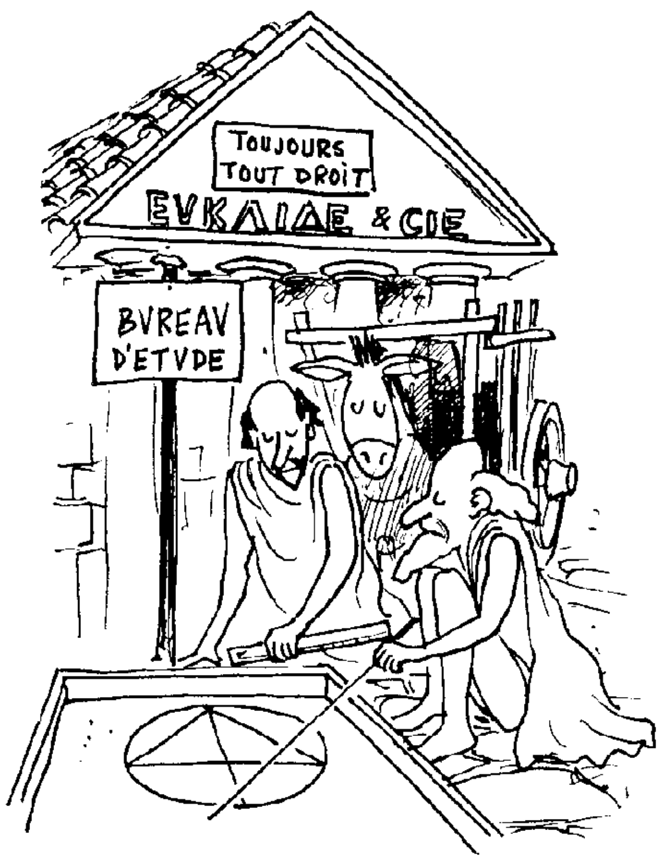
Savoir sans Frontières

ГЕОМЕТРИКОН

превела Марина Милојевић

Jean-Pierre Petit



http://www.savoir-sans-frontieres.com

аутор Jean-Pierre Petit

превела Марина Милојевић

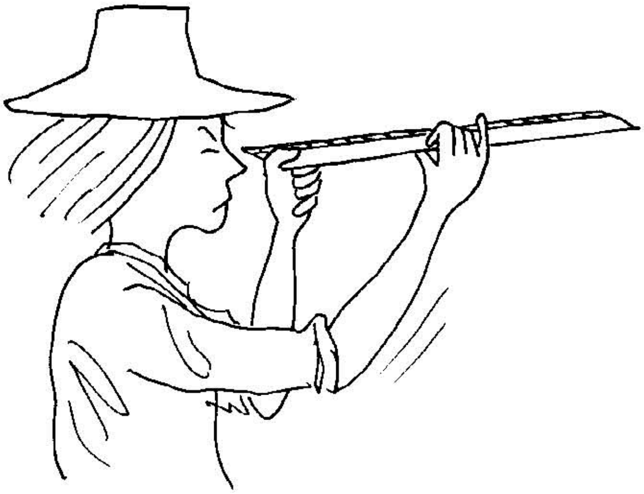
Асоцијацију *Знање без граница*, је основао научник, астрофизичар, Jean-Pierre Petit, с циљем да пружа научна и техничка сазнања највећем броју народа на највећем могућем броју језика. Илустровани албуми који су његово ауторско дело, сада су доступни свима и то без икакве накнаде. Постанком ове асоцијације сви су слободни да копирају постојеће фајлове, било у дигиталној форми или као штампане копије, да их прослеђују библиотекама, школама, универзитетима или асоцијацијама чији су циљеви блиски циљевима *Знања без граница*, уколико оне тим путем не стичу било какву материјалну добит, нити имају какве политичке, секташке или проповедничке конотације. Ови PDF фајлови се такође могу учинити доступним и путем компјутерских мрежа школских или универзитетских библиотека.

Jean-Pierre Petit настоји да оде још даље у просвећивању света, и своја дела учини блиским много широј публици. Чак ће и неписмени људи бити у могућности да уживају у његовим стриповима, јер ће текстуални делови цртежа "проговарати" када читалац употреби двоструки клик на њима. Остали албуми ће бити мултијезични тако што ће прелазак с једног језика на други бити омогућен једноставним кликом. На овај начин ће стрипови бити корисни и приликом учења страних језика и развијања језичких способности уопште.

Jean-Pierre Petit је рођен 1937. године. Своју научну каријеру је изградио као француски истраживач. Радио је као плазма физичар, управљао центром за компјутерске науке, правио компјутерске програме, објавио на стотине чланака у научним часописима, бавећи се разним темама, почев од механике флуида па све до теоријске космологије. Објавио је близу тридесет књига које су преведене на разне језике.

Асоцијацију Знање без граница можете упознати и контактирати путем интернет сајта:

http://www.savoir-sans-frontieres.com

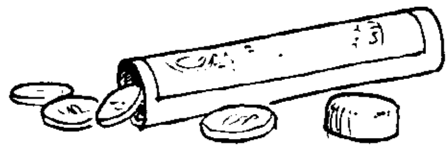


Напомена

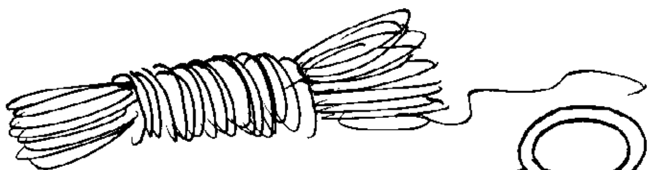
Ово није научна теза, а још мање какав курс. Ово је само једна у низу прича о Арсенију Мудрици, овога пута о његовим авантурама у царству Геометрије.

Од опреме за читање препоручујемо:

* доста аспирина

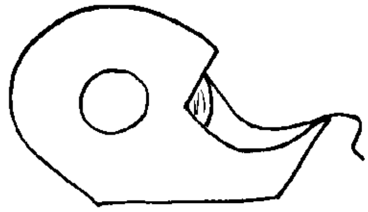


* веће количине конца

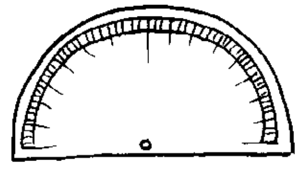


* некакве маказе

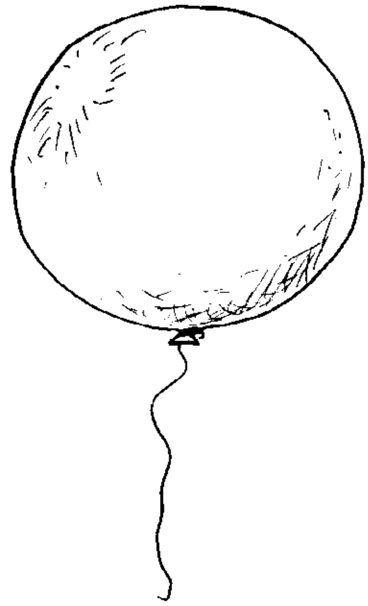
* лепљиву траку



* угломер



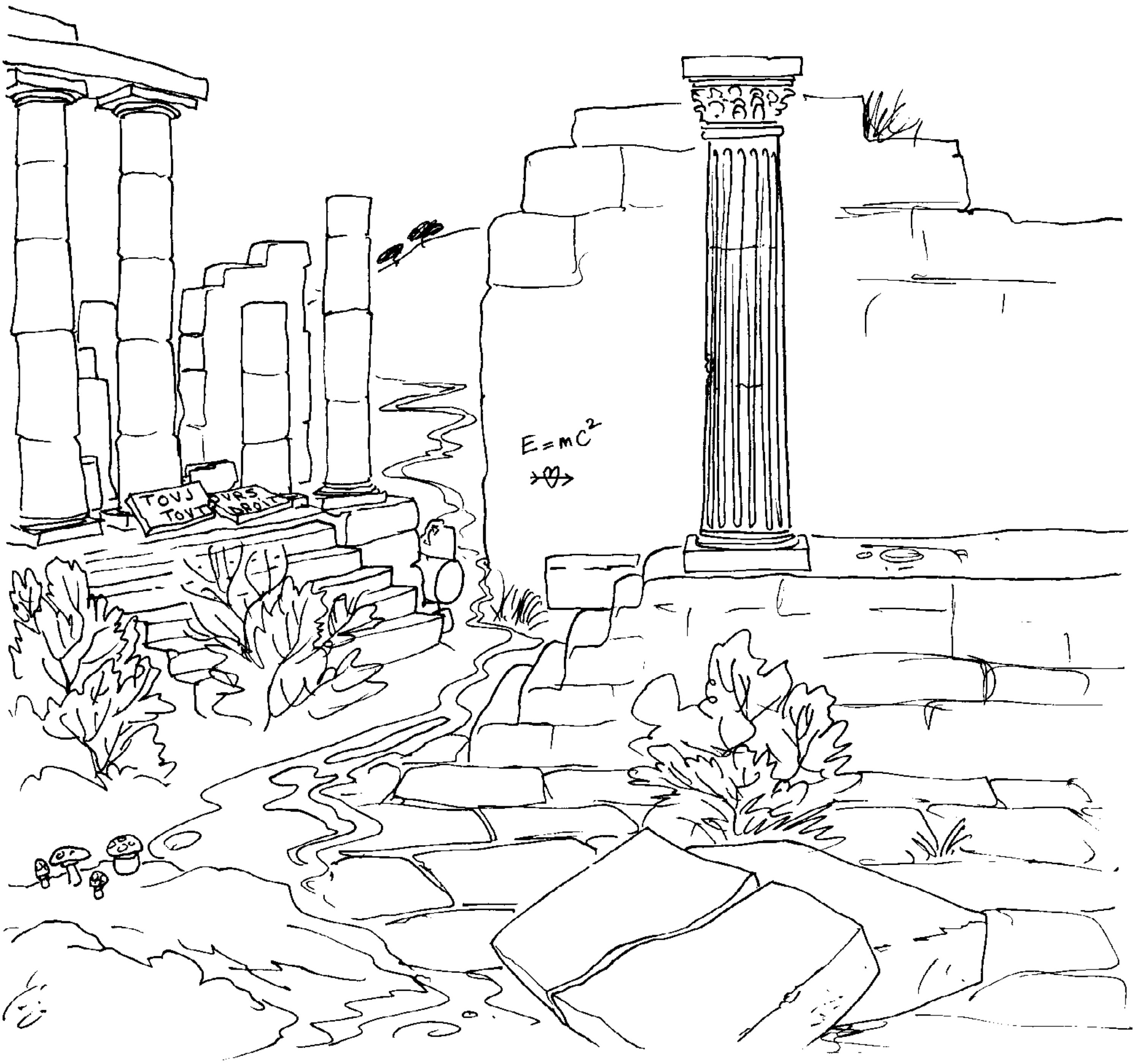
* и фини, лепи округли балон...



Фирма Еуклид & синови основана је у Алексадрији, у трећем веку пре нове ере. Бизнис је цветао две хиљаде двеста година. Производи су били задовољавајући а клијенти задовољни.

Али, мало по мало и укуси клијената су се променили. Неки који раније никада нису доводили у питање овај бренд, након чуднесних догађаја које су доживели, почеше да се питају "Да ли нам Еуклид **УВЕК** говори истину, истину и само истину?"

Данас се још једном подсећамо приче о овом великану...



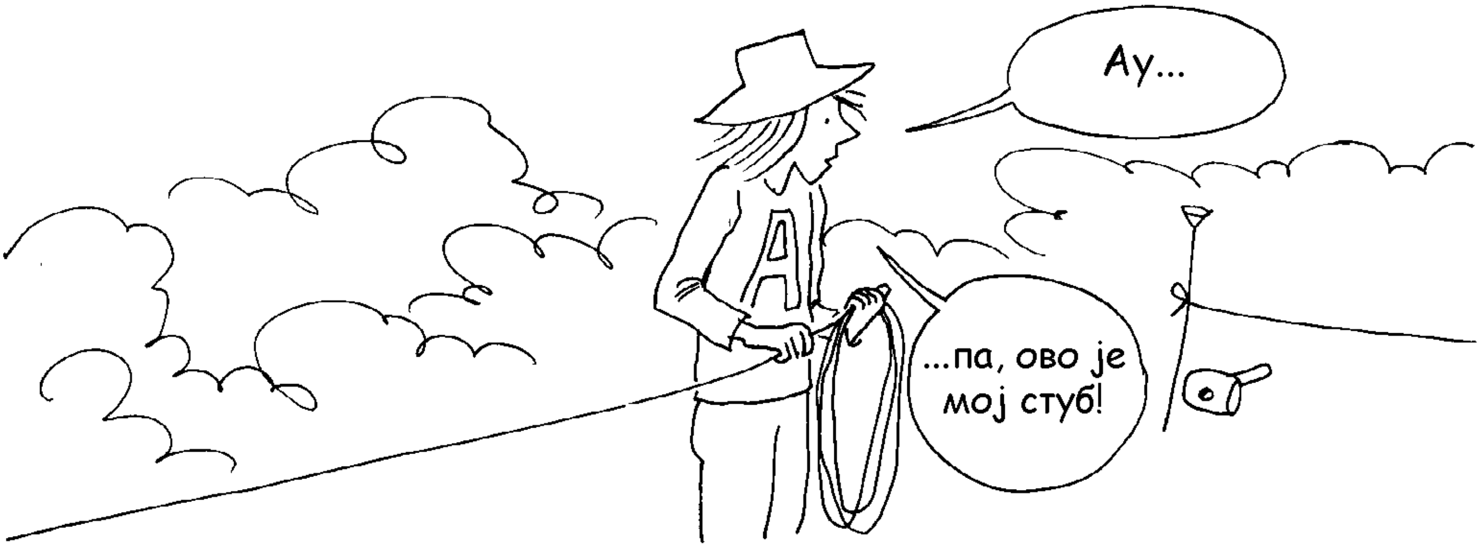
ПРОЛОГ: једнога дана Арсеније Мудрица се трудио да разапне конопац између два стуба.

Три затегнута конопца чине три ПРАВЕ...
B
A
Арса је направио ТРОУГАО.
Коришћењем угломера на сваком од углова троугла измерио је углове Â,B̂,Ĉ и израчунао њихов збир.
Према сјајној теореми фирме Еуклид & синови, овај збир мора бити 180°. Доброоо...
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
ευκλιδε

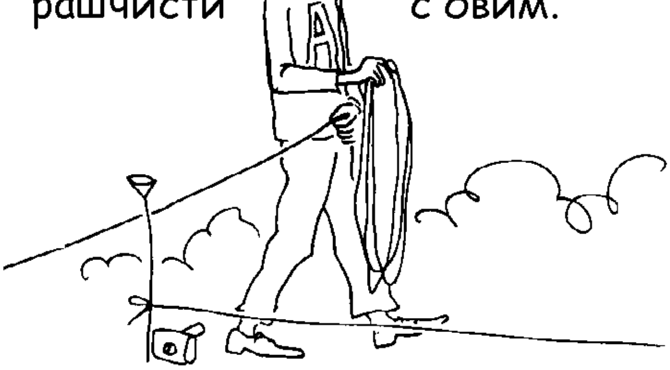
Арсенијев свет био је прекривен густим облацима. Није се видела ни бела мачка пред носом.

Арса је пешачио јако дуго. Иза њега се протезала добро затегнута нит тако да није морао да брине о томе хоће ли се изгубити у магли. Он је пратио непогрешиву ПРАВУ...

Али, као што и сами знате, има дана када човеку напросто ништа не иде од руке.



Будући да су Арсини живци били јаки као струна он је одлучио да једном за свагда рашчисти с овим.



Неустрашив као и увек, протегао је конопац још даље, ПРАВО НАПРЕД, горећи од знатижеље.

Нажалост...

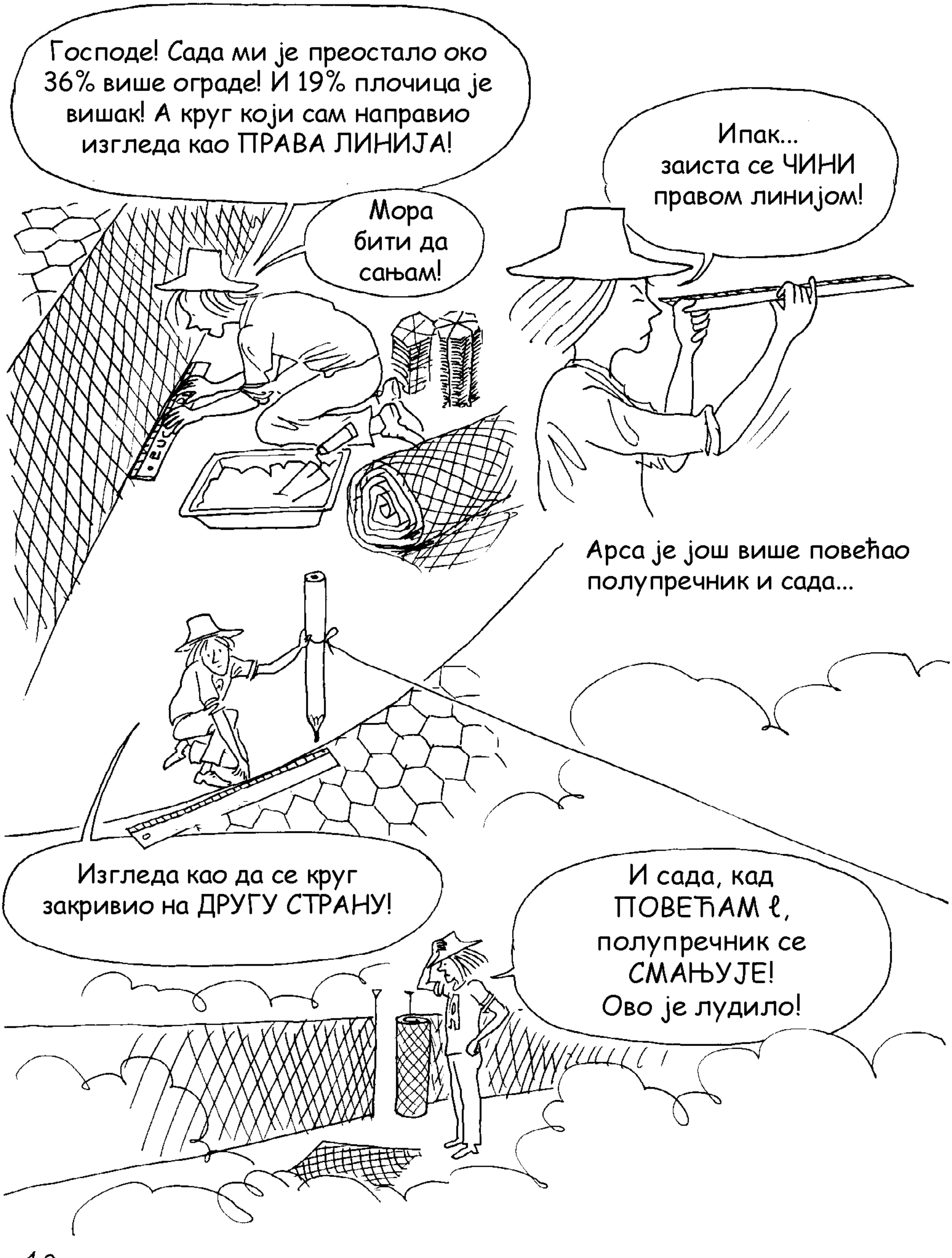
...Арсина ПРАВА ЛИНИЈА се затворила!

? ?
? ? ? ? ?
? ? ? ?
Чекај да видимо шта ови еуклидовци имају да кажу на ову тему. Покушаћу да нацртам три једнаке праве, формирајући ТРОУГАО. Онда би углови имали 60° а њихов збир би био 180°. Баш као на овом упутству.
B
60
60
60
A
C
Â+B̂+Ĉ = 180°
Да видимо...
ratio omnia vincit.
A
B
A
Ево и друге тачке B. Још само да развучем остала два конопца и пронађем трећу.
није ли наука сјајна?
B
A
Уууупс! Углови су ЈЕДНАКИ - али су већи од 60°.
Главом о зид?
C
A
А, главу дајем да им је и збир већи од 180°!
ЕУКЛИДОВСКА ГЕОМЕТРИЈА
ЕУКЛИД
ЕУКЛИД

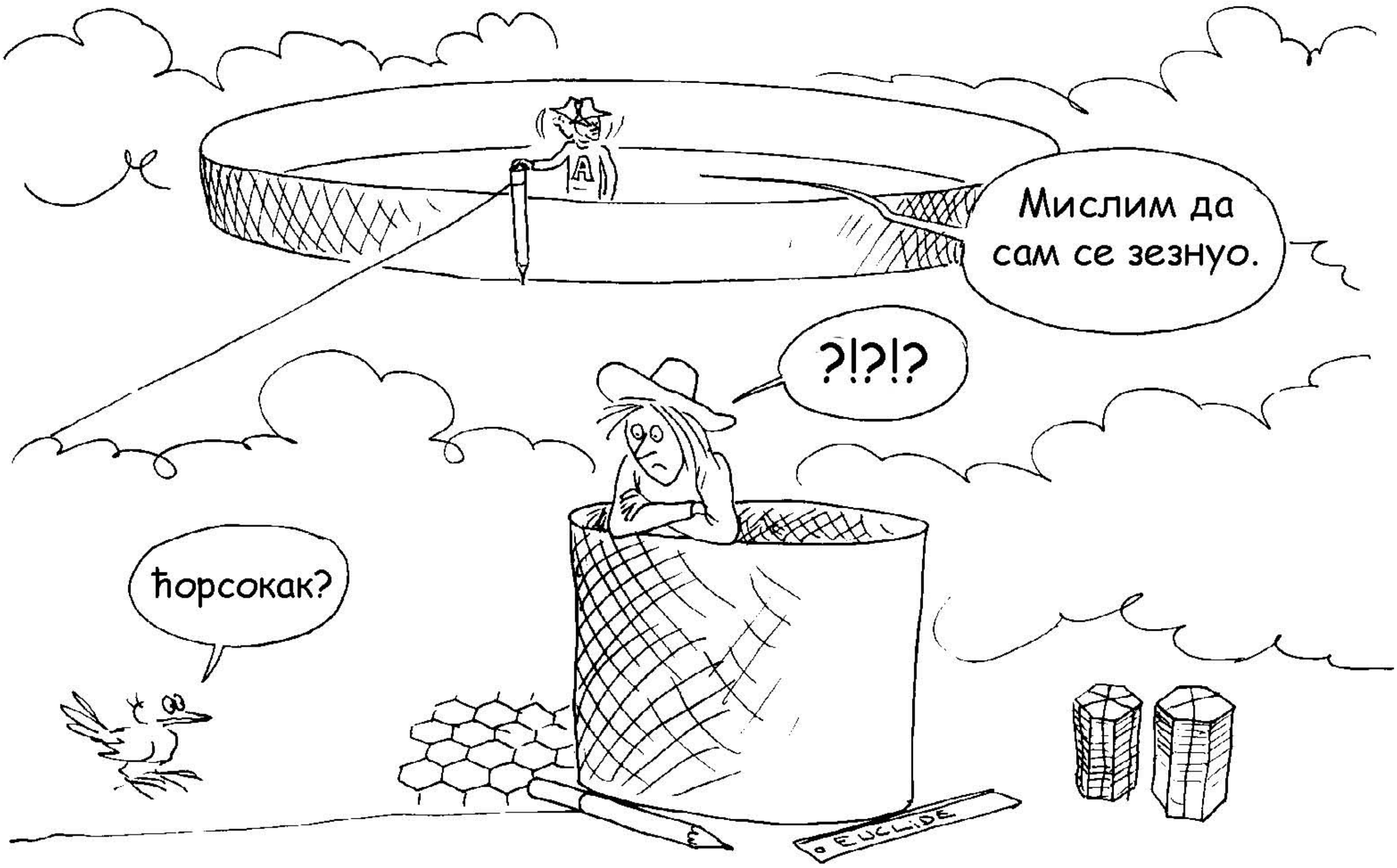

А опет, кад поставим лењир потпуно РАВНО лепо могу да се уверим да су ми линије ПРАВЕ.
EUCLIDE
Хало? Еуклид & синови? Чујте, имам проблем с овим вашим производом...
Само мало... повезаћу вас са техничком службом.
Проблеми с нашим троуглима? Изненађен сам! А, зашто не пробате наше кругове? Клијенти су њима веома задовољни.
...да, јасно. КРУГ је скуп тачака распоређених на раздаљини ℓ од фиксиране тачке.
И, шта кажете... ОБИМ је 2πℓ а ПОВРШИНА је πℓ². У реду!
ℓ
Увек на услузи.


За мерење ПОВРШИНА препоручујем наше изузетне еуклидијанске плочице.
За ОБИМЕ имамо незамењиве еуклидијанске оградице. Наша најбоља реклама је управо задовољство наших клијената!
ЕУКЛИД најбоље за вас
Површина $\pi \ell^2$
Ах... лепо, лепо... Чак ми је и остало нешто плочица.
Овде је све пуно лепоте, задовољства, мира и светлости.
У реду... Сад да уз помоћ оградице измеримо обим...
Обим: $2\pi\ell$


Преостало ми је још жице!!!
Ало, Еуклид & ортак? Да, опет ја! Хоћу да уложим жалбу на ваше ограде И плочице. $\pi\ell^2$ и $2\pi\ell$ уопште не раде! Шта ћете преузети поводом тога?
Господине, молим вас да не галамите толико. Ја сам само секретарица. Проследићу вас служби техничке подршке.
Не! Не! Плочице су исправно залепљене! Не, ништа не фали мом полупречнику и ограда је сасвим добро причвршћена за ободе круга!
Господине, молим вас, верујте - ово је први пут да се неко жали на ове производе. Пробајте још једном, не секирајте се! Знате и сами да су наше теореме ЗАГАРАНТОВАНО исправне!
Арса је наставио са својим истраживањем, повећавајући полупречник свог круга ℓ све више и више.
А, неслагања су постајала све гора и гора...


Господе! Сада ми је преостало око 36% више ограде! И 19% плочица је вишак! А круг који сам направио изгледа као ПРАВА ЛИНИЈА!
Мора бити да сањам!
Ипак... заиста се ЧИНИ правом линијом!
Арса је још више повећао полупречник и сада...
Изгледа као да се круг закривио на ДРУГУ СТРАНУ!
И сада, кад ПОВЕЋАМ ℓ, полупречник се СМАЊУЈЕ! Ово је лудило!

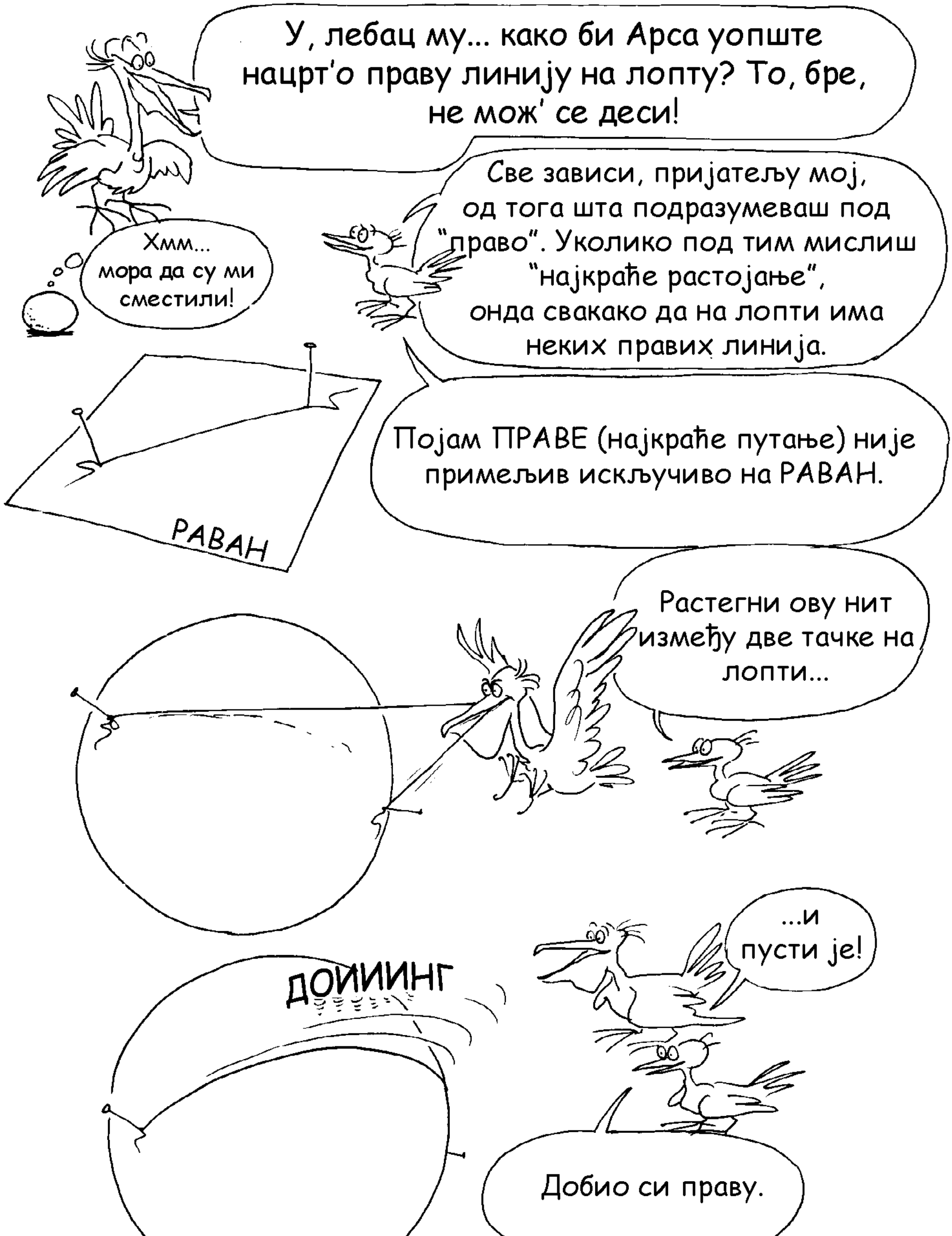
После још више плочица:

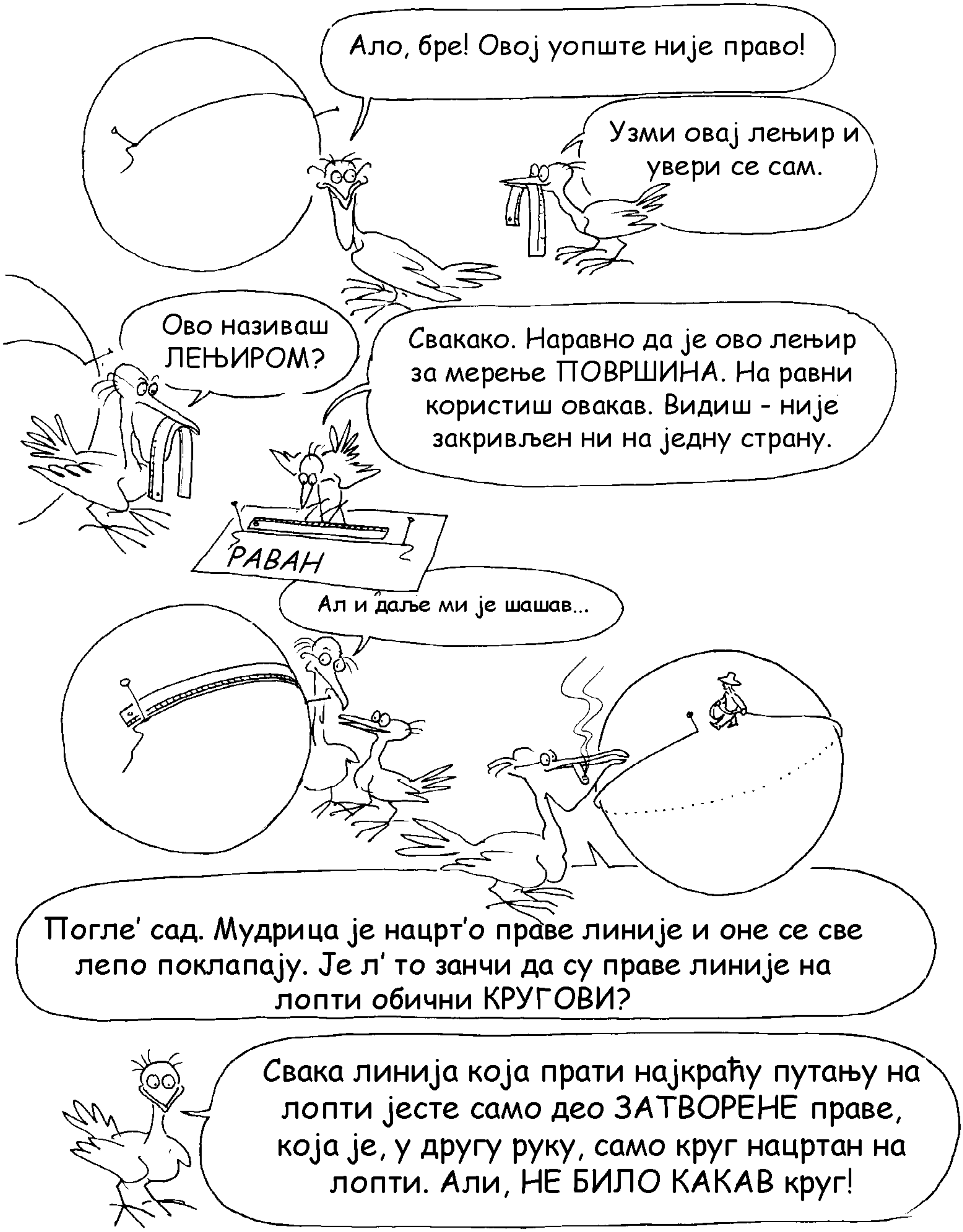


ШТА СЕ ЗАПРАВО ДЕСИЛО?

Да бисмо бацили светлост на проблем, растерајмо прво маглу...

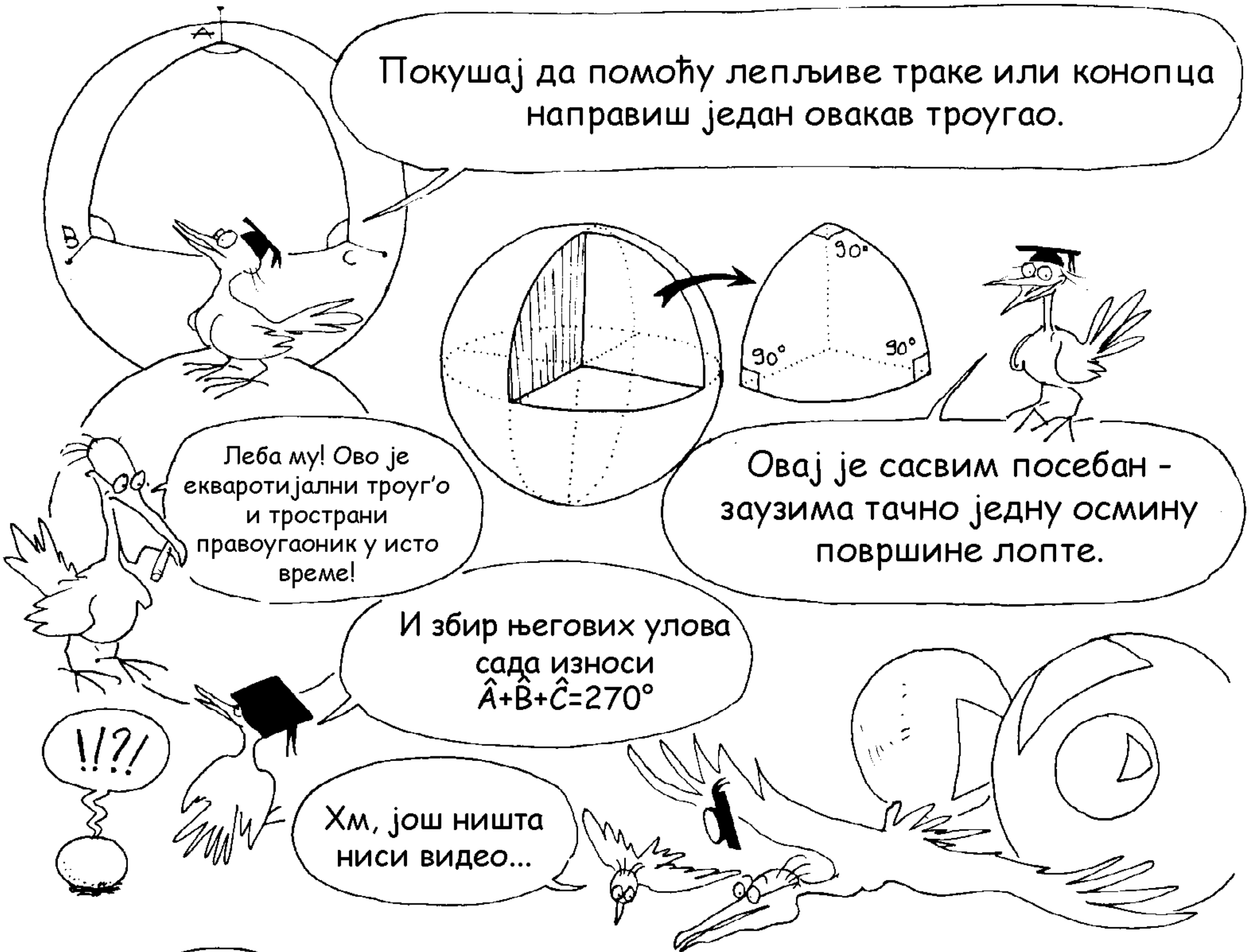
Арса је изненада схватио да је све време примењивао правила ГЕОМЕТРИЈЕ РАВНИ док је свет у којем живи заправо површина ЛОПТЕ.

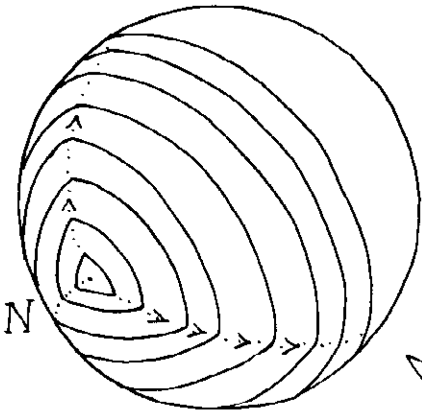

У, лебац му... како би Арса уопште нацрт'о праву линију на лопту? То, бре, не мож' се деси!
Хмм... мора да су ми сместили!
Све зависи, пријатељу мој, од тога шта подразумеваш под "право". Уколико под тим мислиш "најкраће растојање", онда свакако да на лопти има неких правих линија.
Појам ПРАВЕ (најкраће путање) није примељив искључиво на РАВАН.
РАВАН
Растегни ову нит између две тачке на лопти...
...и пусти је!
ДОИИИНГ
Добио си праву.


Ало, бре! Овој уопште није право!
Узми овај лењир и увери се сам.
Ово називаш ЛЕЊИРОМ?
Свакако. Наравно да је ово лењир за мерење ПОВРШИНА. На равни користиш овакав. Видиш - није закривљен ни на једну страну.
РАВАН
Ал и даље ми је шашав...
Погле' сад. Мудрица је нацрт'о праве линије и оне се све лепо поклапају. Је л' то занчи да су праве линије на лопти обични КРУГОВИ?
Свака линија која прати најкраћу путању на лопти јесте само део ЗАТВОРЕНЕ праве, која је, у другу руку, само круг нацртан на лопти. Али, НЕ БИЛО КАКАВ круг!


!???!
Ма, је л' ти мене зафркаваш, пријатеље? О'ш да ми кажеш да има РАЗНИ' ВРСТА кругови на лопту? Леле!
леба му... таман сам помислио да капирам.
Круг је збир тачака које се налазе на константној раздаљини ℓ од фиксиране тачке N , такозваног ПОЛА.
Хммм
Ево мноштва кругова са истим полом N. Зовемо их ПАРАЛЕЛЕ.
Али, ови паралелни кругови су исто тако збирови тачака на константној раздаљини ℓ' од "јужног пола", који је супротан полу N.
Једна од њих је већа но остале - ЕКВАТОР који пролази по средини.
Хи... сад сам укапир'о зашто круг у центру има ДВА пола N и S.
Екватори су познати као ВЕЛИКИ КРУГОВИ - и ОНИ су ти који формирају ПРАВЕ.
Никада раније нисам био 'вако близу ПРАВЕ. Импресивно!

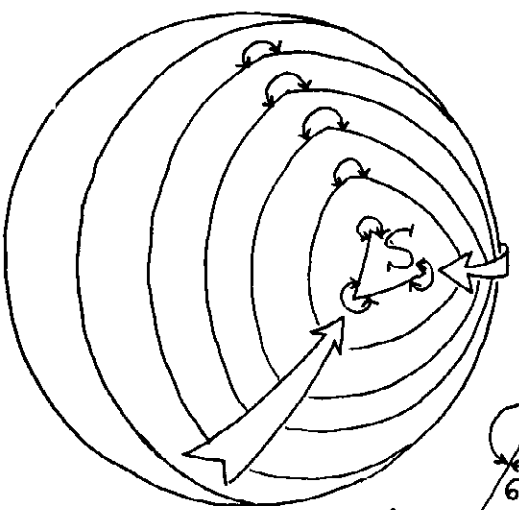

N
NEW YORK
велики круг
Мадрид
Ракова обратница
Екватор
Обратница стрелца
S
Јужни пол
На ЗЕМЉИ, Арктички и Антарктички кругови и Обратнице су Паралеле. Мадрид и Њу Јорк леже на истој паралели. Али, добро је познато се најкраћа путања између њих не поклапа са овом паралелом, већ са луком ВЕЛИКОГ КРУГА.
У моје време то се звало ОРТОДОМИЈА.
Три стране ТРОУГЛА су делови великих кругова.
A
B
C
Да бисте себи представили један овакав троугао можете користити лепљиву траку или конопац. Углове можете измерити уз помоћ угломера постављеног на теме сваког од углова.
Па, шта добивам кад саберем Â+B̂+Ĉ ?
То зависи од троугла, али креће се између 180° и 900°!
На кратким раздаљинама лопта је скоро сасвим равна. Тако да је у овим случајевима збир углова...
...баш близу 180°



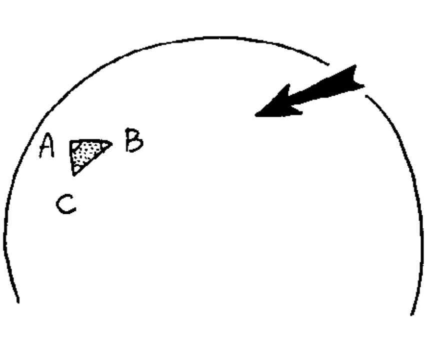


Замисли троугао, направљен од конопца, чија се темна простиру широм лопте. Углови расту све више и више а тако и њихов збир.

Долазимо до тренутка када сва три темена леже на истом великом кругу, екватору лопте. Углови $\hat{A}$, $\hat{B}$ і $\hat{C}$ су праве линије, то јест, 180°. Њихова сума је сада 540°!!!



Како троугао наставља са својим простирањем ка јужном полу, његова темена се примичу тачки S која је антипод тачке N. Како су темена углова дефинисана исто као и на почетку, она сада превазилазе 180° тачније, сваки од њих постаје 360°-60°=300°.

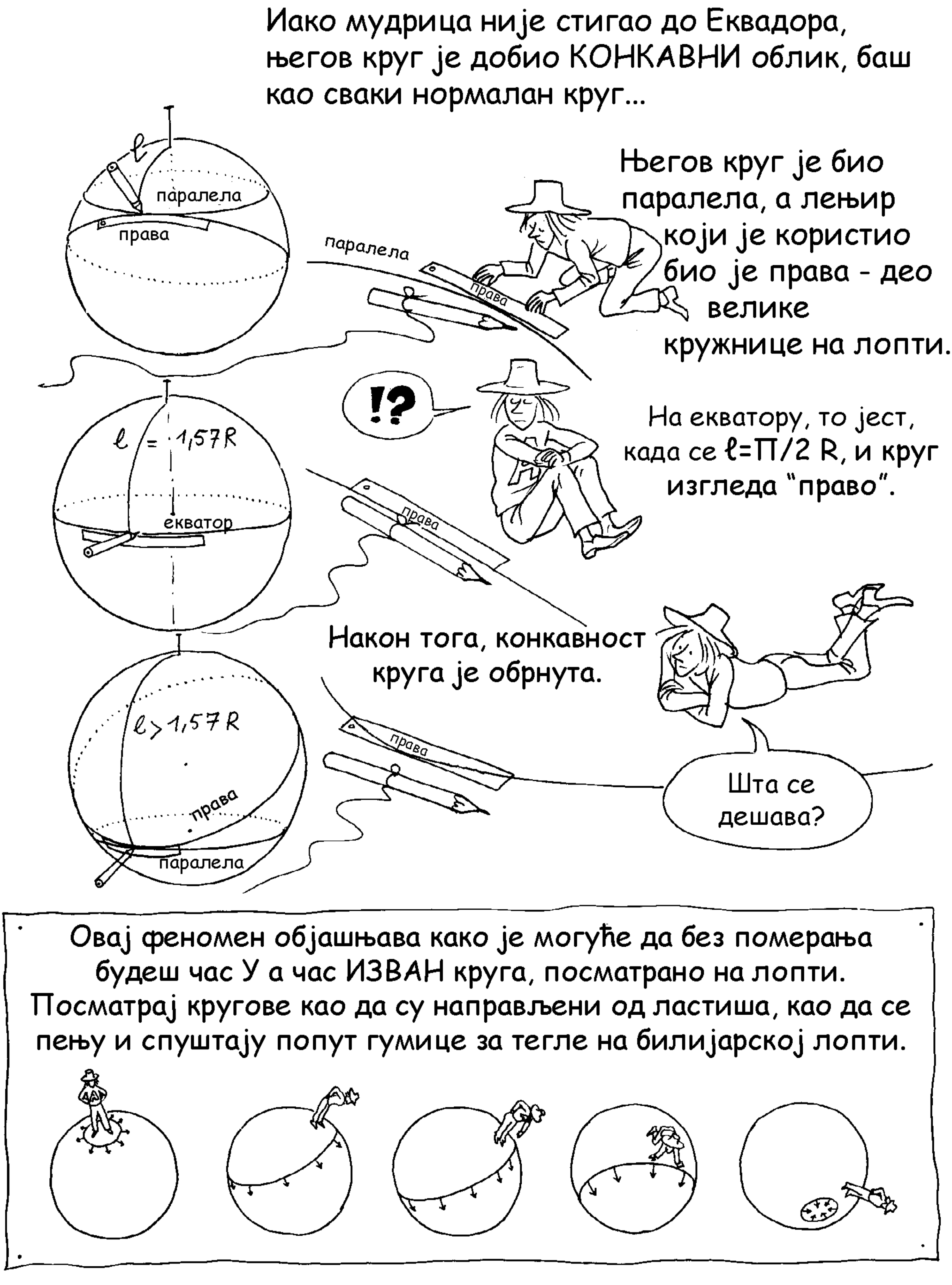


Када је површина у односу на лопту мала, добијамо еуклидовски закључак

$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°)$

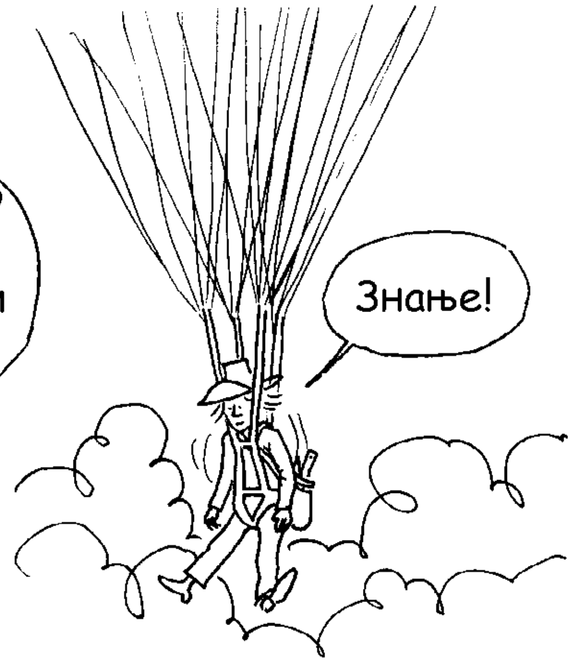
Уколико је, с друге стране, површина троугла скоро па једнака површини лопте, $4 \times 3{,}1416 \times R^2$, добијамо 900°.


Подсетник:
Две тачке лопте се могу спојити правим луковима, формирајући ЈЕДАН велики круг. Али, уколико су ове две тачке N и S, уколико су антиподалне, онда ће бесконачан број великих кругова моћи да прође кроз обе! Овакве две линије на лопти формирају ДВОУГАО са истим угловима на сваком темену. Сума углова им може бити... БИЛО ШТА!!!
N
S
Сви сте ви луди!
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Хајде сад да пробамо да схватимо зашто је Арси остало онолико плочица и оградице.
(C) је круг који је нацртао, а (γ) је круг који је МИСЛИО да нацрта. За површину је користио формулу геометрије равни $\Pi\ell^2$ (Π=3,1416...). Права површина је половина површине лопте, $2\Pi R^2$. Пошто је ℓ четвртина обима круга, 1/2ΠR, однос две површине је $\Pi^2/8$=1,233.
Однос обима је 2Πℓ/2ΠR=Π/2=1,57.
Уколико ми још не верујеш, пробај да закривиш плочу на лопти!
Ију, добијам наборе!
Плочу? Плочу? КОЈУ плочу?



Иако мудрица није стигао до Еквадора, његов круг је добио КОНКАВНИ облик, баш као сваки нормалан круг...
ℓ
паралела
права
паралела
права
Његов круг је био паралела, а лењир који је користио био је права - део велике кружнице на лопти.
ℓ = 1,57R
екватор
!?
права
На екватору, то јест, када се ℓ=Π/2 R, и круг изгледа "право".
ℓ>1,57R
права
паралела
Након тога, конкавност круга је обрнута.
права
Шта се дешава?
Овај феномен објашњава како је могуће да без померања будеш час У а час ИЗВАН круга, посматрано на лопти.
Посматрај кругове као да су направљени од ластиша, као да се пењу и спуштају попут гумице за тегле на билијарској лопти.

Арси је требало мало више времена да свари идеје до којих је дошао славни математичар Гаус (1777-1855). Одлучио је да његов следећи корак буде тумачење геометрије ПОВРШИНА.

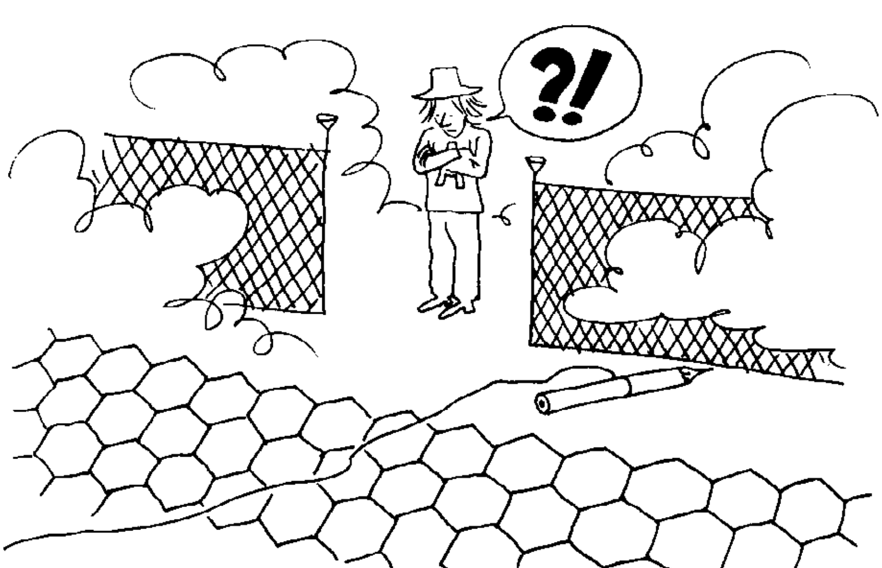


Понекад Наука захтева одређене ризике...

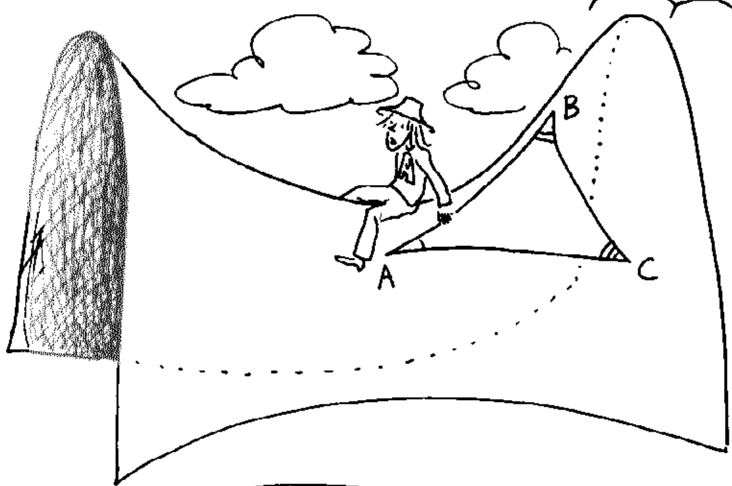
Дошавши до Новог Света, Арса је још једном одмотао клупко конопца - Али, овог пута...

...права се НИЈЕ затворила.

Уз помоћ три конопца Арса је направио троугао - али сада је сума углова на вертикалама била МАЊА од 180°

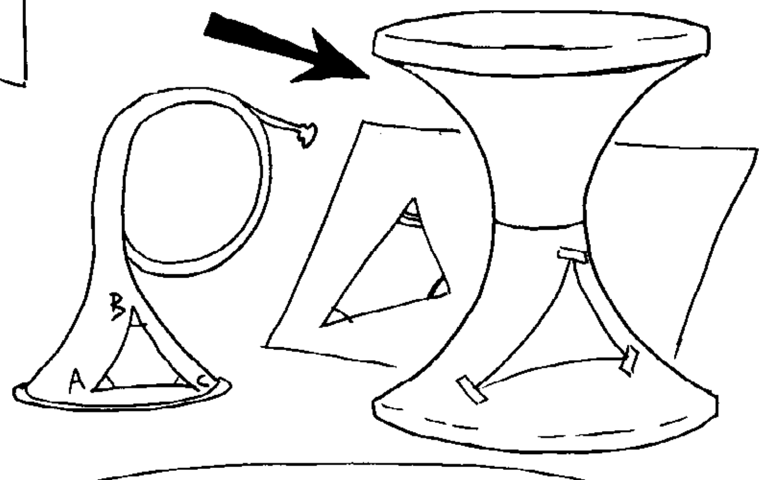


Као и увек, дефинишући круг на одређеној раздањини од одабране тачке, Арсеније Мудрица је открио да је круг нацртан на новој провшини имао обим ВЕЋИ него е $2\Pi\ell$ и површину већу од $\Pi\ell^2$



Растерајмо маглу:

Површина сада има исти облик као планински пролаз, или коњско СЕДЛО. Многи објекти које свакодневно употребљевамо имају сличан облик - труба за лов, столичица...

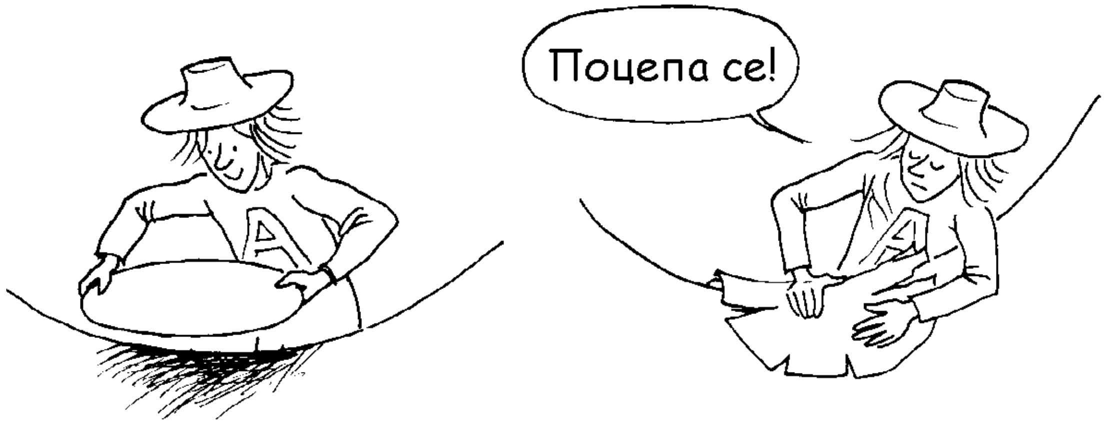


ЗАКРИВЉЕЊЕ:

Закривљена површина је она на којој Еуклидове теореме не важе. Закривљење може бити позитивно или негативно. На површини ПОЗИТИВНОГ ЗАКРИВЉЕЊА, сума углова троугла је већа од 180°. Уколико нацртате круг са полупречником ℓ, његова површина ће бити већа од $\Pi\ell^2$ а његов обим већи од $2\Pi\ell$.

Недавно, Арса је приметио да кад год покуша да ЗАКРИВИ парче равни на површини позитивног закривљена, на њему се формирају фалтице. Исто тако, није могуће је закривити парче равни на површини негативног закривљења: оно се цепа.

Ово својство закривљења је најједноставнији тест за одређивање тога је ли закривљење позитивно или негативно.



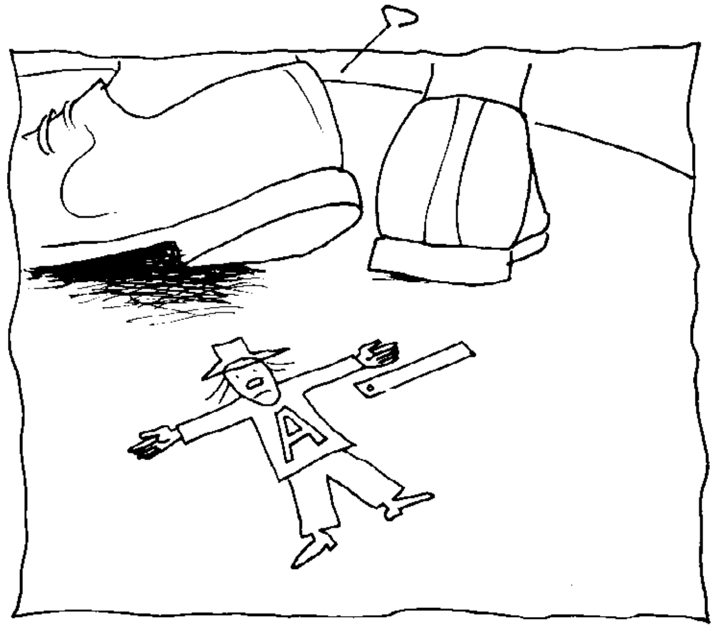
Као што сте видели на претходној страници, неке површине могу имати пределе позитивног али истовремено и пределе негативног закривљења.


Тест закривљености...
Хммм... МОГУЋЕ је савити раван преко цилиндра или купе!
Без панике. Залепићу три парчета конопца - праве - на цилиндар успомоћ лепљиве траке.
...сад, обележи праве на површини...
...ИСПАВИ цилиндар...
!...
Према нашој дефиницији, цилиндри и купе подлежу еуклидовској геометрији баш као и **РАВНЕ ПОВРШИНЕ!!!**

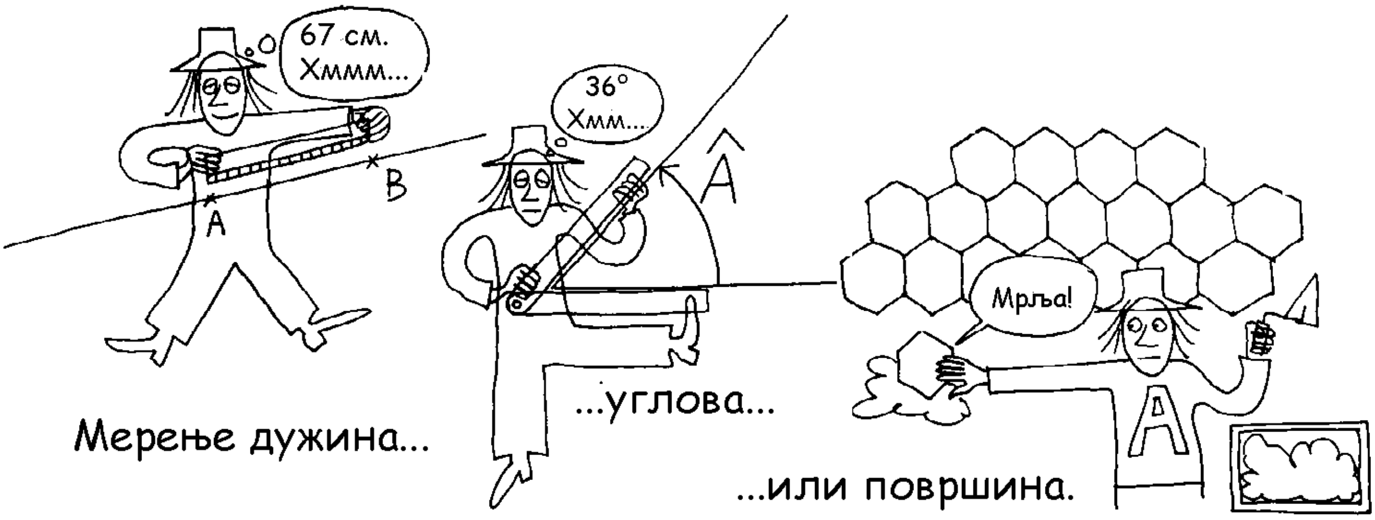
ПОЈАМ ПРОСТОРА:

Арса раније није видео даље од свог носа због облака који су га окруживали. Да није било њих да ометају истраживање Арса би лако приметио закривљеност СВЕРИЧНОГ ПРОСТОРА на којем ЖИВИ.

Постоји још један начин да се Мудрици замути поглед: пустити га да живи У предмету истраживања - да и сам буде његов ДЕО!

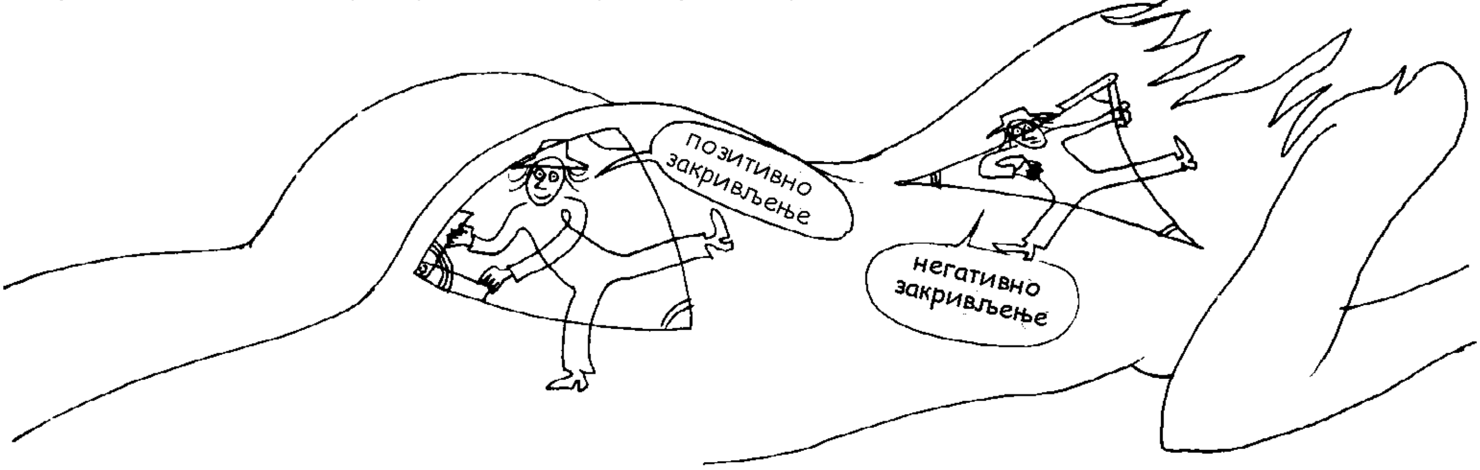


Имајте на уму да ово ново сазнање нема ефекат на:



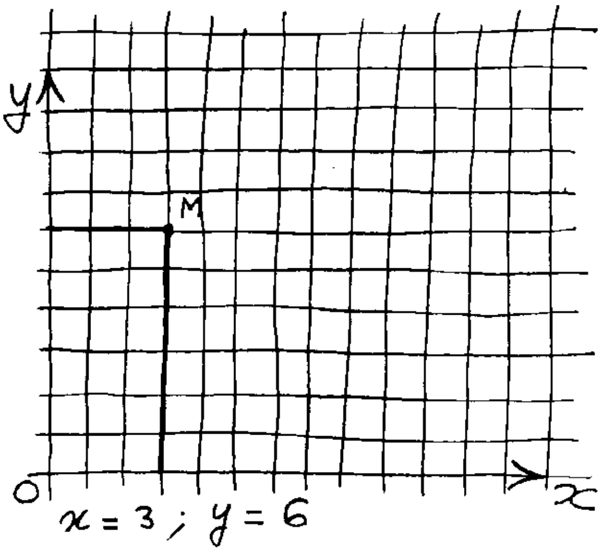
Али, без обзира на то што је затворен унутар закривљења, Арса би ипак био у могућности да га испита и одреди да ли је позитивно или негативно, чак и да га измери, иако не би био у могућности да га сагледа. Уколико је међузбир троугла 180°, површина би била РАВАН. Уколико би сума била већа од 180°, закривљење би било позитивно, и Арса би био у могућности да израчуна локални полупречник закривљења R и то помоћу формуле $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1+\frac{A}{3.1416\,R^2}\right)$ где A представља површину троугла.

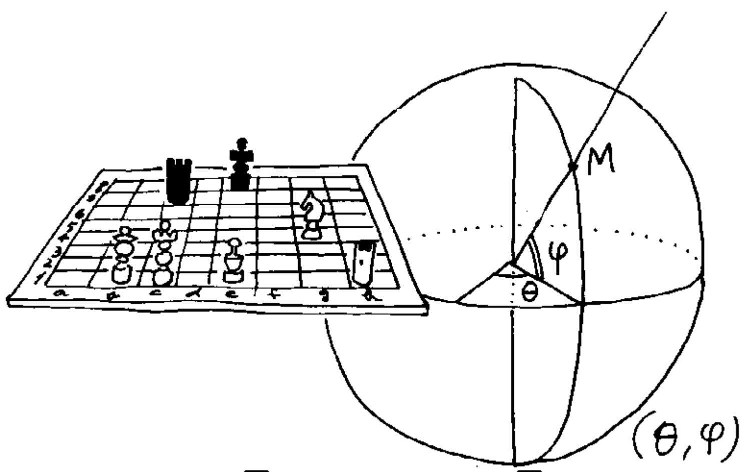
Ако би сума била мања од 180°, могли би да дефинишемо полупречник закривљења дат формулом $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1-\frac{A}{3.1416\,R^2}\right)$ али он не би више имао уобичајено физичко значење. Запамтите да на РАВАН гледамо као на површину чије је закривљење БЕСКОНАЧНО. Тиме поново присвајамо традиционалну Еуклидову тероему.



КОНЦЕПТ ДИМЕНЗИЈЕ:

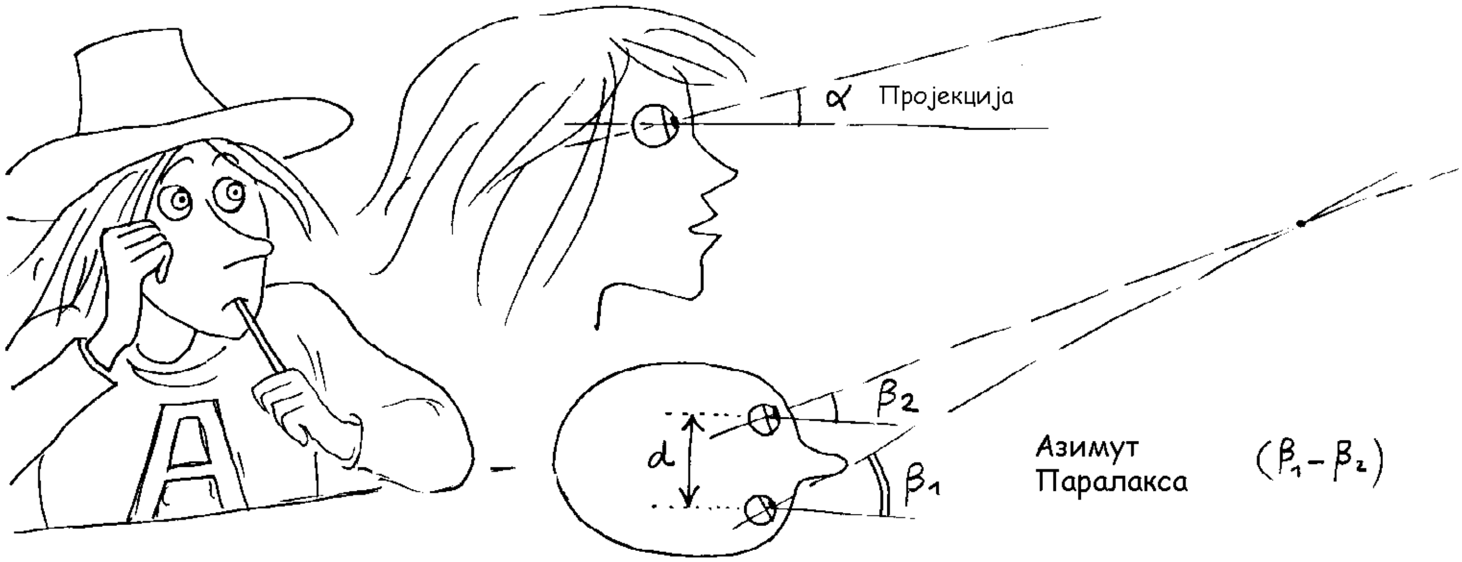
Број димензија је само број количина - или КООРДИНАТА - који мора бити дат, у одабраном простору, како би се дефинисала позиција тачке. ПОВРШИНЕ су простори који имају две димензије. Количине које се користе за мерење могу се односити на дужине, бројеве, углове...





Лонгитуда, Латитуда

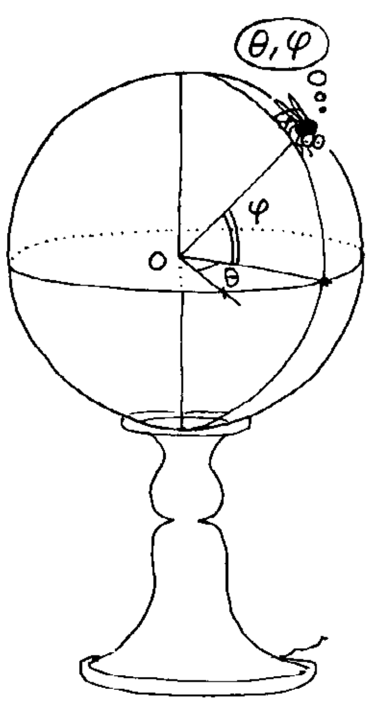
Уобичајено је да за наш простор кажемо да има три димензије, ако занемаримо временску.



Арса може да лоцира позиције ствари помоћу сопствене главе. Позиција тачке се може одредити помоћу три УГЛА: пројекције α и азимуталних девијација β_1 и β_2 његова два ока.

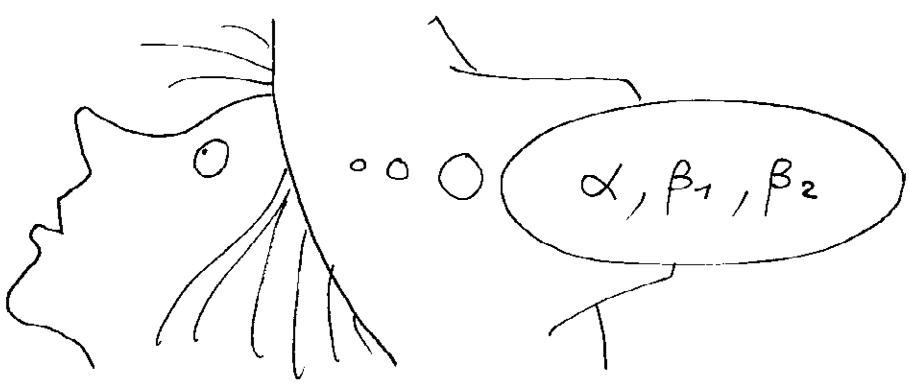
Угаона разлика β_1 и β_2 зове ПАРАЛАКСА. Арсин мозак је у стању да декодира ову паралаксу и интерпретира је као растојање.

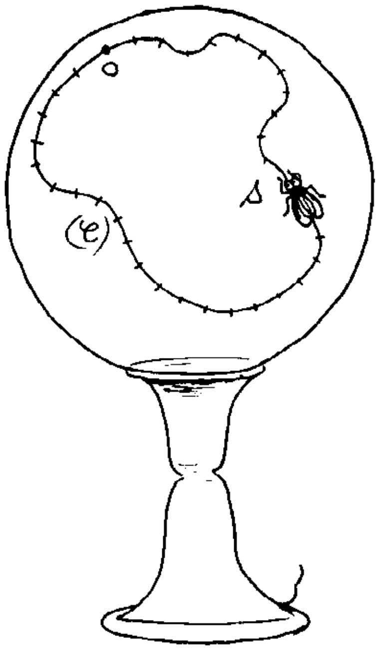
УТАПАЊЕ:



Овој муви се чини да је њено кретање по округлој лампи, где се тренутно налази, кретање у дводимензионалном простору, које се може описати помоћу само два угла θ и φ (лонгитуде и латитуде).

Кажемо да је дводимензионални свет УТОПЉЕН (или усађен) у наш визуелни, тродимензионални свет.

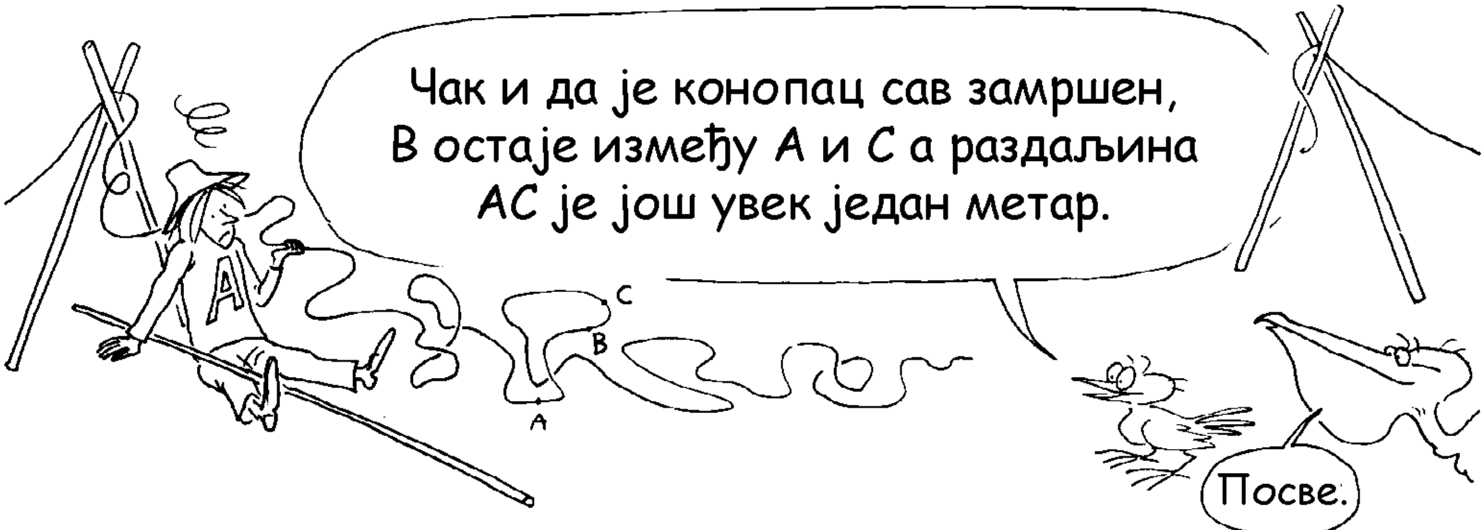




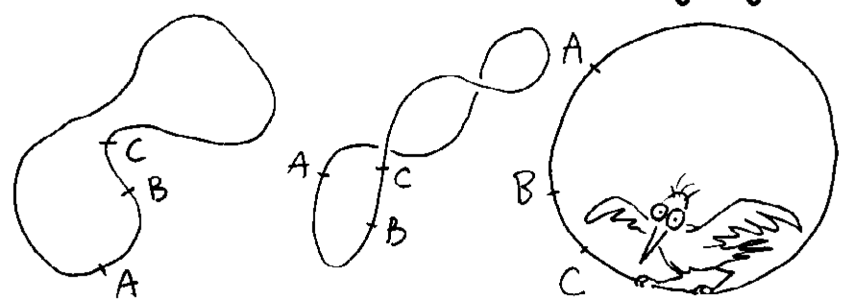
Претпоставимо да мува прати криву (ℓ) на кружници. Можемо представити њен положај помоћу само ЈЕДНЕ координате - раздаљине од почетне тачке.

Крива је слика једнодимензионалног света.

Овај једнодимензионални свет је утопљен у дводимензионални свет (кружницу) која је опет утопљена у тродимензионални свет. На исти начин, наш простор би МОГАО бити утопљен у једну вишу димензију, које ипак нисмо свесни.



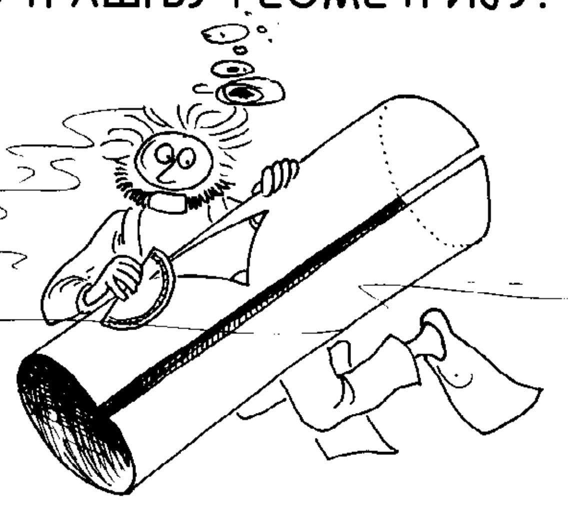
Ово нам говори да нека својства могу бити независна од начина на који је простор утопљен.



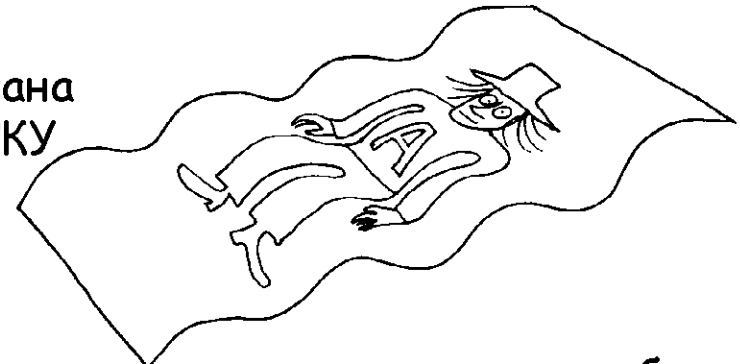
Ево различитих начина да утопимо ЗАТВОРЕНУ КРИВУ у обичан простор. Чињеница да је затворена не зависи од тога како је утопљен.

Али, морамо да пазимо да не растегнемо или скратимо конопац, како се РАЗДАЉИНА између тачака не би смањила. Пробајмо да утопимо ПОВРШИНЕ у обичан простор.

Ако утопимо РАВАН у тродимензионални простор, можемо је пресавити а да не нарушимо њену УНУТРАШЊУ ГЕОМЕТРИЈУ.

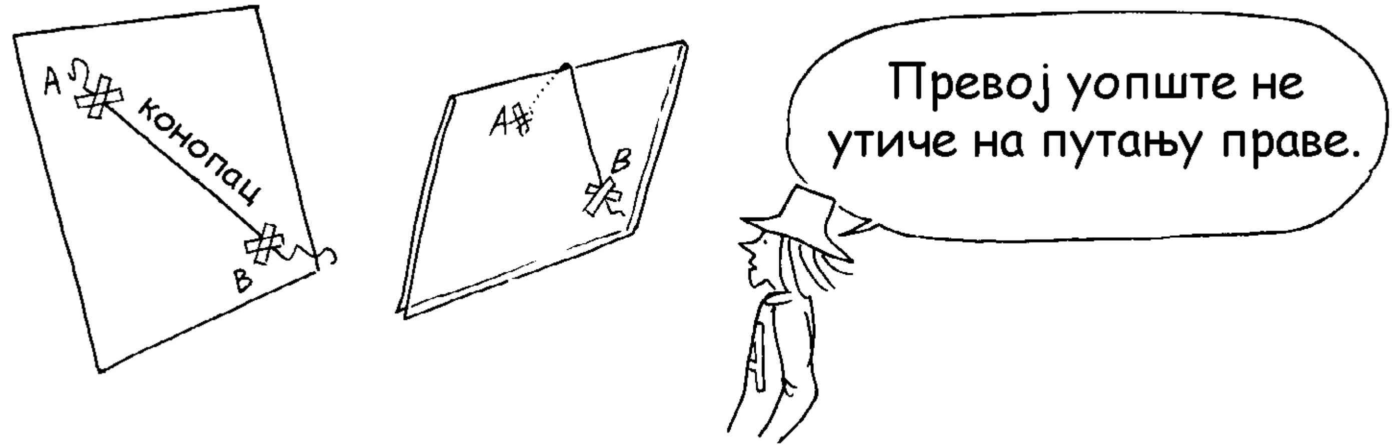


Видели смо да савијање равни у цилиндар не поништава праве или углове.
С ове тачке гледишта, заталасана застава увек има ЕУКЛИДОВСКУ геометрију РАВНИ.



Када бисмо имали створа који живи у свету заставе, он не би имао појма о било каквим наборима и таласима, висинама и долинама на површини, што су само промењиве одлике које површина добија по утапању у тродимензионални свет.

Узми једну раван и пресавиј је



Помоћу лењира нацртај мноштво правих линија (права) на листу папира. Онда неколико пута савиј папир. И видиш - линије су опстале без обзира на то што је папир испресавијан.

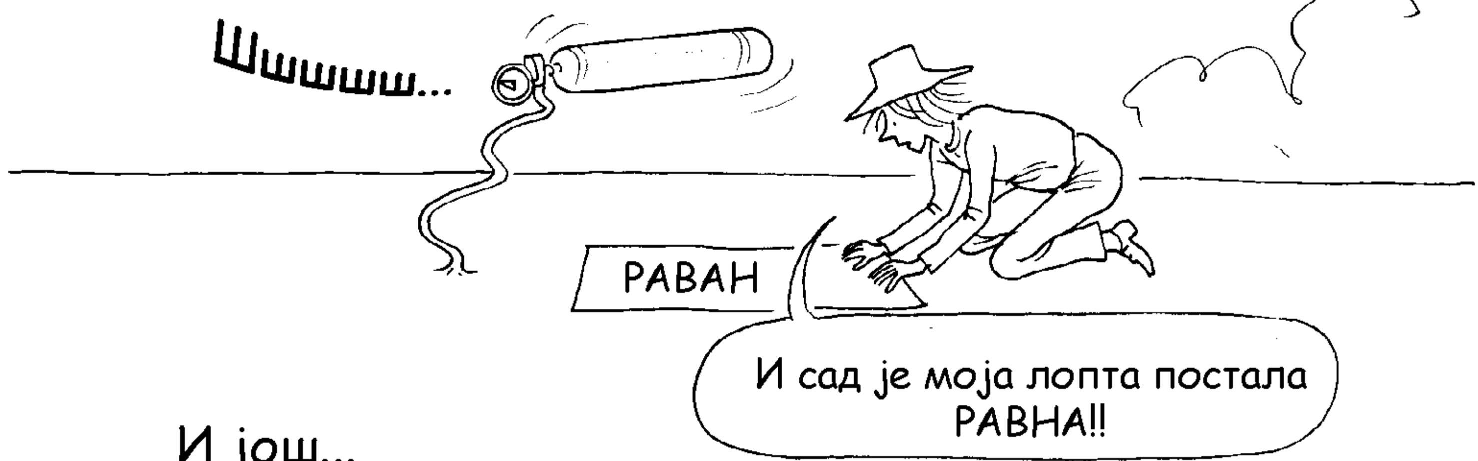

Госн. Мудрица?
Хмм
Ја сам представник продаје за Еуклид & синови корпорацију. Чујем да имате неке проблеме с нашим производима.
Понео сам неке најмодерније додатке који ће вам се сигурно свидети.
Ај' да видимо
С данашњом 3-димензионалном геометријом геометрија две димензије делује помало... старомодно.
флуид космичке сонде
Последњи модни крик за праве...
...направљен од крутих летви које идеално належу једна на другу.
Овако дизајниране праве се НЕЋЕ кривити налево или надесно, горе или доле - ићи ће САМО ПРАВО!

А за мерење површина вам препоручујем нову ФАРБУ! 100грама боји тачно метар квадратни.
За ЗАПРЕМИНЕ вам можемо понудитиову гасну боцу. Вредност се очитава директно с мерача на врху КОСМИЧКЕ СОНДЕ.
Опако!
И запамтите - површина кружнице је $4\pi L^2$, а њена запремина је $\frac{4}{3}\pi L^3$.
Разумем!
ЕУКЛИД & Cie
Захтевна професија
Овог пута Арсеније се спустио у тродимензионални простор. Наставићемо да пратимо његове подвиге.

Какав прецизан инжењеринг! Дивно! И летве су дугачке тачно један метар!
Међутим, кад је Арса спојио добар број летви...
О, не! Не поново!
Моја права се затвара.
Тродимензионални затворени простор?
Лудило!
Арса је сео на оближњи астероид како би појео пар сенвича,
одлучан у намери да поново промени величину углова
Направићу ТРОУГАО од три ПРАВЕ, баш као што сам и раније...


?!?
Сасвим лепо сам повезао праве али збир углова мог троугла је и даље већи од 180°!
Хмм
SPATIOTEST
Шшшшшшшш...
Направићу један и измерити запремину и површину.
Круг полупречника ℓ је збир тачака које се налазе на константној раздаљини ℓ у односу на дату тачку, коју ћу звати N.
Површина је мања од $4\pi\ell^2$
А запремина је мања од $\frac{4}{3}\pi\ell^3$!
Е сад је доста!!!

Арса је још повећао полупречник лопте...



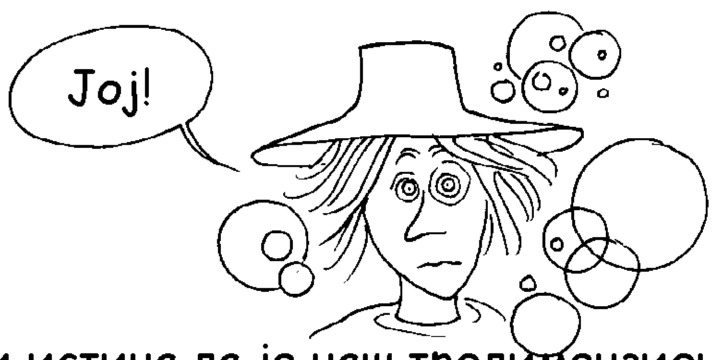
И још...

Мала помоћ...

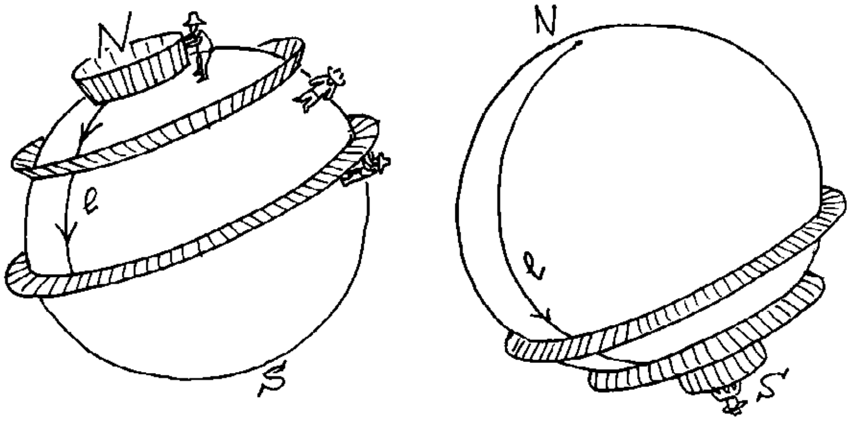
Дакле... Мудрица је напросто дувао балон у тродимензионалном свету и на крају се нашао - УНУТАР ЊЕГА!

Да није на време зауставио гас, био би буквално смрвљен, и то управо на исти начин на који је сам себе заробио на страници бр. 13.

Ни уз најјачу вољу није заиста могуће ЗАМИСЛИТИ ЗАКРИВЉЕЊЕ тродимензионалног света. Његове праве се затварају и његова укупна запремина је КОНАЧАН број кубних метара, баш као што наша планета заузима један одређен број квадратних метара.
Збир углова у троуглу је, у овом тродимензионалном свету, већи од 180°. Да бисмо "ВИДЕЛИ" закривљење, било би потребно да будемо у могућности да је представимо у четири димензије.



Могло би бити истина да је наш тродимензионални УНИВЕРЗУМ само ХИПЕРПОВРШИНА утопљена у четвородимензионалан простор, који је опет утопљен као хиперповршина петодимензионалног простора, итд.
За сада, није баш умесно спекулисати о томе.

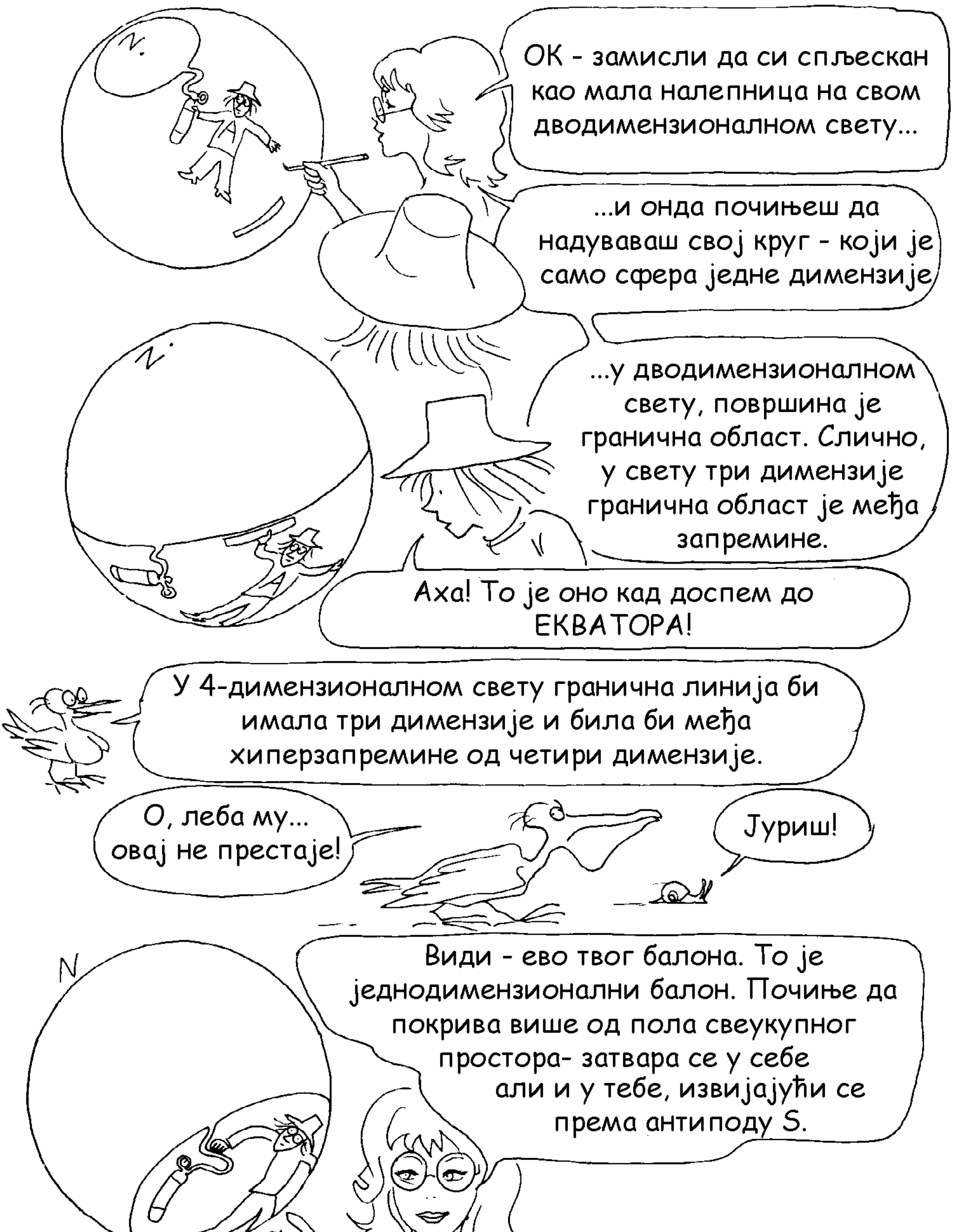


Повећавањем полупречника ℓ на лопти Мудрица је завршио тако што се нашао - на антиподалној тачки S, у односу на почетну тачку N - као сопствени плен.

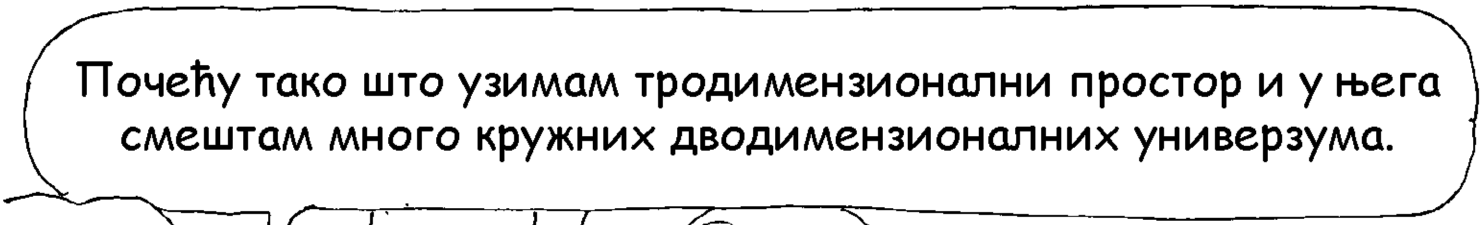
Иста ствар се дешава и у тродимензионалном свету позитивног закривљења. У својој дводимензионалној лопти, Арсеније је доспео до ЕКВАТОРА, затварајући половину од расположиве површине. У овом тродимензионалном ХИПЕРСФЕРИЧНОМ простору, такође постоји ЕКВАТОР и Арса долази до њега када његов балон заузме половину расположиве запремине. На лопти, екватор изгледа као ПРАВА ЛИНИЈА. Исто тако, на хиперсфери, "екваторијални балон" изгледа као РАВАН.
Проласком екватора закривљеност балона се обрће, и он се аутоматски окреће ка тачки S, антиподу тачке N у центру балона.

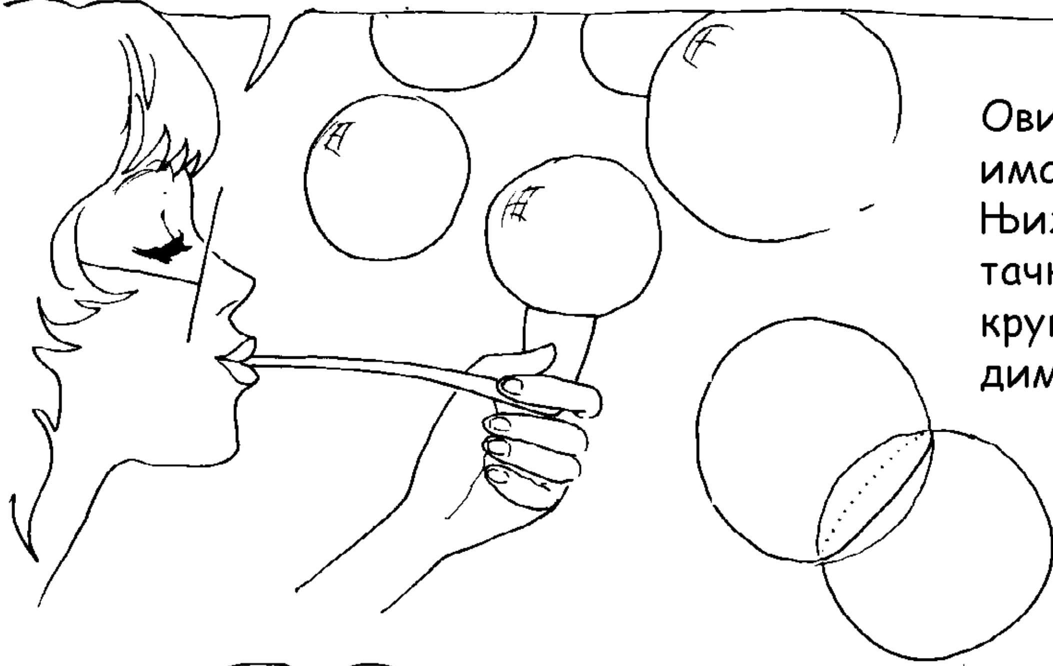

Проблеми?
Ух... све ми се измешало у глави.
У животу се ретко када иде правом путањом...
Навигација на хиперсфери у прво време може деловати мало збуњујуће. Најбоље је ићи мало по мало.
Хм. Да...
Као да сам промашио тему...


Па, за почетак - где је центар те хиперсфере?
Види - ако на равни нацртам круг и ти ћеш се сложити да он представља простор у једној димензији, уопљен у простор две димензије - то јест РАВАН.
И центар круга **није** на кругу.
Хм...
Кружница представља затворени дводимензионални простор, утопљен у тродимензионални. Ипак, центар кружнице не лежи на самој кружници већ у окружујућем тродимензионалном свету.
Центар хиперсфере од три димензије се може лоцирати у четвородимензионалном простору, уколико претпоставимо да је такође утопљен.
...
Он, ипак, не лежи на стварној хиперсфери. На сличан начин можеш утопити 4димензионалну хиперсферу у 5димензионални простор, и тако даље...

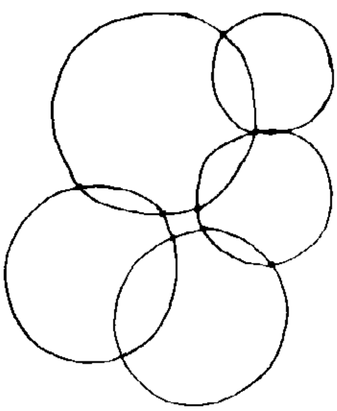

N.
ОК - замисли да си спљескан као мала налепница на свом дводимензионалном свету...
...и онда почињеш да надуваваш свој круг - који је само сфера једне димензије
N.
...у дводимензионалном свету, површина је гранична област. Слично, у свету три димензије гранична област је међа запремине.
Аха! То је оно кад доспем до ЕКВАТОРА!
У 4-димензионалном свету гранична линија би имала три димензије и била би међа хиперзапремине од четири димензије.
О, леба му... овај не престаје!
Јуриш!
N
Види - ево твог балона. То је једнодимензионални балон. Почиње да покрива више од пола свеукупног простора- затвара се у себе али и у тебе, извијајући се према антиподу S.
S


Исто тако, када сам боравио у свом закривљеном тродимензионалном свету, чим са напумпао више од половине укупне запремине, балон се затворио и прогутао ме, наставивши према антиподалној тачки.
СКОНТАО САМ!!!
Управо због тога што лопта у тродимензионалном закривљеном свету очито има ДВА центра, који су антиподални.
?!!?
То јест... нисам тачно сигуран шта сам то скапирао, али имам утисак да ми је НЕШТО јасно...
Какав смор...
У реду је, Арсо. У више од три димензије **РАЗУМЕТИ ЗНАЧИ ЕКСТРАПОЛИРАТИ.**
Ма, екстраполирам ја али ми ништа није јасно!
Мораш мало да употребиш имагинацију... да замислиш ствари!





Ови универзуми могу имати тачке пресека. Њихове заједничке тачке формирају кругове - објекте димензије **ЈЕДАН**.



Слично, ако их представимо на листу хартије, ови се кругови, који имају само једну димензију, секу у **ТАЧКАМА**. (Обично се каже да је димензија тачке **НУЛА**)

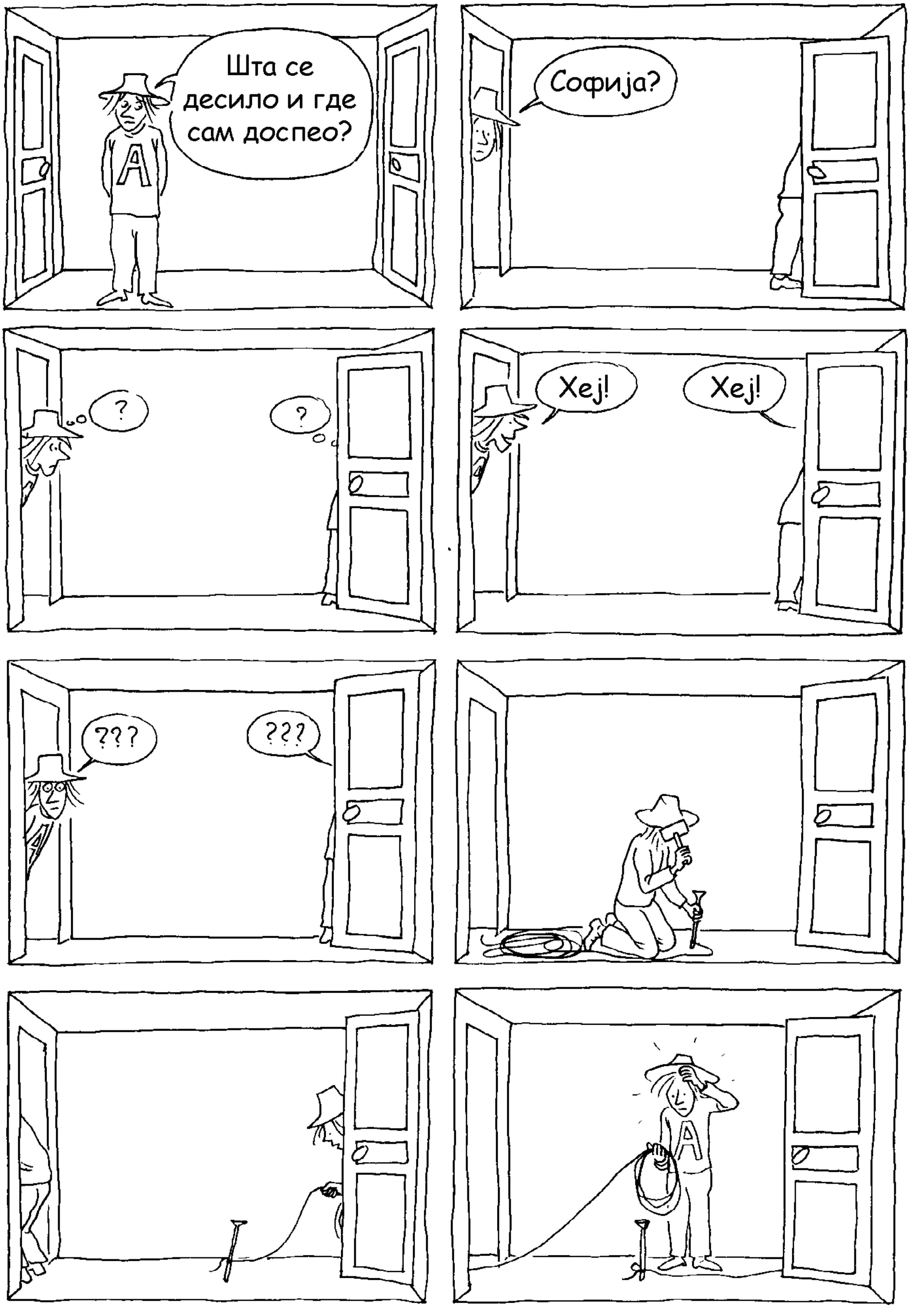
Тако да се на сферу може гледати као на пресек два тродимензионална "балончића" који постоје у четвородимензионалном свету.

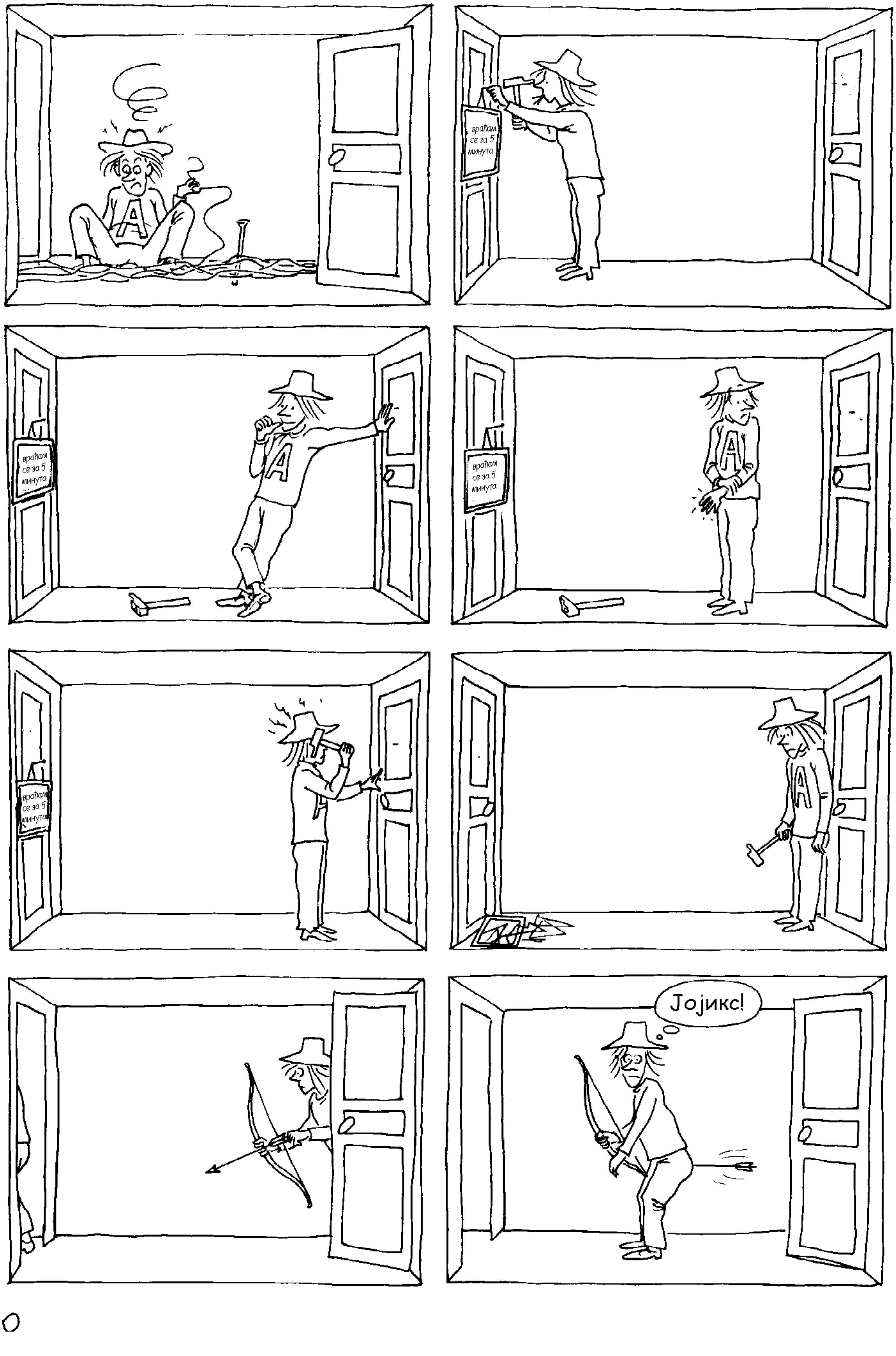
И тако даље: тродимензионални закривљен простор, хиперсфера, се може посматрати као пресек два четвородимензионална балончића у простору од пет димензија.


Пошто су Арсеније и Софија освијили и најсуровије врхове екстраполације, вратише се истраживању нових тродимензионалних светова.
Матиш је матиш ...зар не?
Ово је, наравно, тродимензионална лепљива трака помоћу које правимо праве! Лепљиви крај је, наравно, на дну.
А сада, у овом новом простору, праве се не затварају. И када надувавам балон, запремина је већа од $\frac{4}{3}\pi\ell^3$; и површина је већа него $4\pi\ell^2$. И више од тога - збир углова т роугла је мањи од 180°.
Окрени страницу 23 и схватићешда се налазиш у простору **негативног закривљења**!


ДА РЕЗИМИРАМО:
У тродимензионалном свету се можемо понашати на разне начине. На пример, можемо да баратмо површинама, које су дводимензионални простори.
Уколико је збир углова у ТРОУГЛУ, у тродимензионалном свету, већи од 180°, можемо рећи да је ЗАКРИВЉЕЊЕ ПОЗИТИВНО. Затим, формирањем сфере полупречника ℓ, СВЕМИРСКА СОНДА нам даје запремину мању од $4\pi\ell^2$, а самим тим и површину мању од $\frac{4}{3}\pi\ell^3$. Овај простор, ХИПЕРСФЕРА, се затвара у себе.
Ипак, ако је збир углова у троуглу мањи од 180°, онда је закривљење тродимензионалног света НЕГАТИВНО. Запремина сфере полупречника ℓ је већа од $4\pi\ell^2$ а њена површина је већа од $\frac{4}{3}\pi\ell^3$.
Читав простор се шири у БЕСКОНАЧНОСТ.
Али, уколико збир углова дође до 180°, простор је једноставно ЕУКЛИДОВСКИ.
И сав труд само због овога?

ПРОСТОР МОРА БИТИ ИЛИ ОТВОРЕН ИЛИ ЗАТВОРЕН!!!


Шта се десило и где сам доспео?
Софија?
?
?
Хеј!
Хеј!
???
???



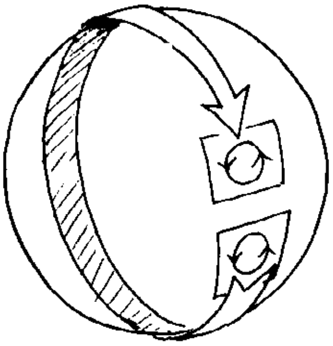
враћам се за 5 минута
враћам се за 5 минута
враћам се за 5 минута
Јојикс!

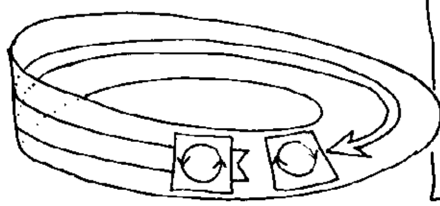

Погледајте Мудрицу стационираног у ЦИЛИНДРИЧНОМ тродимензионалном универзуму. Без обзира на то што је овај простор еуклидовски, са нултим закривљењем (сума углова је 180°) овај универзум се затвара сам у себе.
Јојикс!
Ћирибу - ћириба! Имамо сферични, 'иперболични и целиндрични простори. Гомилица, мори!
Мислиш?
Хајдемо у малу шетњу назад до две димензије.
Аиии!
МАГЛА

СПОЉА ИЗНУТРА:

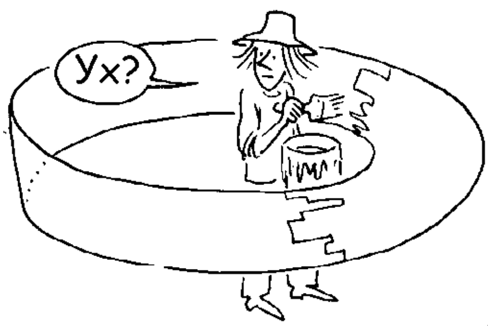

Затворио се, баш као и раније.
Збир углова 180° Ова справица је еуклидовска. Још један цилиндар!
Или не...
!?!
Хееej!
Сада је све јасно... овога пута Арса је био у **неорјентабилном дводимензионалном простору.** Најбољи пример за ово је Мобијусова трака (1833). Ова идеја је некако измакла Грцима, иако су они у своје време промислили скоро све могуће теме.
почетак праве
Софија, пусти ме напоље!

Нацртај круг на површини, и стави на њега стрелицу.
Круг посматрај као малу налепницу коју можеш да помераш широм површине. Ако се круг увек враћа на своју почетну тачку при чему стрелица указује исти правац, онда кажемо да је површина ОРЈЕНТАБИЛНА - као у случају сфере, цилиндра, равни и тако даље. Али, на Мобијусовој траци, ствари стоје мало друкчије...





При сваком путовању кроз дводимензионални универзум, круг обрће своју орјентацију.



Исто тако, Мобијусову траку не можемо офарбати различитим бојама на супротним странама: она има само ЈЕДНУ страну! Кажемо да је УНИЛАТЕРАЛНА.

Има само једну ИВИЦУ.

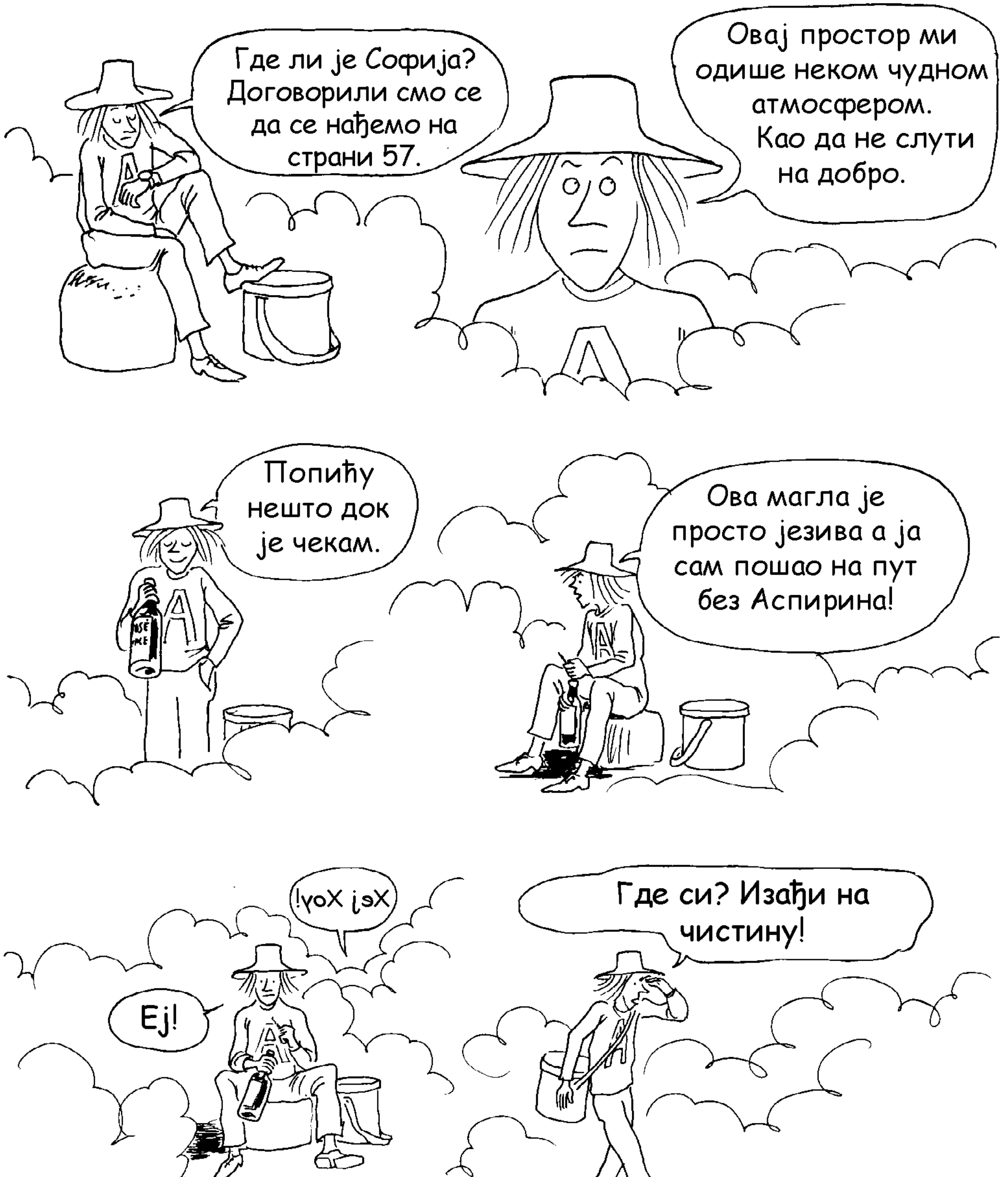
Она се може зашити у једном потезу.

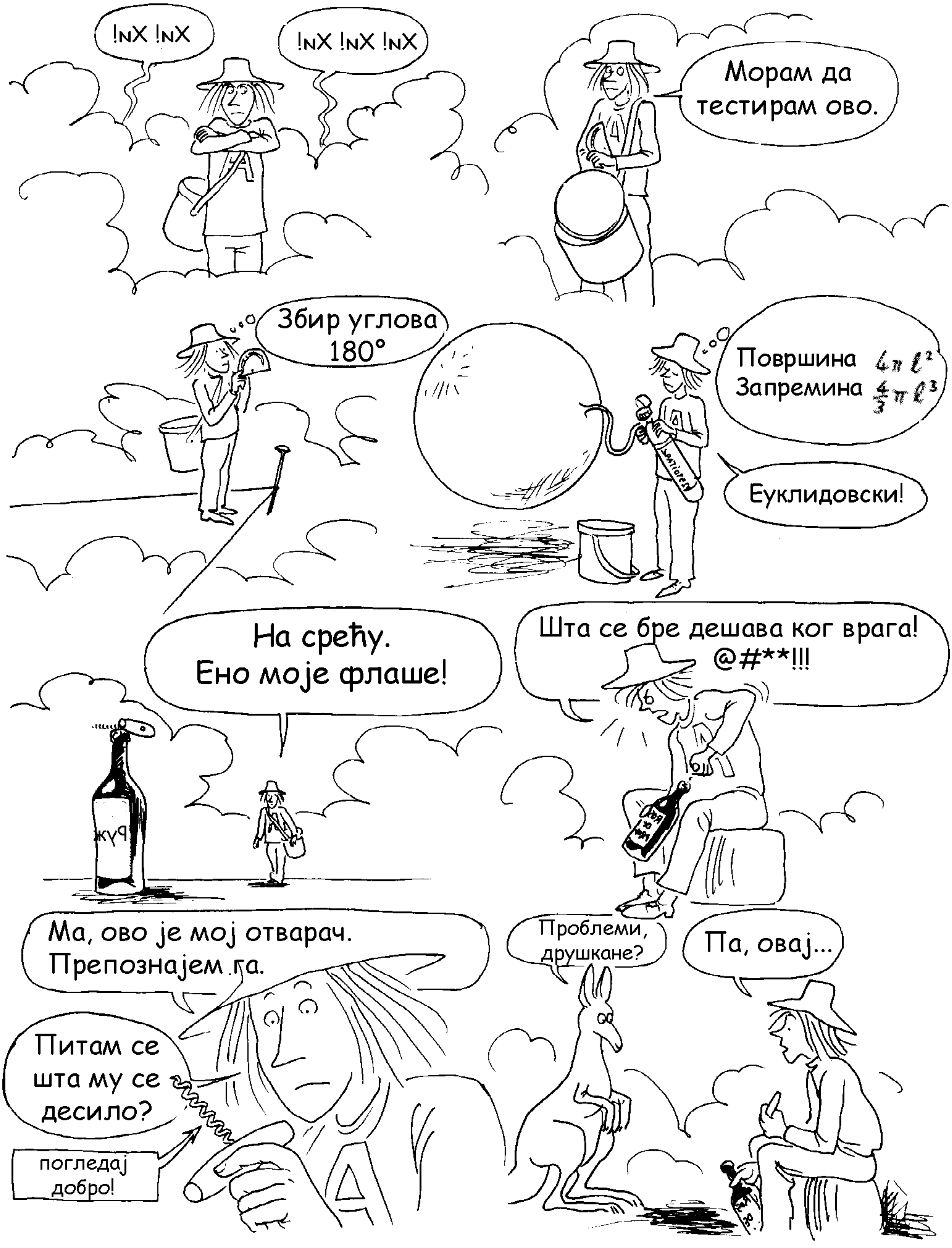

Пробаћу да је пресечем на двоје.
Драги мој Арсо, то је лакше рећи него учинити.
КАКО онда да је пресечем на двоје?
Лако. Пресеци је на три дела.
Приметите да сада има две стране. Она је БИЛАТЕРАЛНА.
Осећам се дезорјентисано.
Приметите да сада имамо једнострану и двострану траку (белу и црну) и да је ова друга два пута дужа од оригиналне траке.

После овог веселог похода на Мобијусову траку, можемо се још једном вратити питању тродимензионалног Еуклидовог простора.

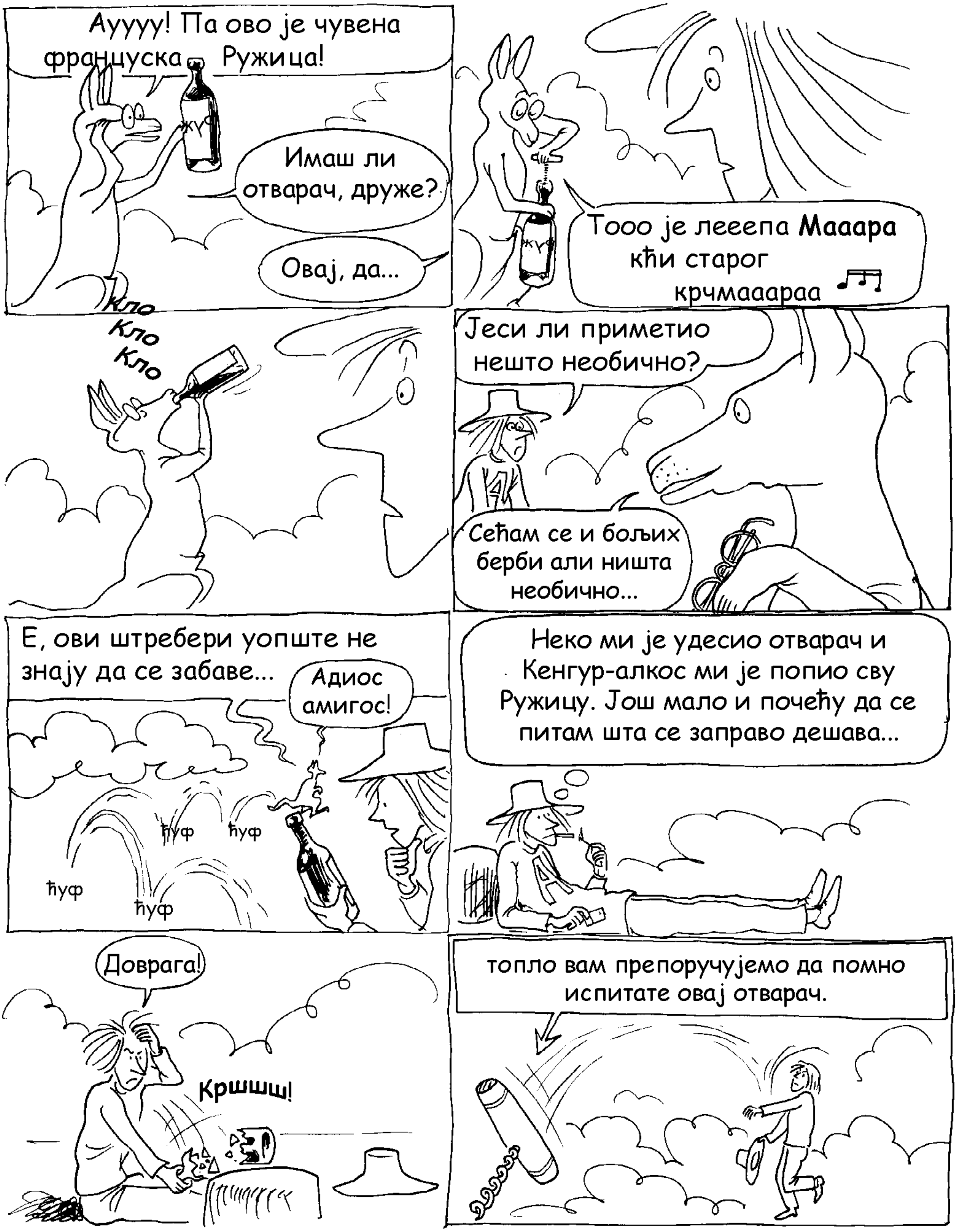
ОРЈЕНТАЦИЈА ПРОСТОРА:

Али, скокнимо још једном, заједно с Мудрицом, до истраживања још једног еуклидовског света од три димензије (али без закривљења)

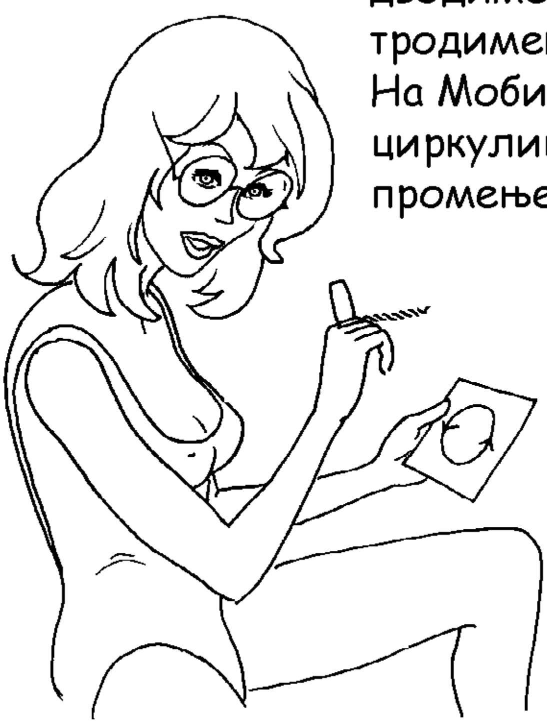




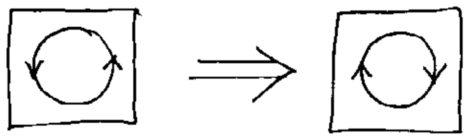
!ɴX !ɴX
!ɴX !ɴX !ɴX
Морам да тестирам ово.
Збир углова 180°
Површина $4\pi \ell^2$
Запремина $\frac{4}{3}\pi \ell^3$
Еуклидовски!
На срећу. Ено моје флаше!
Шта се бре дешава ког врага! @#**!!!
Ма, ово је мој отварач. Препознајем га.
Питам се шта му се десило?
погледај добро!
Проблеми, другкане?
Па, овај...



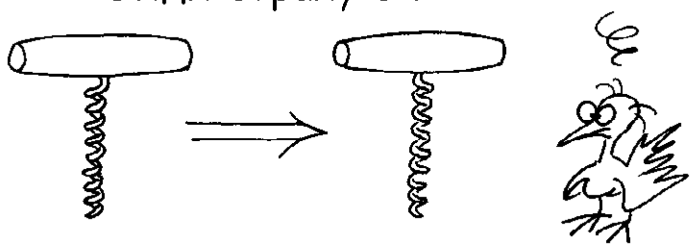
Аyyyy! Па ово је чувена француска Ружица!
жуф
Имаш ли отварач, друже?
Овај, да...
Клo
жуф
Тooo је лееепа Мааара кћи старог крчмааараа
Кло Кло Кло
Јеси ли приметио нешто необично?
Сећам се и бољих берби али ништа необично...
Е, ови штребери уопште не знају да се забаве...
Адиос амигос!
ћуф ћуф ћуф ћуф
Неко ми је удесио отварач и Кенгур-алкос ми је попио сву Ружицу. Још мало и почећу да се питам шта се заправо дешава...
Доврага!
Кршшш!
топло вам препоручујемо да помно испитате овај отварач.



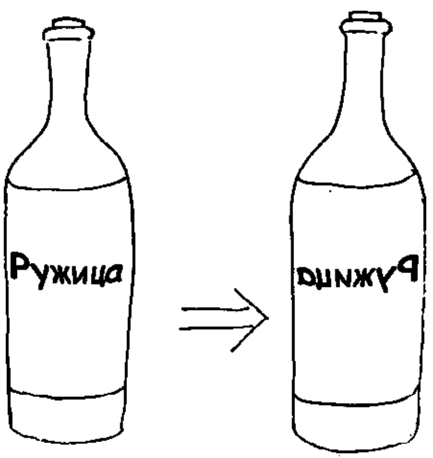
Мобијусова трака - неорјентабилни дводимензионални простор - има тродимензионалног двојника.
На Мобијусовој траци, кружна налепница која циркулише по простору може да се врати назад с промењеном орјентацијом.



Види страну 54



Ови отварачи за флаше су као одраз у огледалу један другом. Отварач, баш као и Арса, може да се посматра као налепница у три димензије. Сваки пут кад објекат "процирколише" тродимензионалним светом, његова орјентација се мења. Приликом заједничког похода с Арсенијем и ми смо, баш као и он, открили да је флаша попут одраза у огледалу и да се отварач увија у погрешном смеру. Још један "круг" би вратио ове објекте у своје почетне појаве.



Арса и кенгур (антиподална врста) живе у истом простору, али се разликују ту том смислу да оно што је десно за кенгура јесте лево за Арсенија. - и обрнуто.

ЕПИЛОГ:


Ово је општа лудница. Нема више лево, нема десно, у правцу казаљке на сату или супротно, нема правог пута, нема кривог пута... Куда ћу онда сад?
Мораш пратити праву, Арсо - праву твог живота.
Ја уопшт' не верујем у ове лудорије. Једино што могу да поверујем је да је овај математичар малчиц' пошандрц'о!
КОСМИЧКЕ ТРАКЕ - цврц!
И шта се он ту 'опште ломата више кад је к'о дан јасно да је универзум ЕУКЛИДОВСКИ!(*)
(*) Гледиште које је 1830. изнео Остроградски, професор математике из Петрограда, после предавања о радовима Рајмана и Лобачевског.


Замисли бре да универзум није к'о што нам изгледа? Па ког смо ђавола ондај ишли у школу!?
Опако!
Мори, знаш шта ја мис'им... оно што се стварно, заистински, рачуна као реалнос' - то бре не мож да бидне да се темељи на тако неке спекулације... стварни свет је бре, како да с' изразим, он је бре сам по себе темељ на све друге ствари.......
Дакле, шта је иза свега овога?
ФИЗИКА, душо!
Истераћу ја ово на ЧИСТАЦ!
Да ЗАБЕТОНИРАМ најзад...
Има ли кога?


Ако је густина материје у универзуму мања од 10-29 gm . cm.-3...
?
...Онда ће универзум имати негативно закивљење и шириће се у бесконачност...
У другу руку, ако је густина већа од 10-29 gm . cm.-3...
!..
...универзум ће бити хиперсферичан и затворен.
А, ако је густина једнака од 10-29 gm . cm.-3...
Хмм!
Доктор Ајнштајн, претпостављам?
Лично.
КРАЈ


Има ли МАТЕМАТИЧАРА у кући?