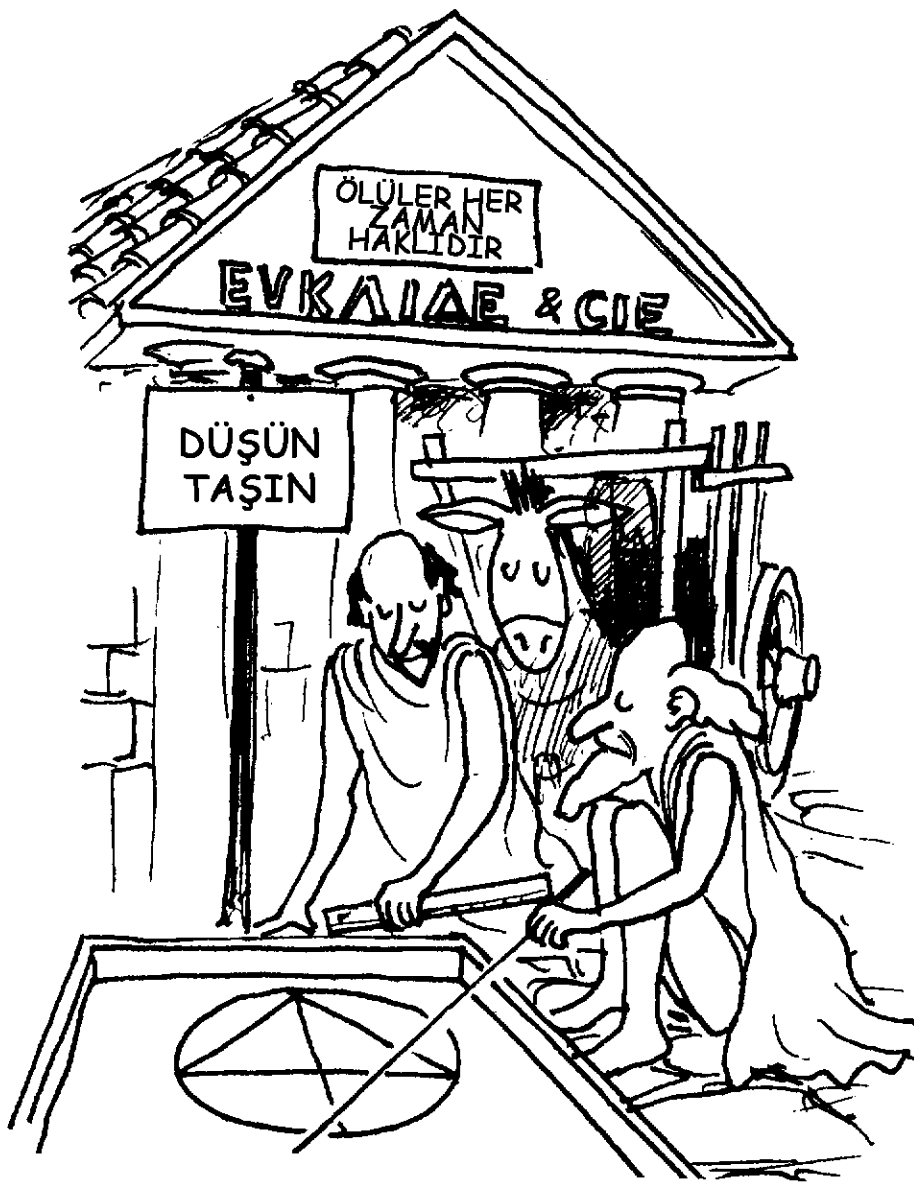
ARCHIBALD HIGGINS'in Maceraları

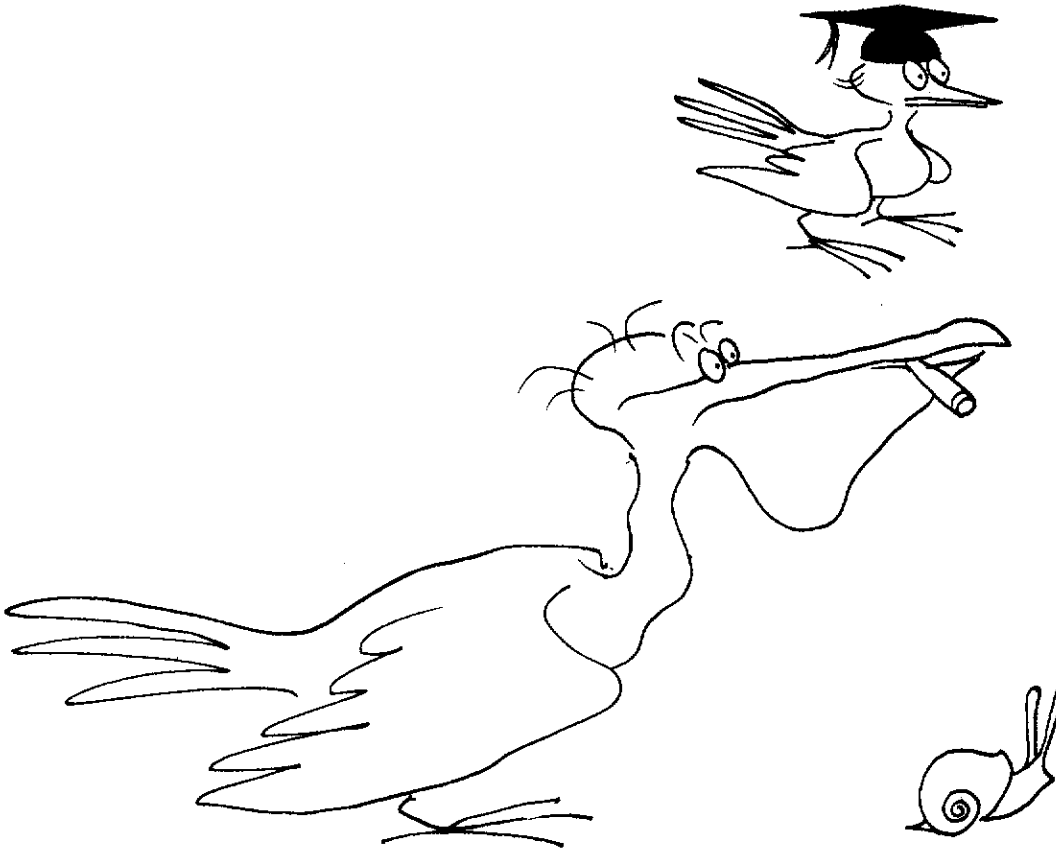
http://www.savoir-sans-frontieres.com

ÖKLİD'E BAKARKEN (VE ÖKLİD'E BAKMAZKEN)

Jean-Pierre Petit



Türkçeye Çeviren
Hüseyin Güven

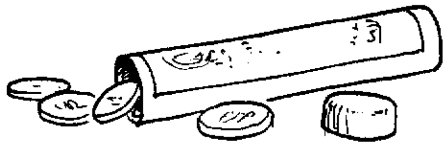



Evde bir
MATEMATİKÇİ
mi var ?

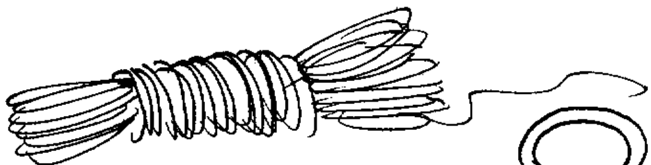
UYARI

Bu kitap bilimsel bir inceleme ya da ders değildir .
Bu sadece Archibald Higgins'in geomteri dünyasındaki hikayelerinden biridir .
Okurken yanınızda bulunması tavsiye edilenler :

* Bol bol aspirin

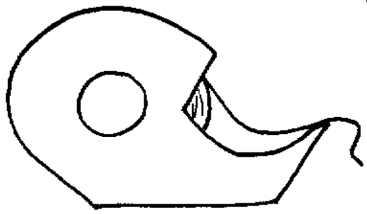


* Bir sürü ip

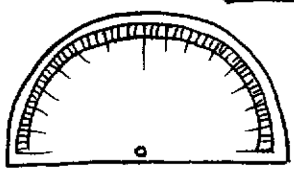


* Biraz makas

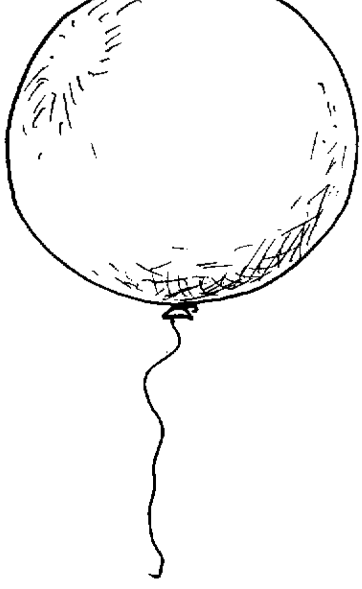
* Yapıştırıcı bant



* Bir açıölçer



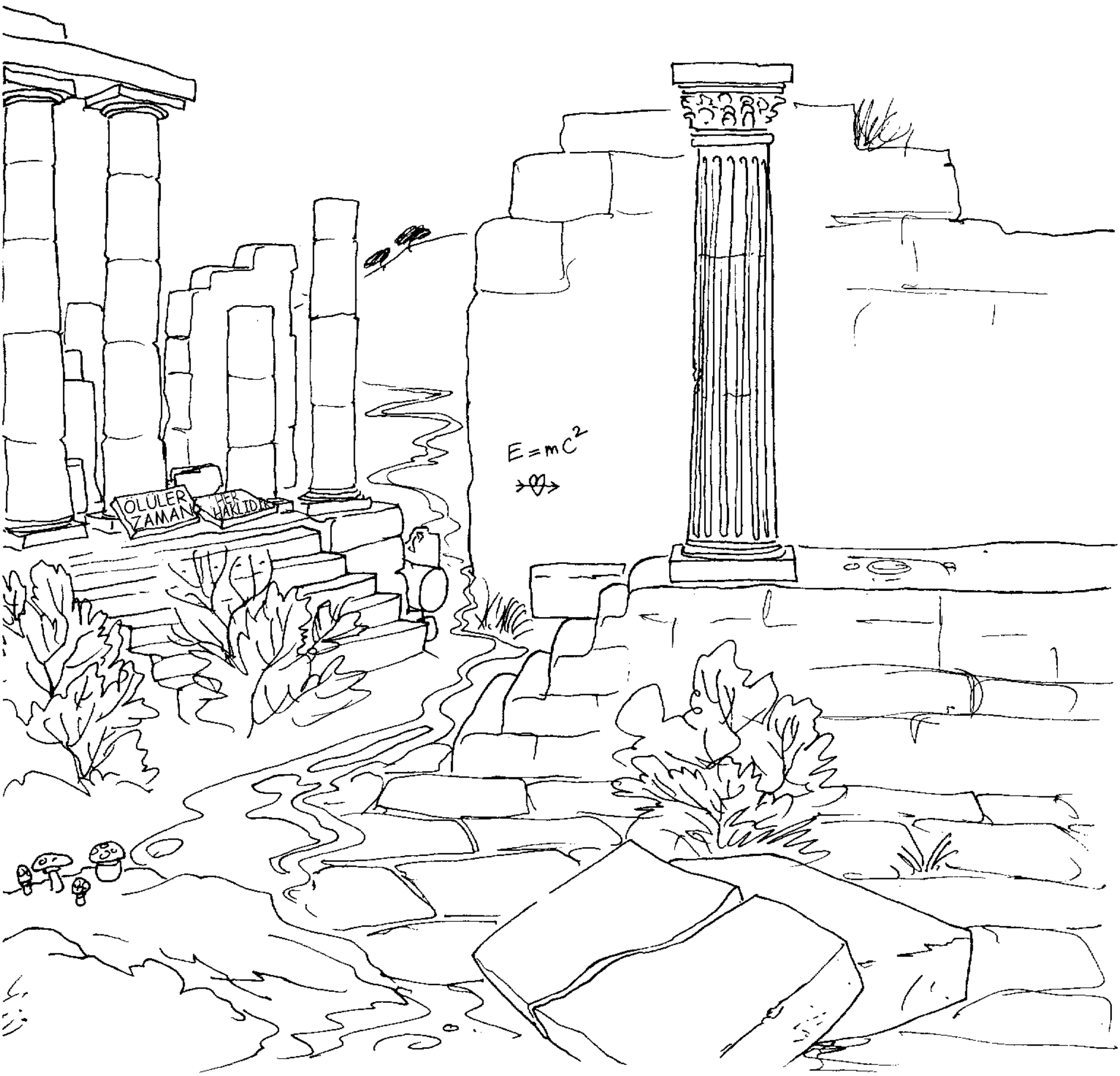
* Ve güzel , hoş ,
yuvarlak bir balon...



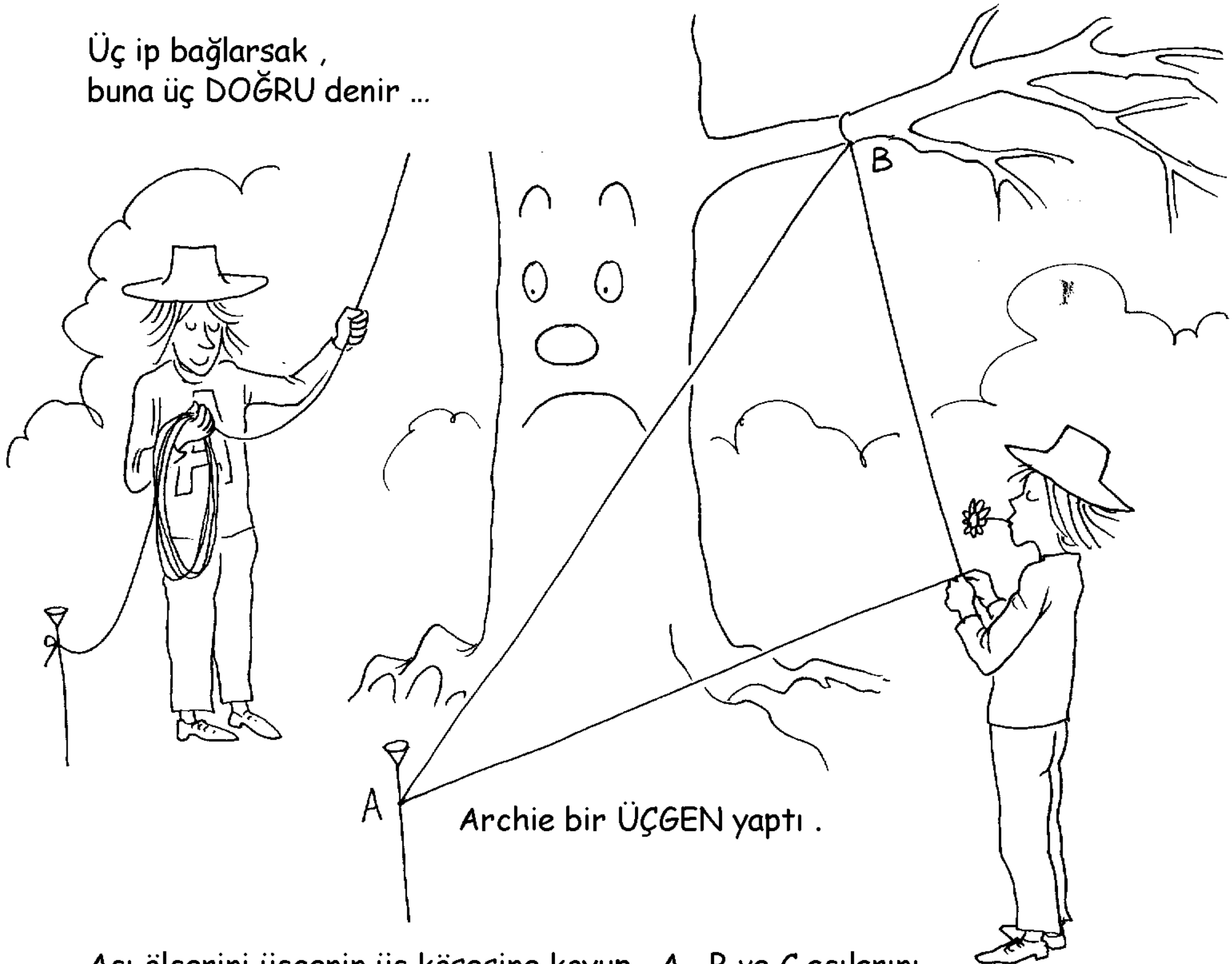
Öklid ve Ortakları şirketi milattan önce üçüncü yüzyılda İskenderiye'de kuruldu . İki bin iki yüz yıl boyunca iş yapmayı başardı . Ürünler başarılı , müşteriler memnundu .

Ama , yavaş yavaş , müşterilerin beğenileri değişti .
Şirketi daha önce hiç sorgulamamış bazı müşteriler , garip deneyimlerden sonra , sormaya başladılar «Öklid HER ZAMAN doğruyu , bütün doğruyu , yalnızca doğruyu mu söylüyor ?»

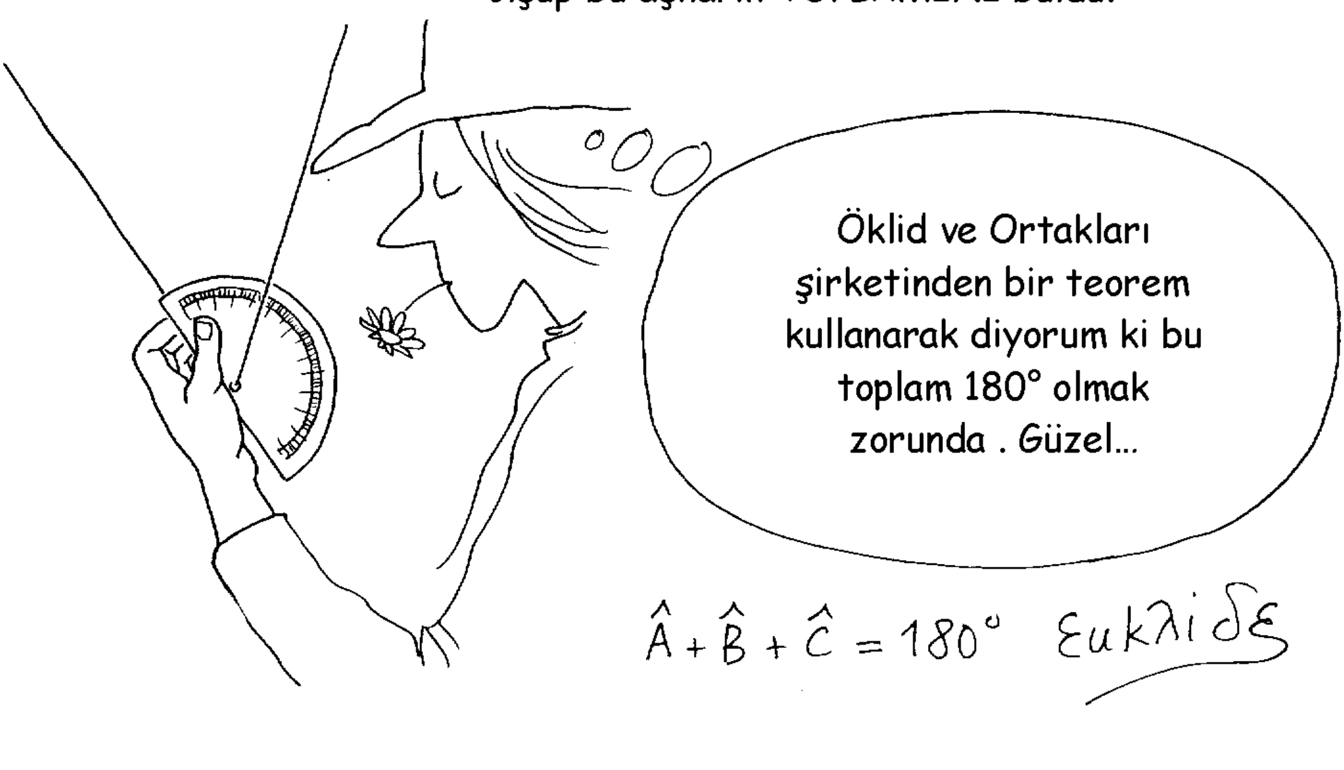
Şimdi birinin hikayesini dinleyelim...



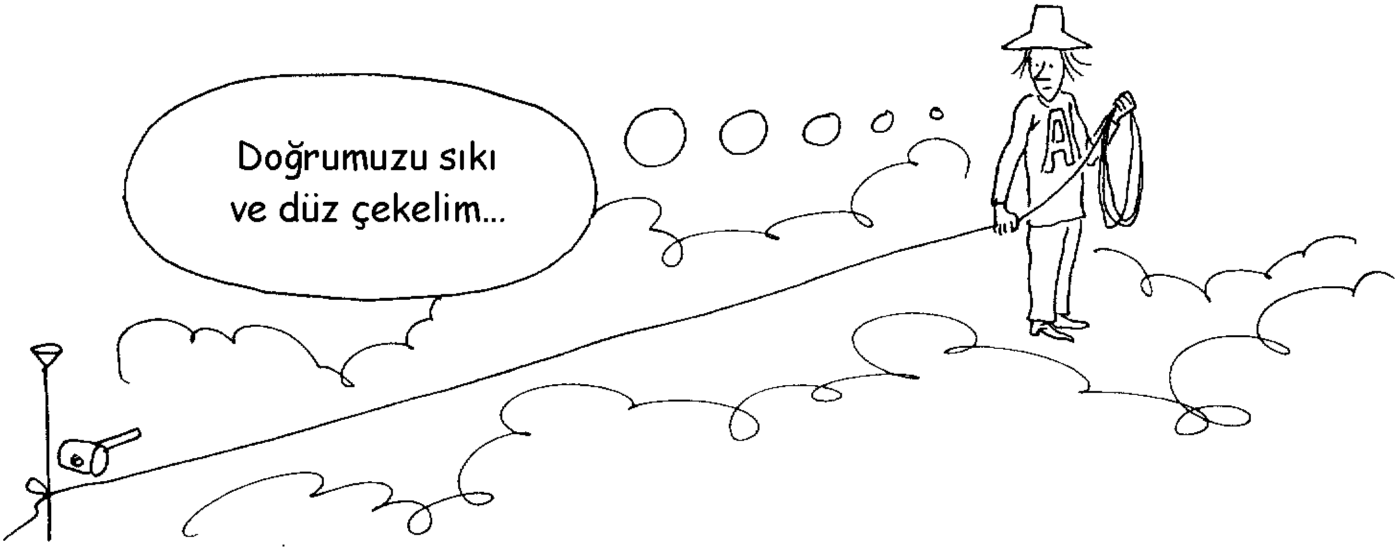
GİRİŞ : bir gün , Archibald Higgins iki direk arasına ip bağlamaya çalışıyordu...



Açı ölçerini üçgenin üç köşesine koyup , A , B ve C açılarını ölçüp bu açıların TOPLAMINI buldu.



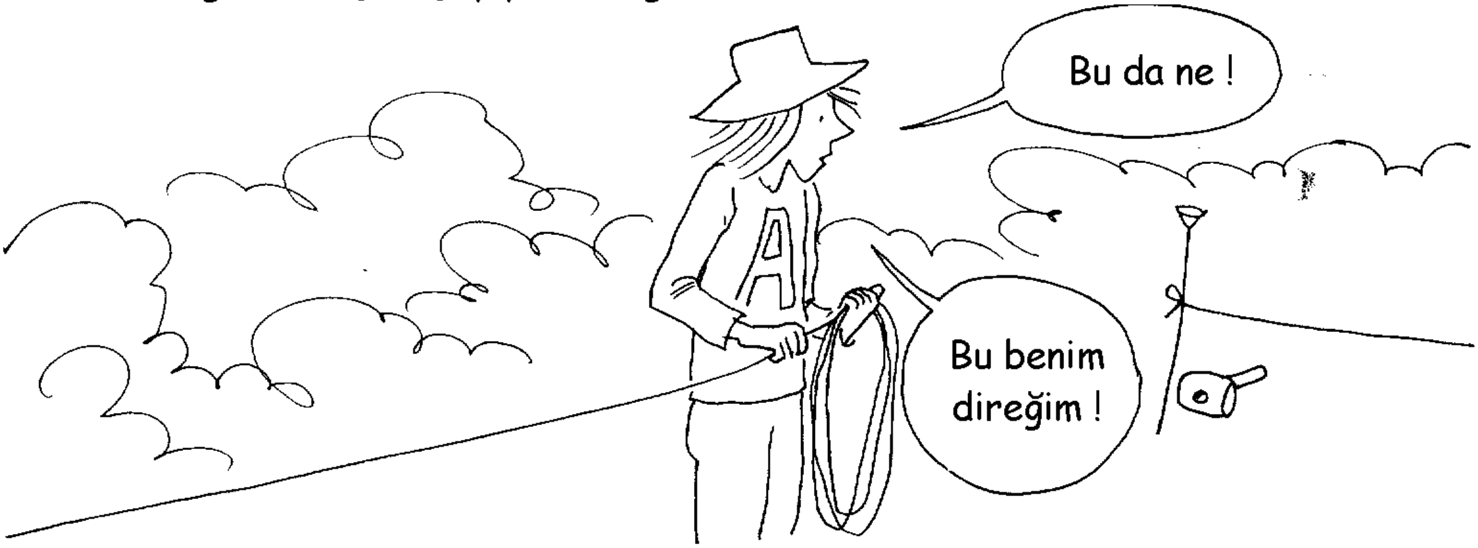
Archie'nin memleketi kalın bulutlarla kaplıydı .
Elinizi bile göremezdiniz .



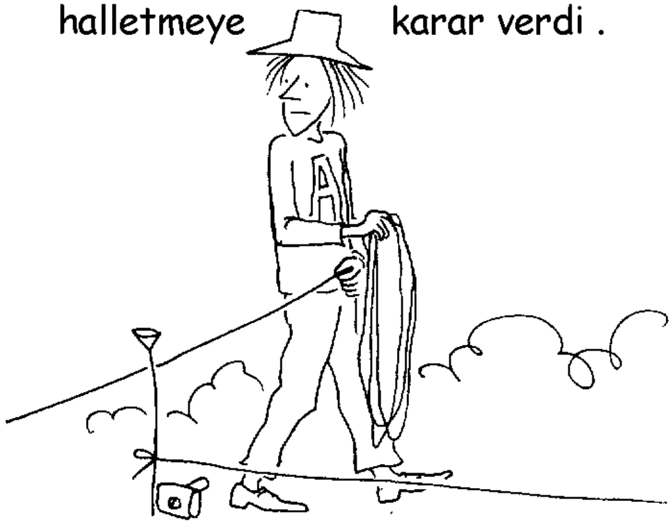
Archie uzun bir süre yürüdü .

Arkasındaki ip çözülmemişti , ve o kadar sıkı bağlanmıştı ki Archie'nin siste kaybolmaktan korkmasına hiç gerek yoktu . Mükemmel bir DOĞRUYU takip ediyordu ...

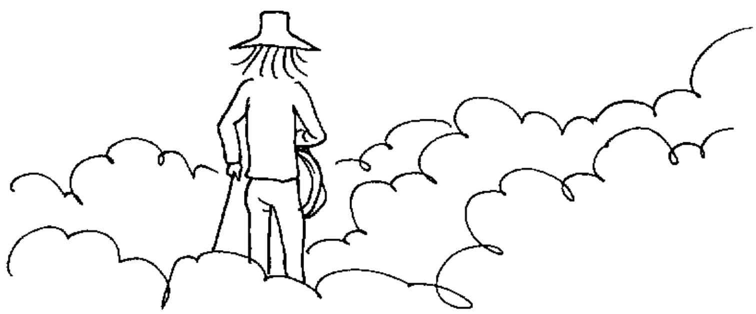
Ama – belki de fark etmişsinizdir –
bazı günler hiçbir şey yolunda gitmez .



Bir sürü ipi olan Archie meseleyi kökünden halletmeye karar verdi .



Cesurca davranarak , merak içinde , ipini hep ileri doğru dümdüz uzatmaya devam etti .

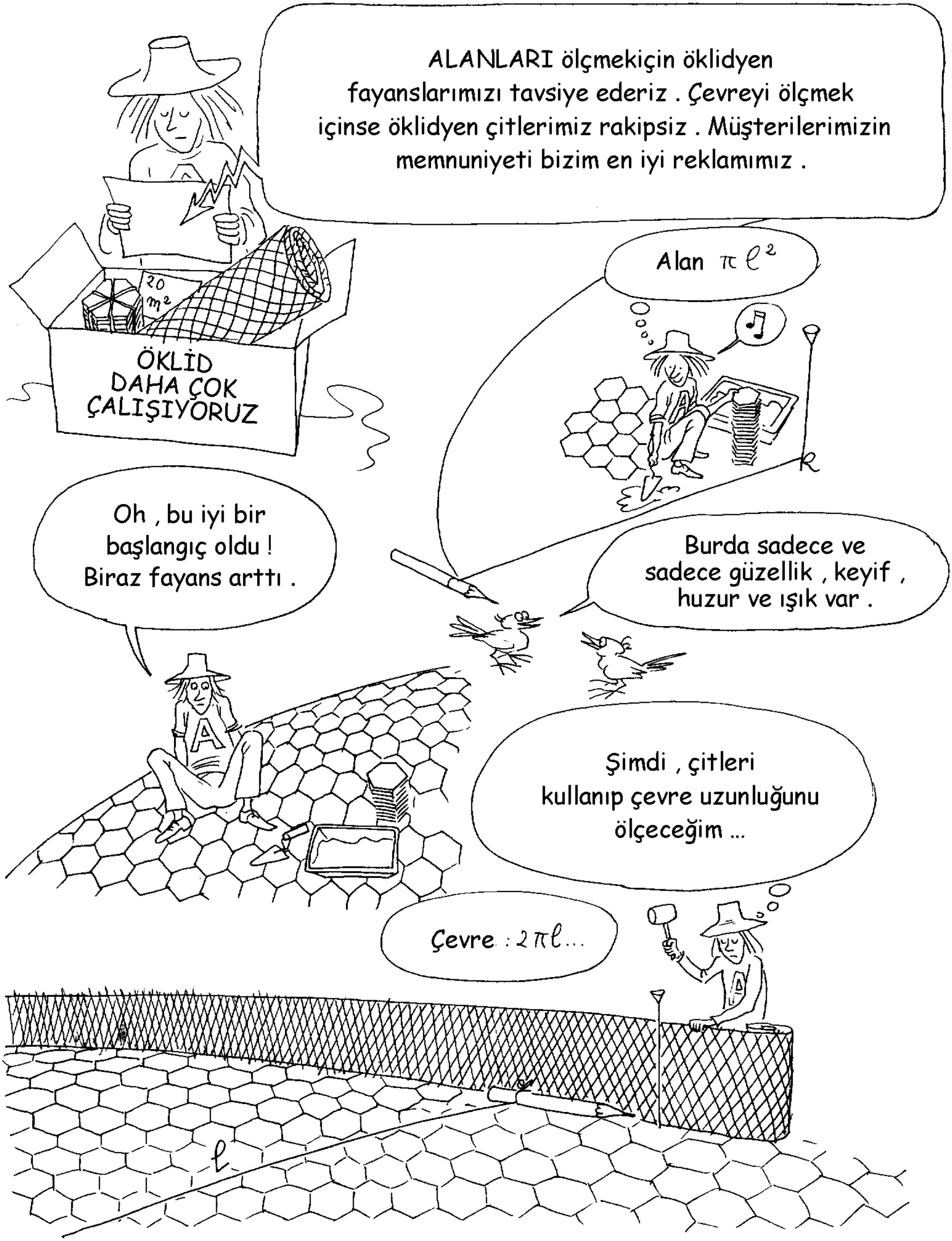


Ne yazık ki...

Archie'nin DÜZ ÇİZGİSİ sıklaşmaya başlamıştı !


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Bakalım şu Öklid denen adam bu konuda ne demiş . Eşit boyda üç doğru çizmeye çalışarak bir ÜÇGEN yapacağım . Bu durumda açılar 60° , toplamları 180° olmalı . Aynı broşürde yazdığı gibi .
B
60
60
60
A
C
Â+B̂+Ĉ = 180°
Şimdi göreceğiz .
RATIO OMNIA VINCIT
A
B
A
Bu da ikinci köşe olan B köşesi . Şimdi iki çizgi daha çekip üçüncüyü köşeyi bulalım .
Bilim mükemmel , değil mi ?
B
Aaa ! Açılar birbirine EŞİT - ama 60° den daha büyükler .
Bir sorun mu var ?
C
A
İçimde , açıların toplamları 180° den büyük olacakmış gibi bir his var !
EUCLIDE
ÖKLİD GEOMETRİSİ
EUCLIDE


Ve cetvelimi DÜZGÜN bir şekilde koyduğumda görüyorum ki çektiğim ipler tamamen DÜZ .
EUCLIDE
Merhaba ? Öklid ve Ortakları Şirketi mi ? Bakın , ürünlerinizle ilgili bir sorunum var .
Bir saniye , sizi teknik bölüme yönlendireceğim .
Üçgenlerimizle ilgili sorunlar mı ? Şaşırdım . Neden Çemberlerimizi denemiyorsunuz . Müşterilerimiz çemberlerimizden çok memnunlar .
...doğru , anladım . Bir ÇEMBER sabit bir noktadan ℓ kadar uzakta olan noktalar kümesidir .
Ve ÇEVRE uzunluğunu 2πl , ALANI πl²
olarak hesaplıyoruz . Anladım !
ℓ
Anlaştığımıza sevindim .

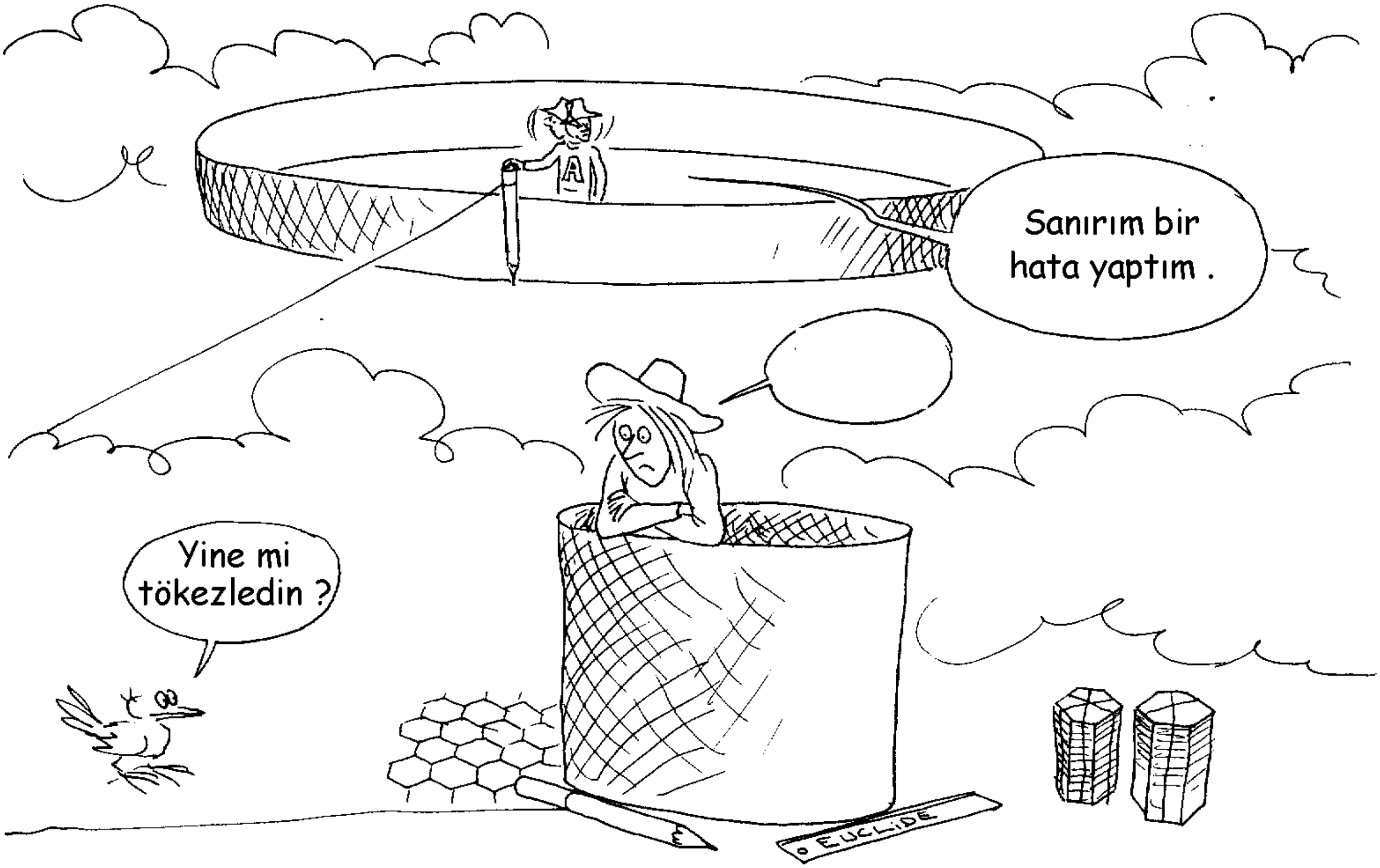


ALANLARI ölçmekiçin öklidyen fayanslarımızı tavsiye ederiz . Çevreyi ölçmek içinse öklidyen çitlerimiz rakipsiz . Müşterilerimizin memnuniyeti bizim en iyi reklamımız .
20 m²
ÖKLİD DAHA ÇOK ÇALIŞIYORUZ
Alan $\pi \ell^2$
Oh , bu iyi bir başlangıç oldu ! Biraz fayans arttı .
Burda sadece ve sadece güzellik , keyif , huzur ve ışık var .
Şimdi , çitleri kullanıp çevre uzunluğunu ölçeceğim ...
Çevre : $2\pi\ell$...
ℓ


Biraz da çit arttı !
Merhaba , Öklid ve Ortakları Şirketi mi ? Evet , yine ben ! Çitleriniz ve fayanslarınızla ilgili bir şikayette bulunmak istiyorum . πl^2 ve $2\pi l$ hiç de işe yaramıyor . Bunun hakkında ne yapacaksınız .
Lütfen böyle bağırmayın efendim . Ben sadece sekreterim . Sizi teknik bölüme yönlendireceğim .
Hayır ! Hayır ! Fayanslar tamamen bitişik ! Yarıçapla ilgili hiçbir sorun yok , ve çitler çembere doğru bağlanmış durumda .
Bayım , inanın bana , bu ilk defa başımıza geliyor . Bir daha deneyin , üzülmeyin . Biliyorsunuz teoremlerimiz GARANTİLİDİR .
Archie araştırmasına devam etti , her denemede yarıçap ℓ yi artırdı .
Hata oranı her seferinde daha da kötüye gitti ...

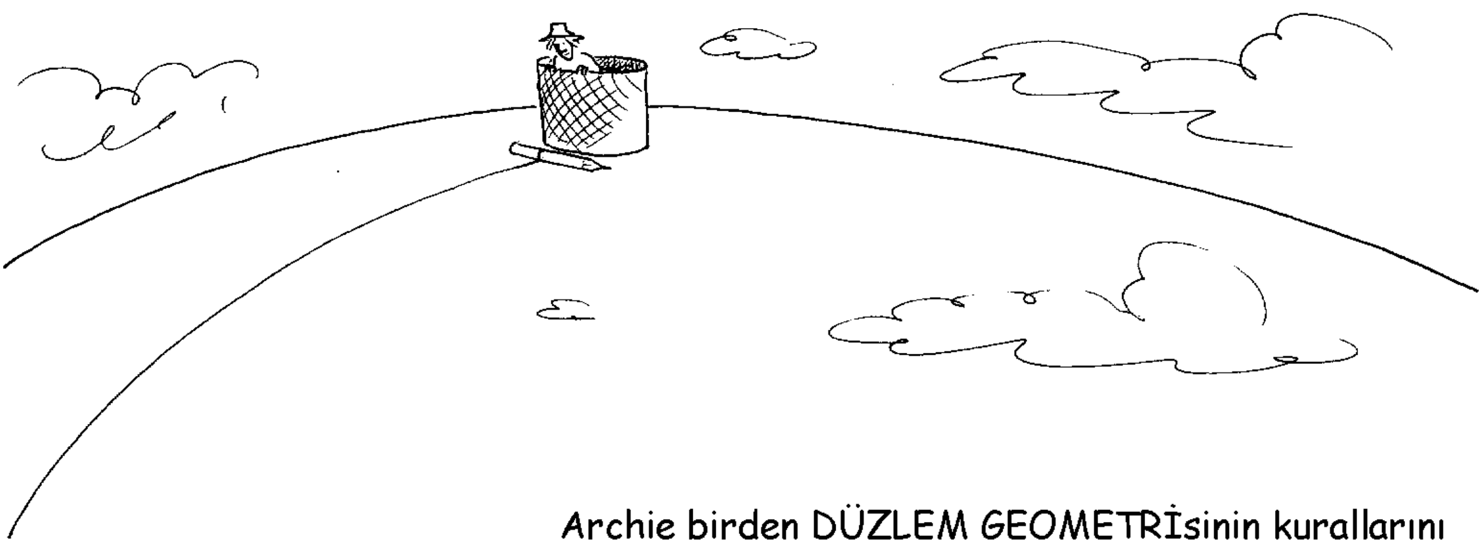

Aman tanrım ! Şimdi de %36 çit arttı ! Ve %19 fayans arttı ! Ve çizdiğim çember bir DÜZ ÇİZGİ gibi görünüyor...
Kesinlikle rüya görüyor olmalıyım !
Hmm... yeterince düzgün GÖRÜNÜYOR !
EUCLIDE
Archie yarıçapı daha da artırdı , ve şimdi ...
EUCLIDE
Çember DİĞER TARAFA bükülüyor gibi !
Ve şimdi de , ℓ yi ARTIRDIĞIM zaman , çevre uzunluğu KÜÇÜLÜYOR ! Bu çılgınlık !

Daha çok fayanstan sonra :

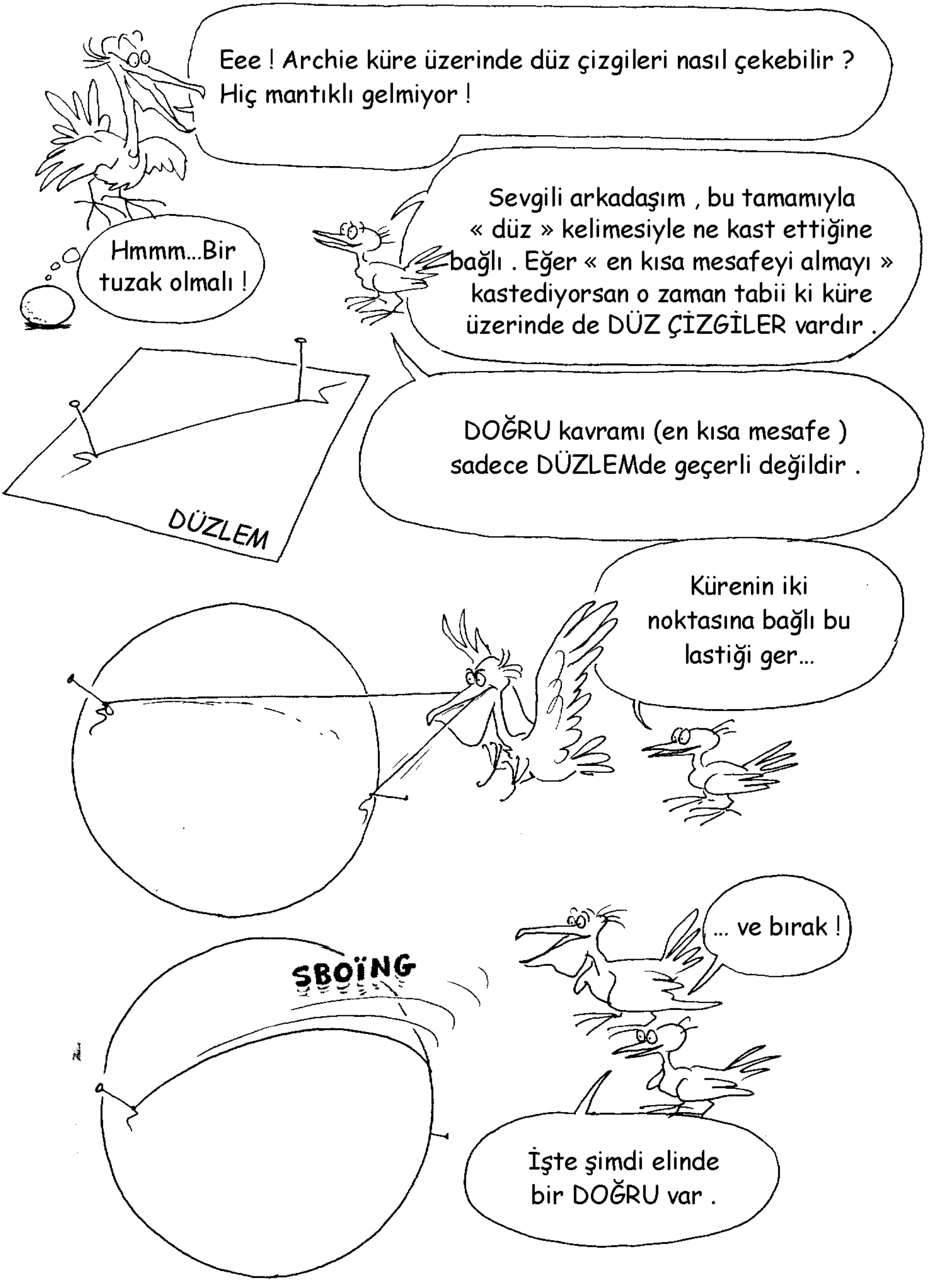


NE OLDU ?

Biraz aydınlığa kavuşması için , sisi kaldıralım...

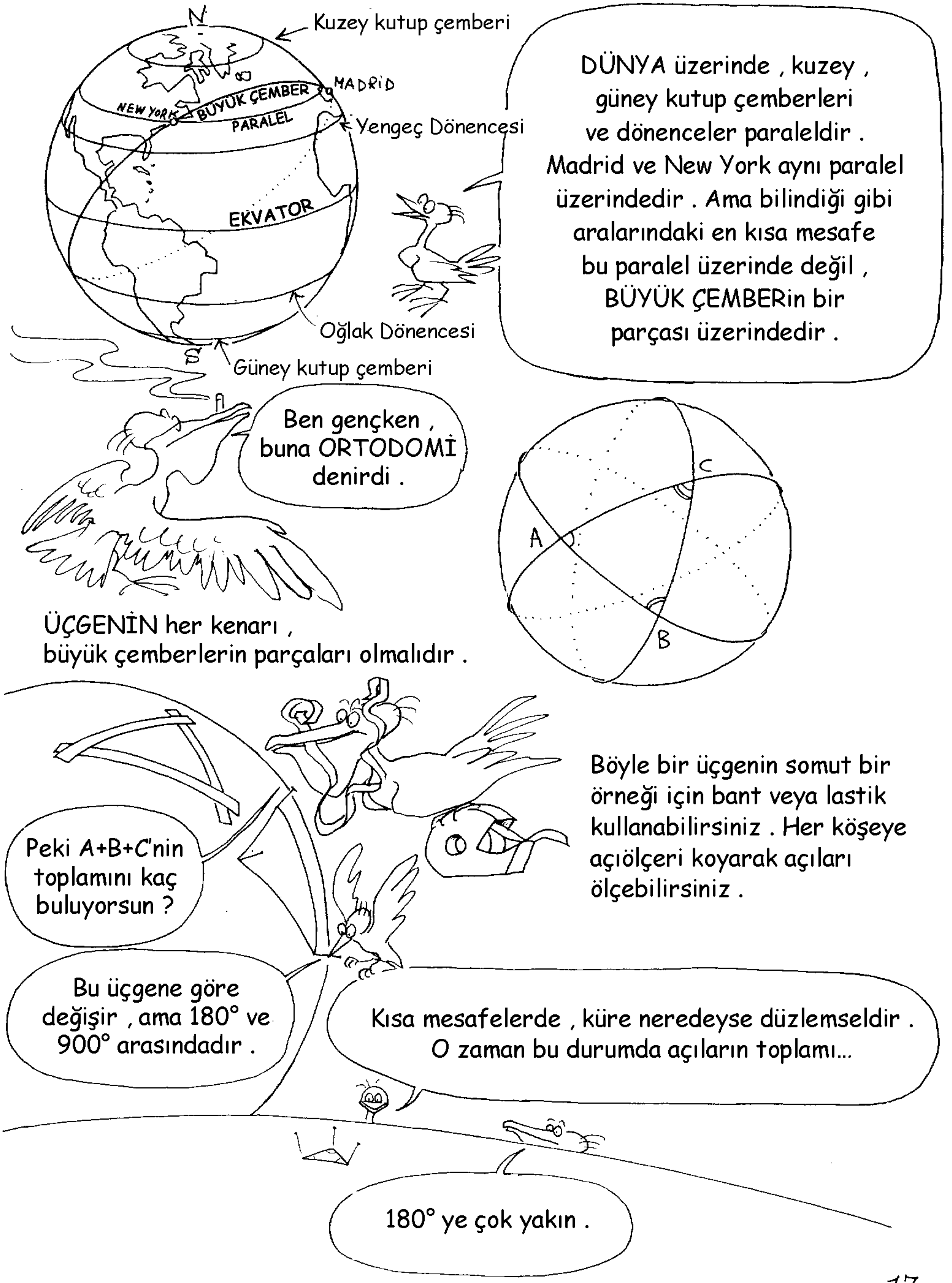


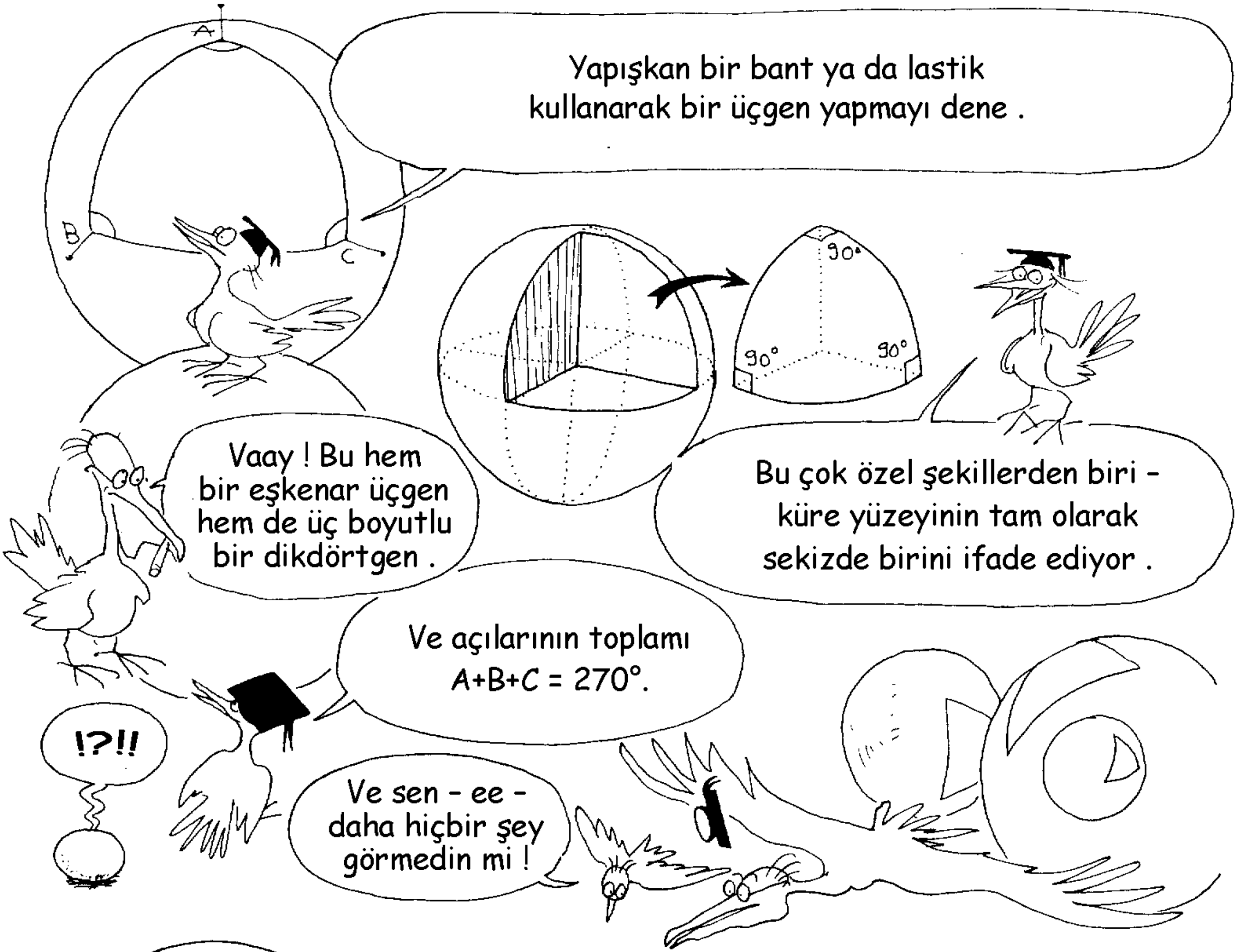
Archie birden DÜZLEM GEOMETRİsinin kurallarını KÜRE üzerinde uygulamaya çalıştığını fark etti .

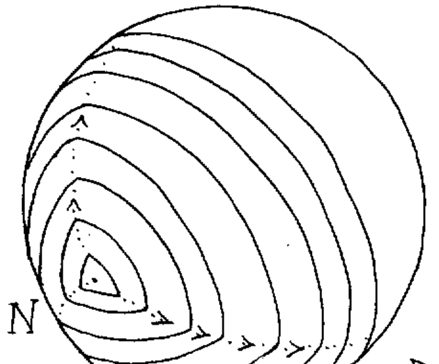

Eee ! Archie küre üzerinde düz çizgileri nasıl çekebilir ? Hiç mantıklı gelmiyor !
Hmmm...Bir tuzak olmalı !
Sevgili arkadaşım , bu tamamıyla « düz » kelimesiyle ne kast ettiğine bağlı . Eğer « en kısa mesafeyi almayı » kastediyorsan o zaman tabii ki küre üzerinde de DÜZ ÇİZGİLER vardır .
DOĞRU kavramı (en kısa mesafe) sadece DÜZLEMde geçerli değildir .
DÜZLEM
Kürenin iki noktasına bağlı bu lastiği ger...
... ve bırak !
SBOÏNG
İşte şimdi elinde bir DOĞRU var .

Diğerini çek , üzerinde ziller var ! Bu şey DÜZ değil .
Bu cetveli al ve kendin bak .
Bu na CETVEL mi diyorsun ?
Evet . Tabii ki bu cetvel yüzeyler için . Düzlermde bunu kullanmalısın . Bak – ne sola ne sağa bükülüyor .
DÜZLEM
Yine de bu cetvel çok komik .
Pekala , şimdi . Archie doğruları çekmeye başladığı zaman doğrular BİRLEŞTİ . Bu , küredeki doğrular ÇEMBER oluşturur mu demek ?
Bir küredeki en kısa mesafeyi gösteren her çizgi , küre üzerinde çizilmiş bir çember olan KAPALI doğrunun parçasıdır .


!???!
Beni kandırıyosun gibi geliyor . Kelimelerle oynuyorsun . Söylemeye çalıştığın küre üzerinde FARKLI ÇEŞİTTE çemberler olduğu mu ? Vay !!
Hah ! Sanırım bu işi anladım - ve şimdi de hiçbir şey anlamamış gibi hissediyorum .
N
ℓ
Bir çember , çemberin MERKEZİ olan sabit bir N noktasına eşit ℓ uzaklığındaki noktalar kümesidir .
Hmm !
N
S
Burda da merkezi N olan birçok çember görüyoruz . Bunlara PARALELler denir .
EKVATOR
ℓ
ℓ'
S
Ama pu paralel çemberler aynı zamanda N merkezinin tam zıttı olan « güney kutbuna » da ℓ uzaklığındaki noktalar kümesidir .
Aralarında biri vardır ki diğer bütün çemberlerden büyüktür - çemberdeki bir çeşit EKVATOR gibi .
Vay . Küre üzerindeki bir çemberin neden N ve S olarak iki merkezi olduğunu anladım !
Bu « ekvatorlar » BÜYÜK ÇEMBERLER olarak bilinirler - doğruları oluşturan BUNLARDIR .
Bir DOĞRUYU bu kadar yakından daha önce hiç görmemiştim .

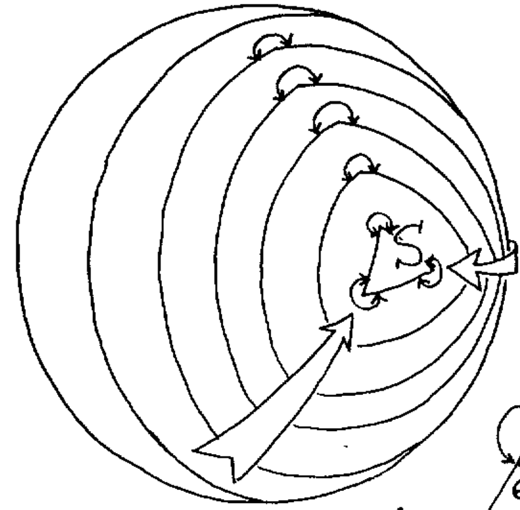

N
Kuzey kutup çemberi
MADRİD
NEW YORK
BÜYÜK ÇEMBER
PARALEL
Yengeç Dönencesi
EKVATOR
Oğlak Dönencesi
S
Güney kutup çemberi
DÜNYA üzerinde , kuzey , güney kutup çemberleri ve dönenceler paraleldir . Madrid ve New York aynı paralel üzerindedir . Ama bilindiği gibi aralarındaki en kısa mesafe bu paralel üzerinde değil , BÜYÜK ÇEMBERin bir parçası üzerindedir .
Ben gençken , buna ORTODOMİ denirdi .
A
B
C
ÜÇGENİN her kenarı , büyük çemberlerin parçaları olmalıdır .
Böyle bir üçgenin somut bir örneği için bant veya lastik kullanabilirsiniz . Her köşeye açıölçeri koyarak açıları ölçebilirsiniz .
Peki A+B+C'nin toplamını kaç buluyorsun ?
Bu üçgene göre değişir , ama 180° ve 900° arasındadır .
Kısa mesafelerde , küre neredeyse düzlemseldir . O zaman bu durumda açıların toplamı...
180° ye çok yakın .



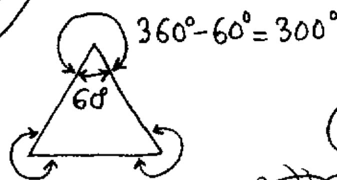


Bir üçgen düşün , lastikten yapılmış , ve köşesi küre üzerinde sürekli ilerliyor . Açılar giderek büyürdü ; ve toplamları da .

Ve öyle bir an gelir ki üç köşe de tek bir büyük çemberde , ekvatorda , birleşir . A,B ve C açıları düz çizgiler haline gelirler , yani 180° olurlar . Bu durumda toplam 540° olur !!



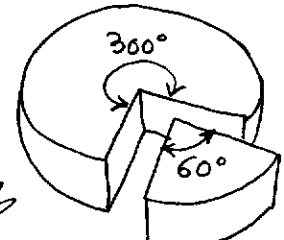
Üçgenimiz güney yarımküreye doğru açılırken , üçgenin köşeleri N noktasının tam karşısındaki S noktasına yaklaşmaya başlar .
Bu durumda açılar 180 dereceyi aşar ! Daha açık söylemek gerekirse , herbiri 360°-60°=300° olur .



Toplam 300 x 3 = 900°

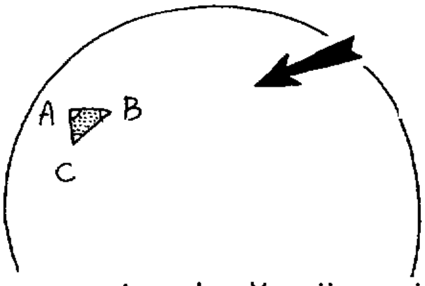
Hmm...

Tam açı 360° dir .

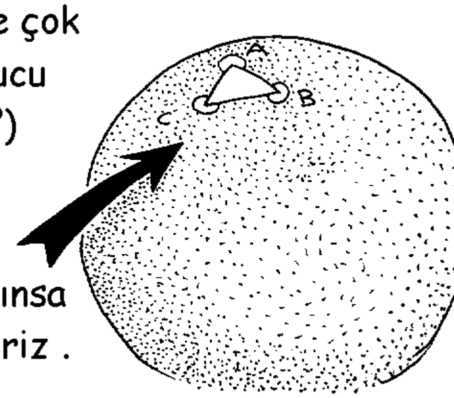


Demek ki , bir küre üzerinde , bir üçgenin iç açıları 180° ile 900° arasında değişebilir .

Aslında , Gauss'un ispatladığı bit teoreme göre , R kürenin yarıçapı ve A üçgenin alanı olmak üzere , açıların toplamı A+B+C = 180(1+A/3,1416R²) derecedir .

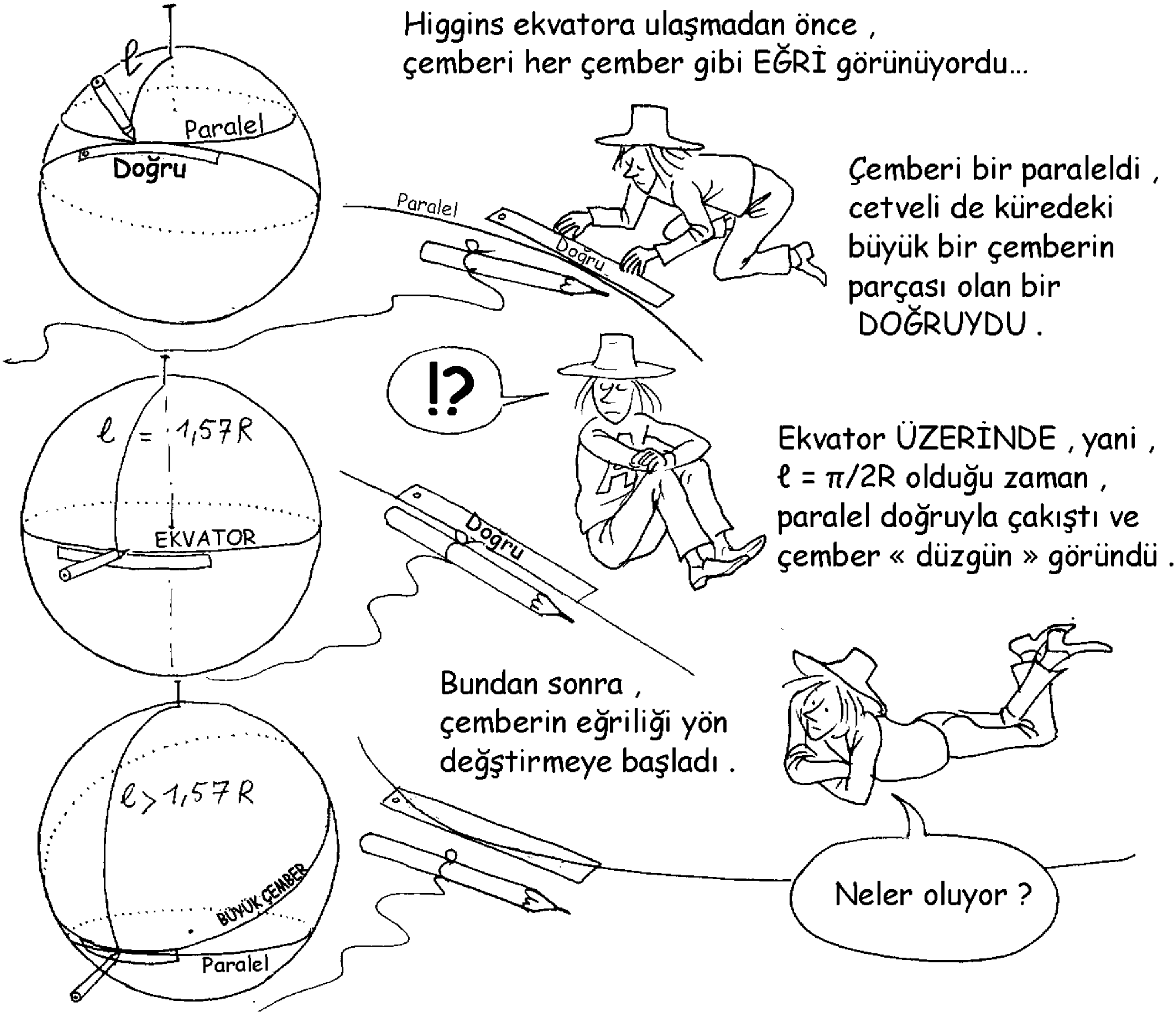


Yüzeyimiz bir küreye göre çok daha darsa , öklidyen sonucu elde ederiz . (A+B+C=180°)

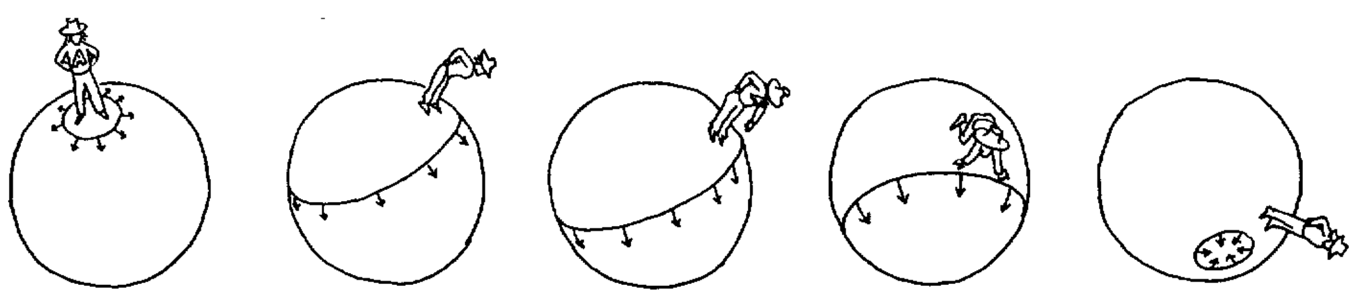


Ancak eğer üçgenin alanı kürenin alanına yakınsa 4 x 3,1416 x R² formülünden 900° elde ederiz .


Hatırlatma :
Bir kürenin iki noktası , iki yay ile birleştirilip BİR büyük çember oluşurulabilir . Ancak N ve S noktaları taban tabana zıt ise , bu durumda SONSUZ TANE büyük çemberler kürenin bu iki noktasından geçer . Küre üzerindeki bu iki yay N ve S köşelerinde birbirine eşit olacak şekilde açılar oluşturur . Açıların toplamı...HERŞEY olabilir !!
N
S
Bilirsin işte , çıldırmış bunlar ...
Patron
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Şimdi neden Archie'nin fayanslarının ve çitlerinin sürekli arttığını bulmaya çalışalım...
(C) bizim çizdiğimiz çember , ve (∂) Archie'nin çizdiğini SANDIĞI çember .
Alan için , yüzey geometrisinden bir formül kullandı : $\pi\ell^2$ (π = 3,1416...) .
Gerçek alan kürenin alanının yarısı , 2 πR^2.
Şimdi , ℓ kürenin çevresinin çeyreğine eşit , $\frac{1}{2}\pi R$.
Bu durumda iki alanın oranı $\pi^2/8$ = 1,233 .
Parametrelerin oranı $2\pi\ell/2\pi R = \pi/2$ = 1,57 .
Eğer bana hala inanmıyorsanız küredeki diski sarmayı deneyin !
Hay aksi ! Kıvrımları var !
Disk mi ? Disk mi ? NE diski ?



Bu , üzerinden geçmeden bir çemberin « içine » ya da « dışına »
nasıl çıkabileceğimizi gösterir .Çemberin lastikten yapılmış olduğunu
ve bir bilardo topunun üzerinden geçtiğini hayal edin .



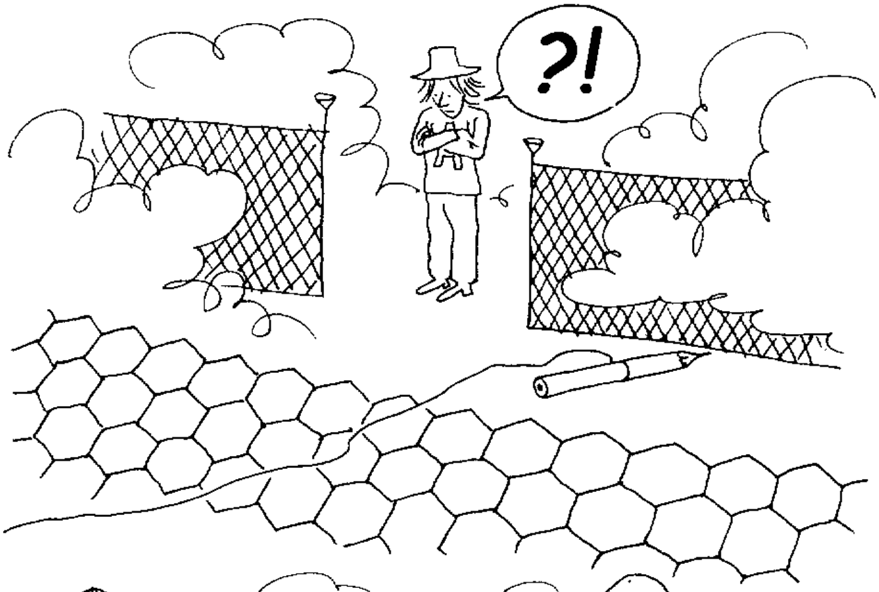
Archie'nin matematikçi Gauss (1777-1855) tarafından bulunan bu fikirleri sindirmesi biraz zaman aldı . Bir sonraki adımın DÜZLEM geometrisini anlamak olduğuna karar verdi .

Bilim bazen risk almayı gerektirir...

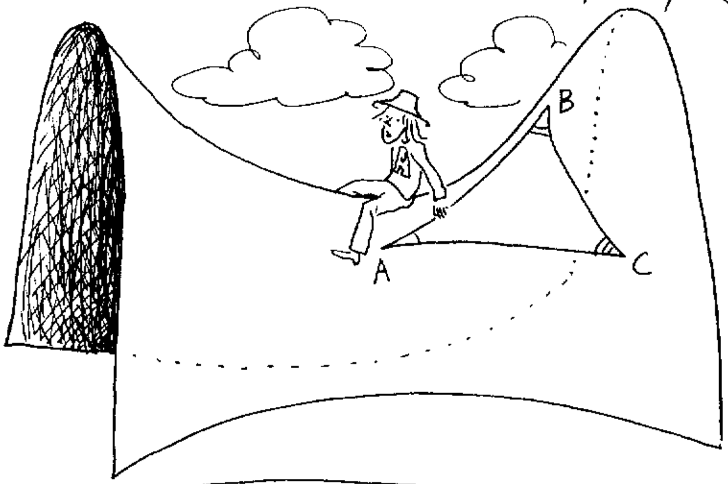
Yeni bir dünyaya varış yapan Archie bir kez daha bir doğru oluşturdu – ama bu sefer...

Doğru KAPANMADI .

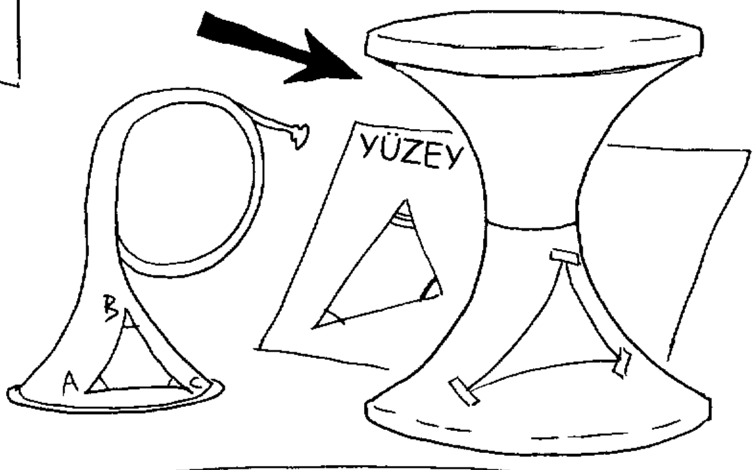
Archie gerilmiş üç parça ip kullanarak bir üçgen yaptı , ama bu seferde açıların toplamı 180° den küçük çıktı !



Her zamanki gibi , Archibald Higgins sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalardan oluşturduğu çemberin çevresini $2\pi\ell$ den , alanını $\pi\ell^2$ den BÜYÜK olarak belirledi .
SİSTEN KURTUL :



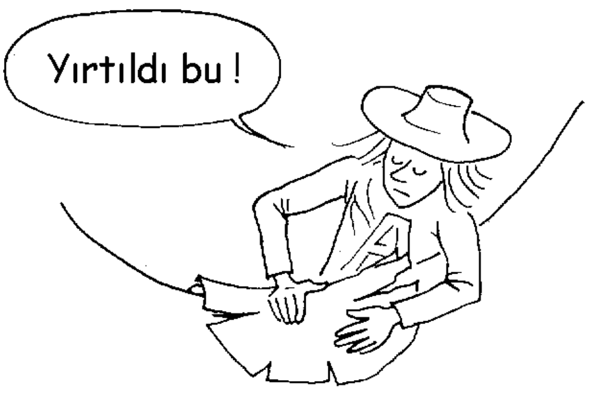
Bu yüzeyin şekli bir dağ geçidi ya da bir at EYERİ gibi . Günlük hayattaki bir çok nesne örnek olarak verilebilir - bir av borusu , böyle bir tabure , ya da ...



EĞRİ :

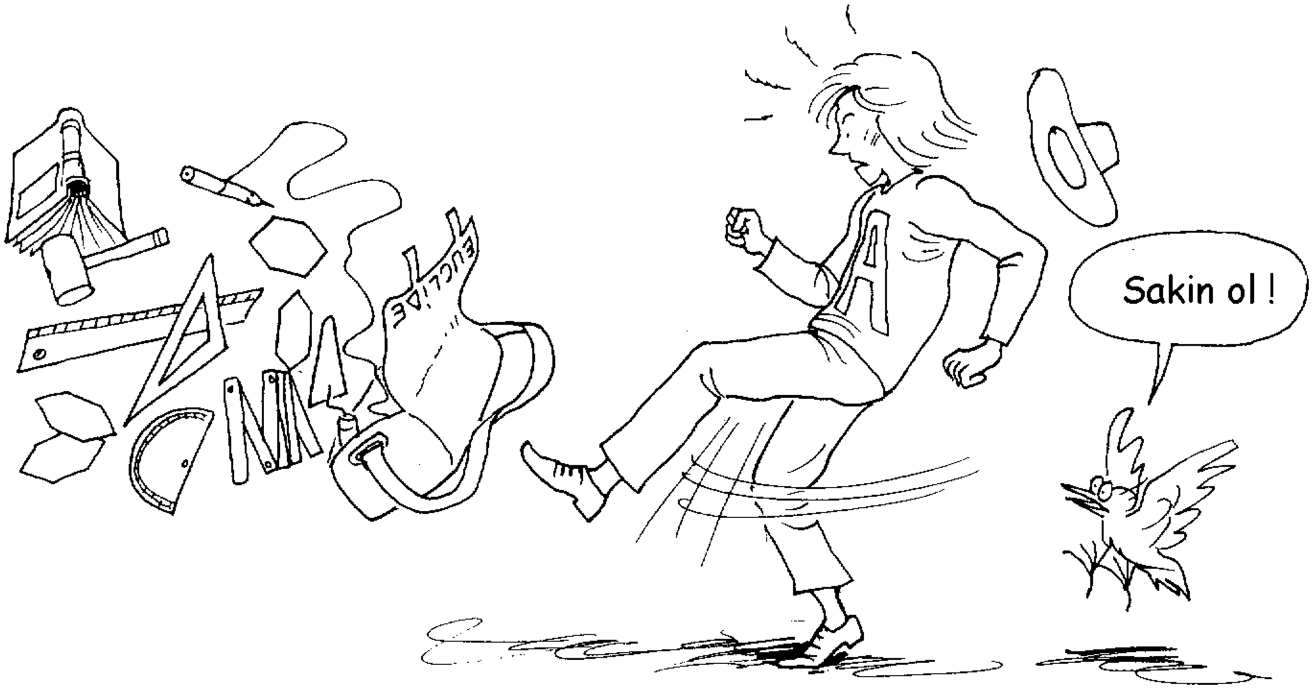
EĞRİ bir yüzeyde ÖKLİD ve Ortakları Şirketinin teoremleri geçerli değildir .Eğri pozitif veya negatif olabilir .
POZİTİF EĞRİ yüzeyinde , üçgenin iç açıları toplamı 180° den büyüktür . ℓ yarıçaplı bir çember çizerseniz , alanı $\pi\ell^2$ den , çevresi de $2\pi\ell$ den küçük olur .
NEGATİF EĞRİ yüzeyinde , üçgenin iç açıları toplamı 180° den küçüktür . ℓ yarıçaplı bir çember çizerseniz , alanı $\pi\ell^2$ den , çevresi de $2\pi\ell$ den büyük olur .

Bir süre önce , Archie bir parça yüzeyi pozitif eğimli bir düzleme SARMAYA çalıştığında yüzeyin kıvrıldığını fark etti . Ayrıca bir parça yüzeyi negatif eğimli bir düzleme sarmak da imkansızdır : çünkü yırtılır . Sarma özelliği pozitif veya negatif bir eğri için en basit testtir .



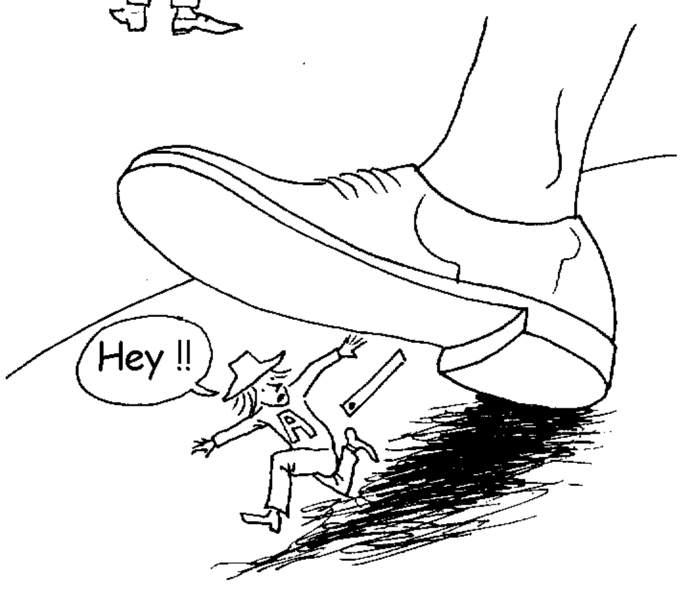
Bir önceki sayfada gördüğünüz gibi , bazı yüzeylerin bir kısmı pozitif eğri bir kısmı negatif eğri olabilir .

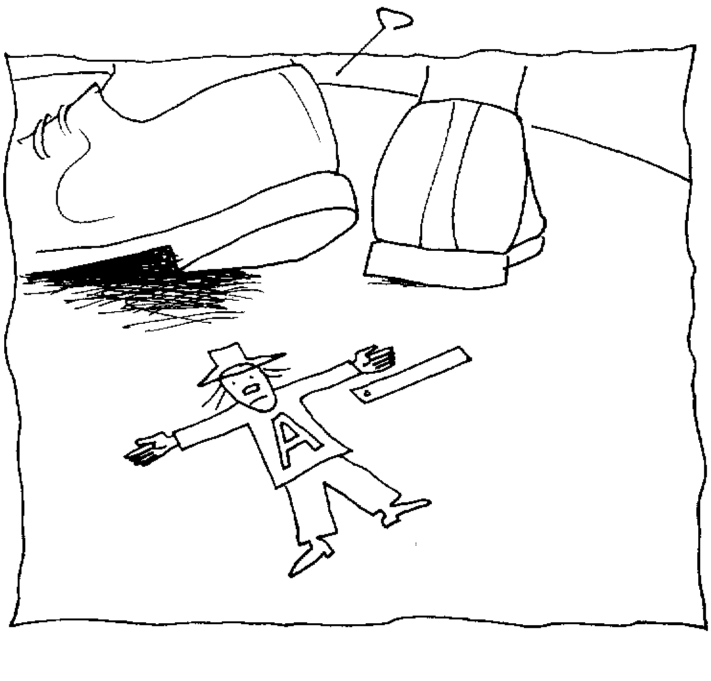

Sarma testi...
Hmm ! Silindiri veya koniyi bir yüzeyle sarabiliyorsun !
Heyecanlanma .Üç parça lastiği – doğruyu – yapışkan bantla silindire yapıştıracağım .
B
A
C
...Şimdi , yüzeydeki doğruları işaretleyelim...
Silindiri açıp DÜZLEŞTİRELİM .
!...
B
A
C
Tanımımıza göre , silindirler ve koniler gibi DÜZ YÜZEYLER de ÖKLİDYEN geometriye uyuyor .



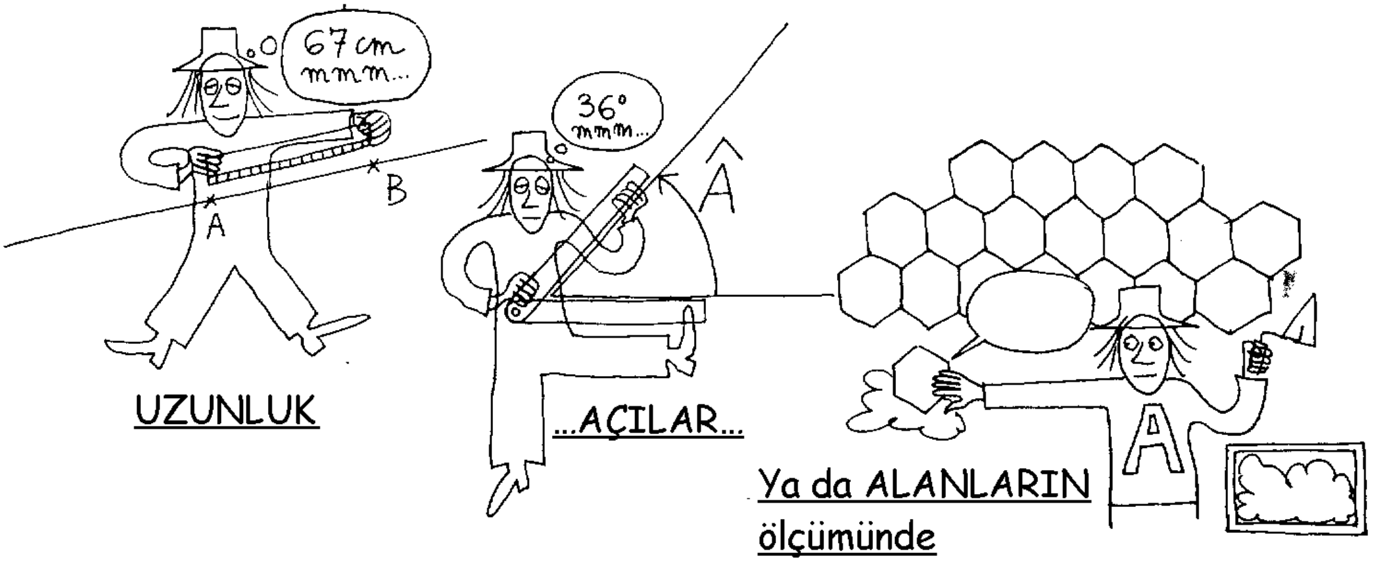
UZAY KAVRAMI :

Daha önce , sis , Archie'nin gözünün önündeki şeyi görmesini engelledi . Sis olmasaydı , ÜZERİNDE durduğu KÜRESEL YÜZEYİN eğimini fark ederdi . Higgins'in yüzeyin eğimini görmesini engelleyen bir neden daha var : yüzeyin İÇİNDE yaşaması – onun bir PARÇASI olması .

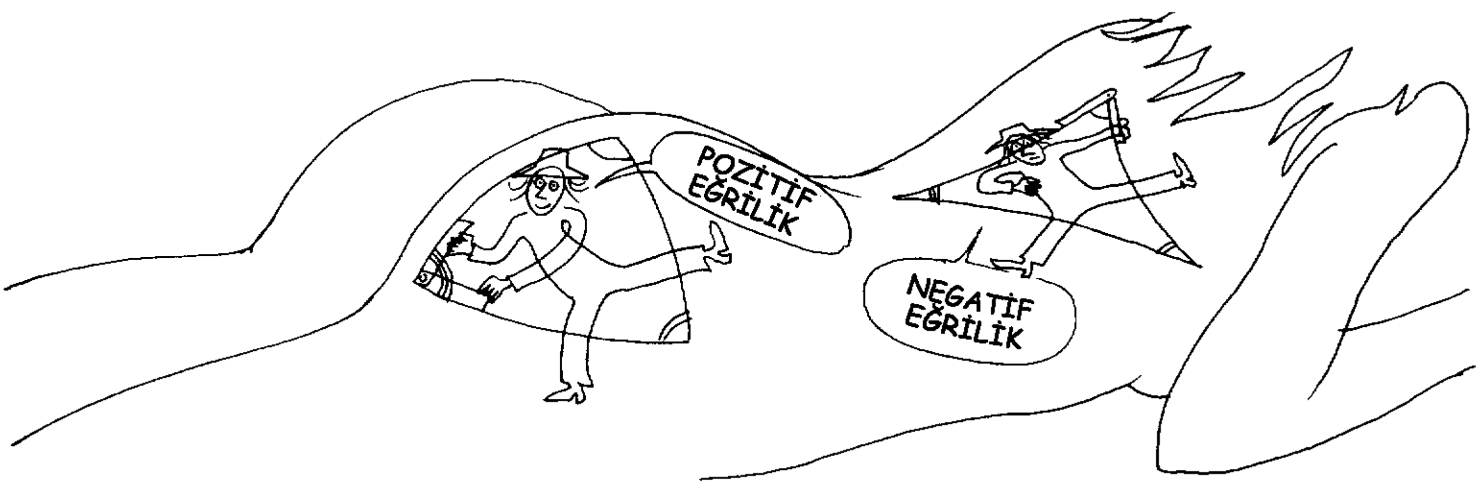




Bu yeni bakış açısının şu kavramlar üzerinde bir etkisi olmadığına dikkate edin :



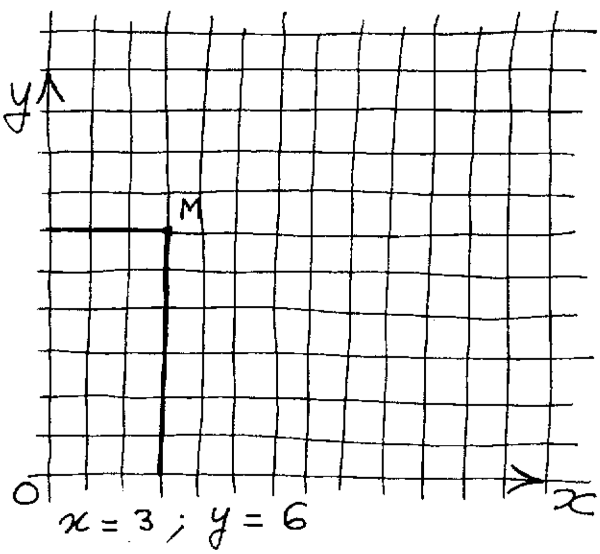
Ancak , yüzeyin üzerinde sınırlanmış olmasına , Archie GÖREMEDEN de yüzeyin eğimini dikkate alabilir ve pozitif ya da negatif olduğuna karar verebilir , hatta ölçebilirdi . Eğer üçgenin iç açıları toplamı 180° olsaydı , yüzey bir DÜZLEM olurdu . Eğer toplam 180° yi geçiyorsa , eğim pozitif olabilirdi , ve Archie EĞRİLİK YARIÇAPINI (R) , A üçgenin alanı olmak üzere , $A+B+C = 180(1+A/3{,}14R^2)$ olarak ölçebilirdi .
Eğer toplam 180° den küçük olsaydı , $A+B+C = 180(1-A/3{,}14R^2)$ ile eğrilik yarıçapını tanımlayabilirdik , ama bu durumda GENEL FİZİK ANLAMININ dışında olurdu .
Bir DÜZLEMİ , R eğrilik yarıçapı SONSUZ olanbir yüzey olarak da varsayabiliriz . Bu şekilde genel Öklidyen teoremleri de kurtarabiliriz .

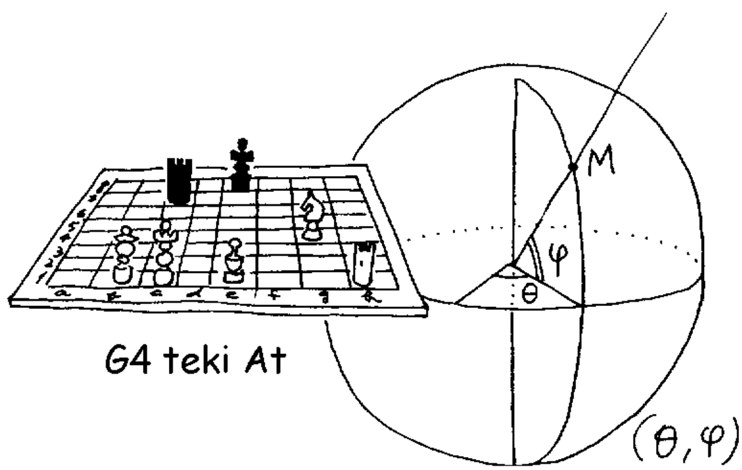


BOYUT KAVRAMI

Boyutların sayısı , seçilen bir uzayda bir noktanın konumunu tanımlamak için verilen KOORDİNATLARIN sayısı kadardır .

YÜZEYLER iki boyutlu uzaylardır . Ölçülebilen nicelikler uzunluk , sayılar , açılar vs. olabilir .

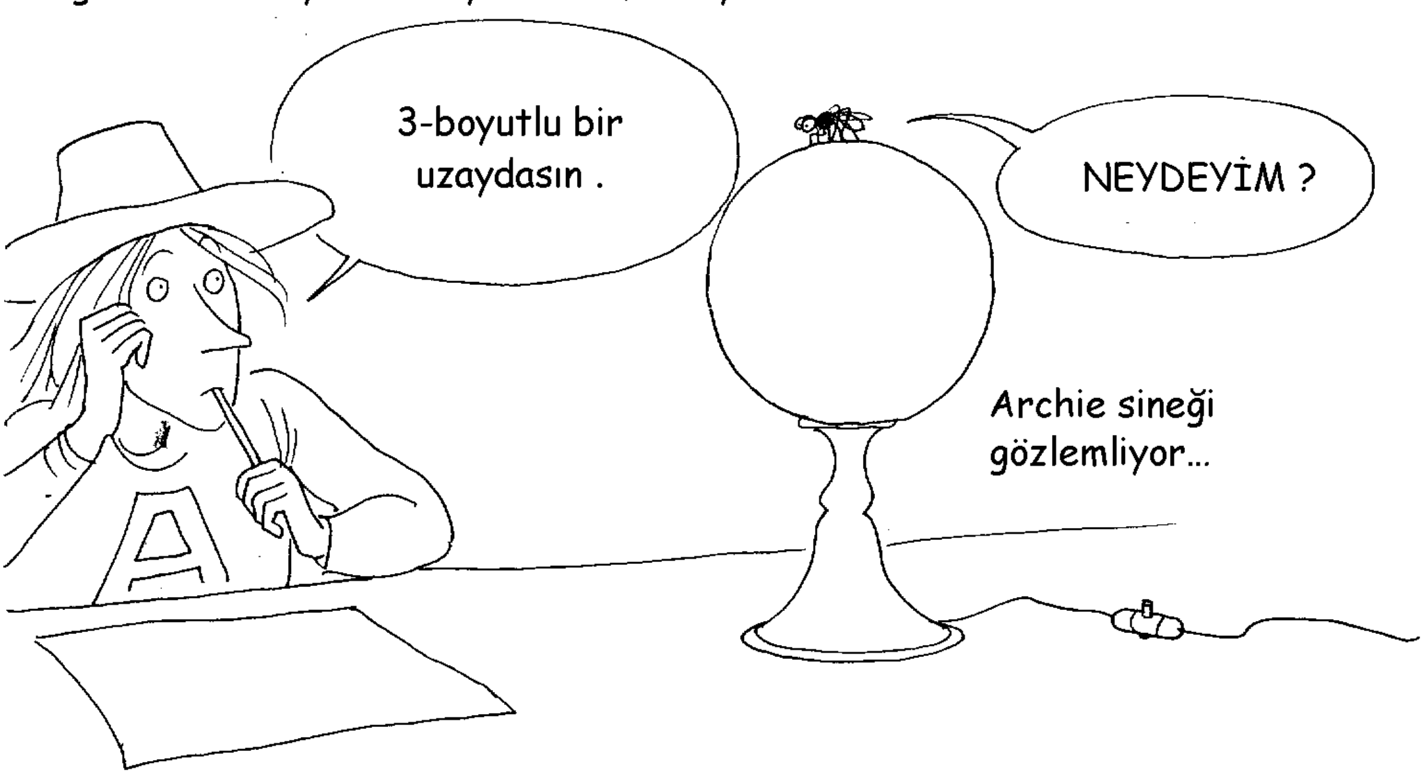


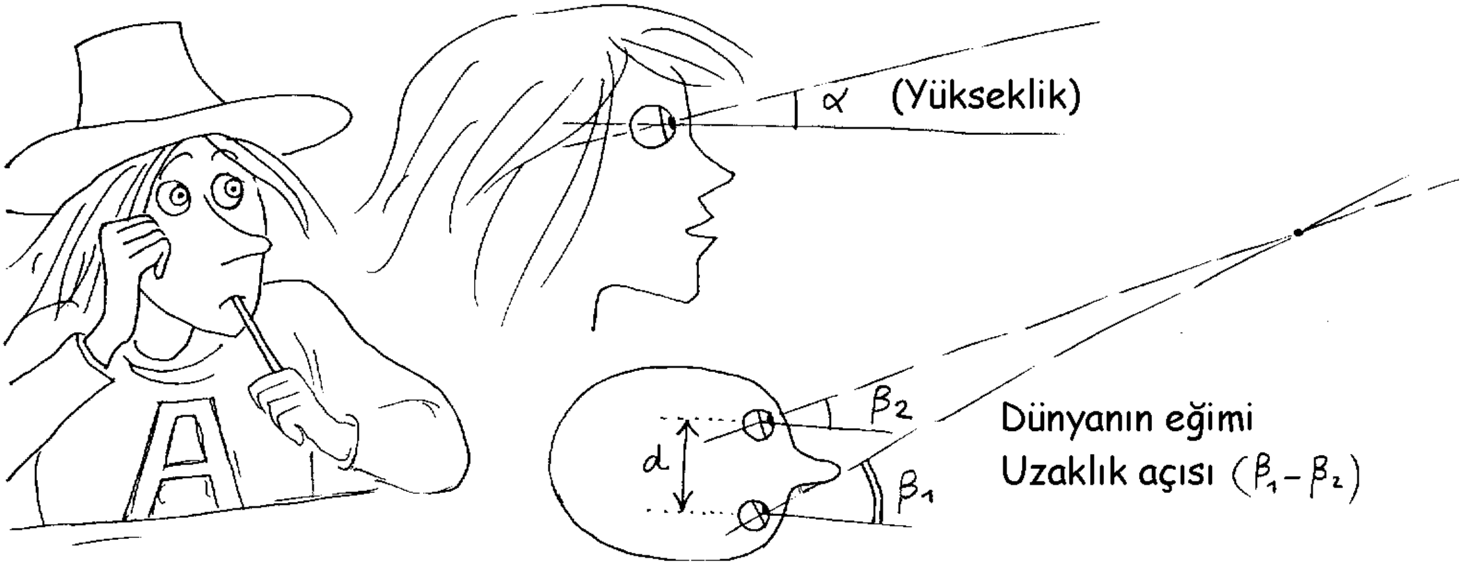


G4 teki At

Boylam , enlem

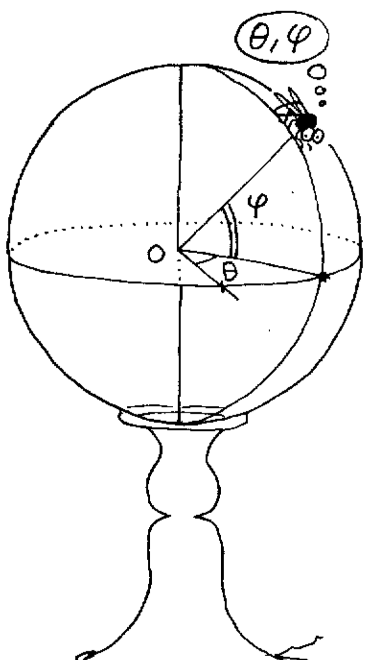
Bizim de içinde yaşadığımız uzay , eğer zaman boyutunu saymazsak , 3 boyutludur .





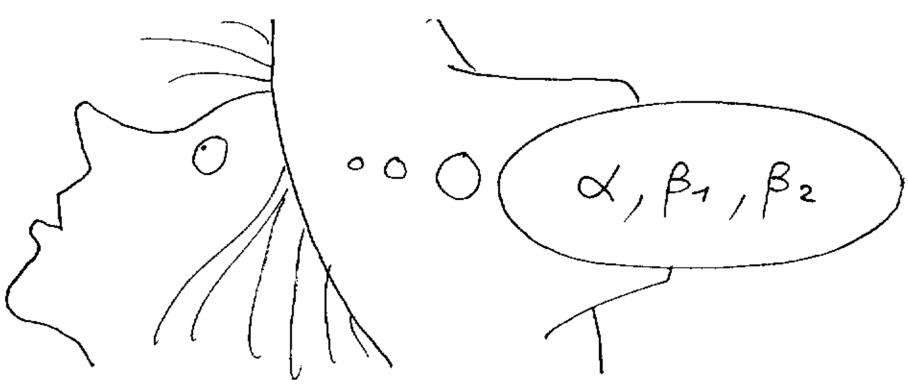
Archie kafasını çalıştırarak cisimlerin yerlerini bulabilir...
Bir noktanın yeri , yükseklik α ve gözlerinin güney açısı sapmaları β_1 ve β_2 olmak üzere üç AÇI kullanılarak bulunabilir .
β_1 ve β_2 arasındaki açısal farka UZAKLIK AÇISI (Paralalaks) denir .
Archie'nin beyni bu uzaklık açısını çözebilir , ve uzaklığı tahmin edebilir .

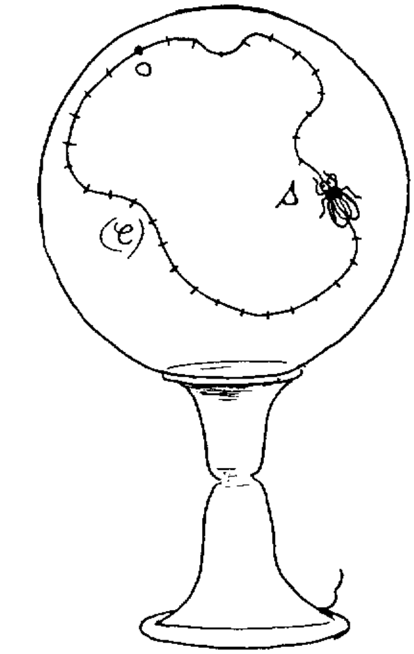
GÖMÜLME :



Ancak sinek bu 2-boyutlu uzayda konumu θ ve φ olmak üzere (boylam ve enlem) yalnızca iki açıyla tanımlanabilen bu abajurda yürüdüğünü düşünüyor .

Biz bu 2-boyutlu uzayın , bizim 3-boyutlu uzayımıza GÖMÜLDÜĞÜNÜ söylüyoruz .

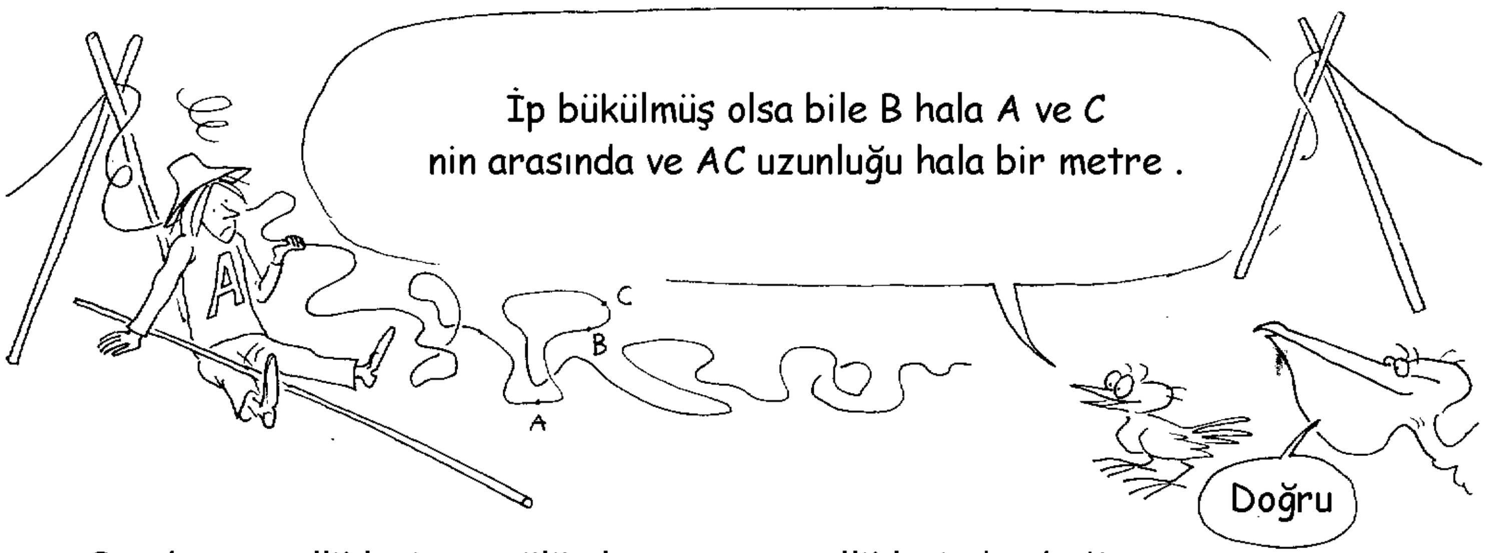




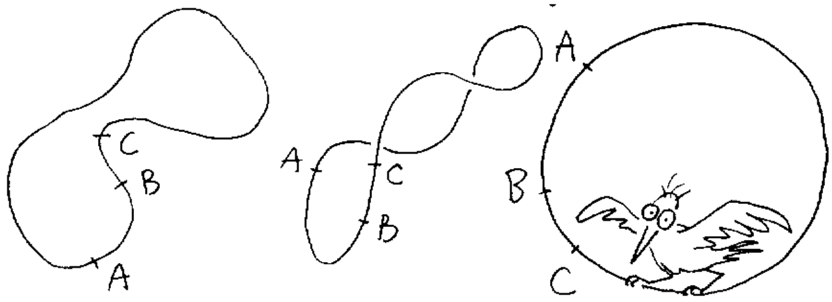
Sineğin bir eğri üzerinde (φ) hareket ettiğini düşünelim . Bu durumda konumunu , başlangıç noktasına uzaklıkla (ters yönü negatif alarak) sadece BİR koordinatla ifade edebiliriz . Bir eğri 1-boyutlu bir uzayın resmidir .

Bu 1-boyutlu uzay kendisi 3-boyutlu bir uzaya gömülü bir 2-boyutlu uzayın (kürenin) içine gömülüdür .

Bu durumda bizim içinde yaşadığımız uzay dadaha çok boyutlu bir uzayın içine gömülü OLABİLİR .



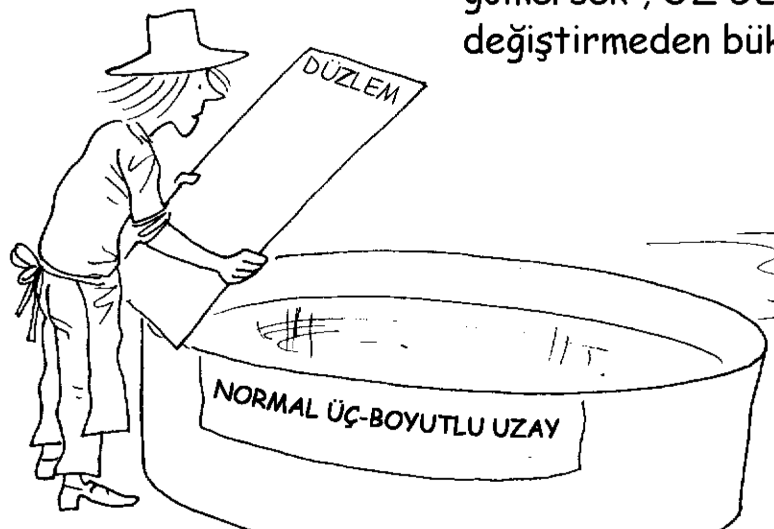
Bu , bazı özelliklerin gömülü olan uzayın özelliklerinden bağımsız olabileceğini gösterir .

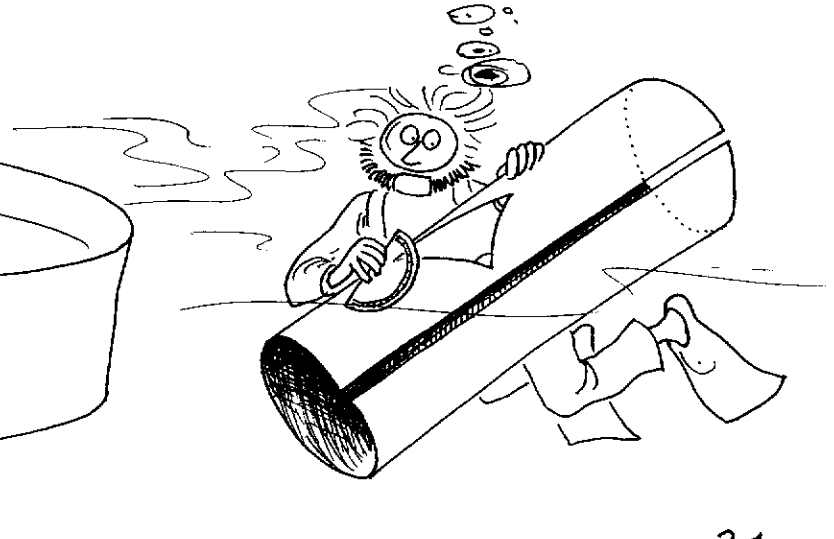


KAPALI bir EĞRİYİ normal uzaya gömmenin yolları vardır . Kapalı olduğu gerçeği nasıl gömülü olduğuna bağlı değildir .

Ancak ipi esnetmemek veya sıkışıtırmamak konusunda dikkatli olmalıyız , çünkü bu noktalar arasındaki MESAFEYİ değiştirir .

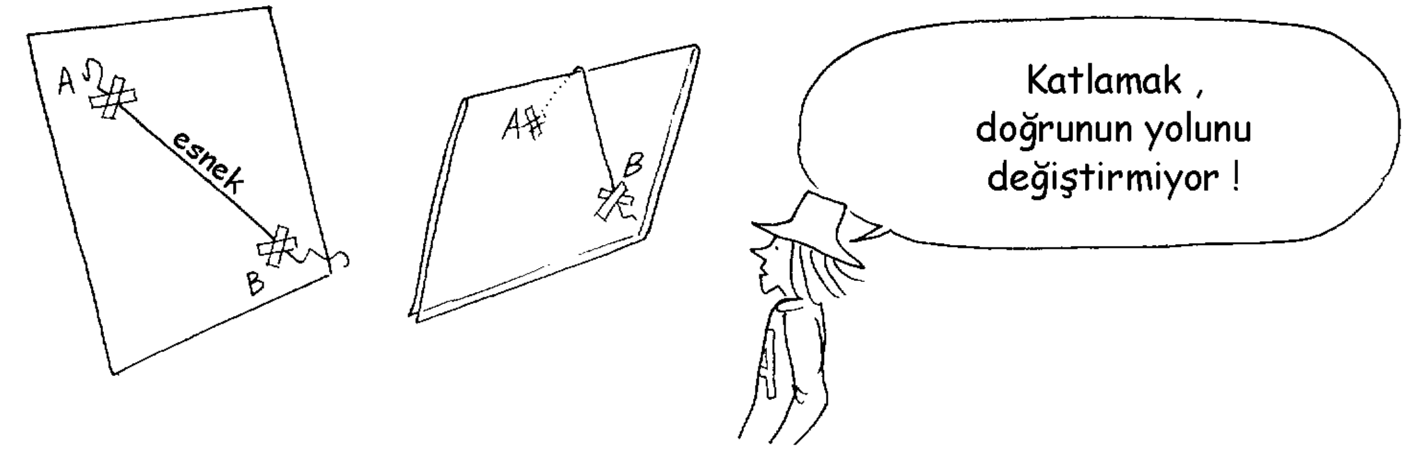
Eğer bir DÜZLEMİ normal bir 3-byutlu uzaya gömersek , ÖZ GEOMETRİSİNİ değiştirmeden bükebiliriz .



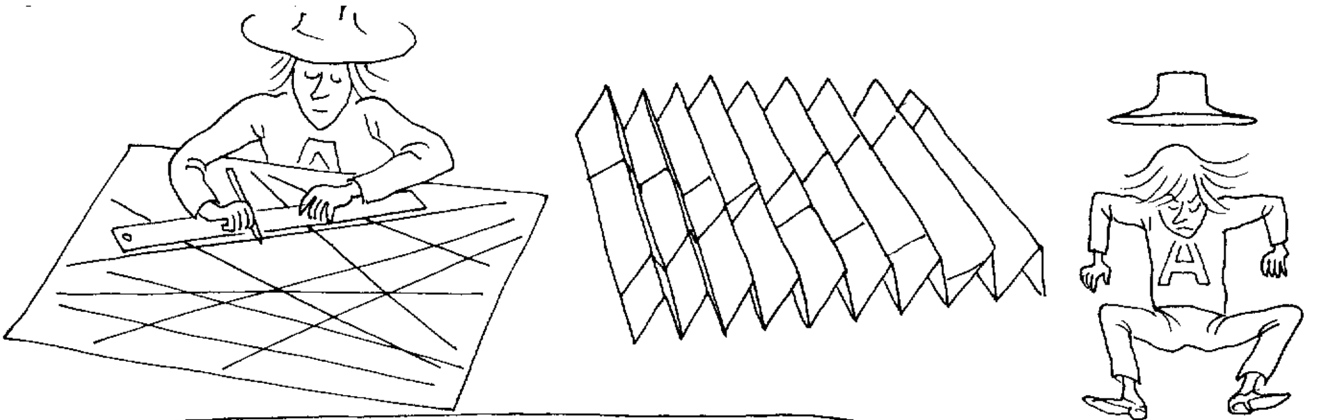


Bir düzlemi silindire çevirmenin doğruları ya da açıları değiştirmeyeceğini gördük .
Bu açıdan bakıldığında dalgalı bir sayfanın bir DÜZLEM ÖKLİDYEN geomterisi vardır .
2-boyutlu bir uzayın elemanı , yüzeyin dönmeleri , kıvrılmaları , yukarısı , aşağısı hakkında hiçbir fikri yoktur .
Bu değişimler 3-boyutlu uzaya gömülme biçimine çok az bağlıdır .

Düzlemin bir parçasını alın ve katlayın :

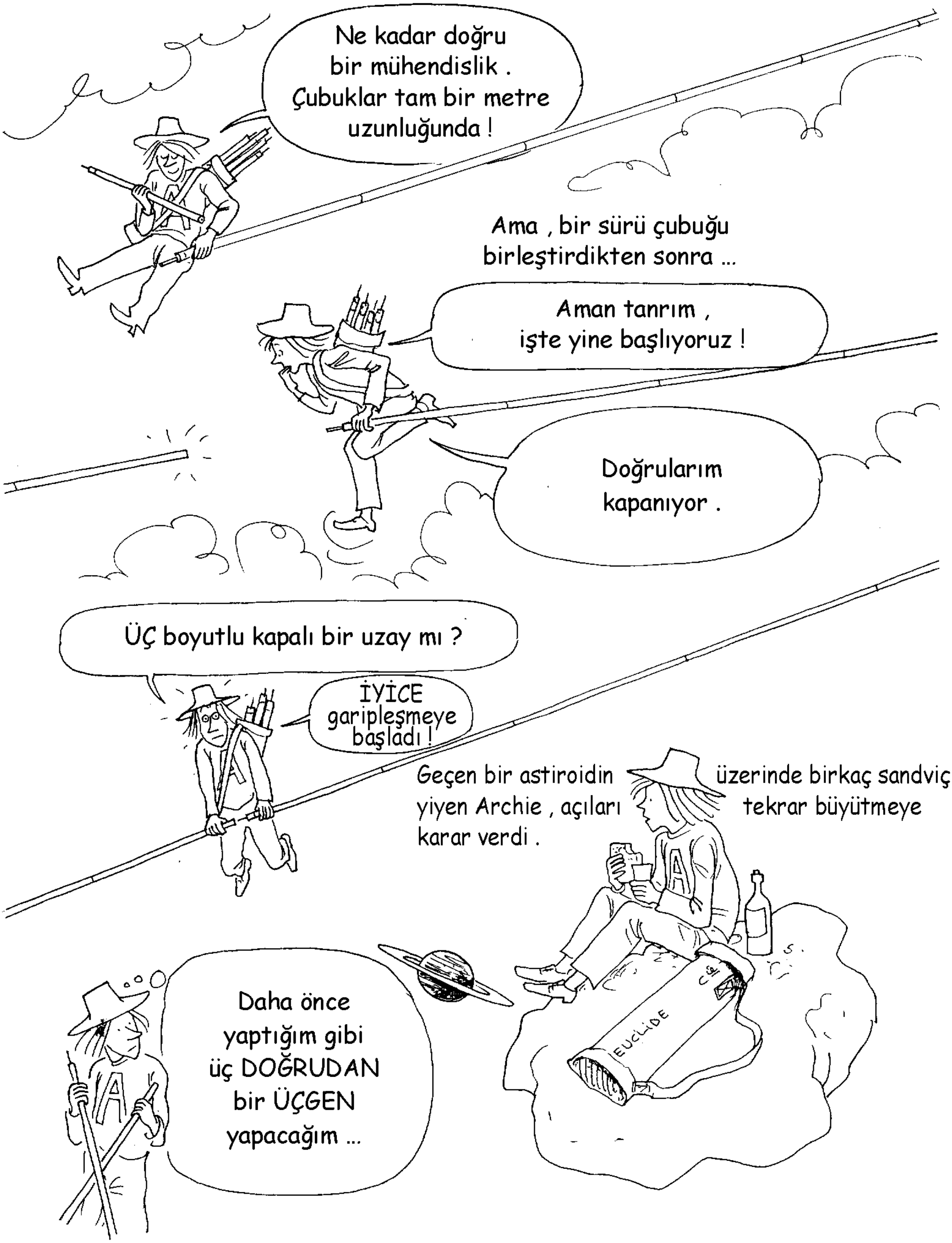


Bir cetvel kullanarak , bir kağıt parçasına düz çizgiler (doğrular) çizin . Sonra kağıdı defalarca katlayın . İşte gözlerinizin önünde bir çok doğru parçası – yüzey katlanmış olsa da olmasa da .




Bay Higgins ?
Hmm
Ben Öklid ve Ortakları şirketinden bir pazarlamacıyım . Duyduğuma göre bazı ürünlerimizle ilgili sorunlar yaşıyormuşsunuz .
ÖKLİD VE ORTAKLARI
Yanımda sizi çok tatmin edicek yeni çıkan ürünlerimizden var .
Görelim bakalım .
Bu sıralar üç boyut ilgi görüyor . İki boyut geometrisi biraz ... eskidi ...
KOZMİK UZAY SIVISI
Doğruları birbirine uyumlu ...
...düzgün çubuklardan oluşturuyoruz .
Bunlar sağa , sola , yukarı ya da aşağı sapmanıza izin VERMEYECEK – sadece DÜMDÜZ İLERİ gideceksiniz .

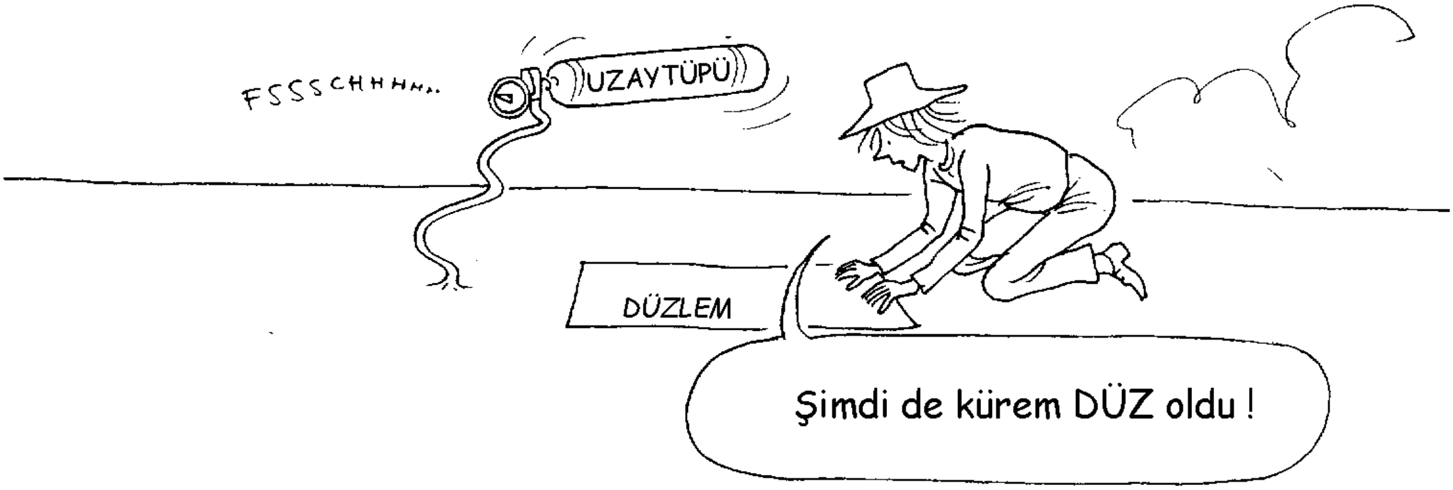

Alanları ölçmek için , neden yeni boyamızı denemiyorsunuz ? Tam tamına metrekareye 100gm .
Zekice !
Ve hacim için , gaz silindiri . Değeri UZAY TÜPÜMÜZE bağlı sayaçtan okuyabilirsiniz .
Ve unutmayın - kürenin alanı 4πℓ², hacmi 4/3πℓ³ .
Anladım .
ÖKLİD VE ORT LARI
Çok zor bir meslek .
Bu sefer Archie üç boyutlu bir uzaya indi . Başından geçenleri izlemeye devam edelim...



Ne kadar doğru bir mühendislik . Çubuklar tam bir metre uzunluğunda !
Ama , bir sürü çubuğu birleştirdikten sonra ...
Aman tanrım , işte yine başlıyoruz !
Doğrularım kapanıyor .
ÜÇ boyutlu kapalı bir uzay mı ?
İYİCE garipleşmeye başladı !
Geçen bir astiroidin üzerinde birkaç sandviç yiyen Archie , açıları tekrar büyütmeye karar verdi .
EUCLIDE
Daha önce yaptığım gibi üç DOĞRUDAN bir ÜÇGEN yapacağım ...

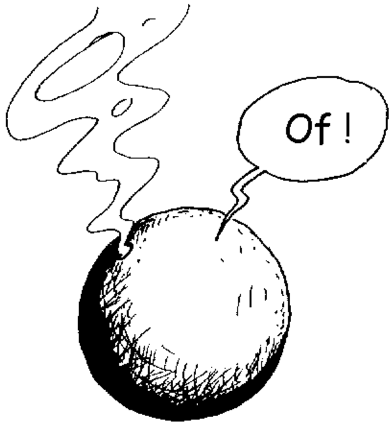
?!?
Doğrularımı birleştirdim – ama üçgenimin iç açıları toplamı 180° den fazla çıktı !
Hmm evet...
UZAYTÜPÜ
Bir tane yapacağım , hacmini ve alanını ölçeceğim .
FSCHHHHHHHH
Sabit bir N noktasından ℓ uzaklıktaki noktalar kümesine küre diyoruz .
Alan 4πℓ² den daha az...
...ve hacim 4/3πℓ³ daha az !
Yine aynı şey .

Archie küresinin yarıçapını artırdı ...



Daha da fazla...

Biraz sonra...

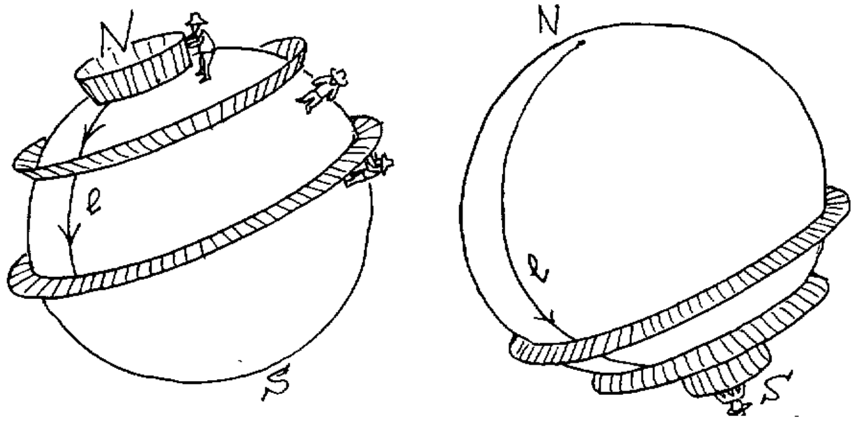


Ve...Archie , bir balonu üç boyutlu uzayda şişirerek kendisini İÇİNDE buldu !

Eğer gazi zamanında kapatmasaydı , tamamıyla ezilecekti , tıpkı 13. sayfada kendi kendini hapsettiği gibi .

Dünyadaki en iyi azim bile , bu üç boyutlu uzayın EĞRİLİĞİNİ GÖZLEMLEMEYE yetmez . Doğruları kapalı , ve hacmi SINIRLI sayıda kübik metreden oluşuyor , tıpkı sınırlı sayıda metrekareden oluşan dünyamızın yüzeyi gibi .
Bu üç boyutlu uzayda bir üçgenin iç açıları toplamı 180° den büyük .
Eğriliğini « GÖREBİLMENİZ » için dört boyutta hayal etmeniz gerekir .

Üç boyutlu EVRENİMİZİN kendisinin de , beş boyutlu bir uzaya gömülmüş olan dört boyutlu uzayın içine gömülmüş bir HİPERUZAY olduğunu söylemek yanlış olmaz . Ama şu anda bu konulardan bahsetmek için erken...



Küre üstünde ,
Higgins yarıçapı artırarak ,
kendisini kendi orjinal N
noktasının zıt kutubu
olan S kutbunda buldu .

Pozirif bir eğrinin 3-boyutlu bir uzayında da aynı şey olur .
Kendi 2-boyutlu küresinde , Archie yolu yarılayarak EKVATORA ulaştı .
Bu üç boyutlu HİPERKÜRESEL uzayda da bir EKVATOR var ;
Archie , balonu mümkün hacimin yarısını aldığında ulaşmıştı .
Küre üzerinde , ekvator DÜZ bir ÇİZGİ gibi görünüyordu .
Aynı şekilde , hiperkürede , « ekvatoral balon » bir DÜZLEM gibi göründü

Ekvatoru geçtikten sonra balonun eğriliği yön değiştirdi , ve Archie N noktasının zıt kutubu S noktasına yani balonun merkezine kaymış oldu .

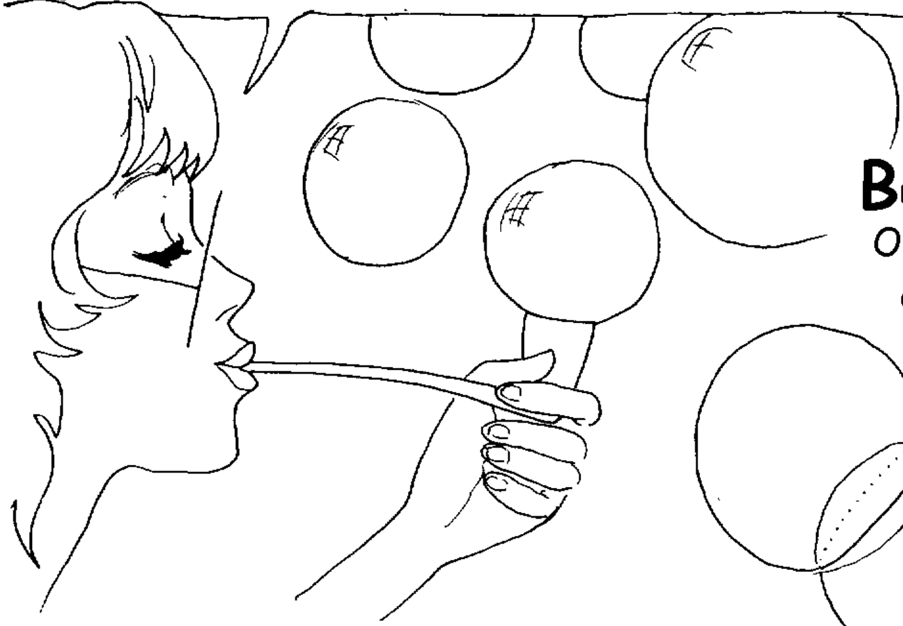

Sorun mu var ?
Yani - eee - aklım biraz karıştı .
İsmim Sophie .
Her türlü eğim - bu benim işim .
Bir hiperkürede
yön bulmak başta biraz
şaşırtıcıdır . Takılmamak
için yavaş ilerlemek gerekir .
Hmm , evet .
Konuyu biraz kaçırdım .


Peki , başlangıç olarak - Bu hiperkürenin MERKEZİ nerede ?
Bak - eğer bir düzleme çember çizersem , bunun 2 boyutlu bir uzaya , yani düzleme gömülmüş 1 boyutlu bir uzay olduğunu kabul edersin .
Ve dairenin merkezi dairenin üzerinde DEĞİL .
mmm ...
Bir küre , 3-boyutlu bir uzaya gömülmüş , kapalı , 2-boyutlu bir uzayı temsil eder . Yine kürenin merkezi kürenin üzerinde DEĞİLDİR - çevresindeki 3-boyutlu uzaydadır .
3 boyutlu bir hiperkürenin merkezi hiperkürenin GÖMÜLÜ olduğu 4-boyutlu uzaydadır . Hiperkürenin üzerinde değildir . Aynı şekilde 4-boyutlu bir uzayı 5-boyutlu bir uzaya gömebilirsin , ve bu böyle gider...

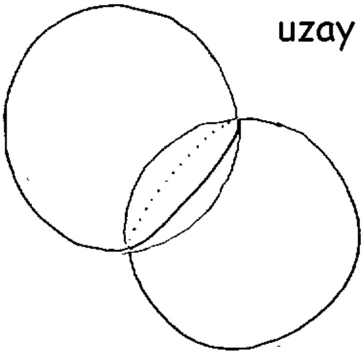
Tamam o zaman - kendini 2-boyutlu dünyana bir etiket gibi yapıştırlmış hayal et ...
Ve bir boyutlu bir küre olan daireni şişirmeye başlıyorsun .
İki-boyutlu uzayda , sınır bir yüzeydir . Aynı şekilde , üç boyutlu uzayda , sınır hacmin sınırlarıdır .
Aha ! EKVATORDA YOLUN YARISINI İŞARETLEDİĞİMDE BU olmuştu .
4-boyutlu bir uzayda , sınır 3 boyutlu olur , ve 4 boyutlu bir hiperhacimin sınırıdır .
Ah kahretsin yine neler oluyor !
Hadi dövelim şunu !
Bak , bu senin çemberin , « tek boyutlu bir balon ». Mümkün yüzeyin yarısından fazlasını kapsamaya başlıyor - S kutbuna doğru , kendisinin , ve senin , üzerine kapanmaya başlıyor .
N
S

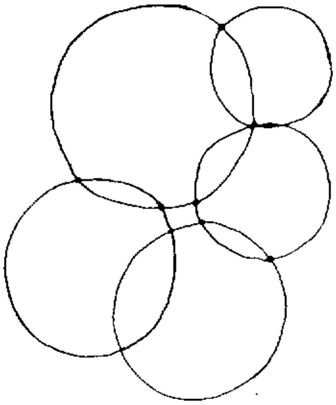

Eğimli 3-boyutlu yüzeyimde , mümkün hacmin yarısından fazlasını pompaladığım zaman , balon karşı kutba doğru ilerleyerek üzerime kapandı .
Çünkü bu 3-boyutlu eğimli yüzeyde , kürenin karşıt İKİ merkezi var .
ANLADIM !
?!!?
Yani , demek istediğim... Ne anladığımdan tam emin değilim , ama BİRŞEY anlamışım gibi hissediyorum .
Ne kadar can sıkıcı !
Sorun değil Archie . Üç boyuttan sonrasını VARSAYARAK ANLAYABİLLİRİZ .
Varsayıyorum , ama anlamıyorum !
Resmi hayalinde canlandırmalısın !

Şimdi , 3-boyutlu bir uzayla başlayıp içine
minik 2-boyutlu evrenler yerleştireceğim .



Bu evrenler iç içe olabilir . Ortak noktaları çemberler oluşturur – BİR boyutlu uzay nesneleri .



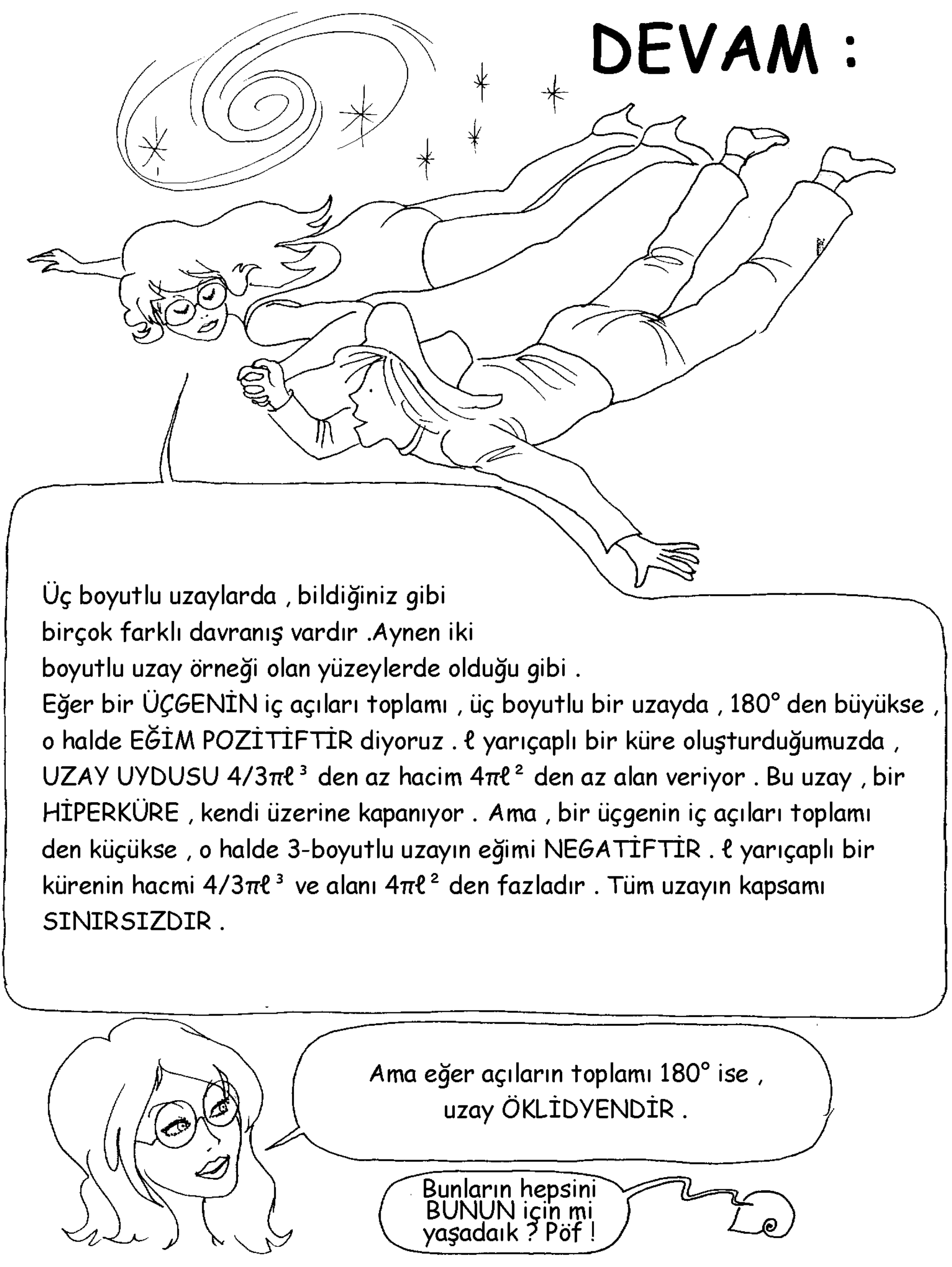


Benzer şekilde , tek boyutlu bu çemberler , bir kağıt parçasına yerleştirildiğinde (2 boyut) bazı NOKTALARDA kesişirler . (Noktalar SIFIR boyutlu kabul edilir .)

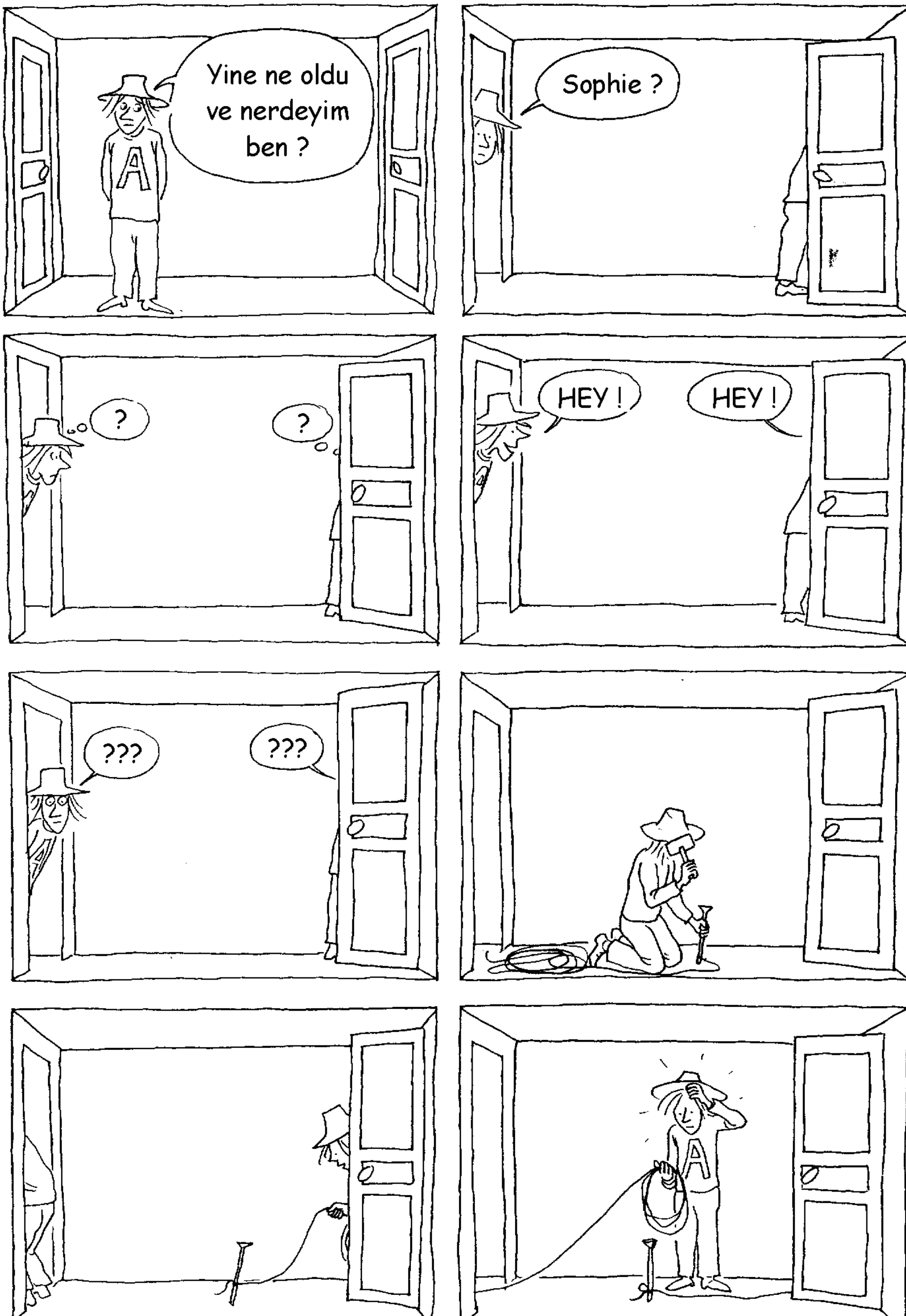
Yani bir küre , 4-boyutlu uzay içindeki iki tane 3-boyutlu « balonun » kesişimi olarak görülebilir .

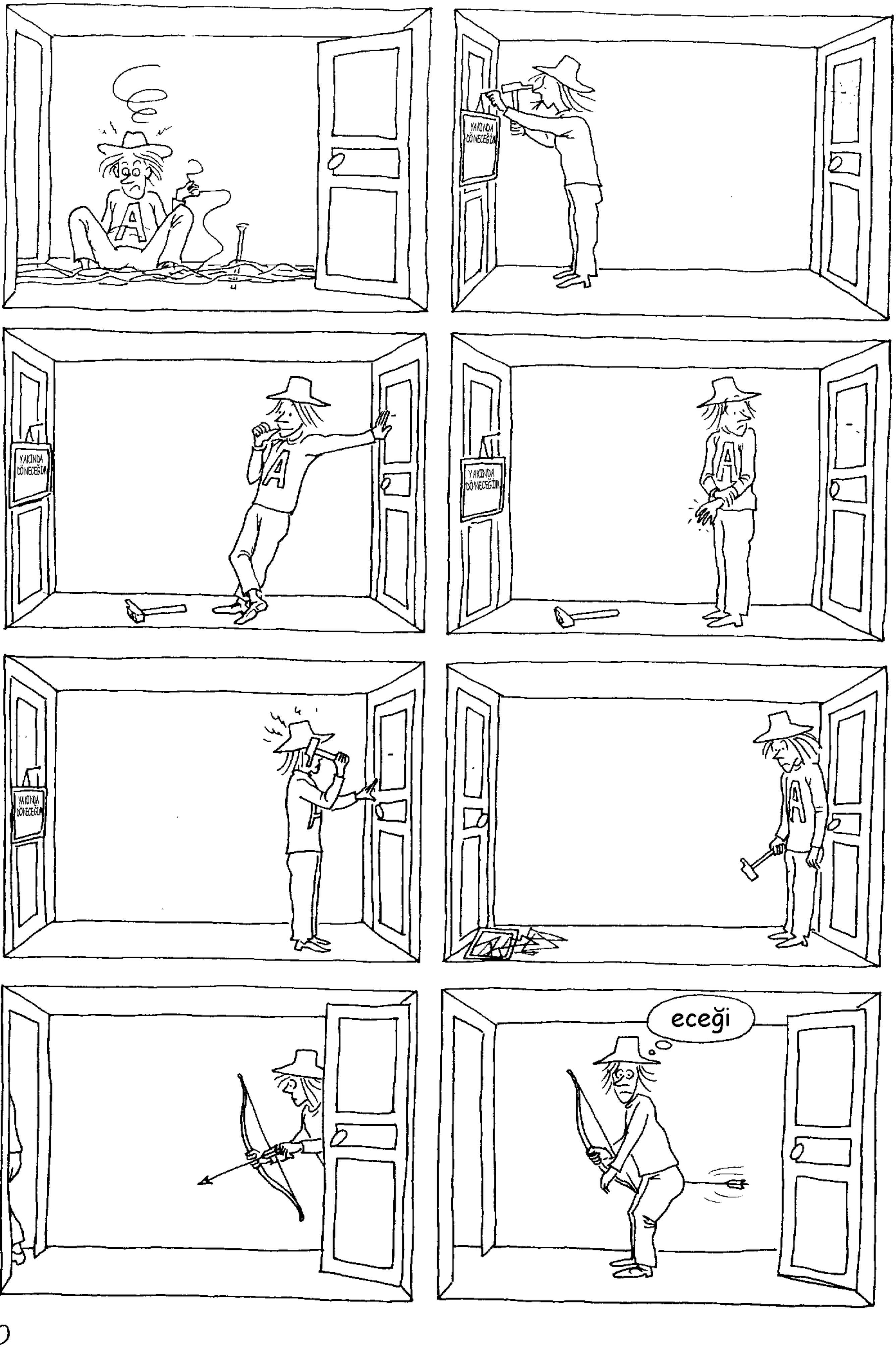
Böyle devam eder : 3-boyutlu eğri bir uzay , bir hiperküre , 5 boyutlu uzay içinde bulunan iki tane 4-boyutlu sabun balonunun kesişimi olarak düşünülebilir .


Archibald ve Sophie , uçarı tahminleri ölçerek , yeni 3-boyutlu uzayları tahmine giriştiler .
Matematik kendisinden başka birşey değil...değil mi ?
Tabii bu 3-boyutlu yapışkan bant , doğruları oluşturmak için . Yapışkan taraf ortada , doğal olarak .
Ve şimdi , bu yeni uzayda , doğrular birleşmiyor . Ve bu uzay tüpünü balonunu şişirdiğim zaman , hacim 4/3πℓ³ ü ; yüzey alanı 4πℓ² yi geçiyor . Ayrıca , üçgenin iç açıları toplamı 180° den az .
Sayfa 23 ü hatırlarsak , NEGATİF EĞRİ üzerinde olduğunu hatırlayacaksın !


DEVAM :
Üç boyutlu uzaylarda , bildiğiniz gibi birçok farklı davranış vardır .Aynen iki boyutlu uzay örneği olan yüzeylerde olduğu gibi .
Eğer bir ÜÇGENİN iç açıları toplamı , üç boyutlu bir uzayda , 180° den büyükse , o halde EĞİM POZİTİFTİR diyoruz . ℓ yarıçaplı bir küre oluşturduğumuzda , UZAY UYDUSU $4/3\pi\ell^3$ den az hacim $4\pi\ell^2$ den az alan veriyor . Bu uzay , bir HİPERKÜRE , kendi üzerine kapanıyor . Ama , bir üçgenin iç açıları toplamı den küçükse , o halde 3-boyutlu uzayın eğimi NEGATİFTİR . ℓ yarıçaplı bir kürenin hacmi $4/3\pi\ell^3$ ve alanı $4\pi\ell^2$ den fazladır . Tüm uzayın kapsamı SINIRSIZDIR .
Ama eğer açıların toplamı 180° ise , uzay ÖKLİDYENDİR .
Bunların hepsini BUNUN için mi yaşadaık ? Pöf !

BİR UZAY YA AÇIK YA KAPALI OLMALIDIR !


Yine ne oldu ve nerdeyim ben ?
Sophie ?
?
?
HEY !
HEY !
???
???

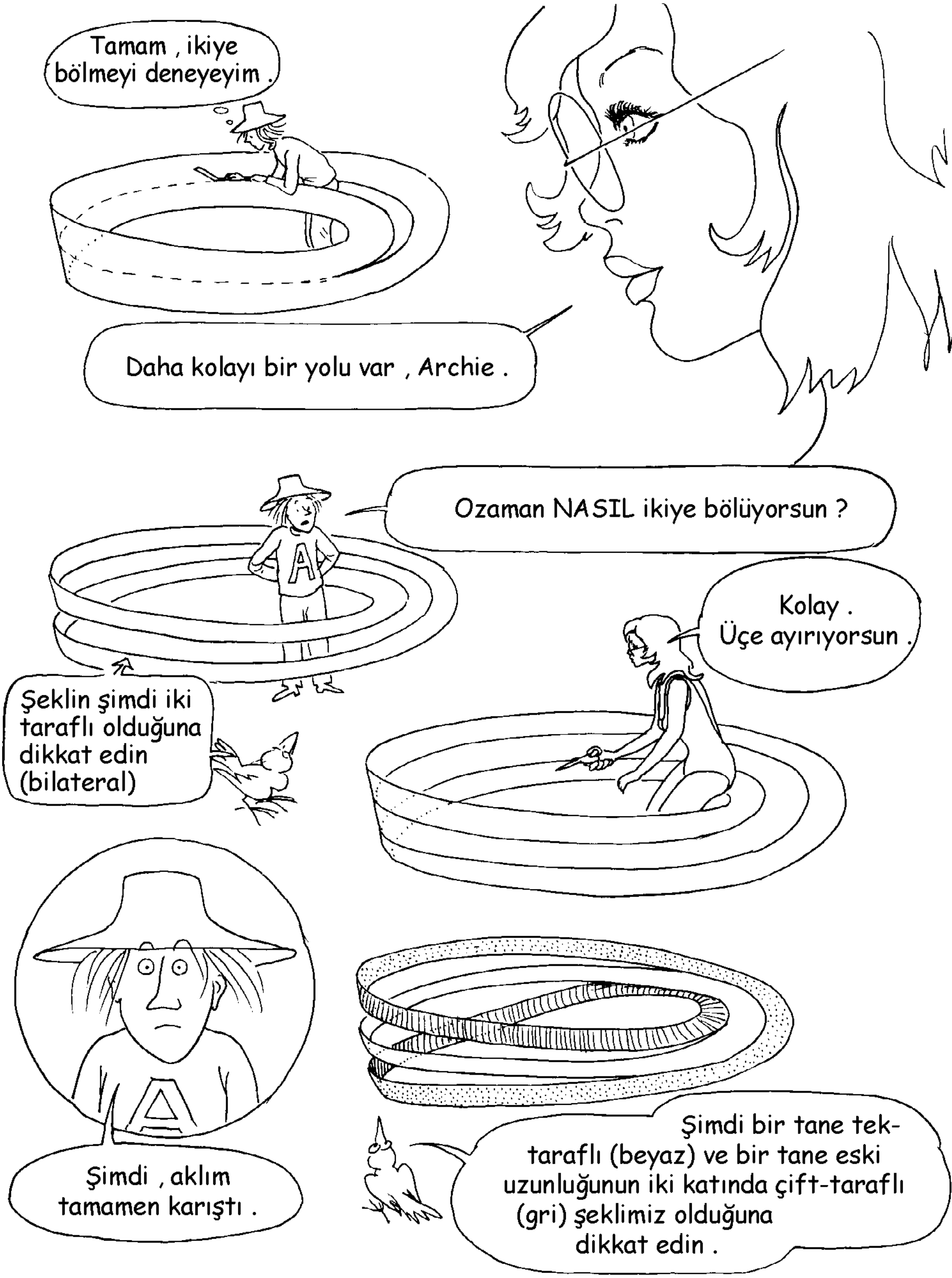

YAKINDA DÖNECEĞİM
YAKINDA DÖNECEĞİM
YAKINDA DÖNECEĞİM
YAKINDA DÖNECEĞİM
eceği


Gördüğünüz gibi - Higgins 3-boyutlu SİLİNDİRİK bir uzaya yerleştirildi . Öklidyen olmasına rağmen , sıfır eğimli (açıların toplamı 180°) bu evren kendi üzerine kapanıyor .
eceği
GEOMETRİ
Peki ! Küresel uzaylar , hiperbolik uzaylar , ve silindirik uzaylar var . Bu kadar çok değil mi ?
Öyle mi düşünüyorsun ?
İki boyutlulara küçük bir dönüş yapalım .
He !?
ANİSİS

DIŞARININ İÇİNDE :


Kapandı , daha önce olduğu gibi .
Açıların toplamı 180° . Bu alet Öklidyen . Başka bir silindir !
Ya da değil...
!?!
Bu komik...
Şimdi herşey belli oldu...bu sefer Archie bir DÖNDÜRÜLEMEZ 2-boyutlu uzayın içindeydi . Böyle bir uzayın en çok bilinen örneği Möbius Çemberi (1830) 'dır . Herşeyi düşünmüş olmalarına rağmen fikir Yunanlılardan kaçtı .
DOĞRUNUN BAŞLANGICI
Sophie ? Beni dışarı çıkar !

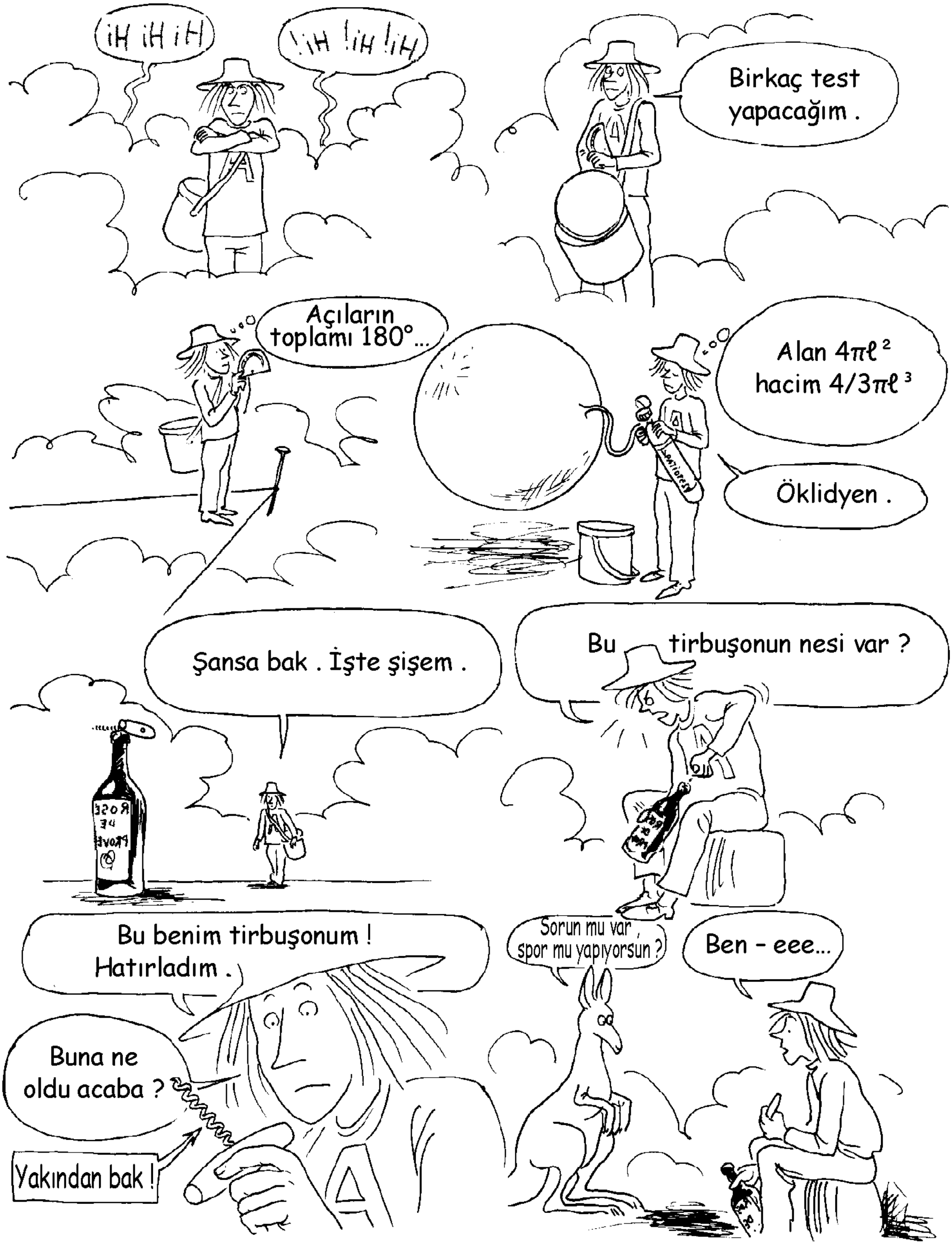
Bir yüzeye bir çember çizin , ve üzerine bir ok koyun . Çemberi , yüzey üzerinde hareket ettirebileceğimiz bir etiket gibi düşünün . Eğer çember ilk pozisyonuna geldiğinde ok aynı yönü gösteriyorsa , yüzey DÖNDÜRÜLEBİLİR diyoruz – küre , silindir , silindir vs. için de geçerli . Ama bir Möbius Çemberi üzerinde , işler farklı yürür...


Tamam , ikiye bölmeyi deneyeyim .
Daha kolayı bir yolu var , Archie .
Ozaman NASIL ikiye bölüyorsun ?
Kolay . Üçe ayırıyorsun .
Şeklin şimdi iki taraflı olduğuna dikkat edin (bilateral)
Şimdi , aklım tamamen karıştı .
Şimdi bir tane tek-taraflı (beyaz) ve bir tane eski uzunluğunun iki katında çift-taraflı (gri) şeklimiz olduğuna dikkat edin .

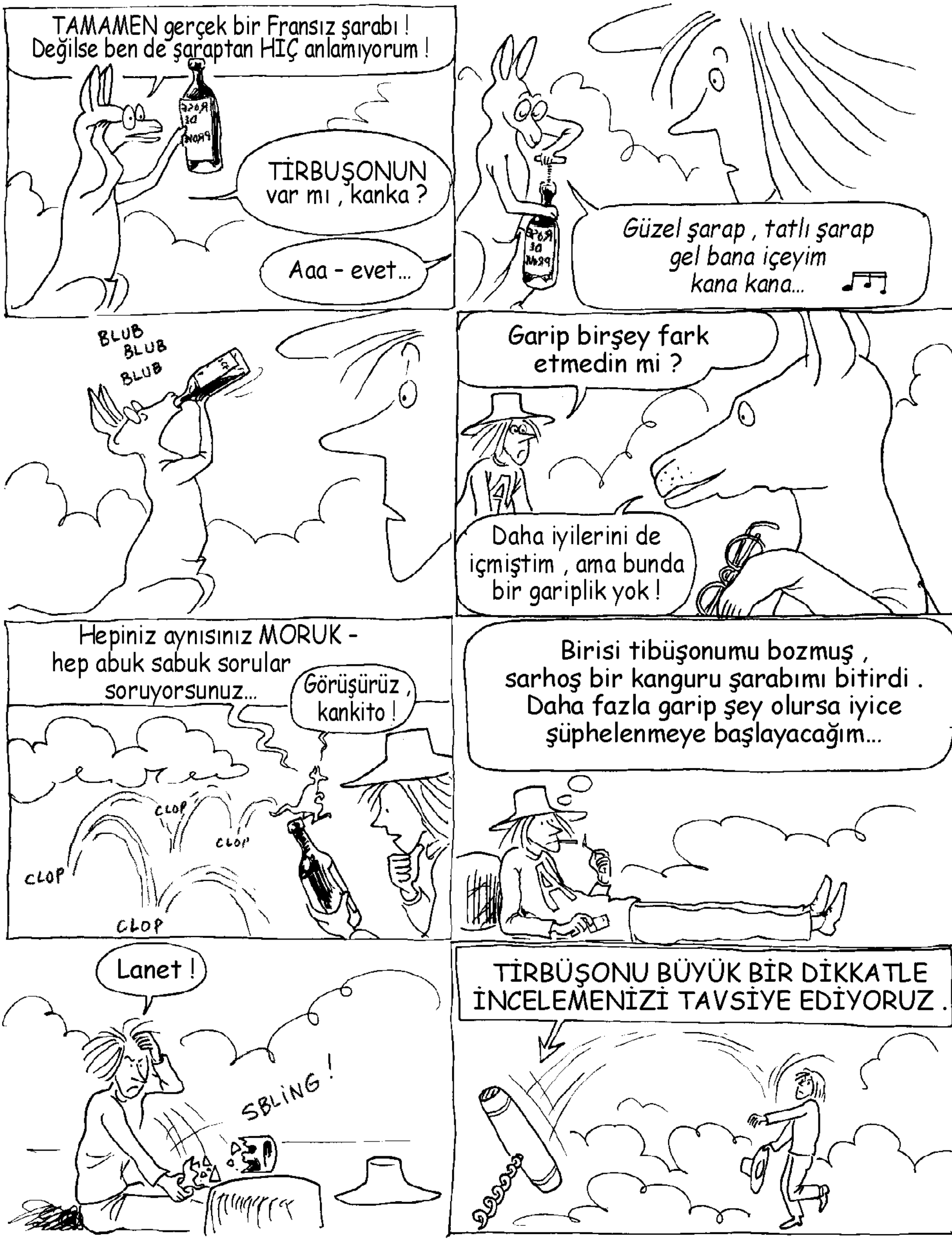
Möbiüs Çemberi hakkındaki bu küçük bilgilendirmeden sonra , 3-boyutlu Öklidyen uzaylara geri dönelim .

UZAYIN YÖNLENMESİ

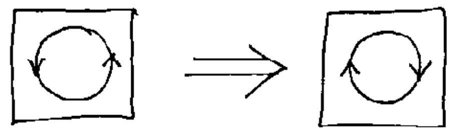
Higgins'e başka bir üç boyutlu Öklidyen dünyayı keşfinde eşlik edelim (eğim olmadan) .



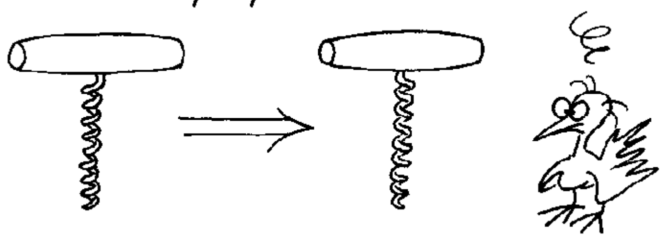
iH iH iH
Birkaç test yapacağım .
Açıların toplamı 180°...
Alan $4\pi\ell^2$ hacim $4/3\pi\ell^3$
Öklidyen .
Şansa bak . İşte şişem .
Bu tirbuşonun nesi var ?
Bu benim tirbuşonum ! Hatırladım .
Buna ne oldu acaba ?
Yakından bak !
Sorun mu var, spor mu yapıyorsun ?
Ben - eee...


TAMAMEN gerçek bir Fransız şarabı ! Değilse ben de şaraptan HIÇ anlamıyorum !
TİRBUŞONUN var mı , kanka ?
Aaa - evet...
Güzel şarap , tatlı şarap gel bana içeyim kana kana...
BLUB BLUB BLUB
Garip birşey fark etmedin mi ?
Daha iyilerini de içmiştim , ama bunda bir gariplik yok !
Hepiniz aynısınız MORUK - hep abuk sabuk sorular soruyorsunuz...
Görüşürüz , kankito !
CLOP
CLOP
CLOP
CLOP
Birisi tibüşonumu bozmuş , sarhoş bir kanguru şarabımı bitirdi . Daha fazla garip şey olursa iyice şüphelenmeye başlayacağım...
Lanet !
SBLING !
TİRBÜŞONU BÜYÜK BİR DİKKATLE İNCELEMENİZİ TAVSİYE EDİYORUZ .

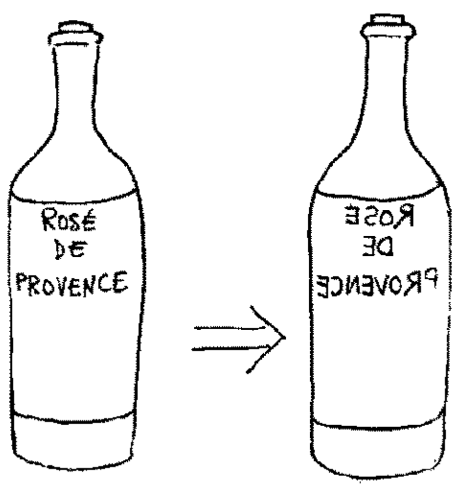
Möbiüs çemberi - bir yönlendirilemez 2-boyutlu uzay - 3-boyutlu örneklemeydi . Bir Möbiüs çemberi üzerinde , uzayda « çemberler » oluşturan dairesel bir şekil yön değiştirebilir .



54. sayfaya bakın



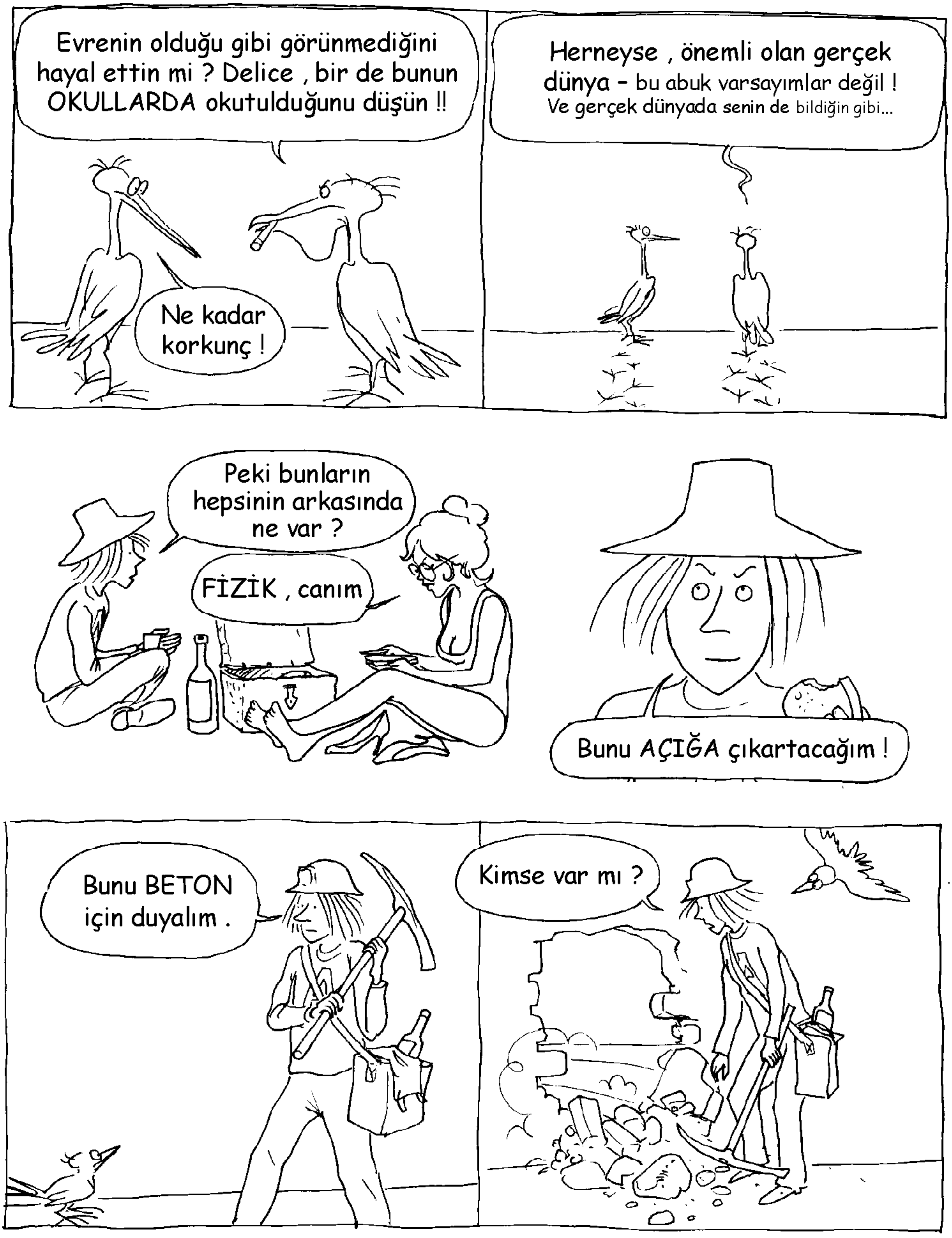
Tirbüşonlar birbirlerinin yansımaları gibidir .
Tirbüşon ve Archie , üç boyuttaki şekiller gibi düşünülebilir .
Bir nesne bu 3-boyutlu uzayda bir çember « çizdiğinde » , yönü değişir .
Higgins'i çembersel yolculuğunda izlerken , doğal olarak aynı Higgins gibi , şişe bir ayna yansıması gibiydi , ve tirbüşon yanlış yöne doğru dönüyordu .
Onları oldukları yerde bıraktığımızı varsayarsak ikinci bir tur « çember » bu nesneleri gerçek görünüşlerine döndürebilirdi .



Archie ve kanguru (zıt kutuplu canlı türleri) aynı uzayda yaşadılar ; ama yön konusunda zıtlaştılar , kanguru için doğru yön Archie için yanlış yöndü - veya tam tersi .

SONUÇ :


Herşey karmakarışık oldu . Sol ya da sağ , saat yönü ya da tersi , doğru yön yanlış yön diye birşey kalmadı . Ne tarafa gideceğim BEN ?
Doğruları izlemelisin , Archie - hayatının doğrularını .
Hıh . Evrenin BU KADAR çılgın olduğuna BENİ inandıramazsın ! Bunların hepsi DELİ BİR MATEMATİKÇİNİN SAÇMALIKLARI !
Bunların hepsi bir ÇİZGİ ROMANDAN çıkmış gibi !
Bunlarla neden uğraşalım , evrenin Öklidyen olduğu çok açık !
Petrograd'daki bir matematik profesörü olan Ostrogradsky'nin 1830 yılında , Riemann ve Lobachevsky hakkındaki dersinden sonra belirttiği görüşü .


Evrenin olduğu gibi görünmediğini hayal ettin mi ? Delice , bir de bunun OKULLARDA okutulduğunu düşün !!
Ne kadar korkunç !
Herneyse , önemli olan gerçek dünya – bu abuk varsayımlar değil ! Ve gerçek dünyada senin de bildiğin gibi...
Peki bunların hepsinin arkasında ne var ?
FİZİK , canım
Bunu AÇIĞA çıkartacağım !
Bunu BETON için duyalım .
Kimse var mı ?


...Eğer maddenin yoğunluğu 10-29 gm.cm 3 den az olursa...
?
...o zaman evrenin eğimi negatif olur ve sonu olmaz...
...diğer taraftan , eğer yoğunluk 10-29 gm.cm 3 den büyük olursa
!..
Evren hiperküresel ve kapalı olur .
Ve eğer yoğunluk 10-29 gm.cm 3 ye eşit olursa , ÖKLİDYEN olur...
HMM...
Sanırım Doktor Einstein'sınız ?
Ta kendisi .
SON