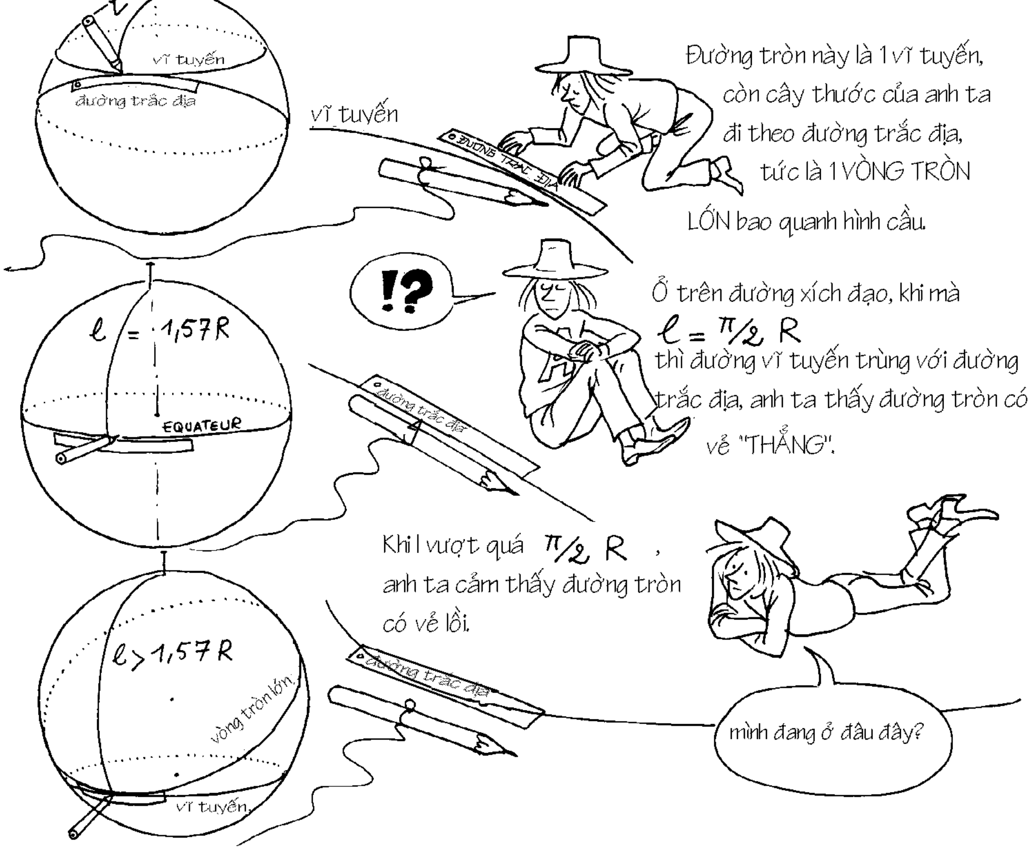
$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°)$



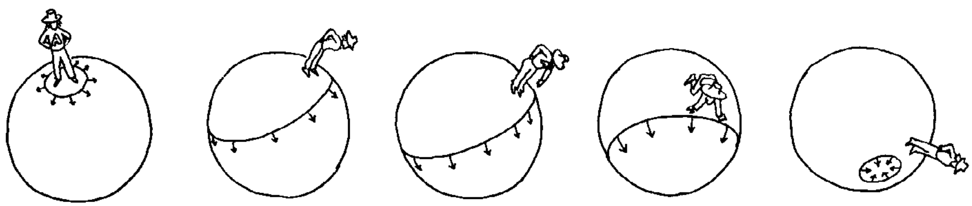
Trường hợp ngược lại, tam giác có diện tích gần bằng diện tích hình cầu $(4 \times 3{,}1416 \times R^2)$, tổng ba góc gần bằng 900°

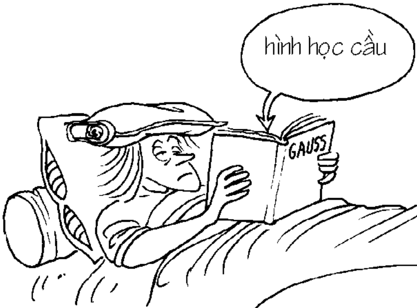

Lưu ý:
2 điểm trên một hình cầu có thể nối với nhau bằng 2 cung trắc địa tạo nên một vòng tròn lớn. Nhưng nếu 2 điểm N và S là 2 cực đối nhau thì qua 2 điểm đó có vô số cung trắc địa. Hai trong số các "đường thẳng trong không gian" tạo ra một nhị giác với 2 cạnh và 2 góc bằng nhau. Tổng 2 góc bằng ... bất cứ số nào!
N
S
BAN GIÁM ĐỐC
thật điên rồ ! ...
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Bây giờ chúng ta thử tìm hiểu vì sao vừa rồi Anselme lại còn dư gạch men và lưới !
(C) là đường tròn anh ta đã thực sự vẽ và (γ) là đường tròn anh ta tưởng mình đã vẽ ra. Anh tính diện tích nhờ vào công thức hình học phẳng $\pi \ell^2$ $(\pi = 3,1416)$. Diện tích thực là một nửa diện tích hình cầu $2\pi R^2$, l bằng 1/4 chu vi hình cầu, tức là $\frac{1}{2}\pi R$. Tỉ số giữa 2 diện tích là $\pi^2/8 = 1,233$. Tỉ số giữa 2 chu vi là $2\pi\ell/2\pi R$, tức là $\pi/2 = 1,57$ Nếu còn nghi ngờ, các bạn hãy thử bọc 1 quả cầu với 1 mặt phẳng
Ôi ! Bị nhăn mất rồi!
Mặt phẳng ? Mặt phẳng nào?

Chừng nào Lanturlu chưa đến xích đạo thì với anh ta, ĐỘ LÕM của đường tròn mà anh ta vẽ ra có vẻ là bình thường.

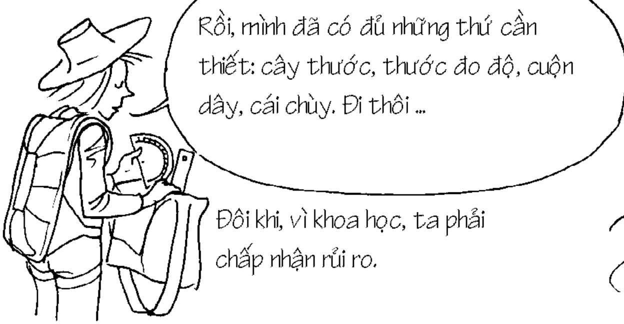


Tính chất này lý giải làm sao chúng ta có thể "vào" hoặc "ra" khỏi đường tròn mà không cần bước qua nó khi nó nằm trên một hình cầu. Cần phải tưởng tượng vòng tròn này như một chiếc nhẫn đàn hồi trượt trên một quả banh bi-da.





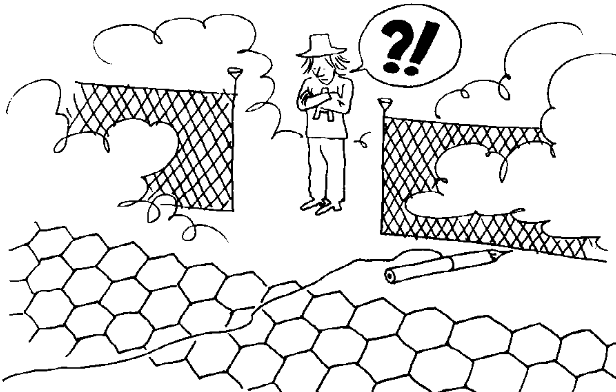
Anselme tốn rất nhiều thời gian để tiêu hóa hết những điều khám phá bởi nhà toán học Gauss (1777 - 1855). Anh quyết định đi khám phá các bề mặt.



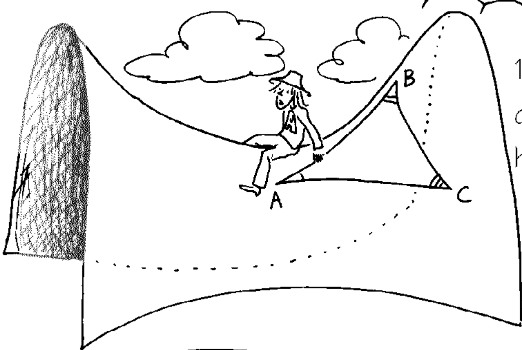
Đặt chân xuống một thế giới mới, Anselme trải sợi dây ra nhằm làm một đường trắc địa, nhưng lần này ...

... đường trắc địa không khép kín nữa!

Với 3 sợi dây căng thật thẳng, Anselme tạo nên một tam giác, nhưng lần này tổng các góc ở đỉnh lại bé hơn 180°

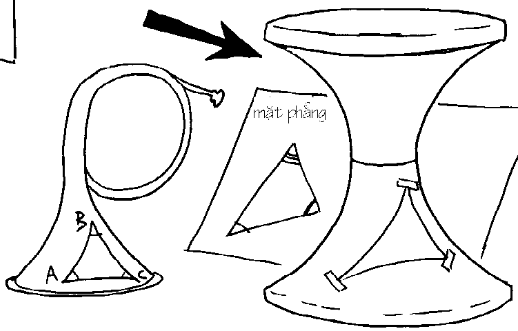


Một đường tròn vẫn là tập hợp các điểm nằm cách 1 điểm cố định khoảng cách l. Lanturlu nhận thấy rằng đường tròn vẽ trên bề mặt mới này có chu vi lớn hơn $2\pi \ell$ và diện tích lớn hơn $\pi \ell^2$.



Hãy phá tan đám mây mù nào:

Bề mặt này có dạng 1 ngọn đèo hoặc 1 cái yên ngựa. Một số vật dụng hằng ngày có hình dạng như vậy: 1 cái tù và của thợ săn hoặc 1 cái ghế đẩu như dưới đây.



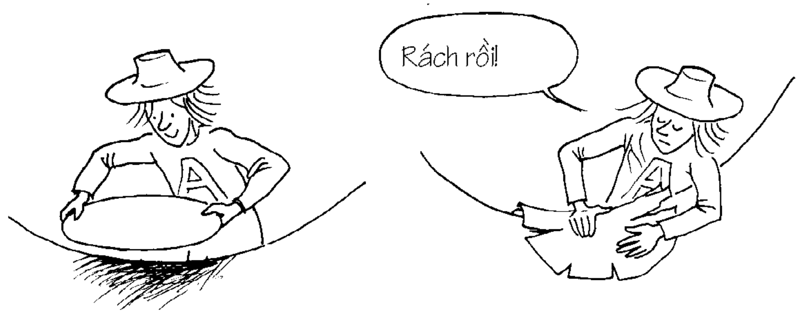
ĐỘ CONG :

Một bề mặt cong là một bề mặt mà chúng ta không thể áp dụng vào đó các định lý Euclide. Độ cong có thể dương hay âm.

Trên một bề mặt có độ cong dương, tổng các góc 1 tam giác lớn hơn $180°$, nếu ta vẽ một đường tròn bán kính l thì diện tích của nó nhỏ hơn $\pi \ell^2$, chu vi của nó cũng nhỏ hơn $2\pi \ell$

Trên bề mặt có độ cong ÂM, tổng các góc 1 tam giác nhỏ hơn $180°$, nếu ta vẽ một đường tròn bán kính l thì diện tích của nó lớn hơn $\pi \ell^2$, chu vi của nó cũng lớn hơn $2\pi \ell$

Vừa rồi, Anselme thử bọc một hình cầu, tức bề mặt có độ cong dương, bằng một vật có bề mặt phẳng, trên mặt phẳng này sẽ xuất hiện những nếp nhăn. Ta cũng không thể dùng một mặt phẳng bọc bề mặt có độ cong âm vì sẽ có những vết rách Việc bao bọc này là phép thử đơn giản nhất để xác định độ cong âm hay dương.



Như đã thấy ở trang trước, một số bề mặt có thể biểu diễn những vùng có độ cong dương, số khác biểu diễn những vùng có độ cong âm.

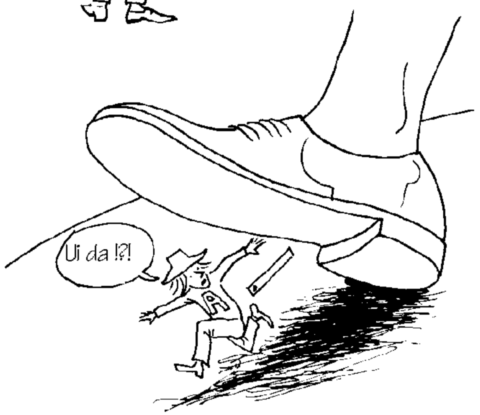

Hãy thử bao bọc xem
Ô hình trụ, hình nón được mặt phẳng bao bọc dễ dàng.
Không phải cuống lên! Mình dán 3 sợi dây thun, tức 3 đường trắc địa, lên hình trụ nhờ vào 3 sợi băng dính ...
B
A
C
... và bây giờ, ta đánh dấu các đường trắc địa lên bề mặt ...
mình đặt hình trụ xuống SÁT ĐẤT.
!...
B
A
C
Theo định nghĩa của chúng ta, các hình trụ và hình nón, tuân theo hình học Euclide, là những BỀ MẶT PHẲNG!!!

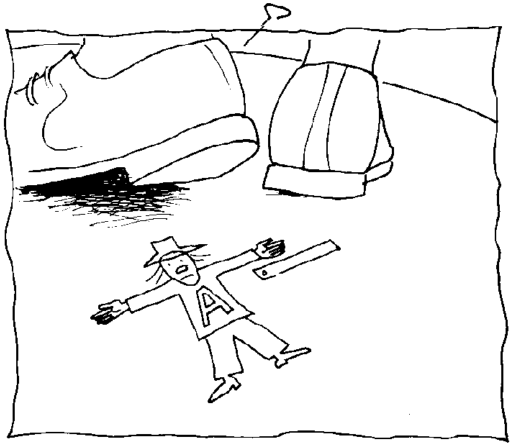
KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN:

Vừa rồi, các đám mây mù đã ngăn Anselme thấy xa hơn đầu mũi anh ta ..., đại loại là vậy. Nếu không, anh ta có thể thấy KHÔNG GIAN HÌNH CẦU của mình CONG như thế nào.

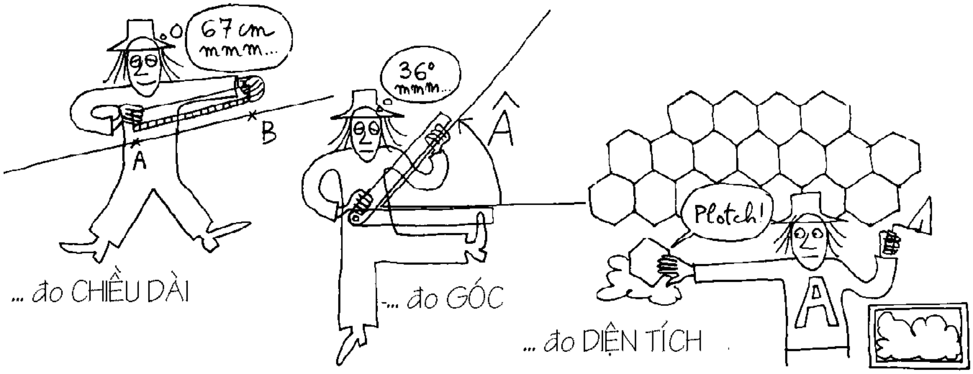
Một cách khác làm cho anh ta không nhận thấy được độ cong

Anh ta phải ở trên bề mặt đó, tức là THUỘC VỀ bề mặt đó.





Ta sẽ thấy rằng tình hình mới này không hề ngăn chúng ta ...



Mặc dù đang ở TRONG bề mặt, đáng lẽ Anselme có thể nhận ra bề mặt cong và xác xem độ cong dương hay âm, thâm chí đo độ cong mà không cần nhìn thấy bằng mắt. Nếu tổng các góc của 1 tam giác là $180°$ thì bề mặt này phẳng. Nếu tổng này lớn hơn $180°$ thì độ cong dương và Anselme có thể tính được bán kính khúc cong (R) tại điểm đó nhờ vào công thức: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}14\,R^2}\right)^\circ$
Với A là diện tích tam giác.

Tương tự, nếu tổng này nhỏ hơn $180°$, ta có thể tính được bán kính khúc cong (R) với công thức: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 - \frac{A}{3{,}14\,R^2}\right)^\circ$

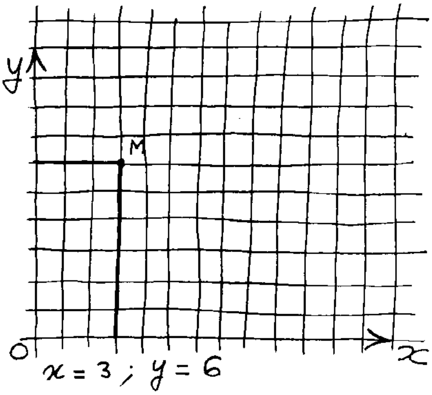
nhưng nó không còn mang ý nghĩa <u>vật lý thông thường.</u>

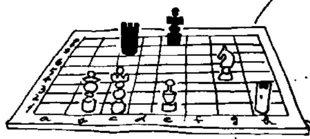
Nên nhớ rằng một mặt phẳng có thể được coi là một bề mặt có bán kính khúc cong vô hạn. Các định lý Euclide lúc đó lại đúng.

KHÁI NIỆM VỀ CHIỀU:

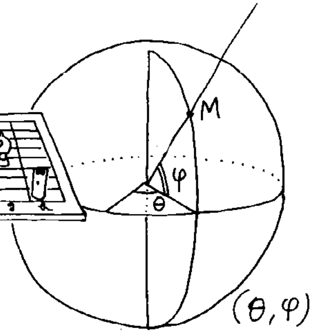
Số chiều đơn giản chỉ là một số lượng các trục tọa độ mà chúng ta cần có để xác định 1 điểm trong không gian. đó.

Những mặt phẳng là những ví dụ cho không gian 2 chiều, các đại lượng dùng để xác định . có thể là chiều dài, số, góc ...



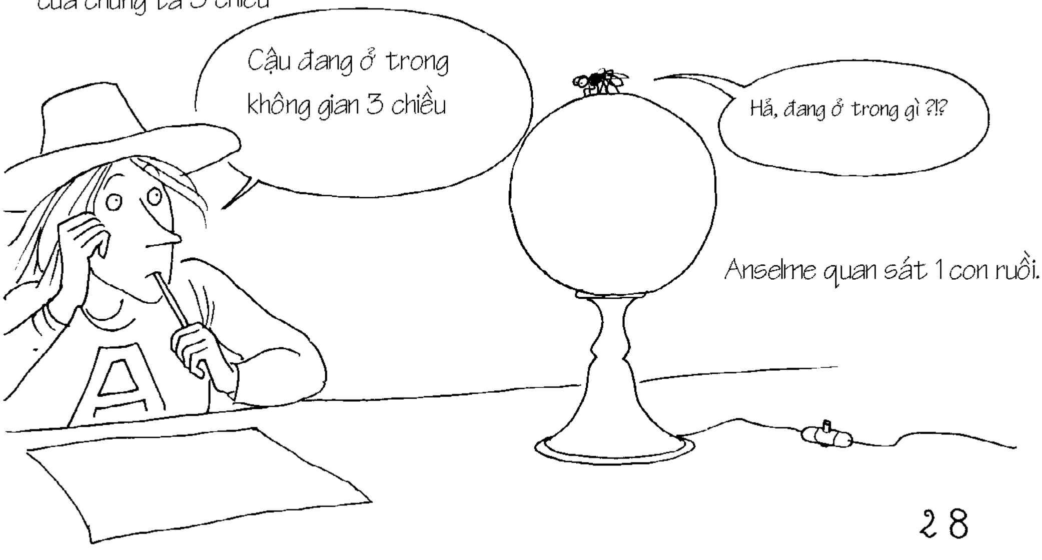


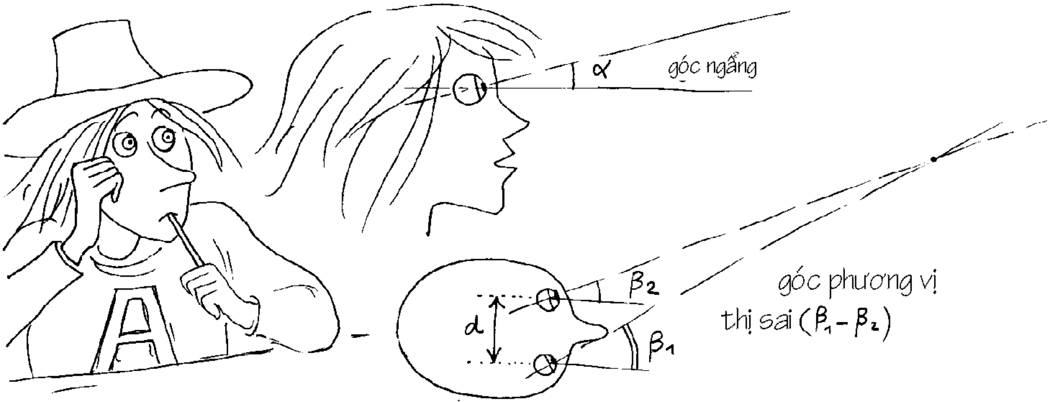
Mã ở ô g4



kinh độ, vĩ độ

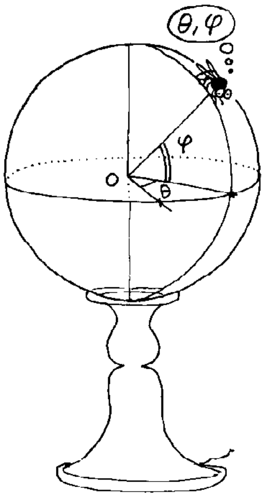
Giả sử không kể thời gian, chúng ta vẫn thường nói là không gian của chúng ta 3 chiều





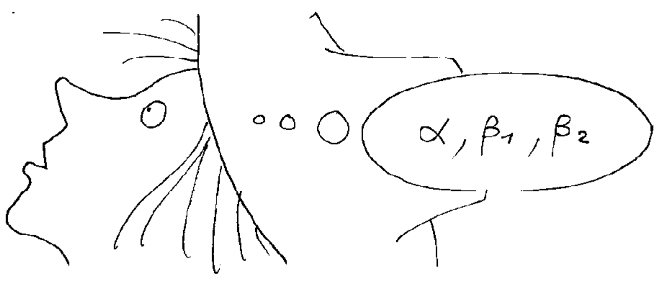
Anselme xác định các vật so với anh ta và hộp sọ của anh ta. Vị trí một vật được xác định bằng các góc: góc ngẩng và các góc lệch so với hai mắt là β_1 và β_2. Hiệu 2 góc này $\beta_1 - \beta_2$ được gọi là thị sai. Trong não Anselme diễn ra quá trình biến đổi thị sai này thành khoảng cách.

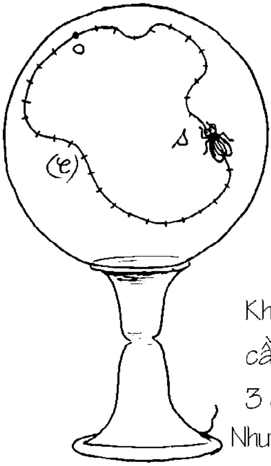
SỰ LỒNG NHAU :



Con ruồi cũng di chuyển trên phần hình cầu của cái đèn, vị trí của nó trên hình cầu - trong không gian 2 chiều - có thể được xác định nhờ vào 2 góc θ và φ (kinh độ và vĩ độ).

Chúng ta nói rằng không gian 2 chiều này nằm trong không gian 3 chiều.



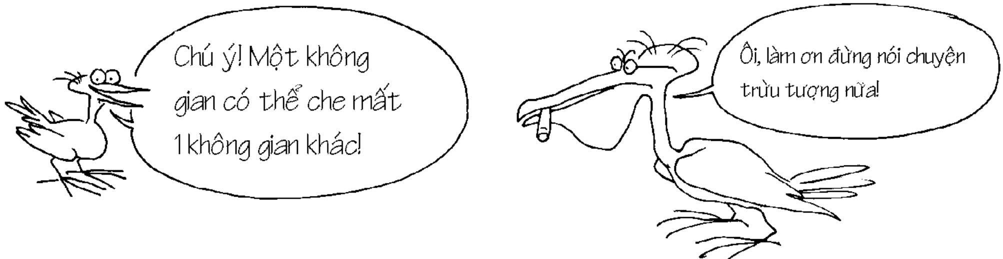


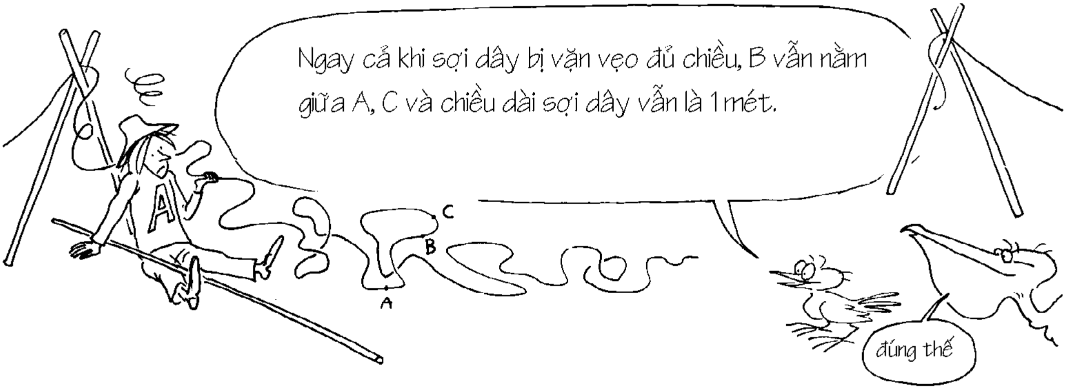
Giả sử con ruồi theo 1 đường cong (C) trên hình cầu. Ta có thể đánh dấu vị trí của nó nhờ vào 1 tọa độ duy nhất (khoảng cách s so với 1 điểm gốc diễn tả bằng số).

Một đường cong là hình ảnh của một không gian 1 chiều.

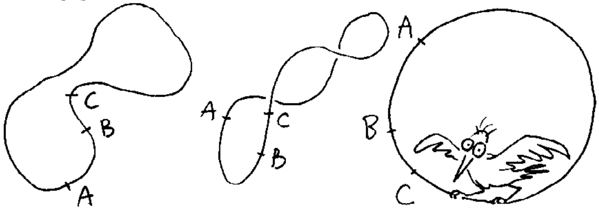
Không gian 1 chiều này nằm trong không gian 2 chiều (hình cầu) và không gian 2 chiều đó cũng nằm trong không gian 3 chiều.

Như vậy, không gian mà chúng ta đang sống có thể nằm trong một không gian nhiều chiều hơn mà chúng ta chưa biết





Điều này có nghĩa rằng nhiều tính chất không liên quan đến việc không gian này nằm trong không gian kia.

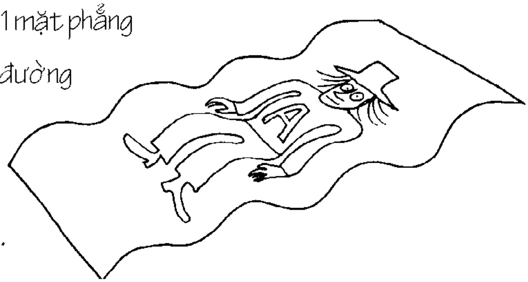


Bên đây là một số cách khác đưa 1 đường CONG KÍN vào TRONG 1 một không gian bình thường. Tính KHÉP KÍN này không phụ thuộc vào sự phụ thuộc của không gian.

Nhưng chúng ta không tìm cách kéo dài hoặc thu ngắn sợi dây để không thay đổi chiều dài giữa các điểm liên tục. Bây giờ chúng ta sẽ đưa các bề mặt vào không gian 3 chiều thông thường.

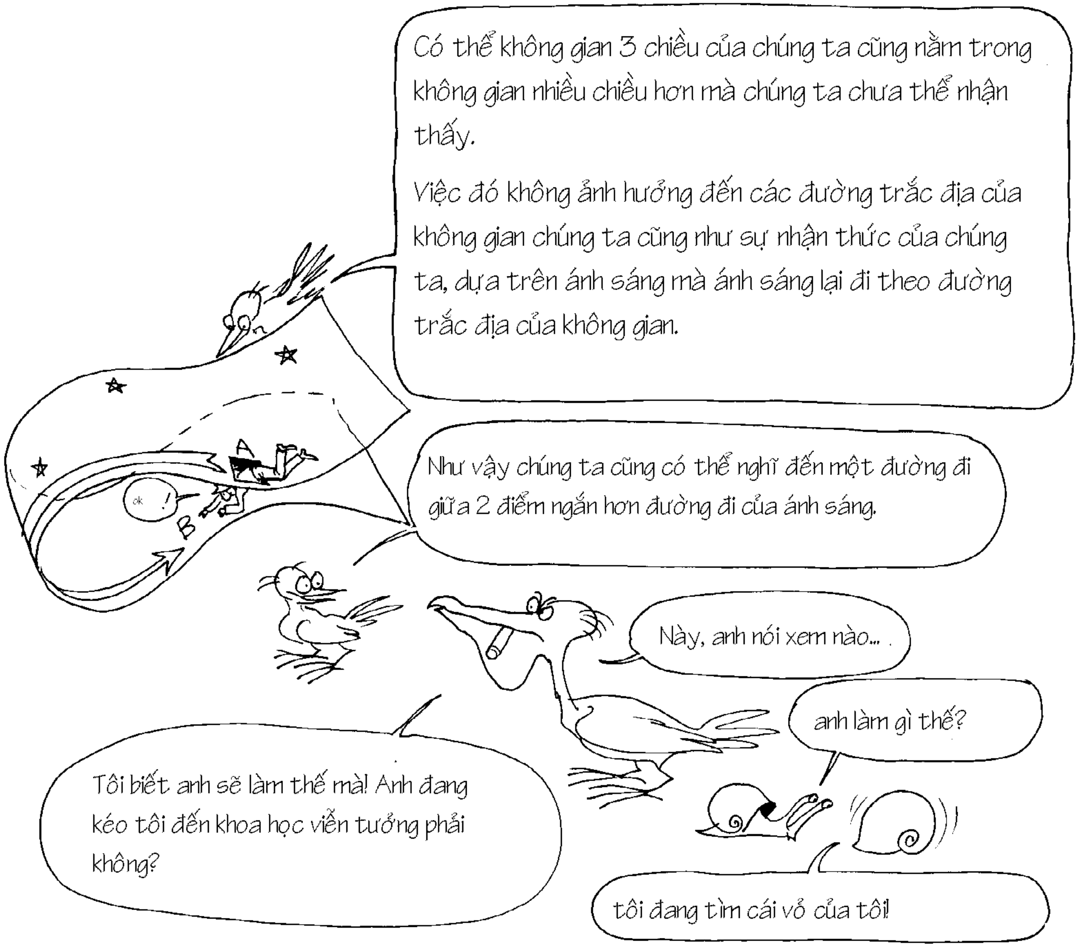
Nếu chúng ta đưa mặt phẳng VÀO không gian 3 chiều thông thường chúng ta có thể di chuyển nó, làm cho nó xoay mà không thay đổi các tính chất hình học của nó.

Chúng ta cũng thấy rằng việc làm biến dạng 1 mặt phẳng theo một hình trụ không làm thay đổi các đường trắc địa và các góc.

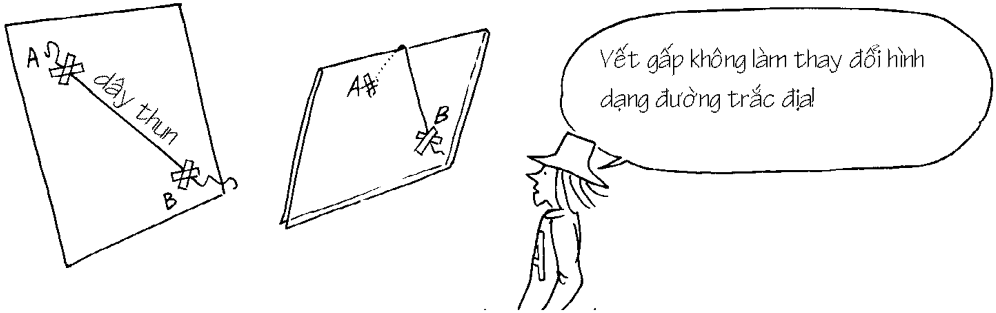


Như vậy, 1 tấm mái tôn hình sóng luôn có những tính chất của hình học PHẲNG EUCLIDE.

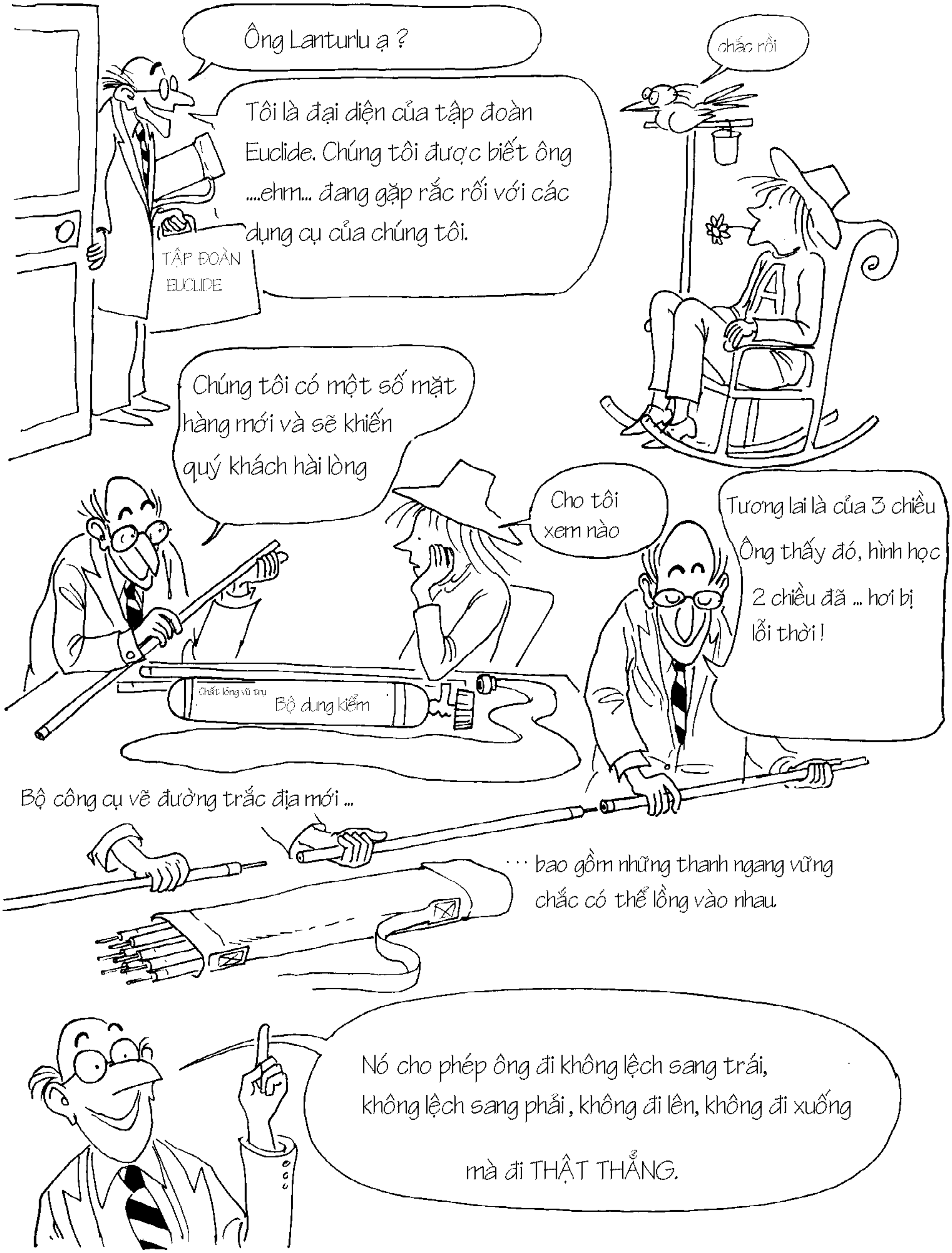
Một người ở trong không gian Euclide 2 chiều không hề biết đến sự tịnh tiến, sự quay hay sự lượn sóng, là những hình thức khác nhau để đưa không gian 2 chiều vào không gian 3 chiều



Lấy 1 phần của mặt phẳng và gấp nó lại:



Trên một tờ giấy, với một cây thước, hãy vẽ hàng loạt đường thẳng rồi vò nát tờ giấy. Bạn sẽ nhìn thấy những đường trắc địa của bề mặt dù có vết nhăn hay không.

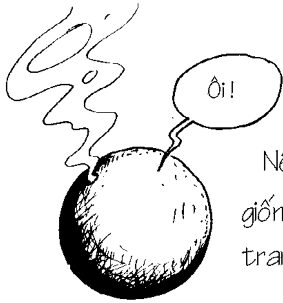

Ông Lanturlu ạ ?
chắc rồi
Tôi là đại diện của tập đoàn Euclide. Chúng tôi được biết ông ....ehm... đang gặp rắc rối với các dụng cụ của chúng tôi.
TẬP ĐOÀN EUCLIDE
Chúng tôi có một số mặt hàng mới và sẽ khiến quý khách hài lòng
Cho tôi xem nào
Tương lai là của 3 chiều Ông thấy đó, hình học 2 chiều đã ... hơi bị lỗi thời !
Chất lỏng vũ trụ
Bộ dung kiếm
Bộ công cụ vẽ đường trắc địa mới ...
... bao gồm những thanh ngang vững chắc có thể lồng vào nhau.
Nó cho phép ông đi không lệch sang trái, không lệch sang phải , không đi lên, không đi xuống mà đi THẬT THẲNG.


Để đo diện tích, hãy dùng sơn này! 100 g cho mỗi mét vuông, cực kỳ chính xác
kỳ diệu
Để đo thể tích, hãy bơm khí vào đầy những thứ này, ông có thể đọc trực tiếp giá trị trên bộ dung kiểm
hãy nhớ là diện tích hình cầu $4\pi \ell^2$, thể tích là $\frac{4}{3}\pi \ell^3$
vâng
Tập đoàn Euclide
nghề đặc biệt thật !
lần này Anselme hạ cánh xuống một không gian 3 chiều và chúng ta sẽ đi theo anh ấy trong hành trình này.


Đồ nghề này đẹp thật! những thanh này dài đúng 1m
nhưng sau khi đặt khá nhiều thanh ngang...
rồi, lại bắt đầu như trước đây!
đường trắc địa của mình lại khép kín !
không gian 3 chiều khép kín chăng ?
thế là tiêu rồi!
Anselme dừng lại lót dạ trên 1 tiểu hành tinh, anh quyết định trở lại phương pháp đo góc.
Như trước đây, mình sẽ dùng 3 ĐƯỜNG TRẮC ĐỊA để tạo nên TAM GIÁC
Tập đoàn Euclide


?!?
Những đường trắc địa của mình được đặt 1 cách thích hợp, thế mà tổng 3 góc vẫn lớn hơn 180° !!..
uhm ...
x...x ...ì ...
mình sẽ làm ra 1 hình cầu và mình sẽ đo thể tích và diện tích của nó
một hình cầu bán kính l là tập hợp những điểm cách đều 1 điểm cố định N một khoảng cách l
diện tích nhỏ hơn $4\pi\ell^2$
Đây này, thể tích nhỏ hơn $\frac{4}{3}\pi\ell^3$!
mình lại bị lừa rồi !!!


Anselme lại tăng bán kính l của hình cầu lên
bộ dung kiểm
x.....ì ...xì
mặt phẳng
lạ thật, hình cầu của mình giờ lại ... phẳng
và cứ thế, cứ thế ...
bây giờ, nó lại phồng lên !
chẳng hiểu gì nữa !
Euclide
tập đoàn
Một lúc sau :
nhưng... thành hình cầu đang khép lại quanh mình!
xì...
EUCLIDE
nhanh lên nào, phải ngắt cái bình này!



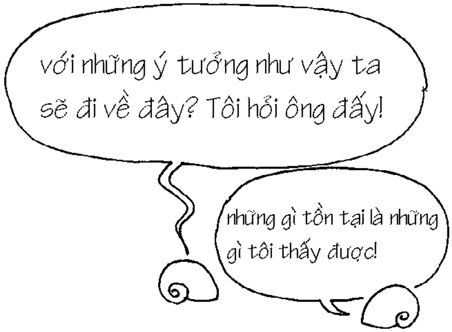
Như vậy, khi thổi 1 quả bóng trong không gian 3 chiều bình thường, Lanturlu không ngờ mình bị nhốt ... TRONG ĐÓ.

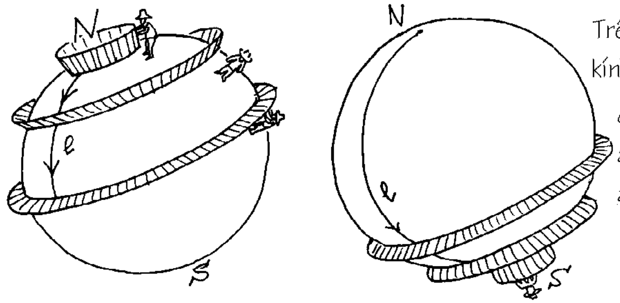
Nếu anh ta không kịp ngắt cái bình, anh ta đã bị đè chết giống như anh ta từng bị nhốt trong cái vòng bằng lưới, ở trang 13.

Ngay cả với quyết tâm lớn nhất trên đời, ta cũng không thể nào THẤY ĐƯỢC bằng mắt thường ĐỘ CONG của không gian 3 chiều này. Các đường trắc địa của không gian này khép kín và thể tích của nó là một số lượng mét khối hữu hạn, cũng như diện tích của hành tinh chúng ta, bề mặt khép kín chỉ là một số lượng mét vuông HỮU HẠN.

Tổng các góc của tam giác trong không gian 3 chiều này lớn hơn 180°. Để "THẤY" được độ cong của nó, ta phải có khả năng thấy được trong không gian 4 chiều.

Chúng ta có thể nói rằng KHÔNG GIAN 3 chiều của chúng ta là một SIÊU PHẲNG đặt trong không gian 4 chiều, cái này cũng có thể là 1 siêu phẳng đặt trong không gian 5 chiều... nhưng vào thời của chúng ta, không nên nói những điều như vậy.

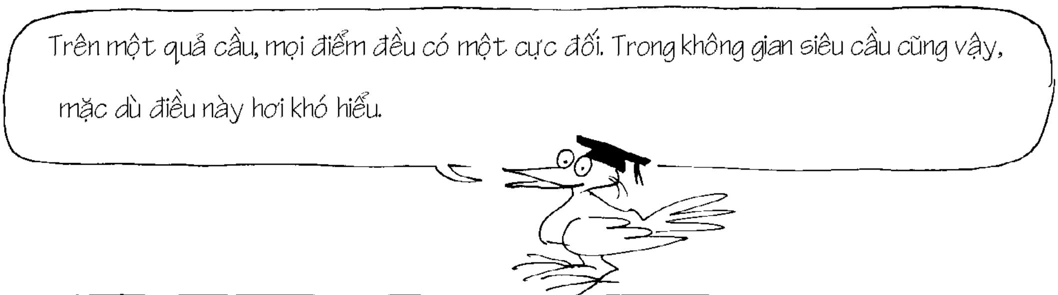




Trên quả cầu của mình, khi tăng bán kính l, Lanturlu cuối cùng lại nằm ở cực đối của điểm N, tâm vòng tròn của anh ta, và bị nghẹt thở bởi chính thứ anh ta tạo ra.

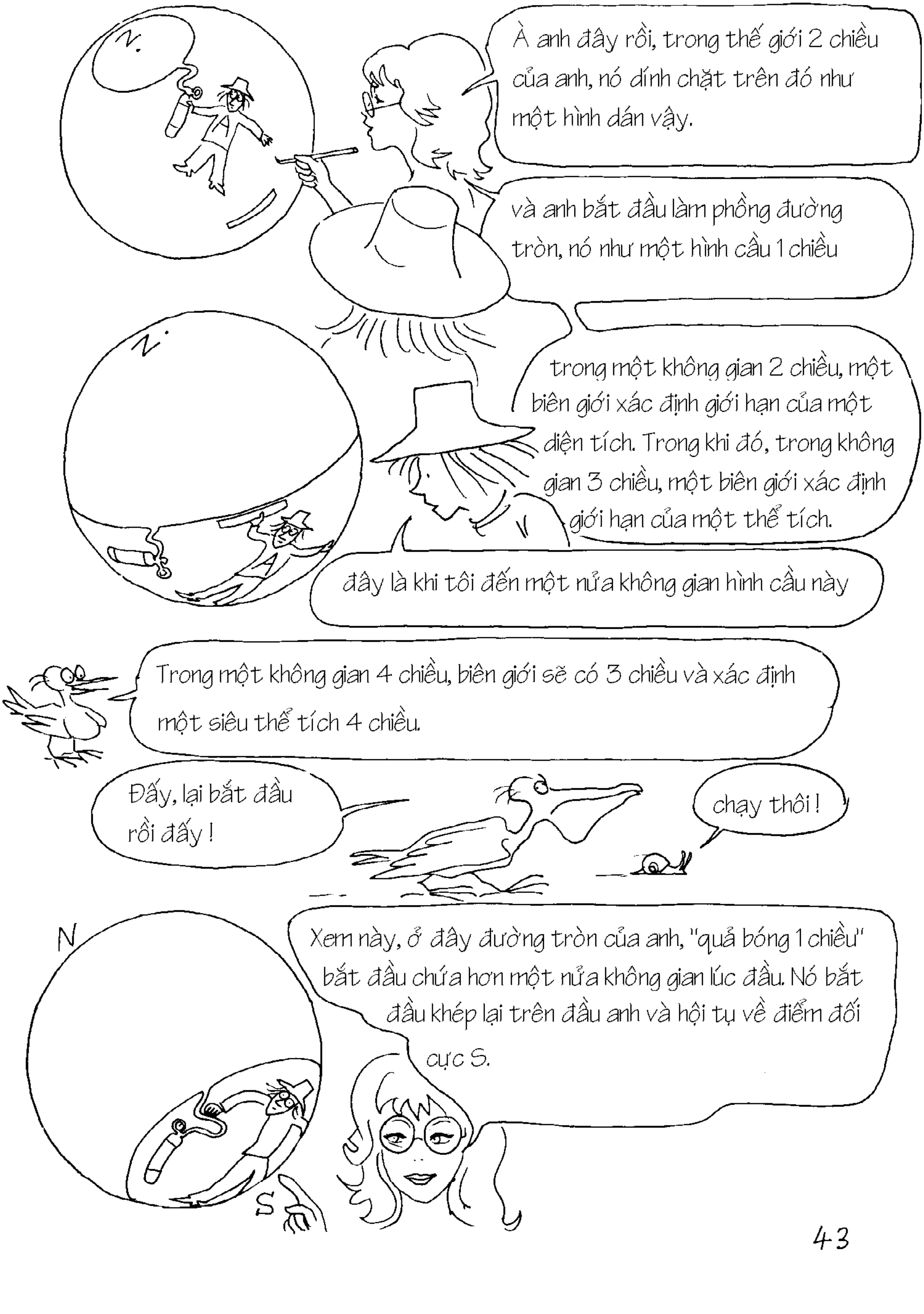
Trong không gian 3 chiều với độ cong dương, điều đó cũng xảy ra. Không gian 2 chiều là hình cầu Anselme gặp XÍCH ĐẠO khi anh ta khép kín được một nửa diện tích không gian. XÍCH ĐẠO của không gian 3 chiều SIÊU CẦU cũng tồn tại. Anselme đến được đó khi quả bóng của anh ta chiếm một nửa thể tích không gian. Trên hình cầu, anh ta thấy vòng tròn xích đạo như một ĐƯỜNG THẲNG. Tương tự như vậy, trong không gian siêu cầu, "quả bóng xích đạo" giống như một MẶT PHẲNG.

Khi đi quá xích đạo, hình cầu sẽ từ lõm trở thành lồi và ĐỘ LỒI sẽ tập trung tại cực S là cực đối của điểm N , tâm quả cầu.




có chuyện gì à?
uhm, thì ... thì mọi thứ hơi lộn xộn trong đầu tôi
Tôi tên Sophie, mọi vấn đề về đường cong do tôi phụ trách.
Khi di chuyển giữa các siêu cầu ban đầu ai cũng bị bất ngờ. Cần phải tránh đừng để bị kẹt. Dần dần người ta cũng quen.
uh...
tôi hơi mất phương hướng...

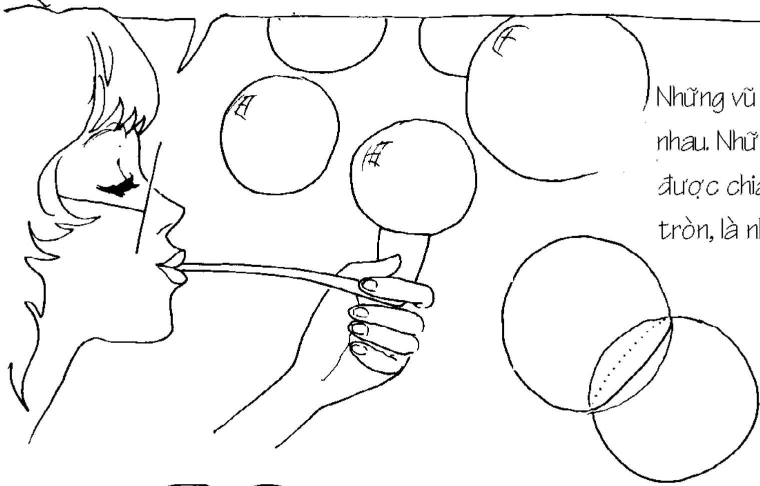

nhưng TÂM của siêu cầu nằm ở đâu ?
Nếu tôi vẽ 1 đường tròn trên một MẶT PHẲNG, điều đó có nghĩa là tôi đang biểu diễn một không gian 1 chiều, khép kín đặt trong không gian 2 chiều: MẶT PHẲNG, anh đồng ý chứ?
và tâm đường tròn KHÔNG nằm trên đường tròn.
uhm ...
một hình cầu biểu diễn không gian khép kín 2 chiều, đặt trong không gian 3 chiều. Tâm của hình cầu cũng KHÔNG nằm trên hình cầu mà nằm trong không gian 3 chiều.
Tâm của một không gian siêu cầu 3 chiều có thể nằm trong không gian 4 chiều nếu ta giả thuyết là không gian 3 chiều nằm trong không gian 4 chiều. Và cứ thế... Như vậy, tâm của một siêu cầu 4 chiều sẽ nằm trong không gian 5 chiều ...



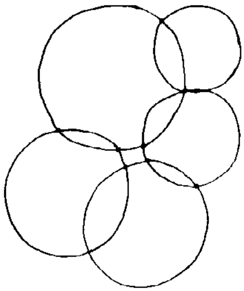
N.
À anh đây rồi, trong thế giới 2 chiều của anh, nó dính chặt trên đó như một hình dán vậy.
và anh bắt đầu làm phồng đường tròn, nó như một hình cầu 1 chiều
N.
trong một không gian 2 chiều, một biên giới xác định giới hạn của một diện tích. Trong khi đó, trong không gian 3 chiều, một biên giới xác định giới hạn của một thể tích.
đây là khi tôi đến một nửa không gian hình cầu này
Trong một không gian 4 chiều, biên giới sẽ có 3 chiều và xác định một siêu thể tích 4 chiều.
Đấy, lại bắt đầu rồi đấy !
chạy thôi !
N
Xem này, ở đây đường tròn của anh, "quả bóng 1 chiều" bắt đầu chứa hơn một nửa không gian lúc đầu. Nó bắt đầu khép lại trên đầu anh và hội tụ về điểm đối cực S.
S


Tương tự như vậy, trong không gian cong 3 chiều của tôi, khi tôi bơm thêm hơn một nửa thể tích, quả bóng cũng khép lại trên đầu tôi, và hội tụ về điểm đối cực.
Tôi hiểu ra rồi !
Đó là vì quả cầu trong không gian cong 3 chiều này, dĩ nhiên là có 2 tâm là 2 cực đối nhau
?!!?
Thật ra tôi không biết chính xác mình đã hiểu gì nhưng tôi biết mình đã hiểu một cái gì đó
Sợ thật!
nhưng Anselme ơi, khi có hơn 3 chiều,
HIỂU ĐƯỢC LÀ DO NGOẠI SUY !
Tôi ngoại suy mà cũng không biết
hình vẽ à, anh sẽ là người vẽ nó ... trong đầu anh ấy.

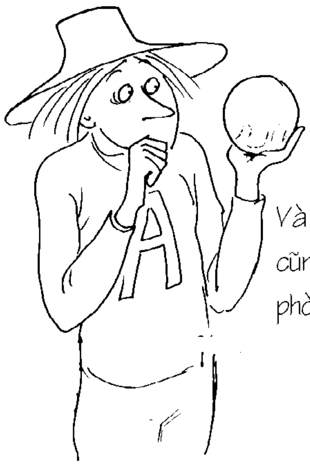
Bây giờ tôi lấy một không gian 3 chiều trong đó tôi đặt những quả cầu 2 chiều, hàng loạt vũ trụ 2 chiều



Những vũ trụ này có thể nhập vào nhau. Những điểm chung của chúng được chia ra theo các đường tròn, là những vật một chiều



Tương tự, những đường tròn, vật một chiều, đặt trên một tờ giấy (hai chiều) cắt nhau tại các điểm. Ta thường nói điểm có 0 chiều.



Một hình cầu có thể được coi như giao điểm của hai "bọt" ba chiều nằm trong không gian 4 chiều.

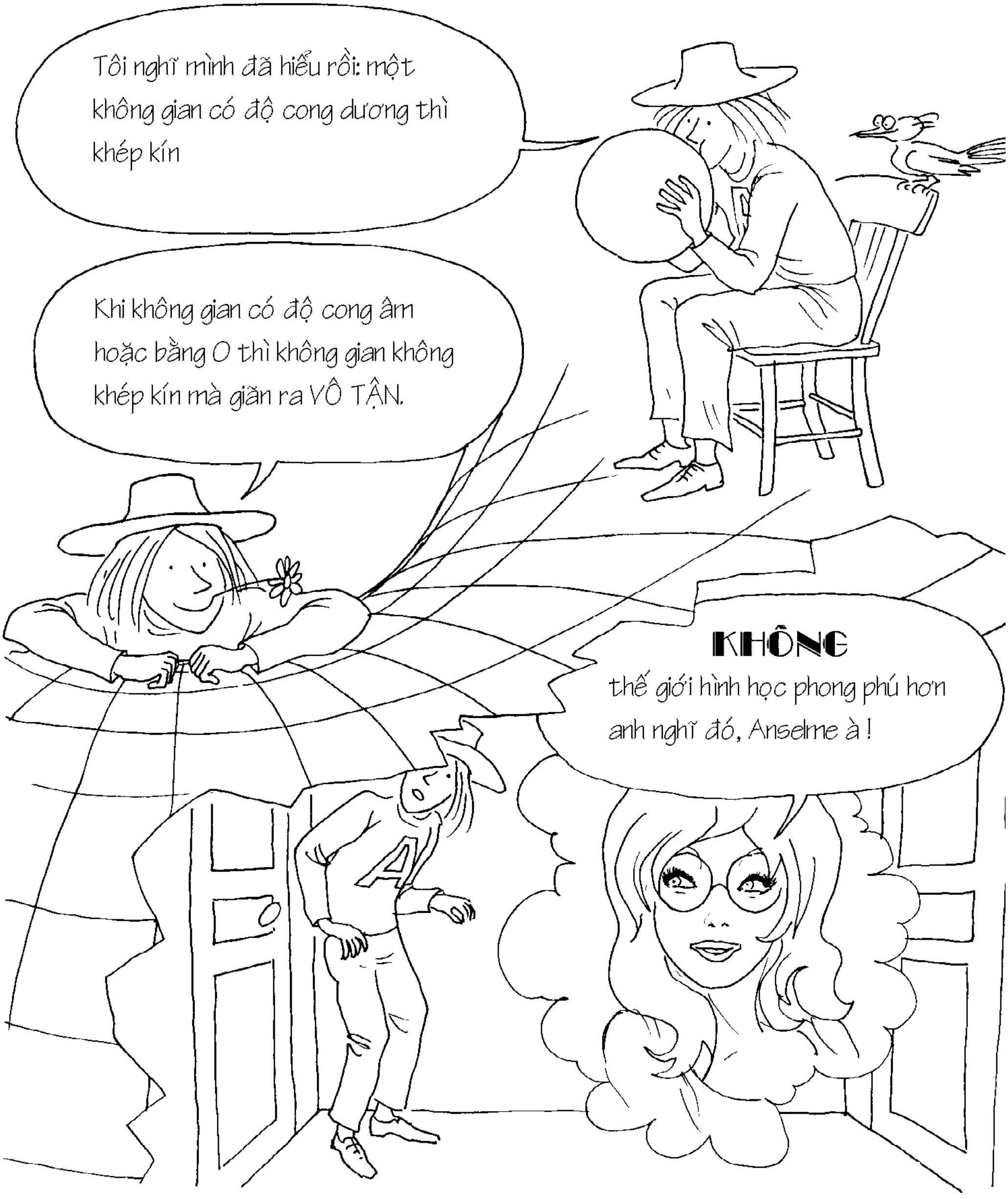
Và cứ như vậy, một không gian 3 chiều cong, siêu cầu, cũng có thể được coi như giao điểm của hai bọt xà phòng có 4 chiều, nằm trong không gian 5 chiều.

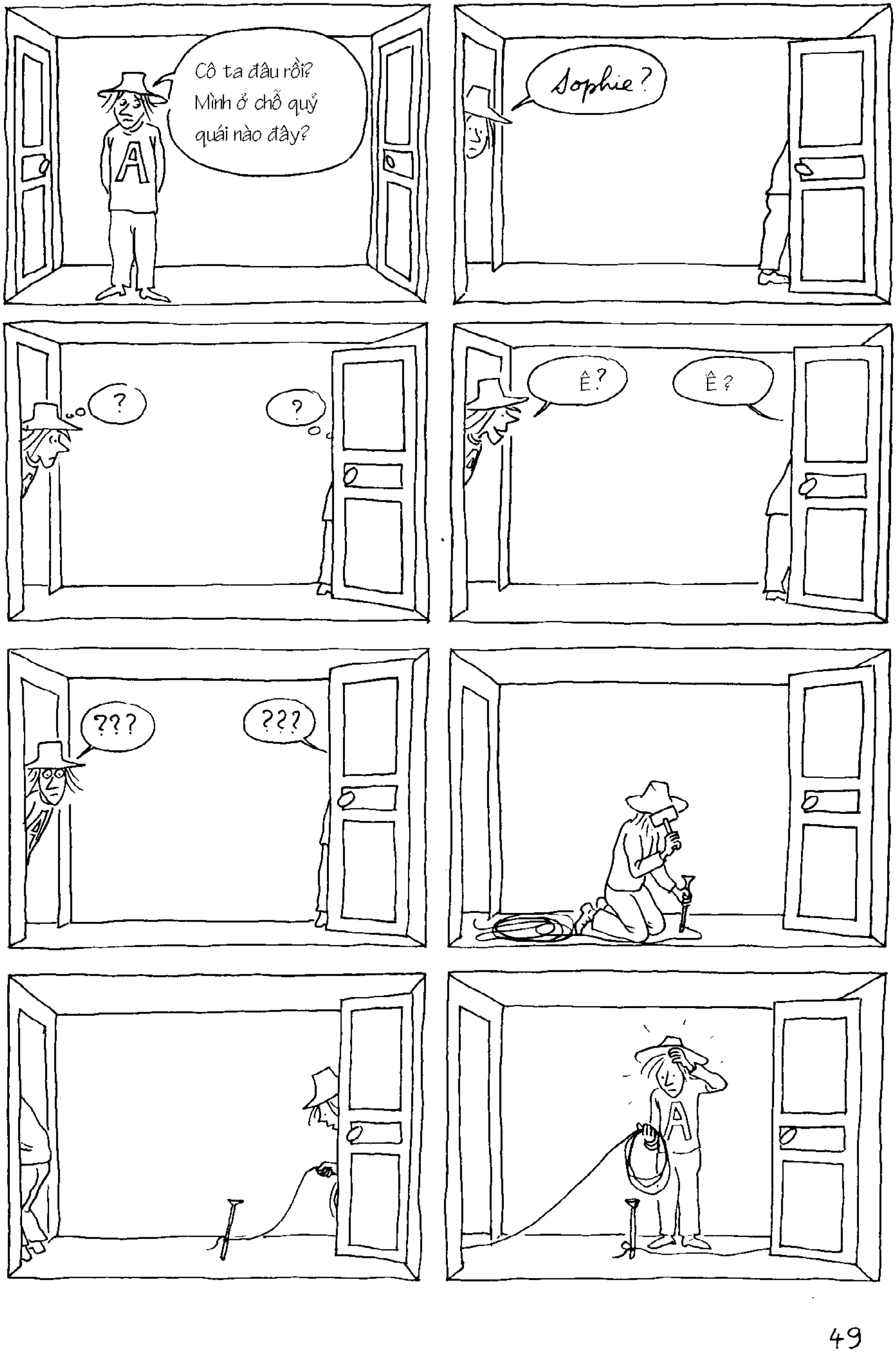
Anselme và Sophie sau khi hết choáng váng bởi phép ngoại suy lại tiếp tục khám phá những thế giới 3 chiều mới.

TÓM TẮT :

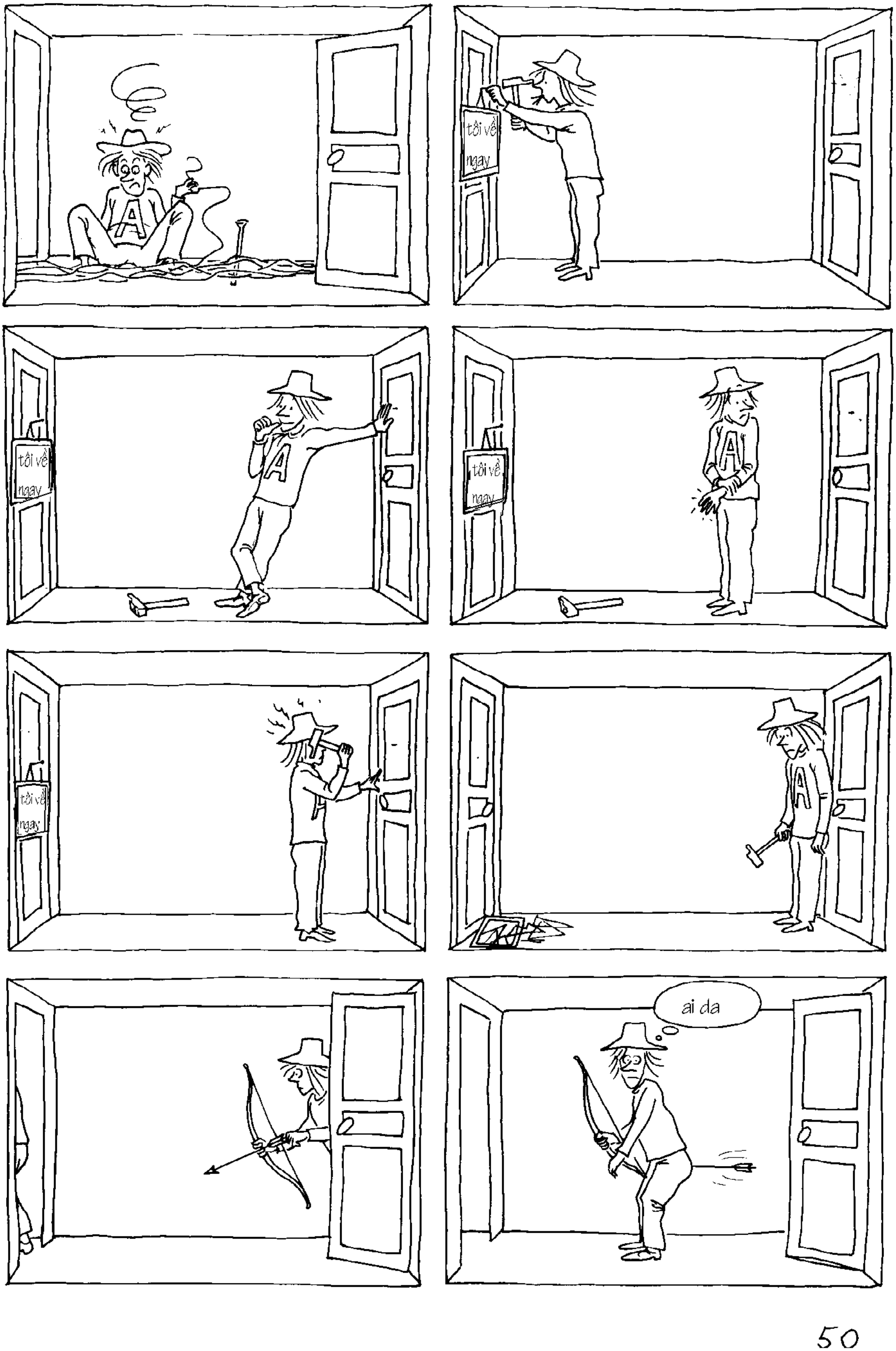
Anh thấy đấy, trong các không gian 3 chiều, nhiều chuyện có thể xảy ra. Điều tương tự cũng xảy ra đối với các bề mặt, là những không gian 2 chiều.
Như vậy, nếu tổng các góc của một tam giác trong một không gian 3 chiều lớn hơn 180° chúng ta nói là độ cong của không gian dương. Khi trongkhông gian đó có hình cầu bán kính l, bộ DUNG KIỂM sẽ cho bạn thấy rằng hình cầu đó có thể tích nhỏ hơn $\frac{4}{3}\pi \ell^3$ và diện tích nhỏ hơn $4\pi \ell^2$. Không gian này là một SIÊU CẦU, là một không gian khép kín. Nếu tổng các góc của một tam giác trong không gian 3 chiều nhỏ hơn 180°, như thế độ cong sẽ âm. Thể tích hình cầu bán kính l sẽ lớn hơn $\frac{4}{3}\pi \ell^3$ và diện tích sẽ lớn $4\pi \ell^2$. Không gian này sẽ giãn ra vô hạn.

MỘT KHÔNG GIAN KHÔNG ĐÓNG THÌ PHẢI ... MỞ !...





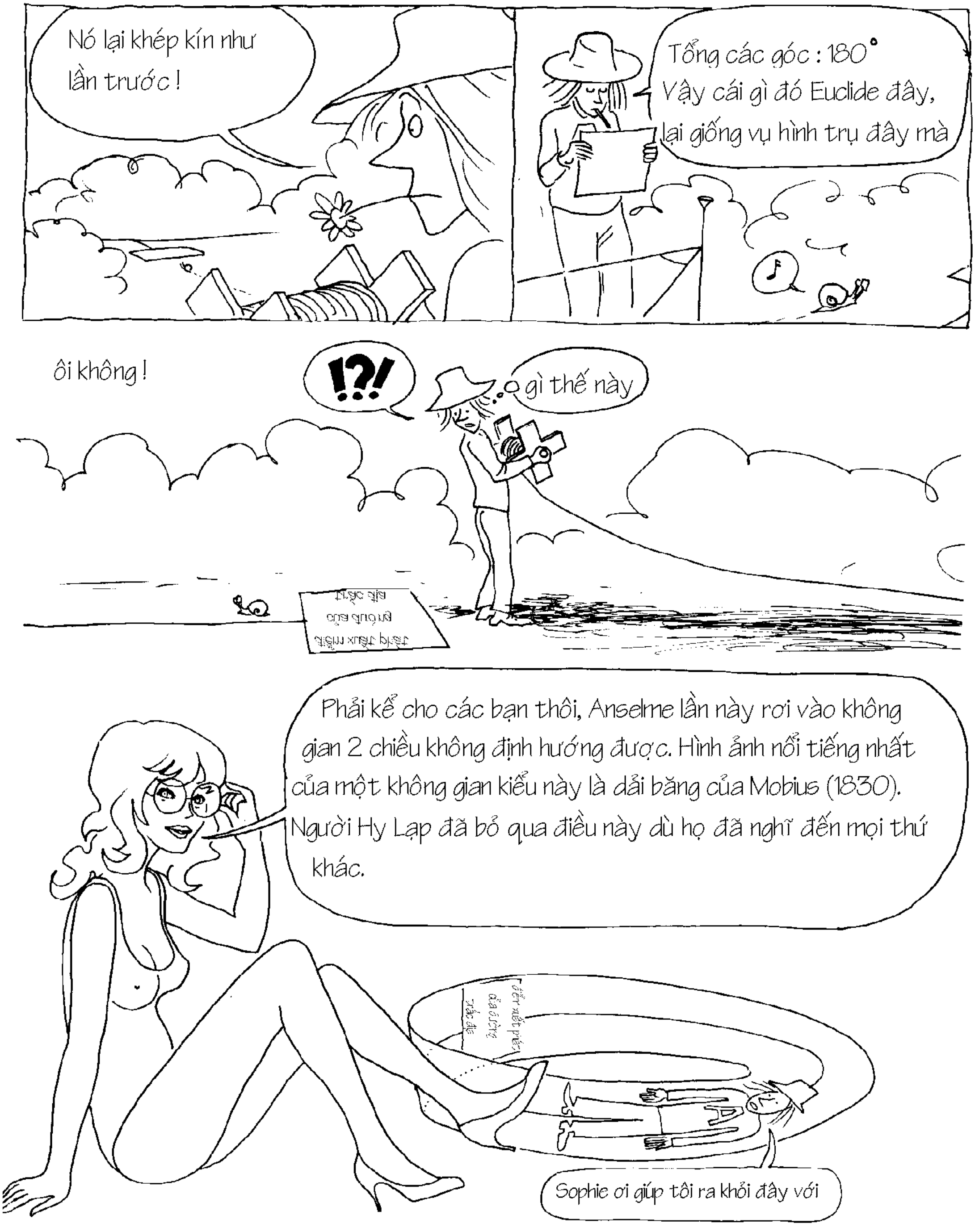
Cô ta đâu rồi? Mình ở chỗ quỷ quái nào đây?
Sophie?
?
?
Ê?
Ê ?
???
???



tôi về ngay
tôi về ngay
tôi về ngay
tôi về ngay
ai da

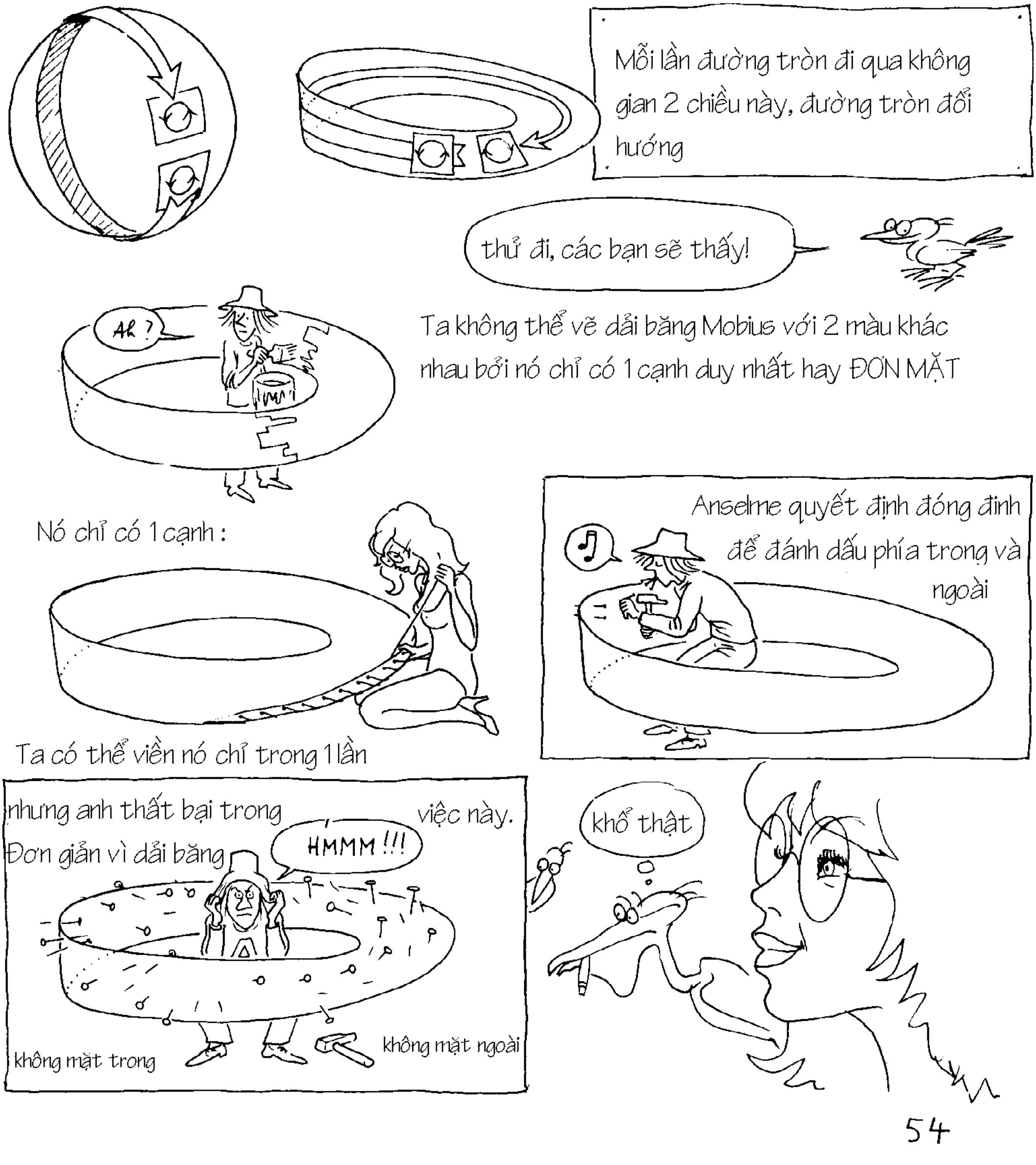

Thế đấy, Lanturlu đã bị bắn vào không gian hình trụ 3 chiều. Dù là không gian Euclide, không cong (tổng các góc của 1 tam giác là 180°) nhưng thế giới này vẫn khép kín.
ai da
Rồi xem nào, thế giới hình cầu, hình hyperbol, hình trụ, hết rồi đấy nhỉ ?
anh nghĩ vậy à?
chúng ta hãy quay lại thế giới 2 chiều một lát
Hả ! ?
MÂY MÙ

KHÔNG TRÊN KHÔNG DƯỚI :



Nó lại khép kín như lần trước !
Tổng các góc : 180°
Vậy cái gì đó Euclide đây, lại giống vụ hình trụ đây mà
ôi không !
!?!
gì thế này
Phải kể cho các bạn thôi, Anselme lần này rơi vào không gian 2 chiều không định hướng được. Hình ảnh nổi tiếng nhất của một không gian kiểu này là dải băng của Mobius (1830). Người Hy Lạp đã bỏ qua điều này dù họ đã nghĩ đến mọi thứ khác.
Sophie ơi giúp tôi ra khỏi đây với

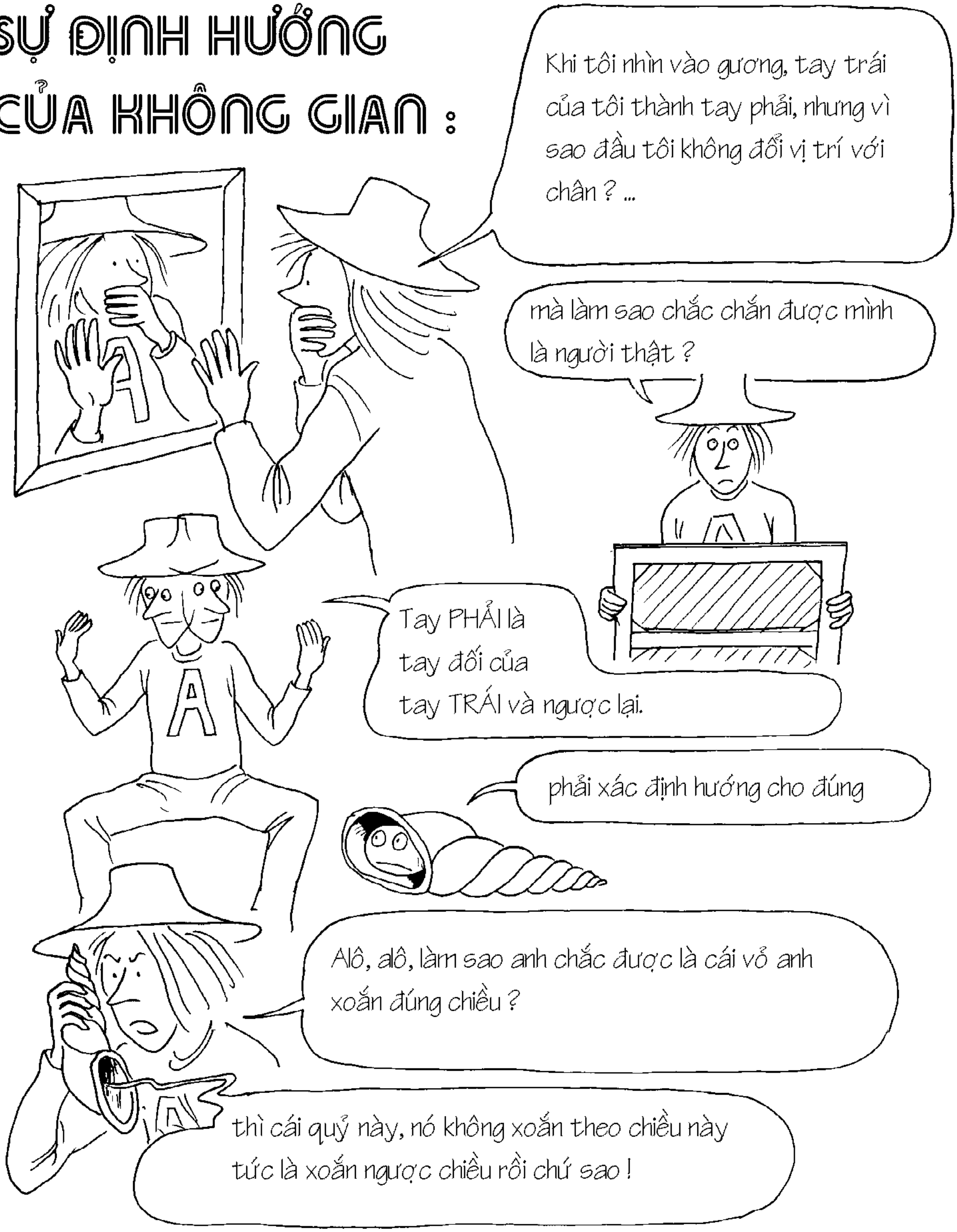
Hãy vẽ một đường tròn trên một bề mặt và uốn cong theo kiểu nào cũng được. Tưởng tượng là đường tròn này như hình dán nhỏ mà ta có thể cho trượt thoải mái trên bề mặt này. Nếu đường tròn không bị biến dạng thì ta nói bề mặt này ĐỊNH HƯỚNG ĐƯỢC (trường hợp hình cầu, hình trụ, mặt phẳng...). Nhưng nếu miếng dán này trượt trên dải băng Mobius thì mọi chuyện khác hẳn.



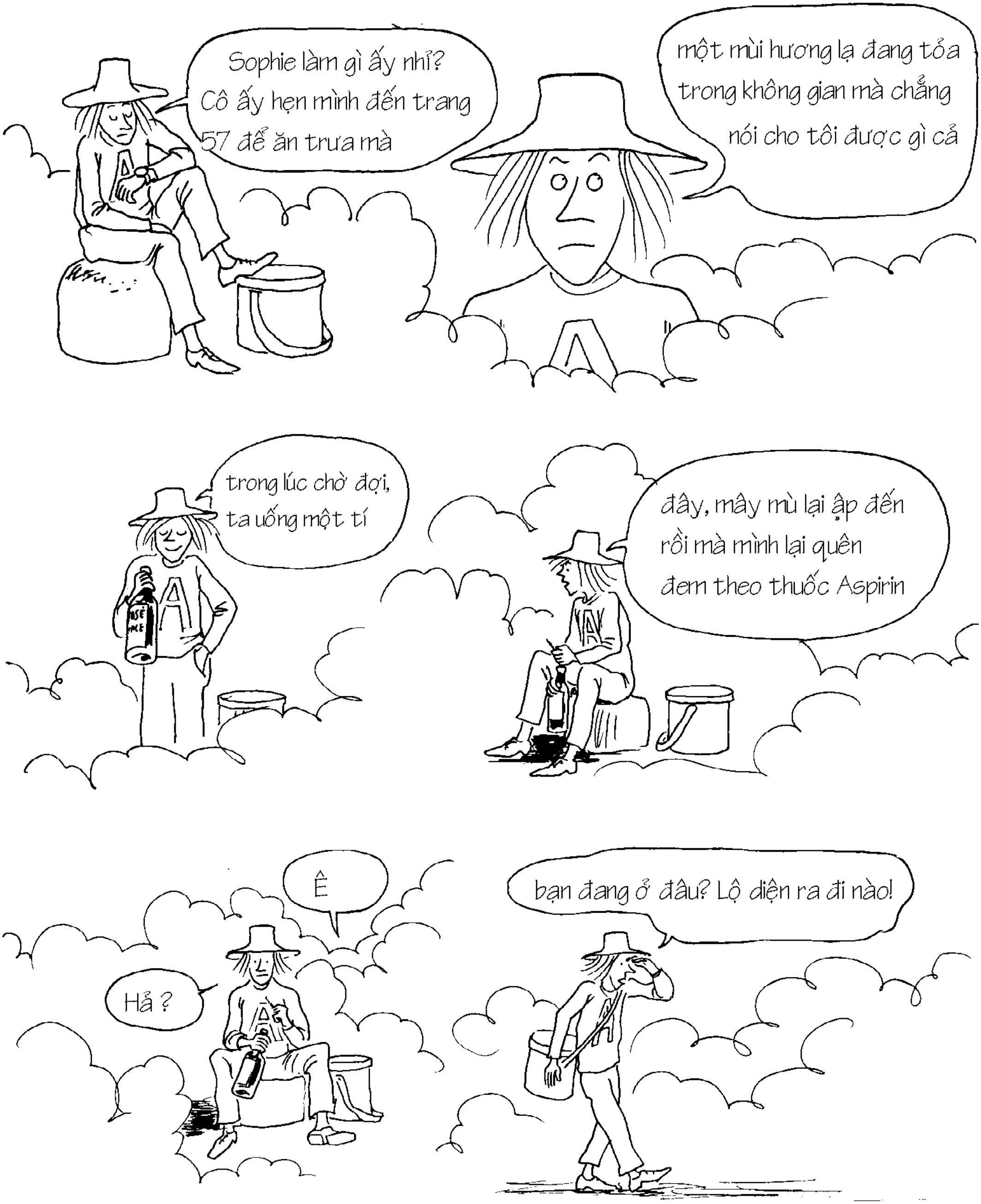

hãy thử cắt đôi ra xem
Nói thì dễ hơn làm đó, anh bạn Anselme của tôi à
nhưng làm sao để cắt đôi ?
dễ lắm, anh cắt nó làm 3 phần
hãy để ý là khi cắt đôi thì thứ này lại có 2 cạnh
tôi hoàn toàn mất phương hướng rồi
Bây giờ thì để ý rằng có thứ có 1 cạnh (màu trắng) và có thứ có 2 cạnh (màu xám) dài gấp đôi cái đầu tiên.

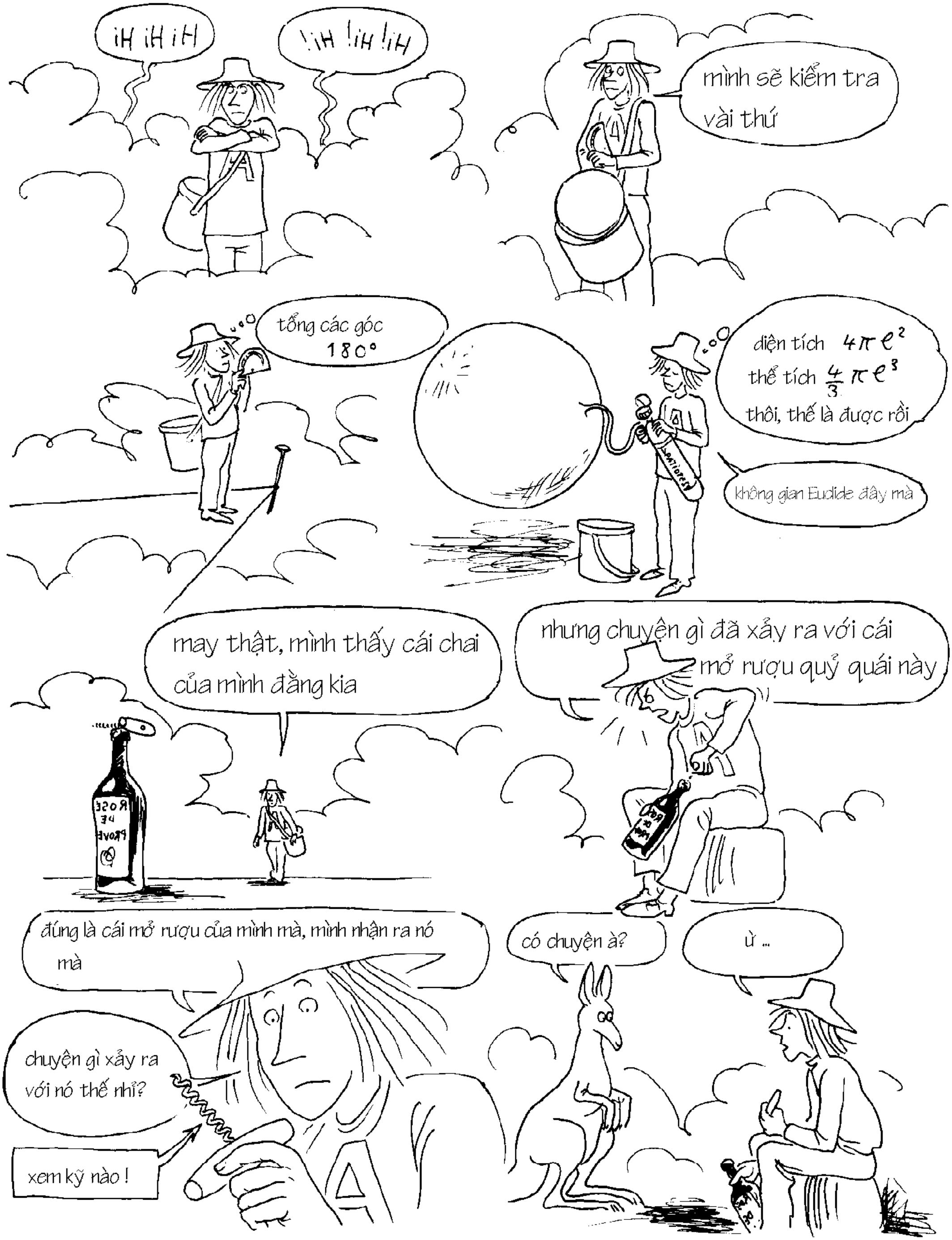
Sau cuộc dạo chơi trên dải băng Mobius, hãy trở lại các không gian Euclide (không cong) có ba chiều.

SỰ ĐỊNH HƯỚNG CỦA KHÔNG GIAN :



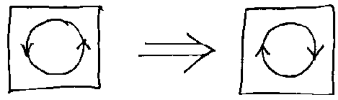
Hãy cùng Lanturlu đi khám phá một thế giới Euclide (không cong) ba chiều mới.



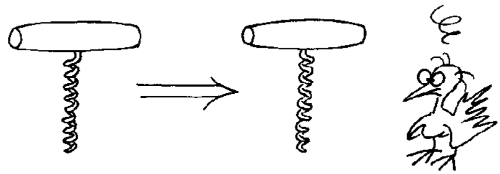

mình sẽ kiểm tra vài thứ
tổng các góc 180°
diện tích $4\pi e^2$
thể tích $\frac{4}{3}\pi e^3$
thôi, thế là được rồi
không gian Euclide đây mà
may thật, mình thấy cái chai của mình đằng kia
nhưng chuyện gì đã xảy ra với cái mở rượu quỷ quái này
đúng là cái mở rượu của mình mà, mình nhận ra nó mà
chuyện gì xảy ra với nó thế nhỉ?
xem kỹ nào !
có chuyện à?
ừ ...


đây là một chai "Rosé de Provence", chất lượng khá thường, dù sao thì ...
Anh có cái mở rượu chứ?
ah ... , có
nếu mọi con kanguru trên thế giới này cùng nắm tay nhau...
Ực ... Ực ...
anh không thấy có gì khác thường à ?
Không, trông anh hơi xanh xao, thế thôi
hãy uống một ít "deparmesan bisunfat" 2 lần mỗi ngày
cứ tiếp tục nhé
cà lọc
cà lọc
cà lọc
cà lọc
người nào đó sửa cái mở rượu của tôi và một con kanguru xỉn đã uống mất rượu của tôi, chuyện này là thế nào đây ?
khốn kiếp!
choang ...!
Chúng tôi khuyên bạn không nên quan sát cái mở rượu này ở khoảng cách quá gần !

Trong không gian 3 chiều cũng có thứ tương đương với dải băng Mobius (không gian 2 chiều bất định hướng). Trên dải băng Mobius, khi "miếng dán" đi vòng quanh không gian Euclide, hướng của nó thay đổi.

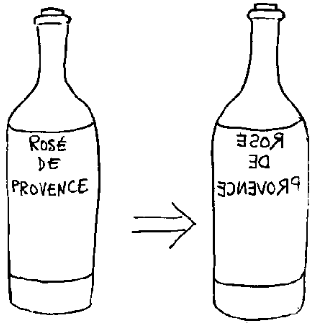


xem trang 54



Chúng ta thấy rằng các vật này như được soi qua "gương"

Cái mở rượu hay chính Anselme có thể được coi như những "hình dán 3 chiều". Mỗi lần một vật đi vòng quanh không gian 3 chiều này, hướng của nó thay đổi. Vì chúng ta đi theo Lanturlu trong hành trình xuyên không gian, vì vậy thật bình thường nếu chúng ta cùng anh thấy chai rượu "trong gương" và cái mở rượu ngược chiều bình thường. Một vòng thứ hai quanh không gian này sẽ cho ta thấy mọi vật lại như trước (với điều kiện là ta để các đồ vật nguyên chỗ cũ).



Anselme và con kanguru ở cùng trong một không gian, nhưng cái gì xuôi chiều đối với con kanguru thì Anselme lại thấy ngược chiều và ngược lại.

PHẦN CUỐI :


Mọi chuyện đảo lộn hết cả. Không còn bên trái, bên phải, cũng không còn ngược hay xuôi. Chuyện này sẽ đưa ta đến đâu đây ? Đi theo đường nào bây giờ?
phải đi theo các đường trắc địa, Anselme ạ, đường trắc địa của đời cậu ấy!
không ai có thể làm tôi tin rằng Vũ trụ lại kỳ dị đến vậy Chỉ toàn những lời lẩm nhẩm của mấy nhà Toán học
chỉ là truyện tranh thôi mà!
Sao lại bận tâm những thứ này vì hiển nhiên không gian của chúng ta LÀ không gian Euclide (*)
(*) Lời phát biểu của Ostrogradsky, giáo sư danh dự Toán Petrograd, vào năm 1830 khi đọc công trình của Rieman và Lobatchevsky

Cứ chấp nhận là Vũ trụ trông không giống bản chất của nó, các bạn có tưởng tượng ra được chuyện đó không? Rồi còn được giảng dạy trong trường nữa chứ!
thật khủng khiếp !
Vả lại, điều quan trọng là cuộc sống. Và trong cuộc sống hằng ngày, ông sẽ đồng ý với tôi rằng ....
nhưng sau tất cả những chuyện này là gì?
là VẬT LÝ anh bạn ạ
tôi muốn làm sáng tỏ tất cả chuyện này
tiến lên, để tìm hiểu những điều CỤ THỂ
có ai đó không?


... nếu tỉ trọng của chất trong vũ trụ nhỏ hơn 10^{-29} g/ cm^3....
?
... thì vũ trụ sẽ có độ cong âm và giãn ra đến vô cùng ...
...ngược lại, nếu tỉ trọng lớn hơn 10^{-29} g/cm^3
!..
... thì Vũ trụ là hình siêu cầu và khép kín ...
nhưng nếu tỉ trọng bằng 10^{-29} g/cm^3 thì không gian là không gian Euclide
uhm...
cháu đoán là Tiến sĩ Einstein, phải không ạ?
hả ? uh ...
HẾT