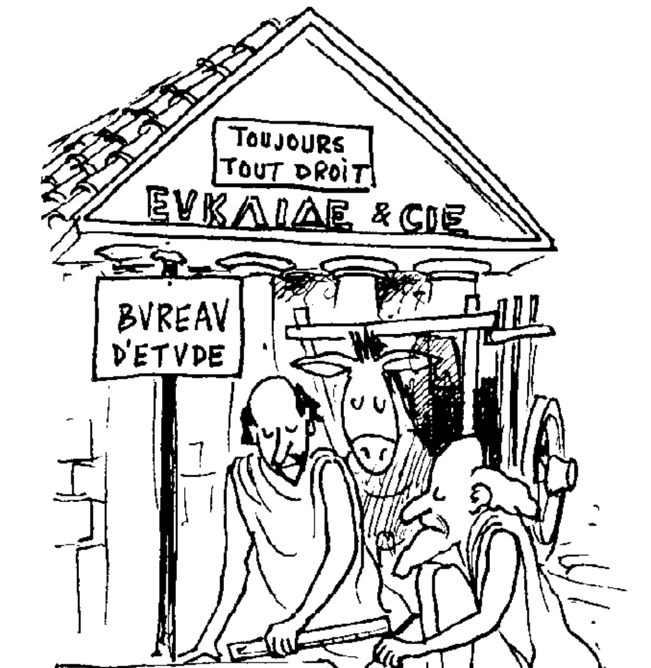
Savoir sans Frontières

GEOMETRICONUL

Jean-Pierre Petit

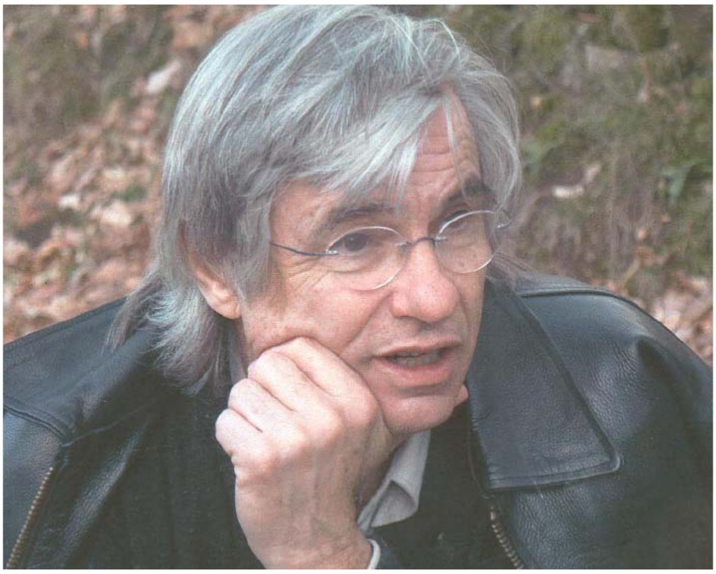


http://www.savoir-sans-frontieres.com

Cunoştinţe fãra Frontiere

Asociatie – legea din 1901
Sit : http://www.savoir-sans-frontieres.com

Preşedinte : Jean-Pierre PETIT



Jean-Pierre Petit : Fost Director de cercetare la CNRS, astrofizician, creator de un stil nou : BENZILE DESENATE STIINTIFICE. In 2005 a decis să pună lucrările domniei sale în număr de două zeci, în domeniul public dând posibilitatea de a fi descărcate gratuit pe site-ul său web. El a creat deasemenea asociaţia « Cunostinţele fără Frontiere » care si-a fixat ca obiectiv de a distribui gratuit cunoştinţele, inclusiv cunoştinţele ştiintifice şi tehnice în lumea întreagă. Asociaţia, care funcţioneaza datorită donaţiilor, retribuie traducătorii cu 150 euro (în 2006) ea plătind comisioanele pentru încasările bancare. Mulţi traducători măresc în fiecare zi numărul de albume traduse (în 2007 în 28 limbi, printre care Laosian şi Rwandez).

Prezentul fişier pdf poate fi duplicat şi reprodus liber, în totalitate sau parţial, utilizat de profesori pentru cursuri cu conditia ca aceste operaţii să nu se preteze cu activităţi lucrative. El poate fi pus în biblioteci municipale, şcolare si universitare, fie sub formă imprimată, fie în reţele de tip Internet.

Autorul a început să completeze aceasta colecţie cu albume mai simple la început (nivel 12 ani). La fel, pe cale de elaborare : albume « vorbitoare » pentru analfabeţi şi « bilingvi » pentru a învăţa limbi străine pornind de la limba sa de origine.

Asociatia caută fără încetare noi traducători în limbi care trebuie să fie limba lor maternă, posedând competenţe tehnice care să le dea aptitudinea să producă traduceri bune a albumurilor abordate.

Donatiile I.B.A.N. FR 16 20041 01008 1822226V029 88
Bank identifier code : PSSTFRPPMAR.
Resursele asociaţiei sunt afectate în principal pentru noile traduceri.

AVERTISMENT

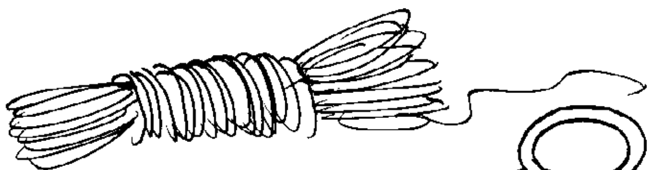
Acesta nu este nici un tratat, nici un curs.

Este pur si simplu povestea lui Anselme Lanturlu,
si a uneia din calatoriile lui in tara geometriei.

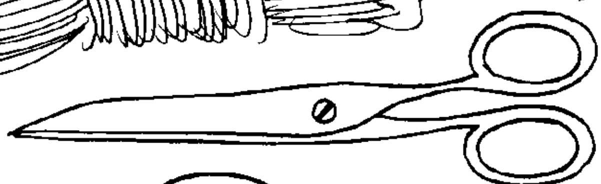
A se citi de preferinta :

* in primul rand cu aspirine

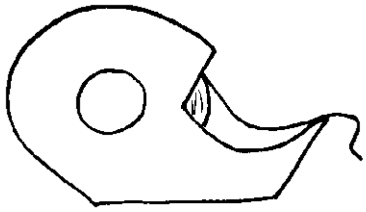
* Apoi cu o sfoara



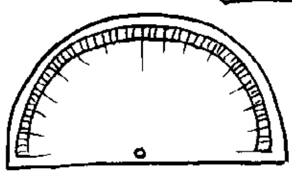
* Cu o foarfeca



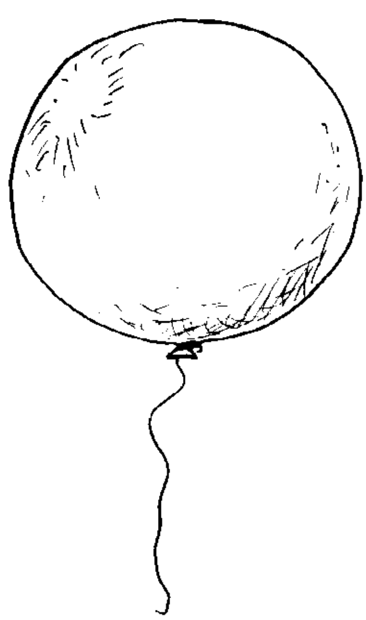
* Cu scotchul



* Cu raportorul



* Si cu un balon dragut



Umflat bine..

Societatea 'Euclid si Compania' s-a infiintat in Alexandria in secolul 3 inainte de

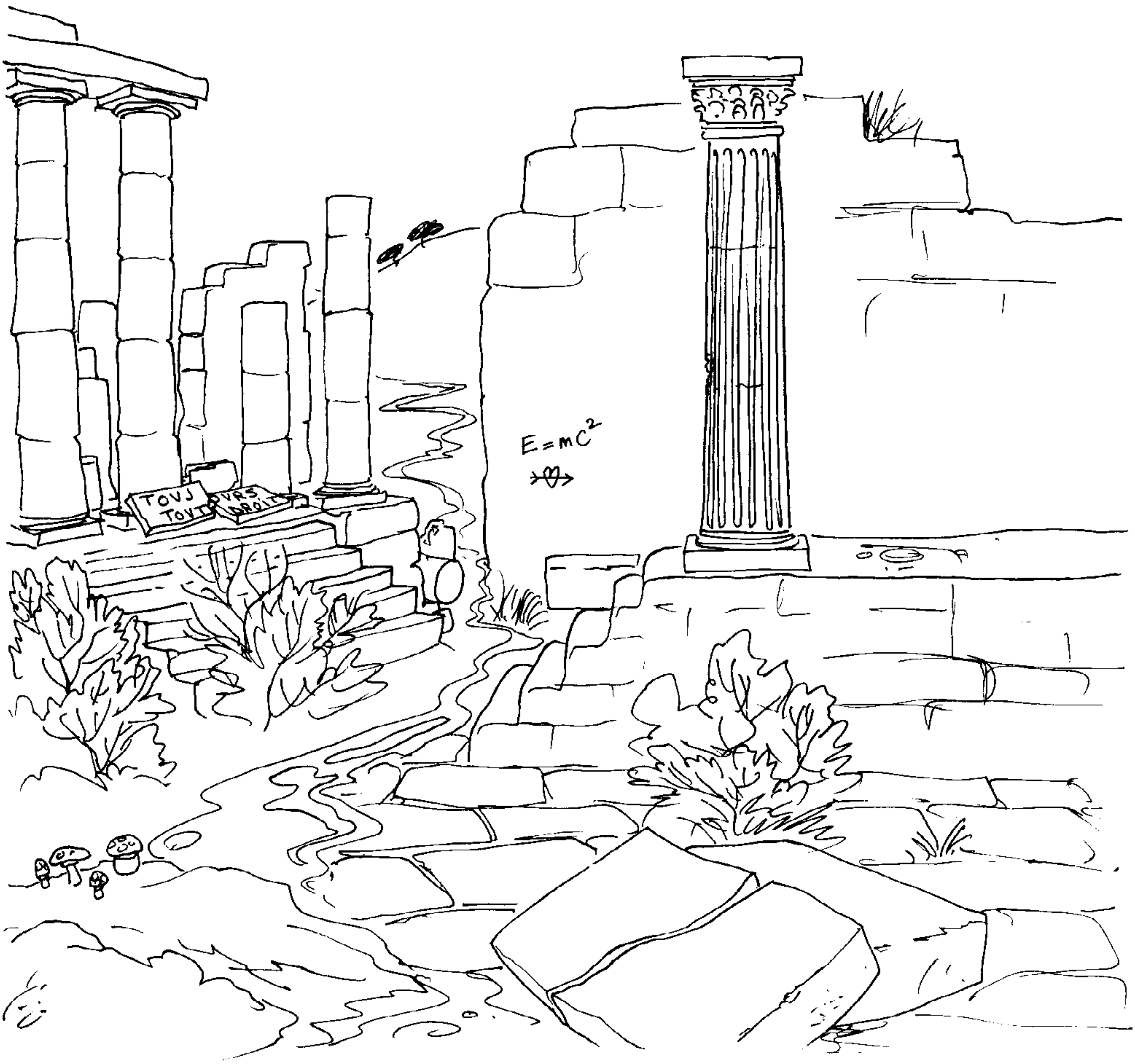
Cristos. Mai bine de 2000 de ani, afacerile au prosperat. Produsele erau apreciate iar

clientela satisfacuta si fidela.

Dar, putin cate putin, gusturile clientilor se schimbara. Unii dintre ei, odata supusi marcii, se intrebara in urma unei serii interesante de experimente :

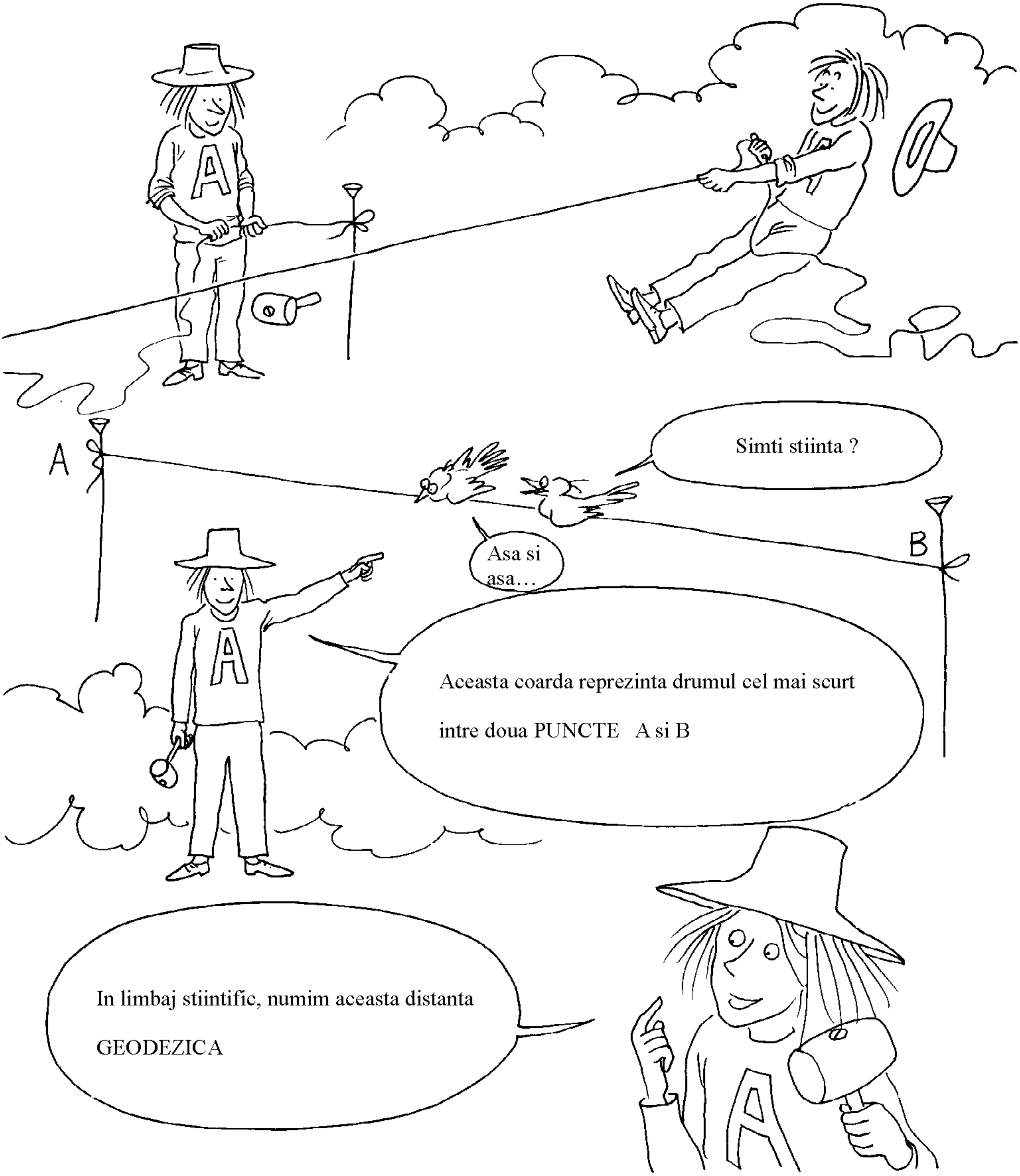
« Euclid este oare ce e cel mai bine peste tot si pentru tot ? ».

Ceea ce urmeaza sa va povestim aici este povestea unuia dintre ei.



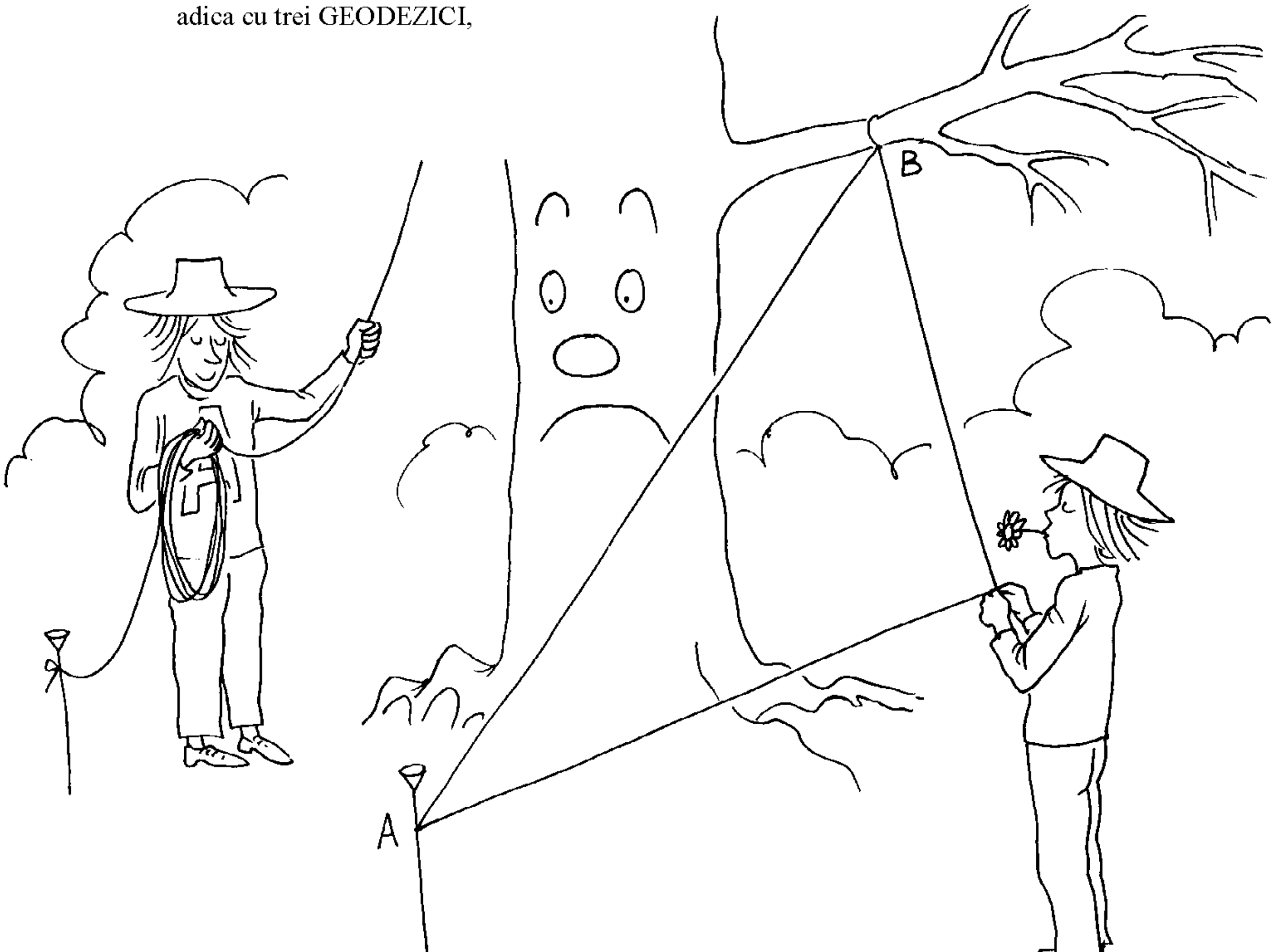
PROLOG . Intr-una din zile Anselme Lanturlu a decis

sa intinda o sfoara intre doi stalpi



Cu trei corzi intinse,

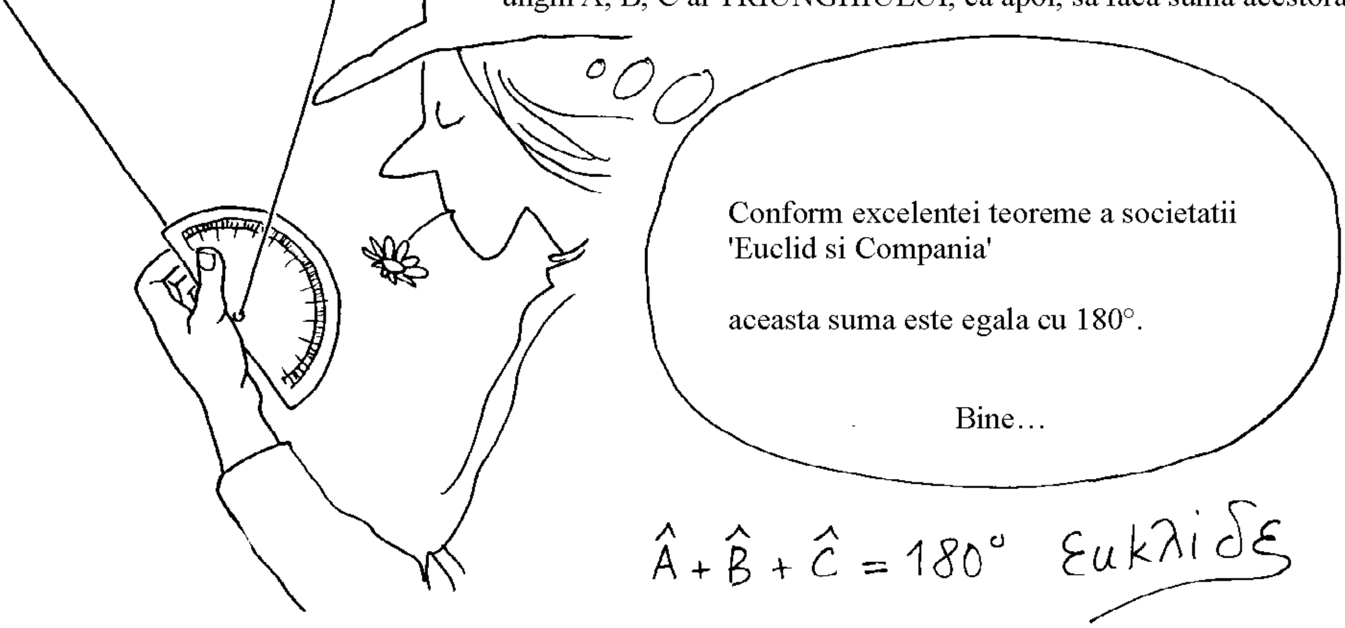
adica cu trei GEODEZICI,



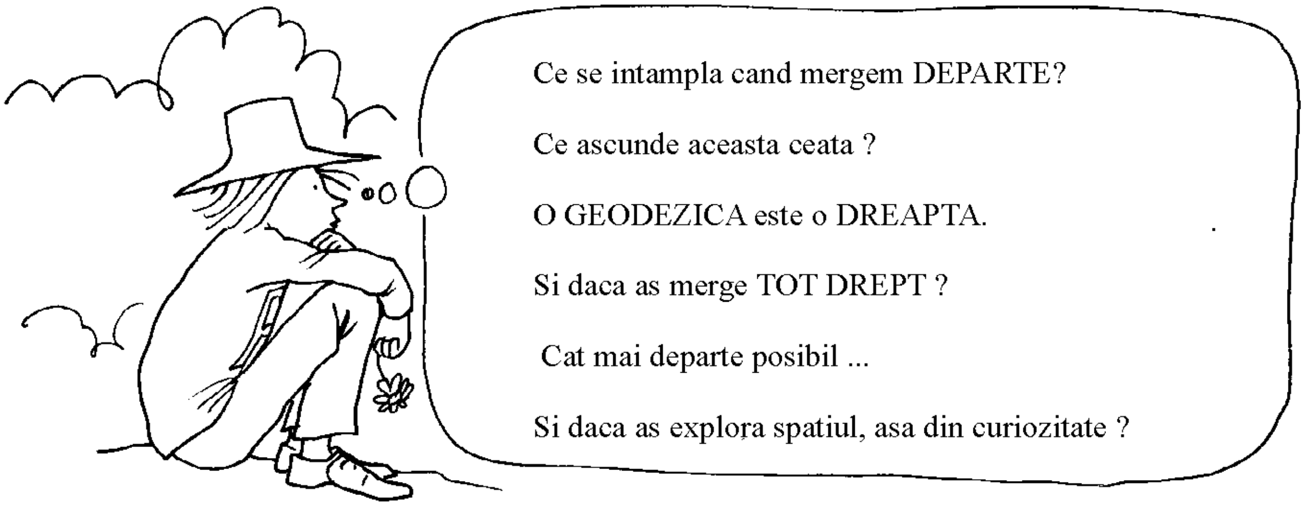
Anselme a facut un TRIUNGHI

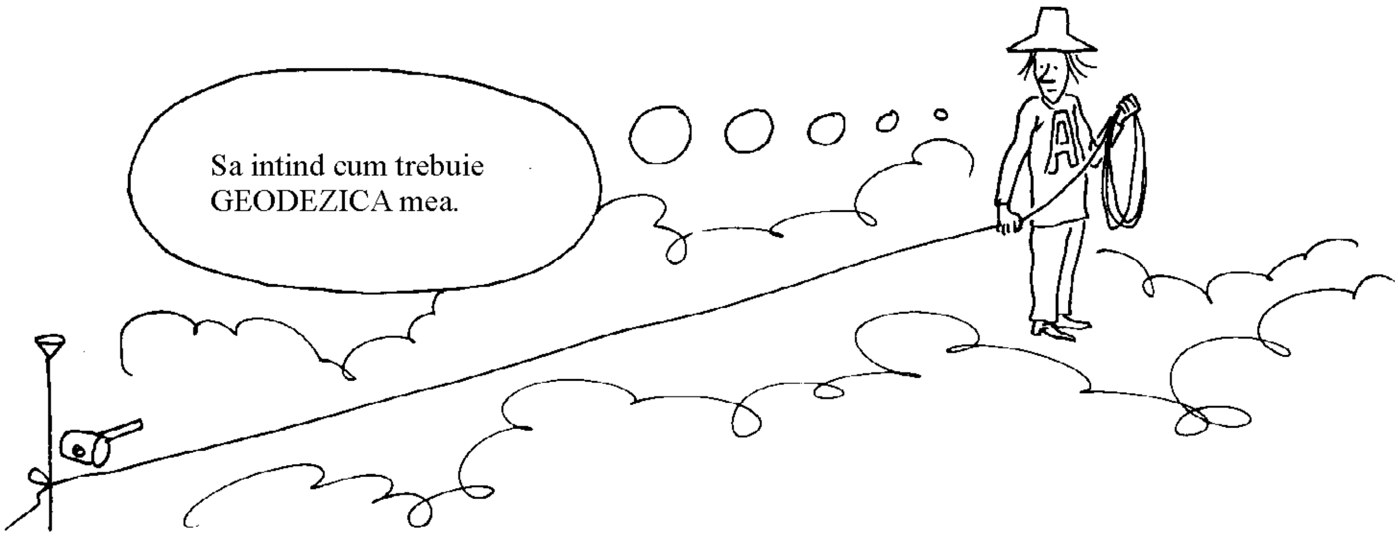
Folosind raportorul, el a masurat fiecare

unghi A, B, C al TRIUNGHIULUI, ca apoi, sa faca suma acestora.



Lumea in care traia Anselme era plina de mistere.





Anselme merse ce merse…

In urma sa, sfoara se desfasura

si in acelasi timp se intindea foarte bine,

atat de bine incat nici nu ii mai pasa de

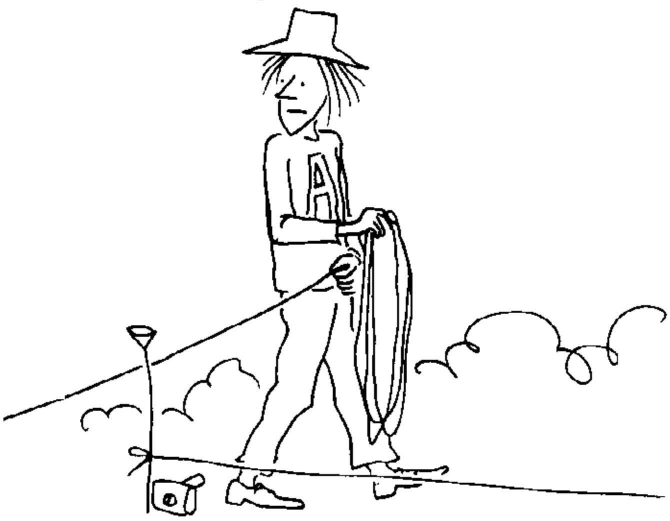
incertitudinile aflate dincolo de ceata:

el fabrica o GEODEZICA impecabila.

Nu stiu daca ati remarcat, insa exista zile , in care am impresia ca

nimic nu merge cum ar trebui.

Anselme care inca mai avea sfoara se decise sa clarifice problema.

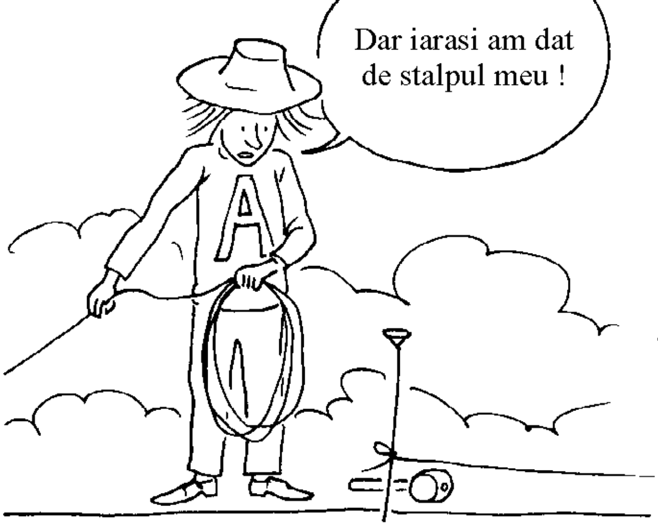


Imperturbabil, el continua sa

mearga TOT DREPT si

sa intinda sfoara plin de curiozitate,

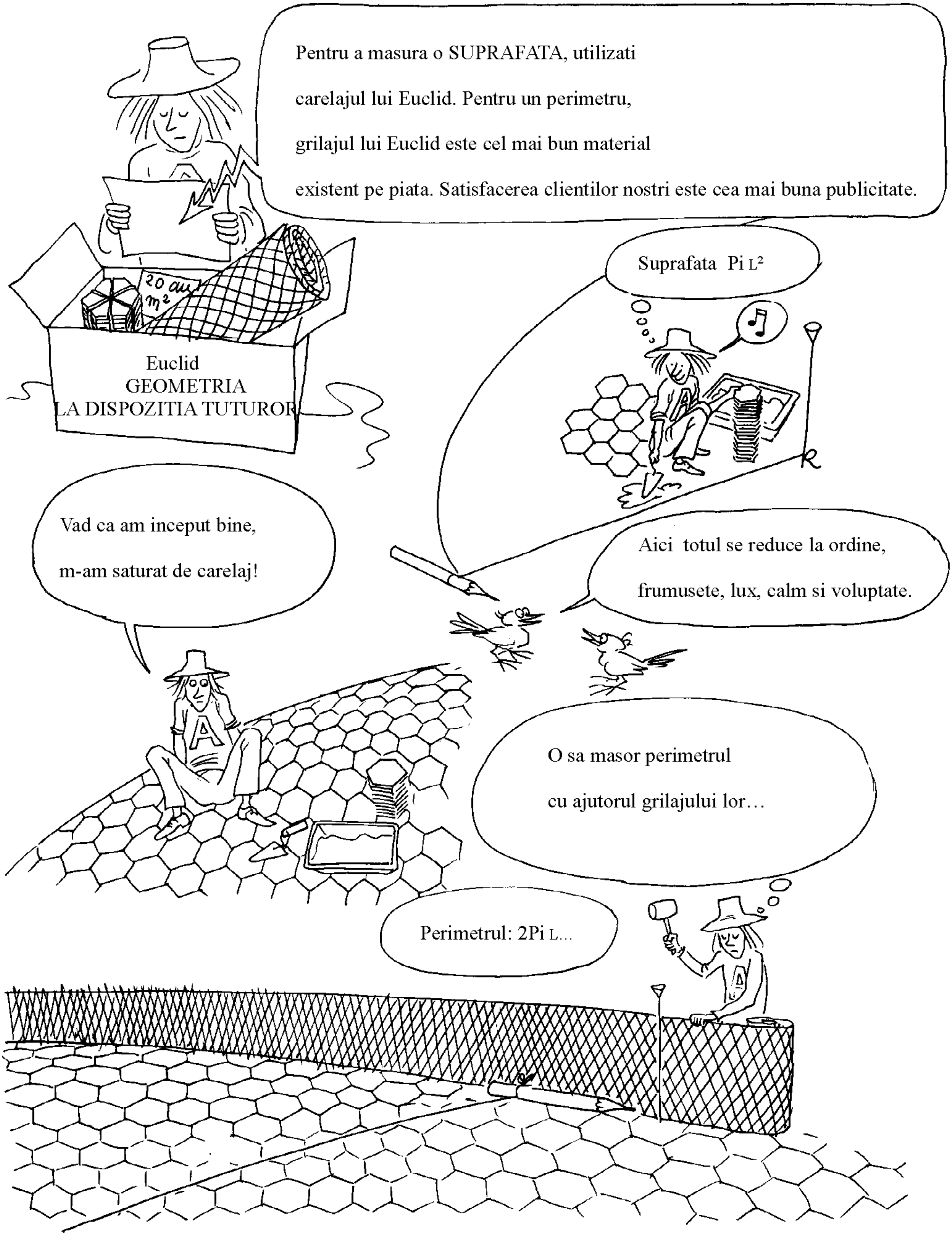
Pacat…

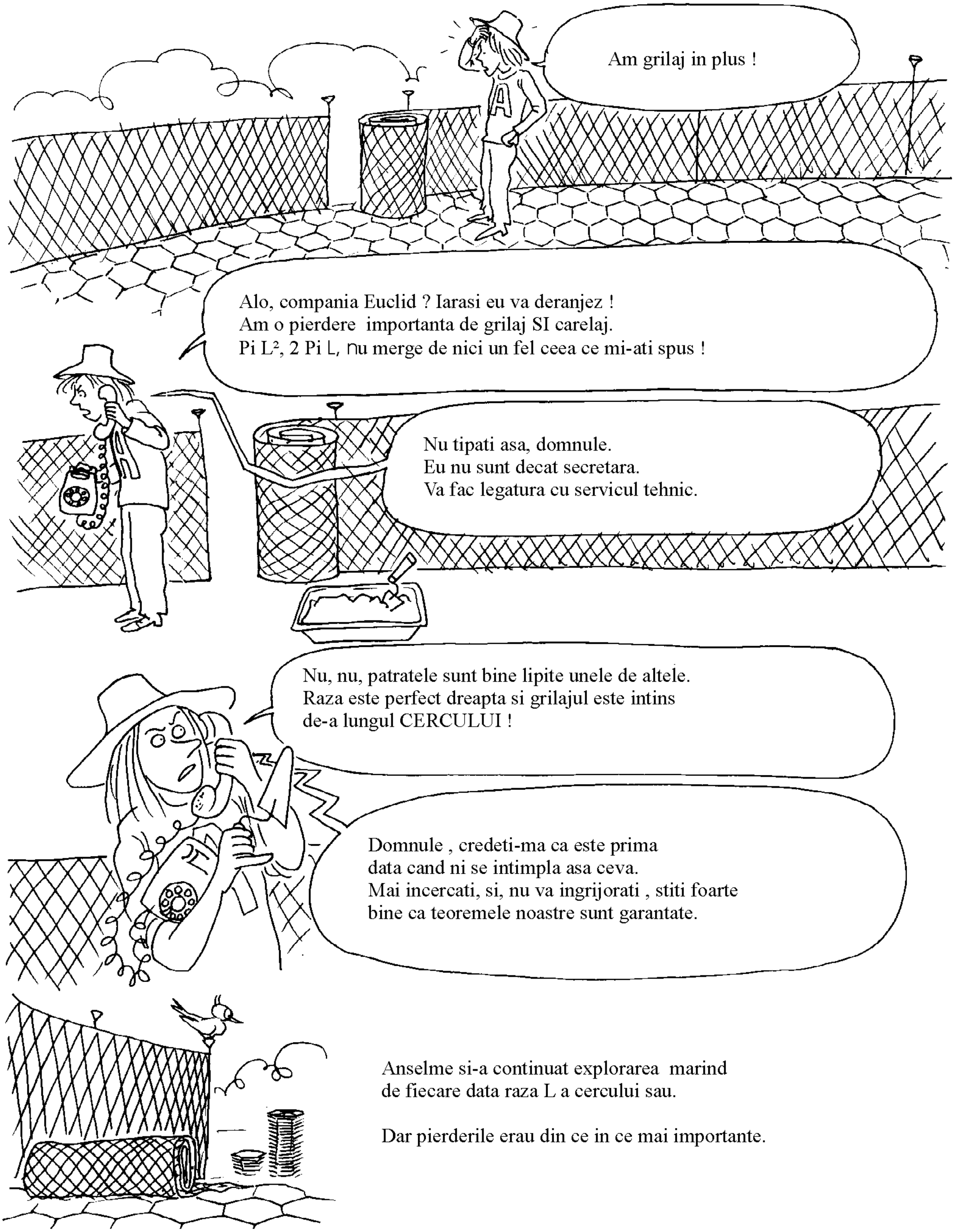


DREAPTA lui Anselme se inchidea !


? ?
? ? ? ? ?
? ? ? ?
Sa incercam una din teoremele companiei Euclid. O sa intind trei GEODEZICI de lungime egala. Astfel voi obtine un TRIUNGHI ale carui unghiuri vor masura fiecare 60° ; suma lor facand 180°. Este scris pe bilet…
B
60
60
60
A
C
Â+B̂+Ĉ = 180°
Apoi voi instiinta..
RATIO OMNIA VINCI
A
B
A
Uite si cel de-al doilea varf B. Nu mai ramane decat sa intind celelalte doua sfori ca sa il gasesc pe cel de-al treilea.
B
A
Stiinta este frumoasa.
Vai ! Unghiurile sunt egale, dar masoara mai mult de 60° fiecare.
Vreo problema. ?
C
A
Si bineinteles, suma lor face mai mult de 180° !

Totusi, punand liniarul pe ORIZONTALA am verificat ca sforile intinse sunt DREPTE.
EUCLIDE
Alo, compania Euclid ? Se pare ca am o problema cu materialul dumneavoastra
O secunda, va fac legatura cu serviciul telefonic.
Probleme cu triunghiurile noastre ? Ma mir. De ce nu incercati cercurile noastre? Clienti nostri sunt foarte multumiti.
…Un cerc este deci un ansamblu de puncte situate la o distanta L fata de un punct fix.
Ati spus : perimetrul 2Pi L, SUPRAFATA PiL^{2}. Notat!
La dispozitia dumneavoastra.

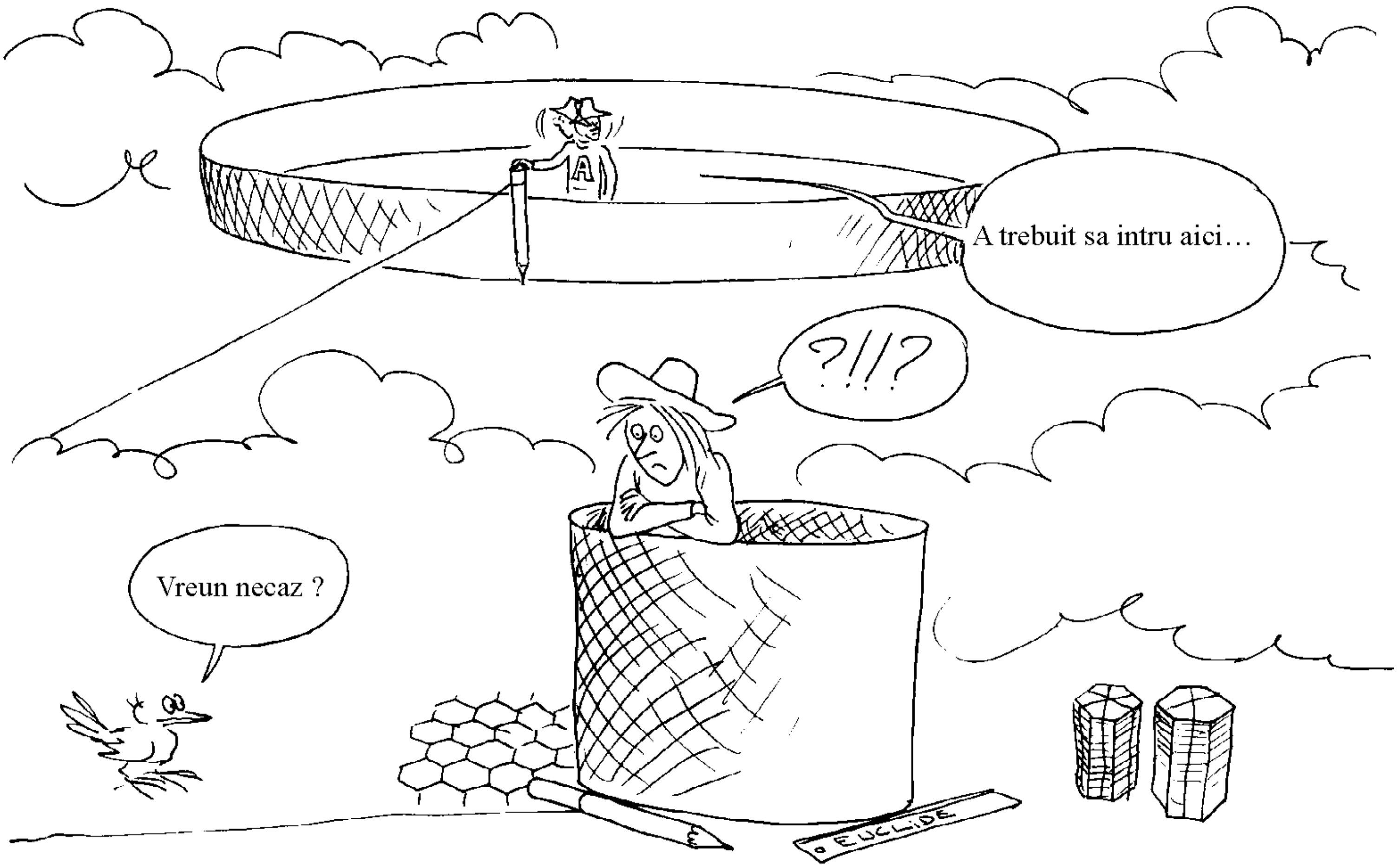

Pentru a masura o SUPRAFATA, utilizati carelajul lui Euclid. Pentru un perimetru, grilajul lui Euclid este cel mai bun material existent pe piata. Satisfacerea clientilor nostri este cea mai buna publicitate.
20 cm m^2
Euclid
GEOMETRIA
LA DISPOZITIA TUTUROR
Suprafata Pi L^2
Vad ca am inceput bine, m-am saturat de carelaj!
Aici totul se reduce la ordine, frumusete, lux, calm si voluptate.
O sa masor perimetrul cu ajutorul grilajului lor…
Perimetrul: 2Pi L…



Am grilaj in plus !
Alo, compania Euclid ? Iarasi eu va deranjez ! Am o pierdere importanta de grilaj SI carelaj. Pi L^2, 2 Pi L, nu merge de nici un fel ceea ce mi-ati spus !
Nu tipati asa, domnule. Eu nu sunt decat secretara. Va fac legatura cu servicul tehnic.
Nu, nu, patratele sunt bine lipite unele de altele. Raza este perfect dreapta si grilajul este intins de-a lungul CERCULUI !
Domnule , credeti-ma ca este prima data cand ni se intimpla asa ceva. Mai incercati, si, nu va ingrijorati , stiti foarte bine ca teoremele noastre sunt garantate.
Anselme si-a continuat explorarea marind de fiecare data raza L a cercului sau.
Dar pierderile erau din ce in ce mai importante.

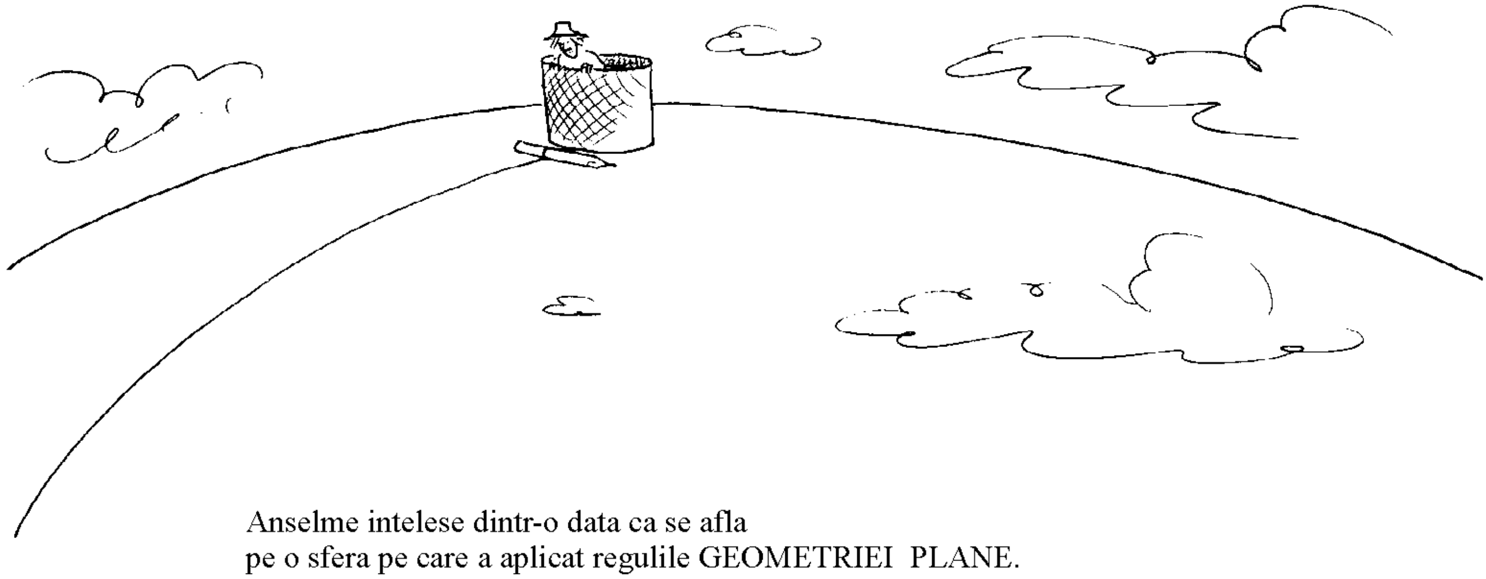

Nu imi vine sa cred, acum am cu 36% mai mult grilaj in plus ! si cu 19% mai mult carelaj ! si cercul pe care l-am trasat a devenit… o DREAPTA !
Visez, sau ce ?
Nu incape nici o indoiala! aceast liniar este DREPT !
EUCLIDE
Anselme mai mareste raza L a cercului, si de aceasta data…
EUCLIDE
Curbura cercului meu a trecut de partea cealalta.
Si acum cand MARESC raza L, perimetrul meu scade, este de necrezut !

Dupa un ultim pavaj :

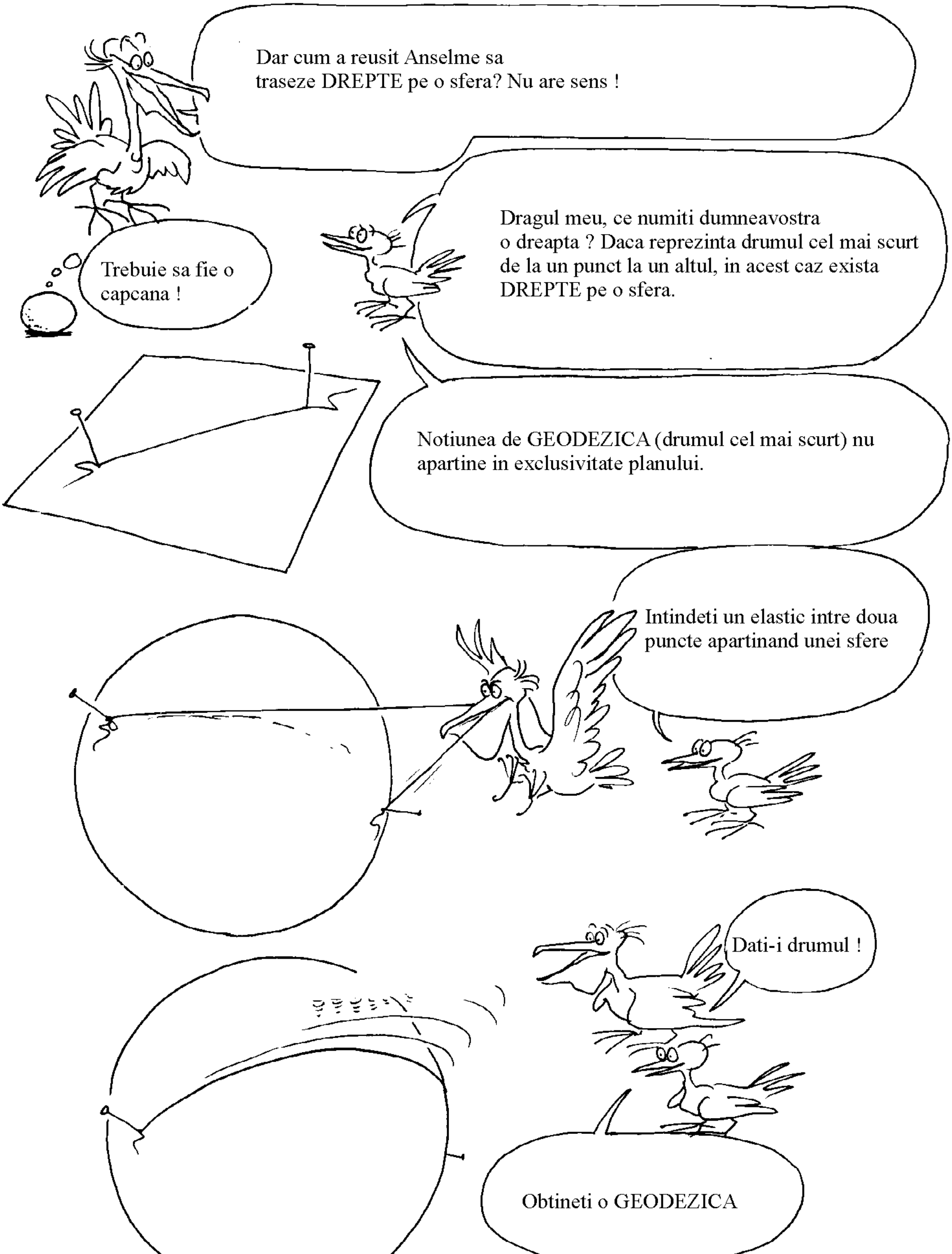


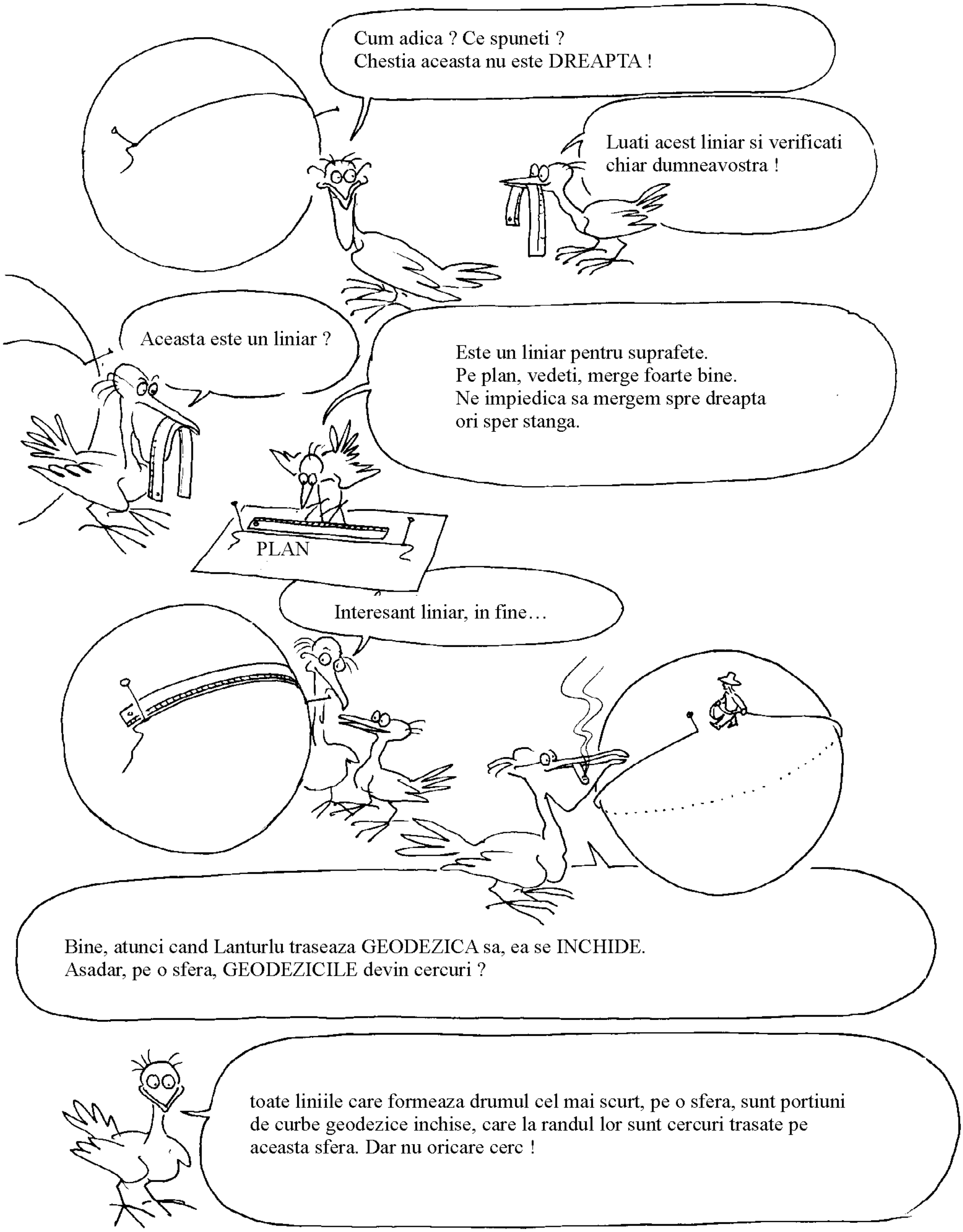
CE S-A INTÂPLAT ?

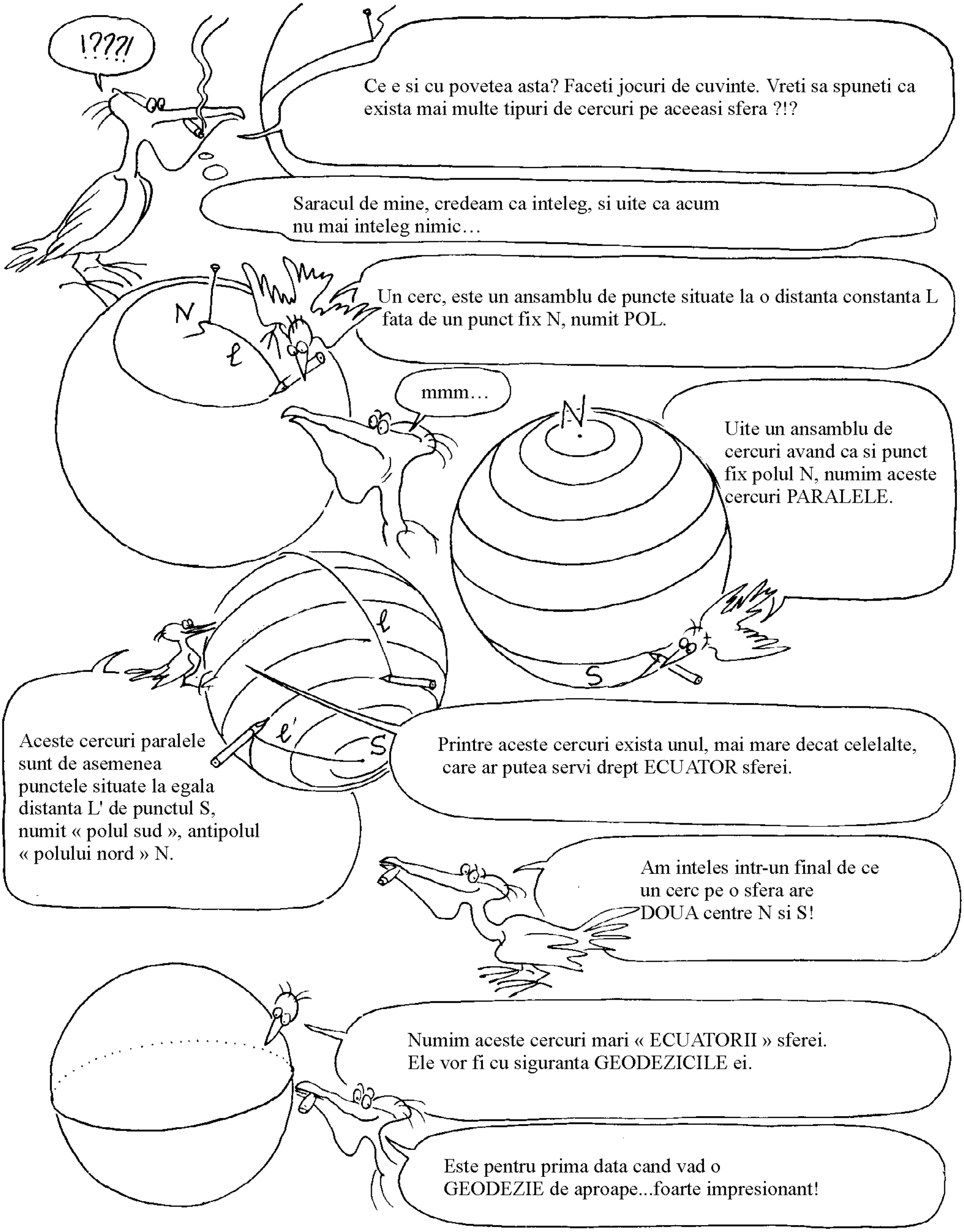
Pentru a afla, sa imprastiem norii :



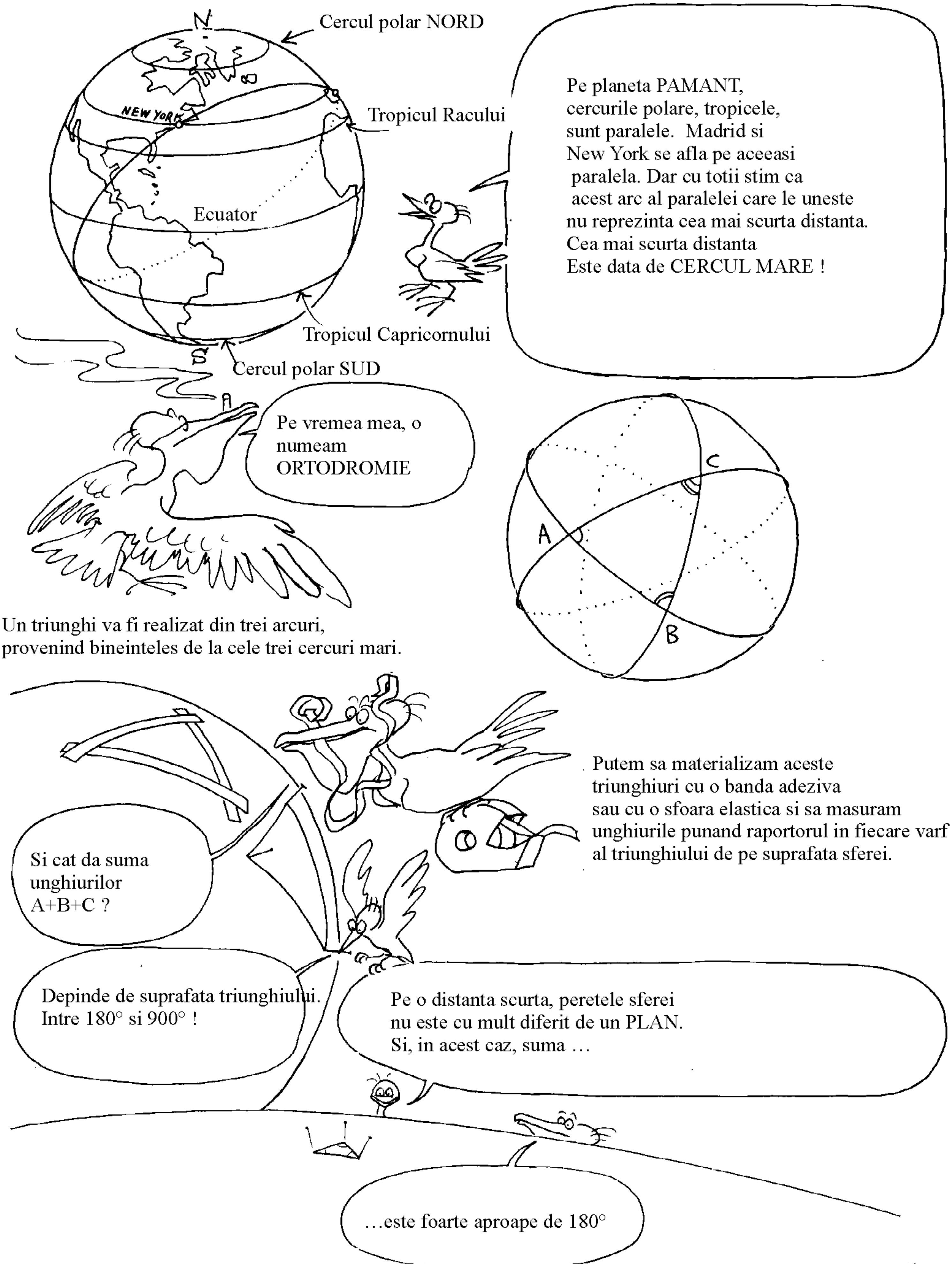
Anselme intelese dintr-o data ca se afla
pe o sfera pe care a aplicat regulile GEOMETRIEI PLANE.

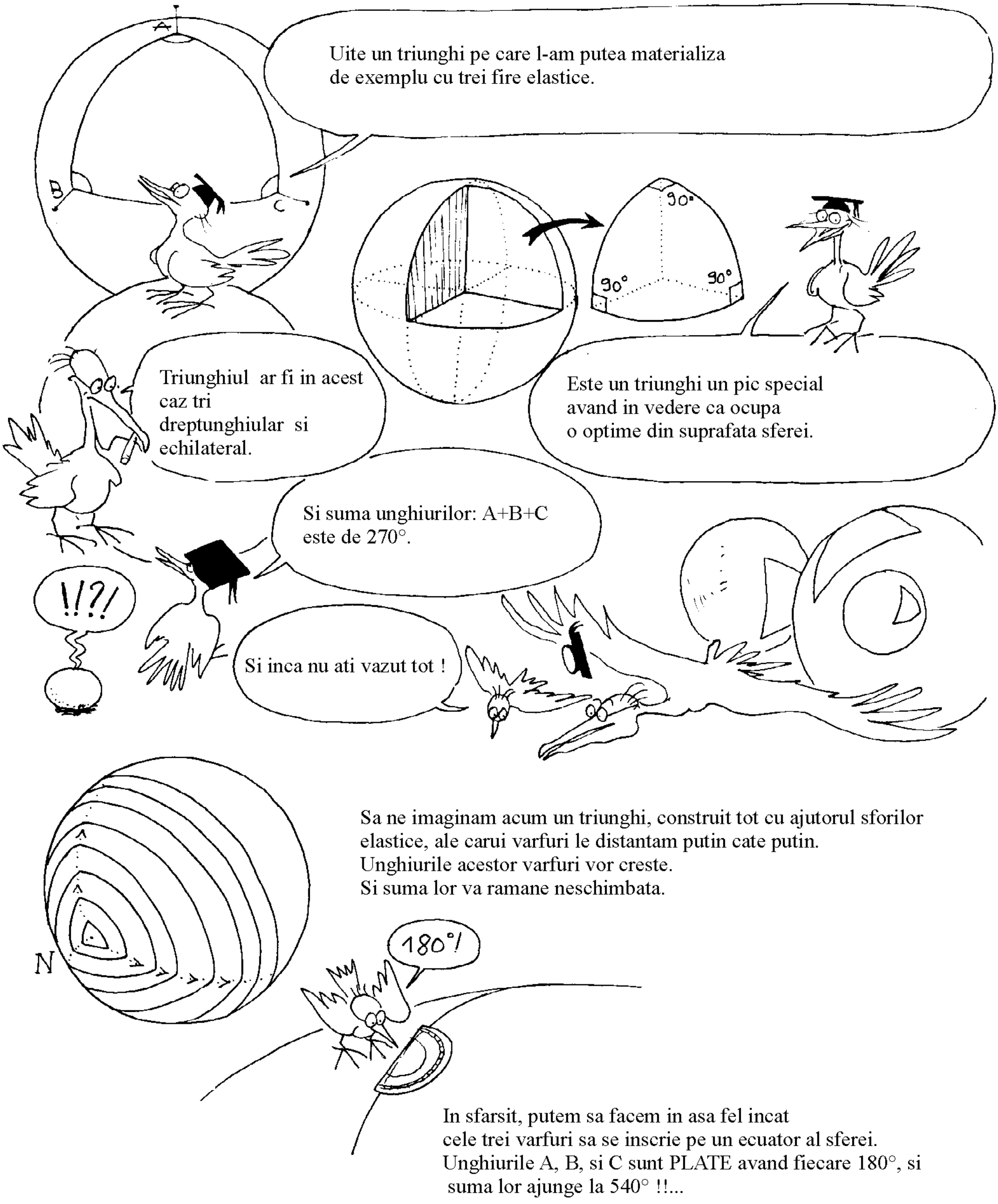

Dar cum a reusit Anselme sa traseze DREPTE pe o sfera? Nu are sens !
Trebuie sa fie o capcana !
Dragul meu, ce numiti dumneavostra o dreapta ? Daca reprezinta drumul cel mai scurt de la un punct la un altul, in acest caz exista DREPTE pe o sfera.
Notiunea de GEODEZICA (drumul cel mai scurt) nu apartine in exclusivitate planului.
Intindeti un elastic intre doua puncte apartinand unei sfere
Dati-i drumul !
Obtineti o GEODEZICA

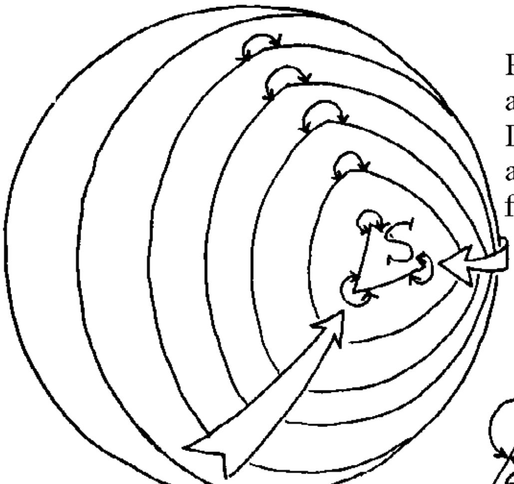

Cum adica ? Ce spuneti ?
Chestia aceasta nu este DREAPTA !
Luati acest liniar si verificati chiar dumneavostra !
Aceasta este un liniar ?
Este un liniar pentru suprafete. Pe plan, vedeti, merge foarte bine. Ne impiedica sa mergem spre dreapta ori sper stanga.
PLAN
Interesant liniar, in fine…
Bine, atunci cand Lanturlu traseaza GEODEZICA sa, ea se INCHIDE. Asadar, pe o sfera, GEODEZICILE devin cercuri ?
toate liniile care formeaza drumul cel mai scurt, pe o sfera, sunt portiuni de curbe geodezice inchise, care la randul lor sunt cercuri trasate pe aceasta sfera. Dar nu oricare cerc !



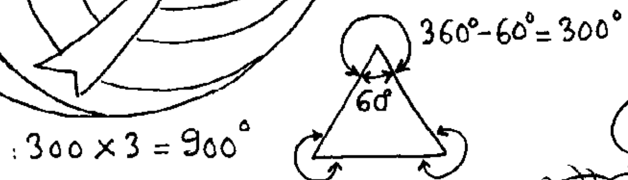
!???!
Ce e si cu povetea asta? Faceti jocuri de cuvinte. Vreti sa spuneti ca exista mai multe tipuri de cercuri pe aceeasi sfera ?!?
Saracul de mine, credeam ca inteleg, si uite ca acum nu mai inteleg nimic…
N
ℓ
Un cerc, este un ansamblu de puncte situate la o distanta constanta L fata de un punct fix N, numit POL.
mmm…
N
Uite un ansamblu de cercuri avand ca si punct fix polul N, numim aceste cercuri PARALELE.
S
ℓ
ℓ'
S
Aceste cercuri paralele sunt de asemenea punctele situate la egala distanta L' de punctul S, numit « polul sud », antipolul « polului nord » N.
Printre aceste cercuri exista unul, mai mare decat celelalte, care ar putea servi drept ECUATOR sferei.
Am inteles intr-un final de ce un cerc pe o sfera are DOUA centre N si S!
Numim aceste cercuri mari « ECUATORII » sferei. Ele vor fi cu siguranta GEODEZICILE ei.
Este pentru prima data cand vad o GEODEZIE de aproape...foarte impresionant!

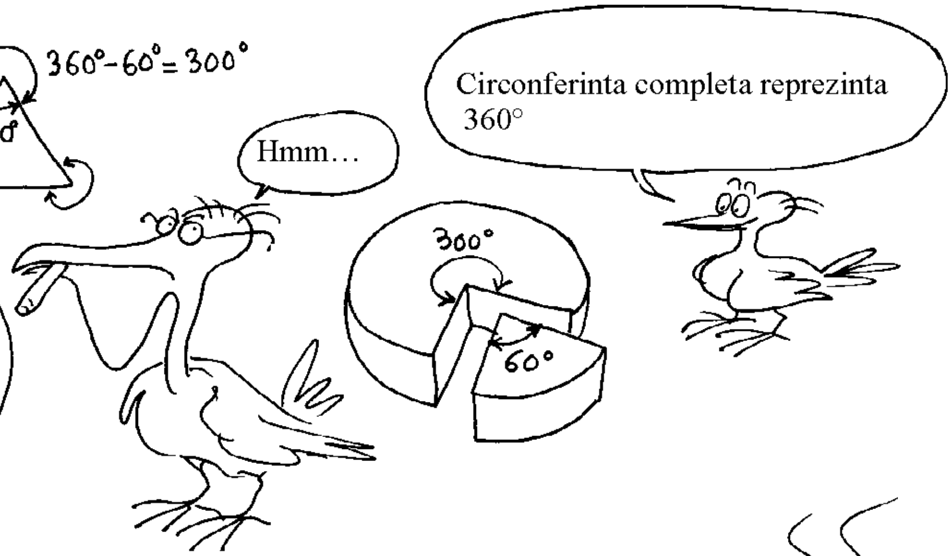

N
Cercul polar NORD
NEW YORK
Tropicul Racului
Ecuator
Tropicul Capricornului
S
Cercul polar SUD
Pe planeta PAMANT,
cercurile polare, tropicele,
sunt paralele. Madrid si
New York se afla pe aceeasi
paralela. Dar cu totii stim ca
acest arc al paralelei care le uneste
nu reprezinta cea mai scurta distanta.
Cea mai scurta distanta
Este data de CERCUL MARE !
Pe vremea mea, o numeam ORTODROMIE
C
A
B
Un triunghi va fi realizat din trei arcuri,
provenind bineinteles de la cele trei cercuri mari.
Putem sa materializam aceste
triunghiuri cu o banda adeziva
sau cu o sfoara elastica si sa masuram
unghiurile punand raportorul in fiecare varf
al triunghiului de pe suprafata sferei.
Si cat da suma unghiurilor A+B+C ?
Depinde de suprafata triunghiului. Intre 180° si 900° !
Pe o distanta scurta, peretele sferei
nu este cu mult diferit de un PLAN.
Si, in acest caz, suma …
…este foarte aproape de 180°


A
B
C
Uite un triunghi pe care l-am putea materializa de exemplu cu trei fire elastice.
90°
90°
90°
Triunghiul ar fi in acest caz tri dreptunghiular si echilateral.
Este un triunghi un pic special avand in vedere ca ocupa o optime din suprafata sferei.
Si suma unghiurilor: A+B+C este de 270°.
!!?!
Si inca nu ati vazut tot !
Sa ne imaginam acum un triunghi, construit tot cu ajutorul sforilor elastice, ale carui varfuri le distantam putin cate putin.
Unghiurile acestor varfuri vor creste.
Si suma lor va ramane neschimbata.
N
180°!
In sfarsit, putem sa facem in asa fel incat cele trei varfuri sa se inscrie pe un ecuator al sferei.
Unghiurile A, B, si C sunt PLATE avand fiecare 180°, si suma lor ajunge la 540° !!...



Prelungind aceasta migratie a varfurilor triunghiului in cealalta emisfera, acesta va converge spre punctul S, antipolul lui N.
Daca pastram definitia de la inceput pentru unghiurile varfurilor atunci, fiecare va avea mai mult de 180° ! Ca sa fiu mai precis, fiecare va avea 360°-60°=300° :





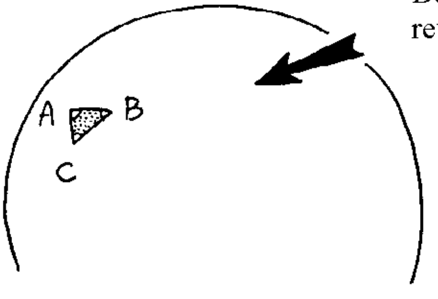
Astfel, pe o sfera suma unghiurilor unui triunghi poate merge de la 180° pana la 900° !

Conform teoremei lui Gauss, suma unghiurilor unui triunghi de pe o sfera este de :

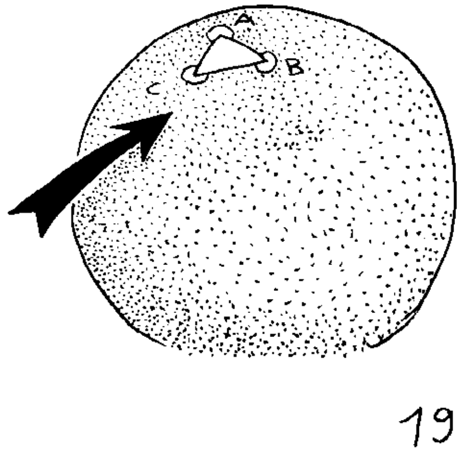
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}1416\, R^2}\right) \text{ grade}$$

unde R reprezinta raza sferei si Aria, aria triunghiului.

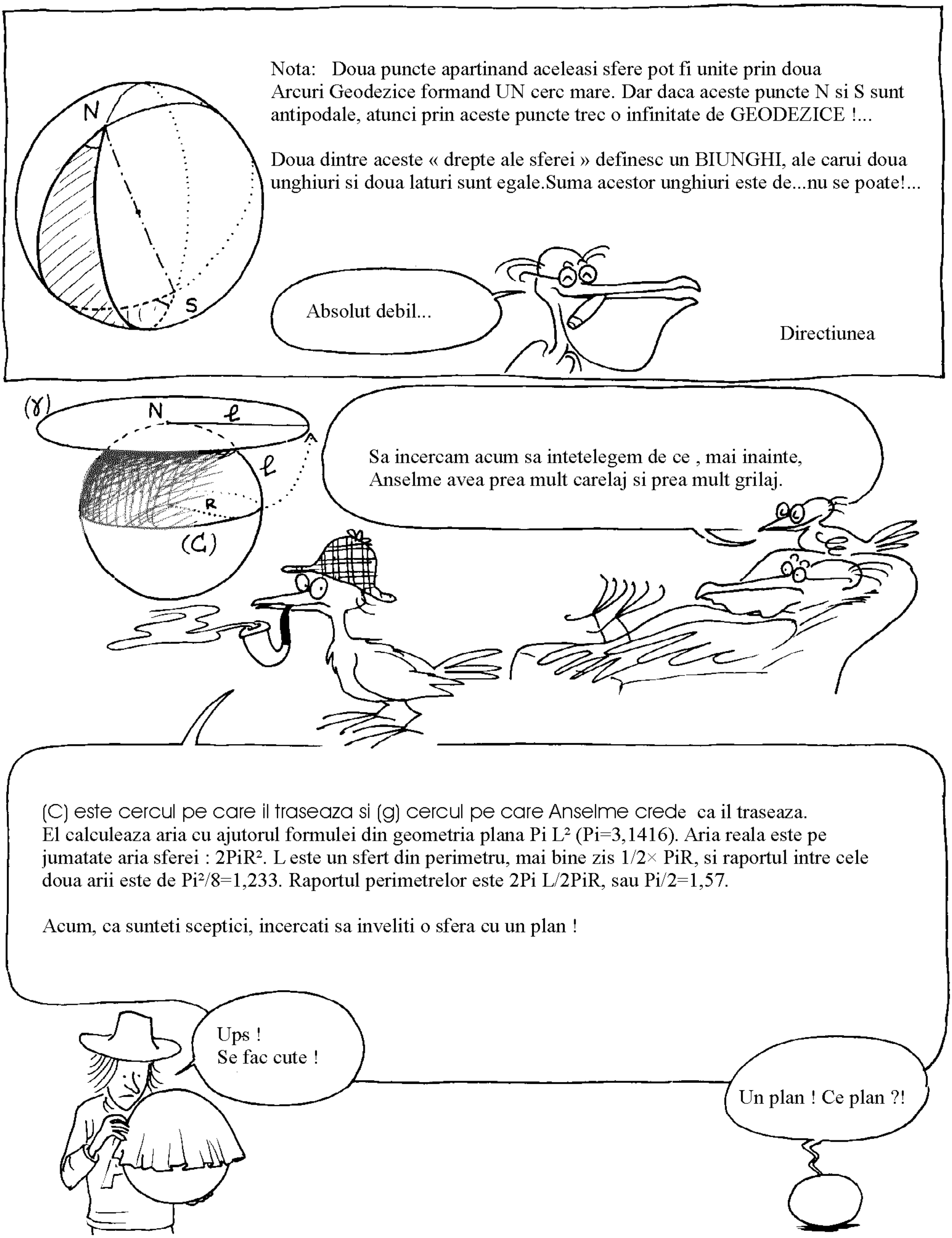
Daca aria triunghiului este neglijabila fata de cea a sferei, revenim la Euclid (A+B+C=180°).



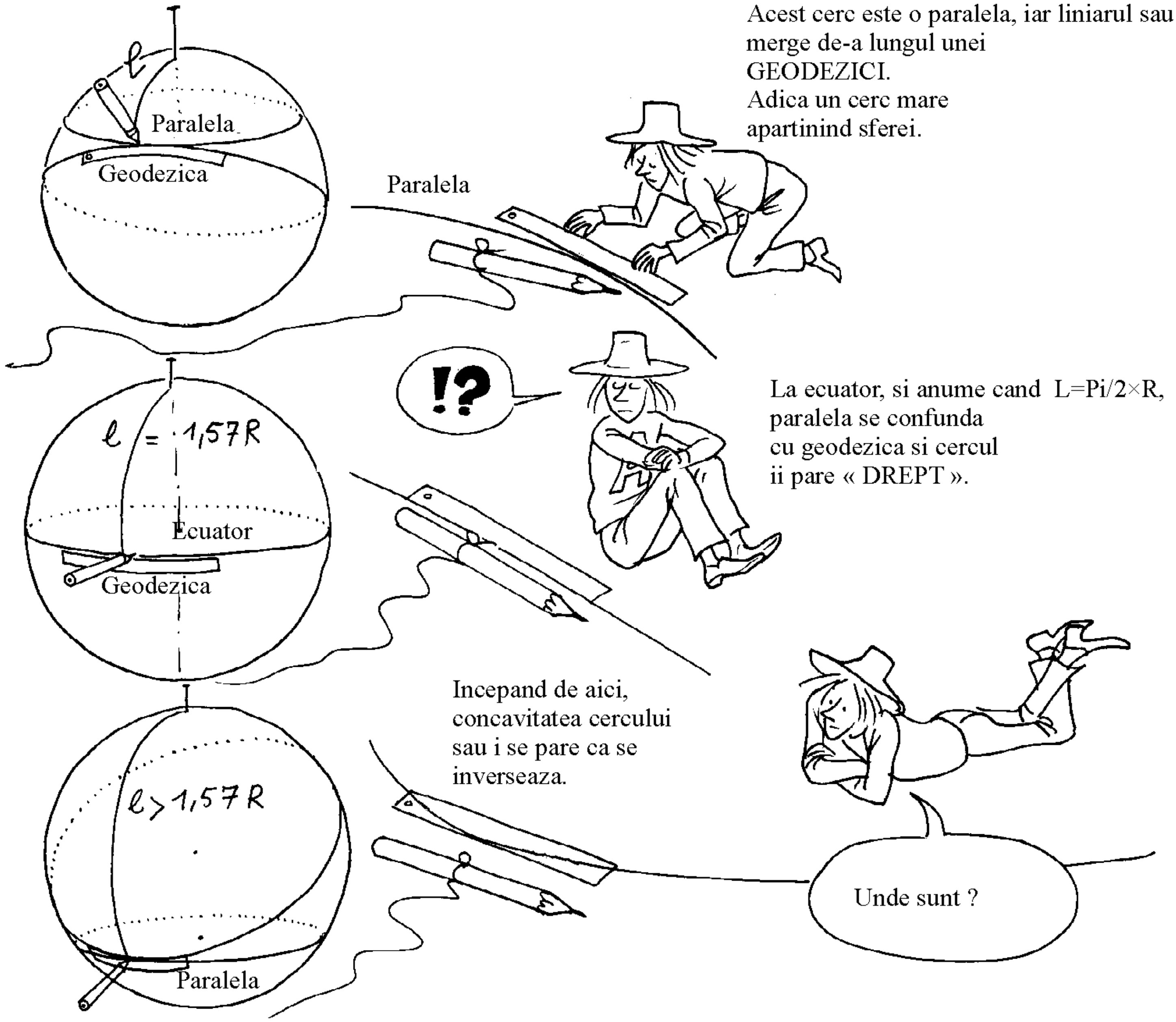
$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°)$$



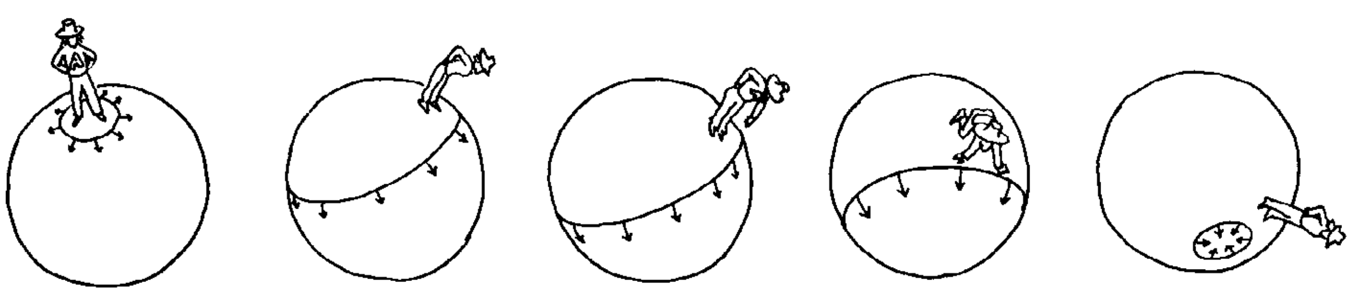
Daca, din contra, triunghiul are aproape aria sferei ($4 \times 3{,}1416 \times R^2$), ajungem la cele 900°.


N
S
Nota: Doua puncte apartinand aceleasi sfere pot fi unite prin doua Arcuri Geodezice formand UN cerc mare. Dar daca aceste puncte N si S sunt antipodale, atunci prin aceste puncte trec o infinitate de GEODEZICE !...
Doua dintre aceste « drepte ale sferei » definesc un BIUNGHI, ale carui doua unghiuri si doua laturi sunt egale.Suma acestor unghiuri este de...nu se poate!...
Absolut debil...
Directiunea
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Sa incercam acum sa intetelegem de ce , mai inainte, Anselme avea prea mult carelaj si prea mult grilaj.
(C) este cercul pe care il traseaza si (g) cercul pe care Anselme crede ca il traseaza. El calculeaza aria cu ajutorul formulei din geometria plana Pi L^2 (Pi=3,1416). Aria reala este pe jumatate aria sferei : $2PiR^2$. L este un sfert din perimetru, mai bine zis 1/2× PiR, si raportul intre cele doua arii este de $Pi^2/8$=1,233. Raportul perimetrelor este 2Pi L/2PiR, sau Pi/2=1,57.
Acum, ca sunteti sceptici, incercati sa inveliti o sfera cu un plan !
Ups ! Se fac cute !
Un plan ! Ce plan ?!

Atata timp cat Lanturlu nu a atins ecuatorul
sferei, concavitatea cercului sau i se paru normala :

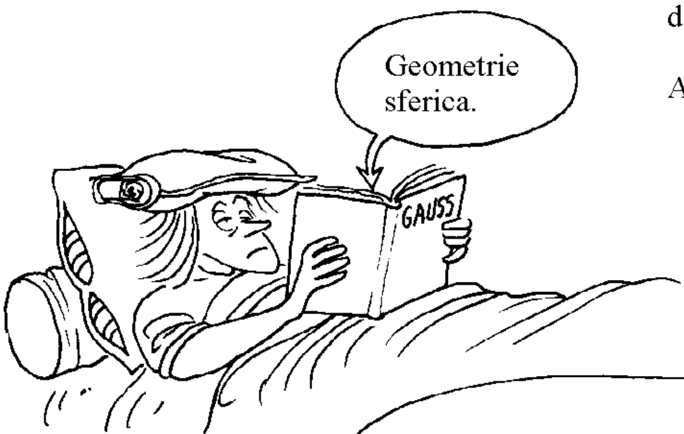


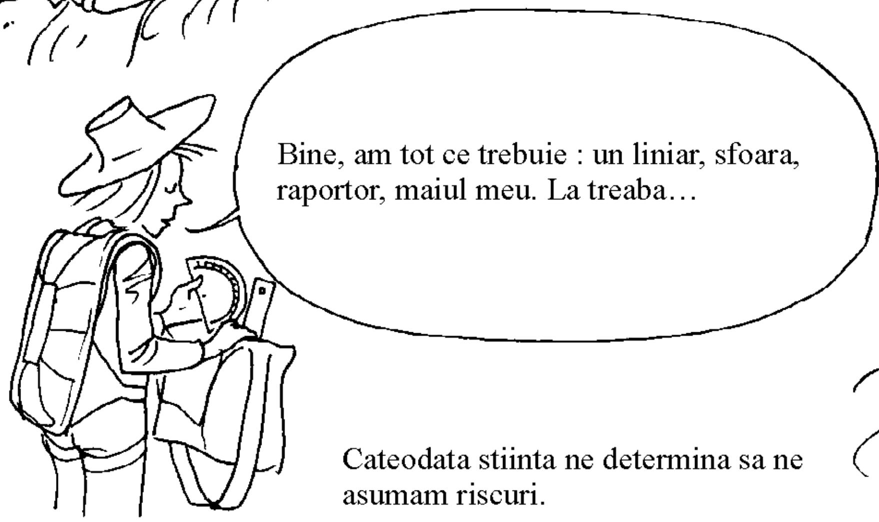
Aceasta proprietate explica faptul ca putem « intra » si « iesi » dintr-un
cerc cand dorim, fara a-l strabate, atunci cand este desenat pe o sfera.
Trebuie sa ne imaginam cercul ca si un inel elastic, pe care il facem
sa alunece pe o bila de biliard.



Lui Anselme i-a luat ceva timp sa digere toate aceste aspecte, descoperite de catre matematicianul Gauss (1777 - 1855).

Anselme se decise sa plece in descoperirea lumii suprafetelor.





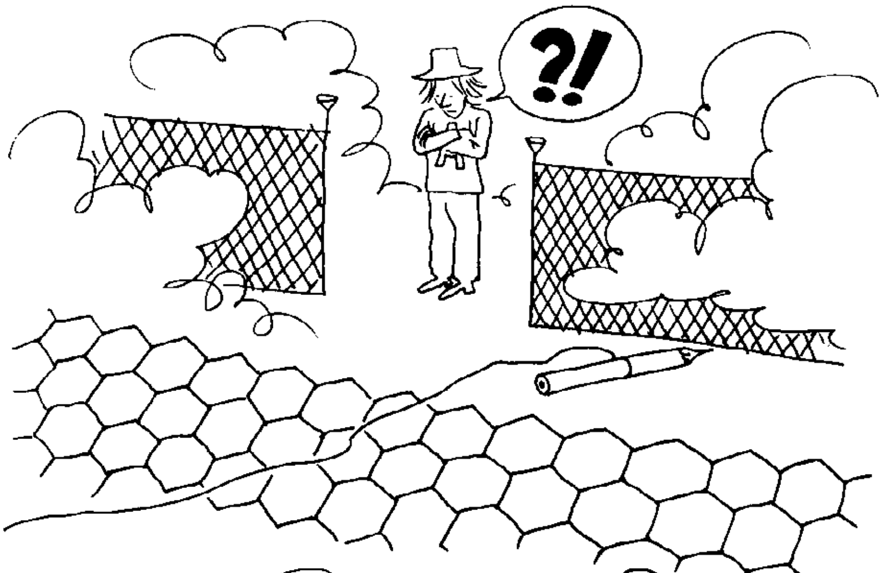
Cateodata stiinta ne determina sa ne asumam riscuri.

Vazandu-se ajuns intr-o lume noua, Anselme derula inca o data geodezica sa, dar, de aceasta data :

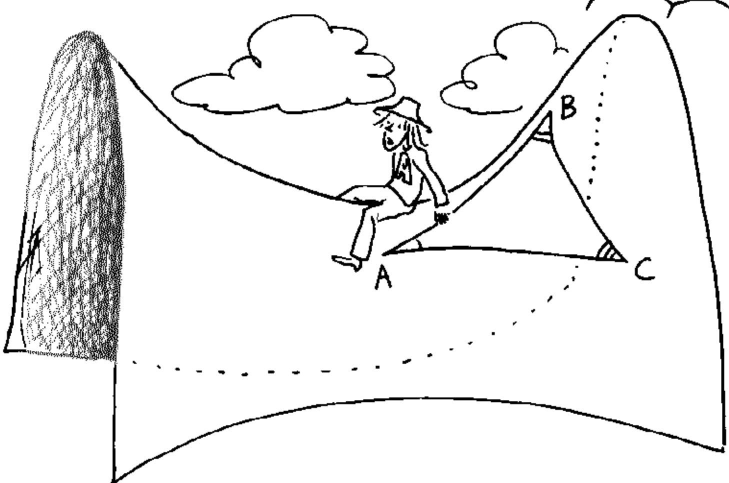
Geodezica nu se inchide.

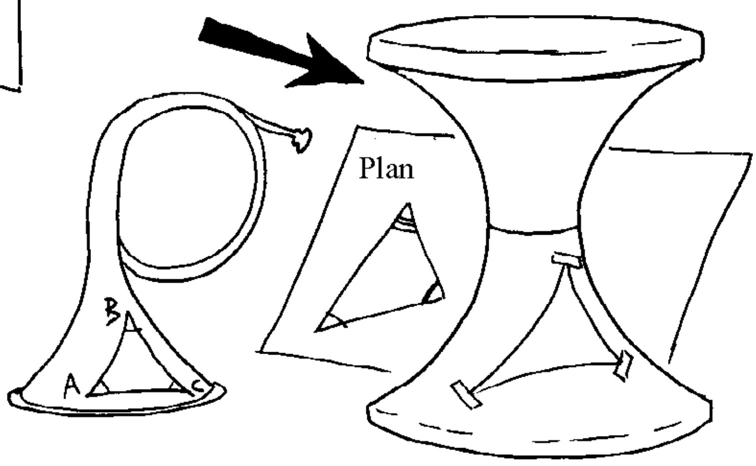
Cu ajutorl a trei fire bine intinse , Anselme a facut un triunghi, dar suma unghiurilor varfurilor triunghiului, este, de aceasta data, mai mica decat 180°.

Un cerc fiind definit intotdeauna ca fiind ansamblul punctelor situate la egala distanta L de un punct fix, Lantarlu constata ca cercul, trasat pe aceasta noua suprafata, are un perimetru mai mare decat 2Pi L, in timp ce suprafata sa depaseste Pi L^2. Sa imprastiem norii :



Suprafata ia, de aceasta data , forma unei coaste de munte sau a unei sei de cal.Unele obiecte din viata de zi cu zi pot de asemenea sa fie comparate : un corn de vanatoare, sau acest tip de taburet !





CURBURA

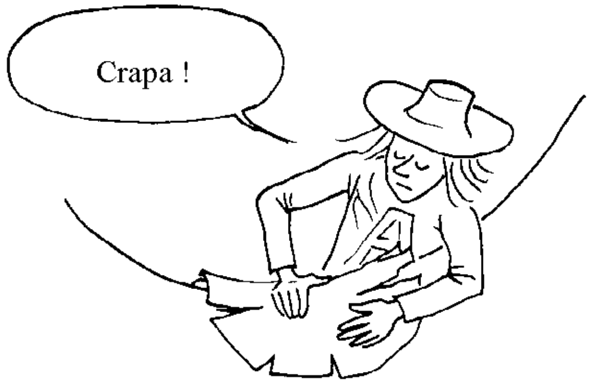
Suprafata curbata este o suprafata unde teoremele euclidiene nu functioneaza. Curbura poate sa fie pozitiva sau negativa .

Pe o suprafata a carei curbura este pozitiva, suma unghiurilor unui triunghi este mai mare de 180°. Daca trasam un cerc de raza L, suprafata sa este mai mica decat Pi L^2 si perimetrul sau mai mic decat 2Pi L .

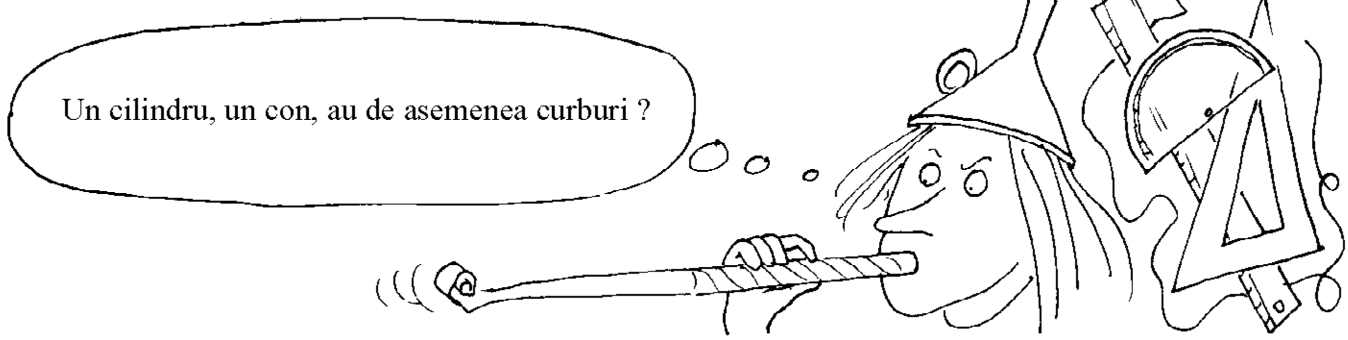
Pe o suprafata a carei curbura este negativa, suma unghiurilor unui triunghi este mai mica de 180°. Daca trasam un cerc de raza L, suprafata sa este mai mare decat Pi L^2 si perimetrul sau mai mare decat 2Pi L .

Mai inainte, Anselme a constatat ca incercand sa imbrace o sfera, suprafata cu curbura pozitiva, cu un element plan, au aparut cute. Imbracarea unei suprafete cu curbura negativa cu un plan este de asemenea imposibil : apar crapaturi.

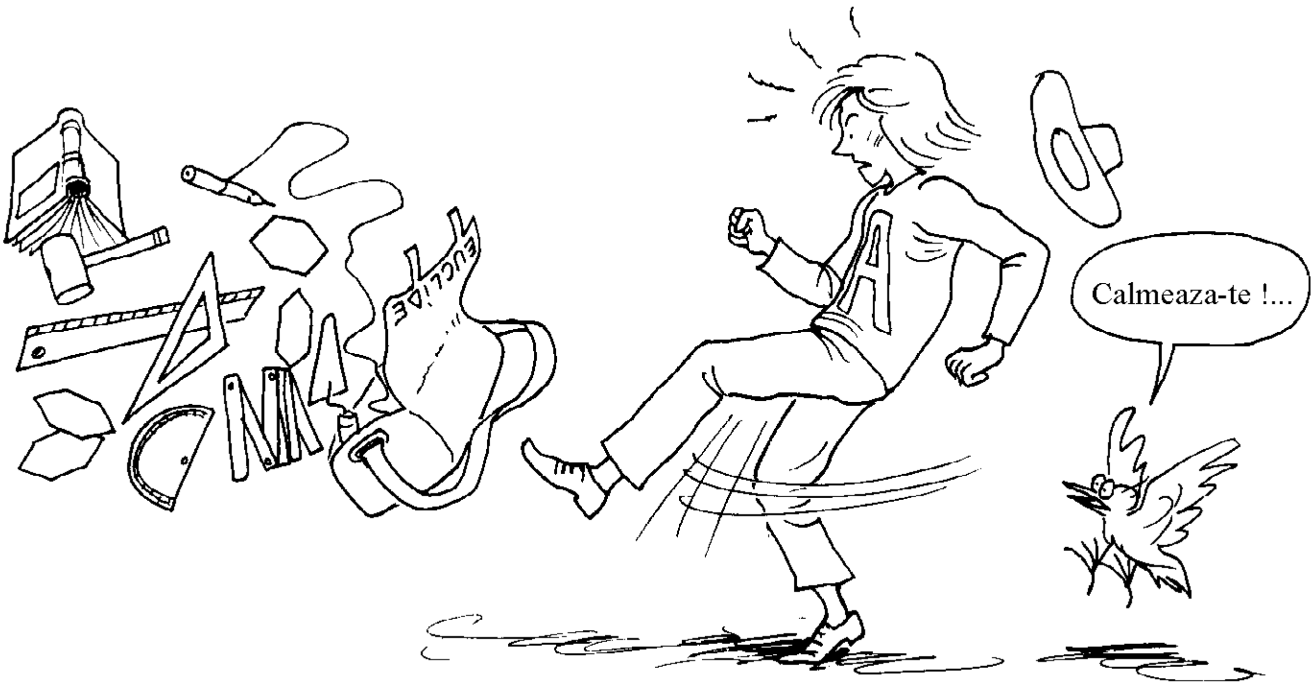
Acest test de ambalaj este cea mai simpla metoda pentru a determina daca este vorba despre o o curbura pozitiva sau negativa.



Cum am putut vedea pe pagina precedenta, suprafetele pot prezenta zone cu curbura negativa sau zone cu curbura pozitiva.

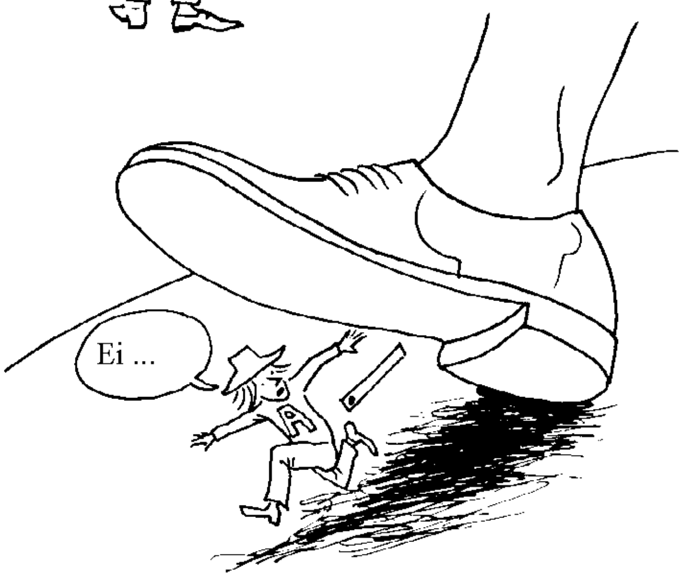


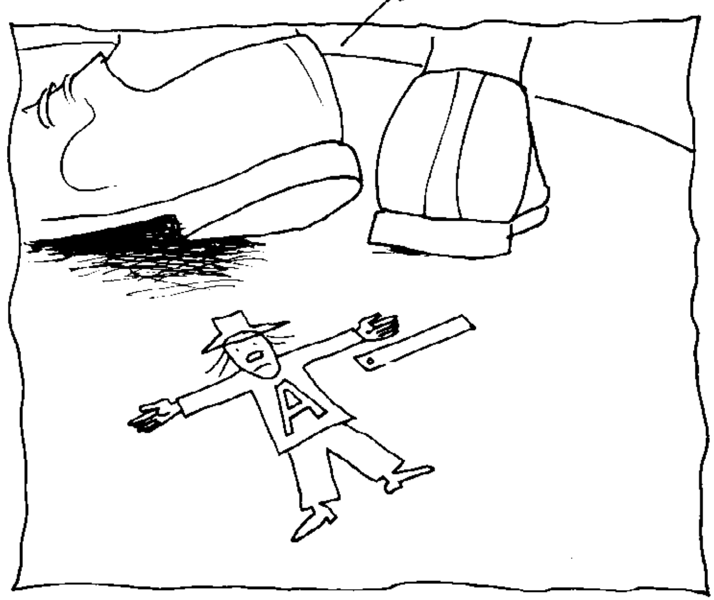

Testul ambalajului .
Cilindrul , conul , se pot imbraca cu un plan !
Fara panica. Lipesc 3 fire elastice, adica 3 geodezici, pe cilindrul meu cu ajutorul unei panglici elastice.
B
A
C
…acum marchez geodeziile pe suprafata…
Intind cilindrul astfel incat sa obtin un PLAN.
!...
B
A
C
Conform definitiei noastre, cilindrele si conurile apartinand geometriei EUCLIDIENE, sunt SUPRAFETE PLANE !!!



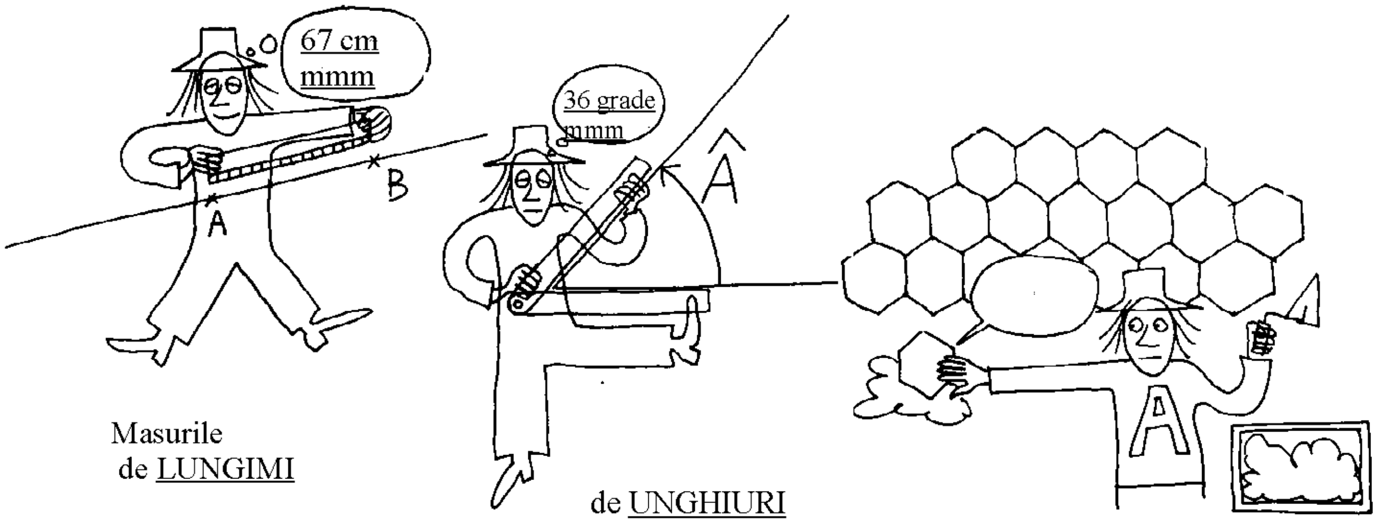
NOTIUNEA DE SPATIU

Mai inainte, norii il impiedicau pe Anselme sa vada mai departe de lungul nasului…sau aproape. Daca nu ar fi fost asa, ar fi putut sa observe CURBURA SPATIULUI sau SFERIC. Exista o alta metoda de a-l impidica pe Lanturlu sa VADA aceasta curbura : acceea de a-l face sa locuiasca pe suprafata respectiva, sa facem astfel incat sa apartina ei.





Vom nota ca aceasta noua situatie nu va impiedica :



Masurile
de LUNGIMI

de UNGHIURI

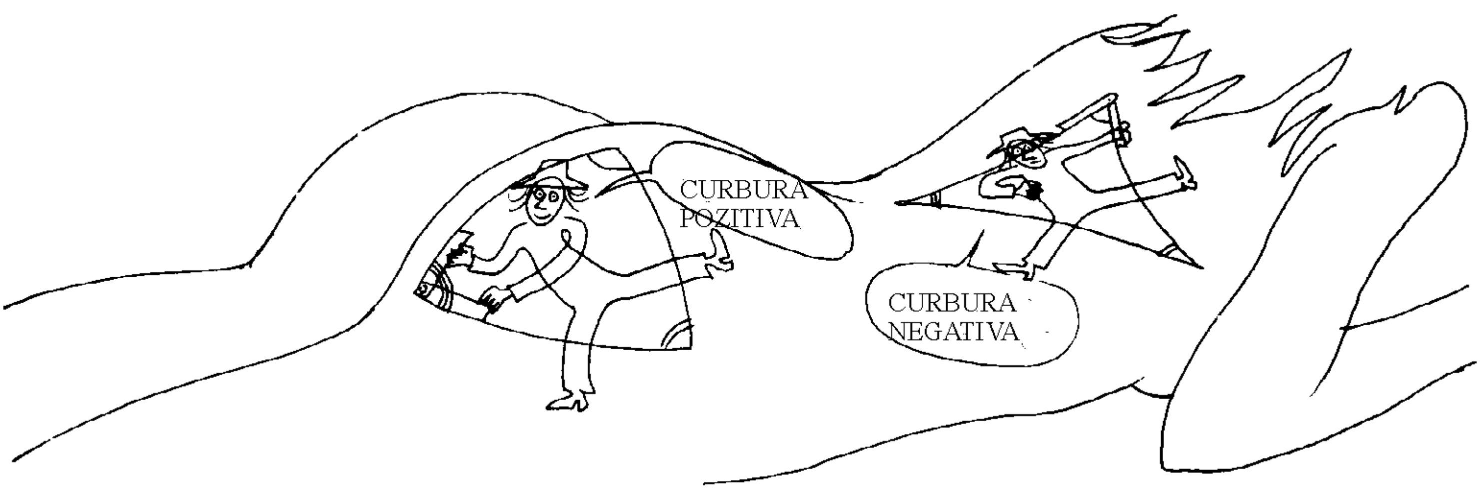
de SUPRAFETE

Chiar daca Anselme apartinea suprafetei, ar fi putut foarte bine sa observe curbura si sa defineasca semnul ei (pozitiv sau negativ), si chiar sa o masoare, fara a fi nevoit sa o vada. Daca suma unghiurilor unui triunghi este de 180°, atunci aceasta suprafata este PLANA.

Daca aceasta suma depaseste180°, curbura este pozitiva si Anselme ar fi putut calcula raza de curbura locala R cu ajutorul formulei :
$A+B+C=180\times[1-(Aria/3,14\times R^2)]$ grade, unde Aria reprezinta aria triunghiului.

Daca aceasta suma este mai mica de 180°, putem defini o raza de curbura R cu ajutorul formulei :$A+B+C=180\times[1-(Aria/3,14\times R^2)]$
dar nu mai are acelasi sens fizic normal.

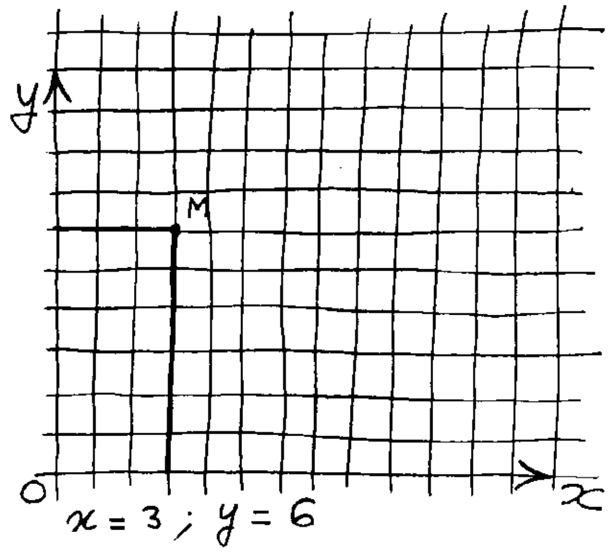
Sa retinem ca un plan poate fi asimilat unei raze infinite de curbura R.
Si atunci regasim toate teoremele lui Euclid.

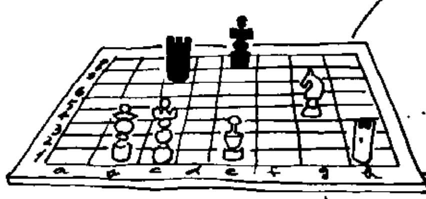


CONCEPTUL DE DIMENSIUNE

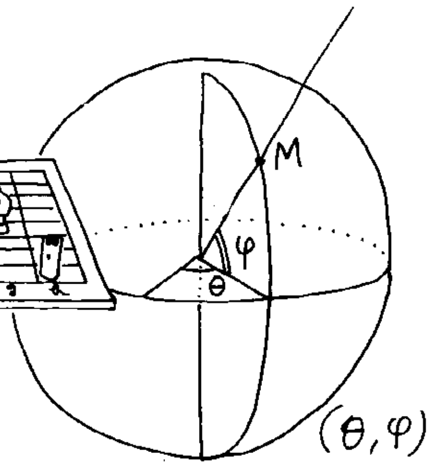
Numarul dimensiunilor este pur si simplu, numarul de cantitati, de coordonate, de care trebuie sa dispunem, intr-un spatiu oarecare, pentru a defini un PUNCT.

SUPRAFETELE sunt reprezentatii ale spatiilor in doua dimensiuni. Cantitatile servind la reperaj pot sa fie lungimi, numere, unghiuri…



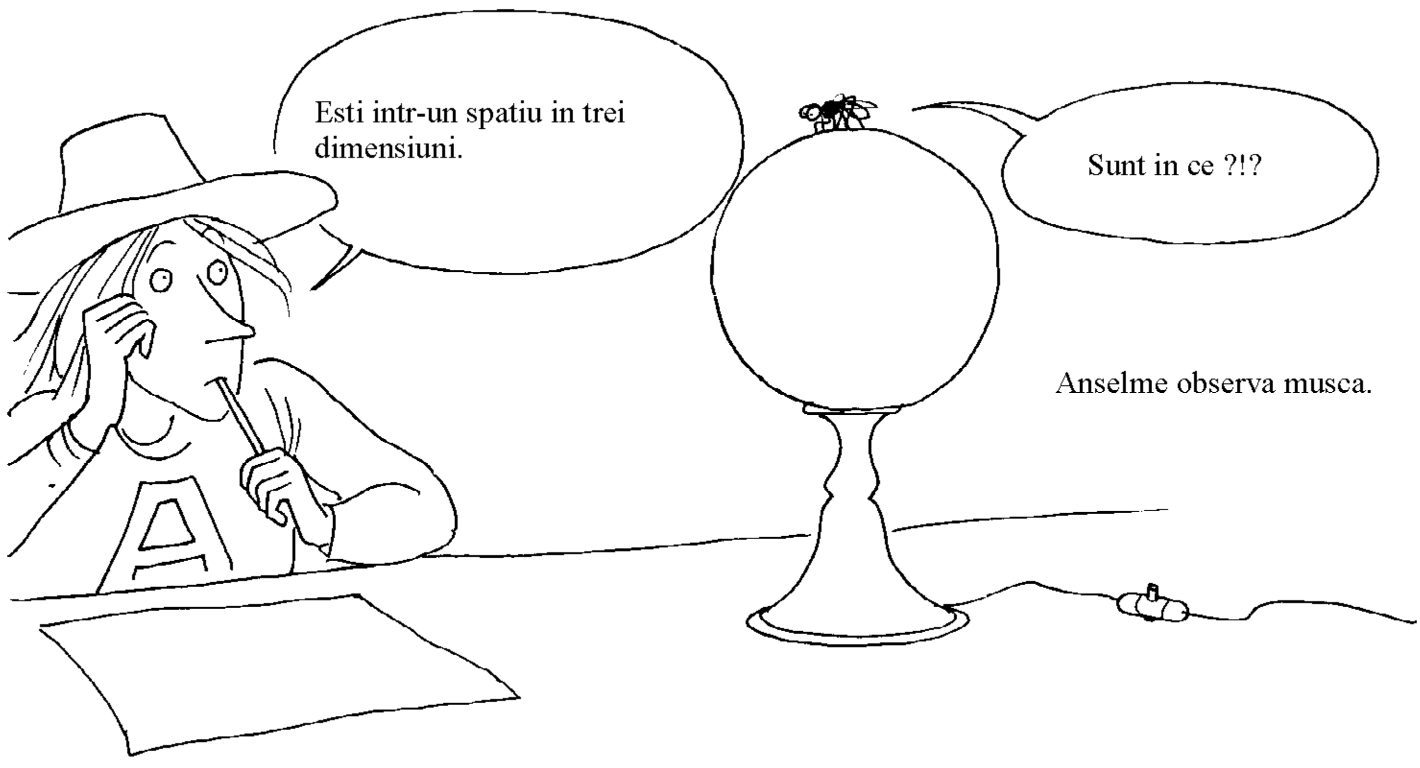


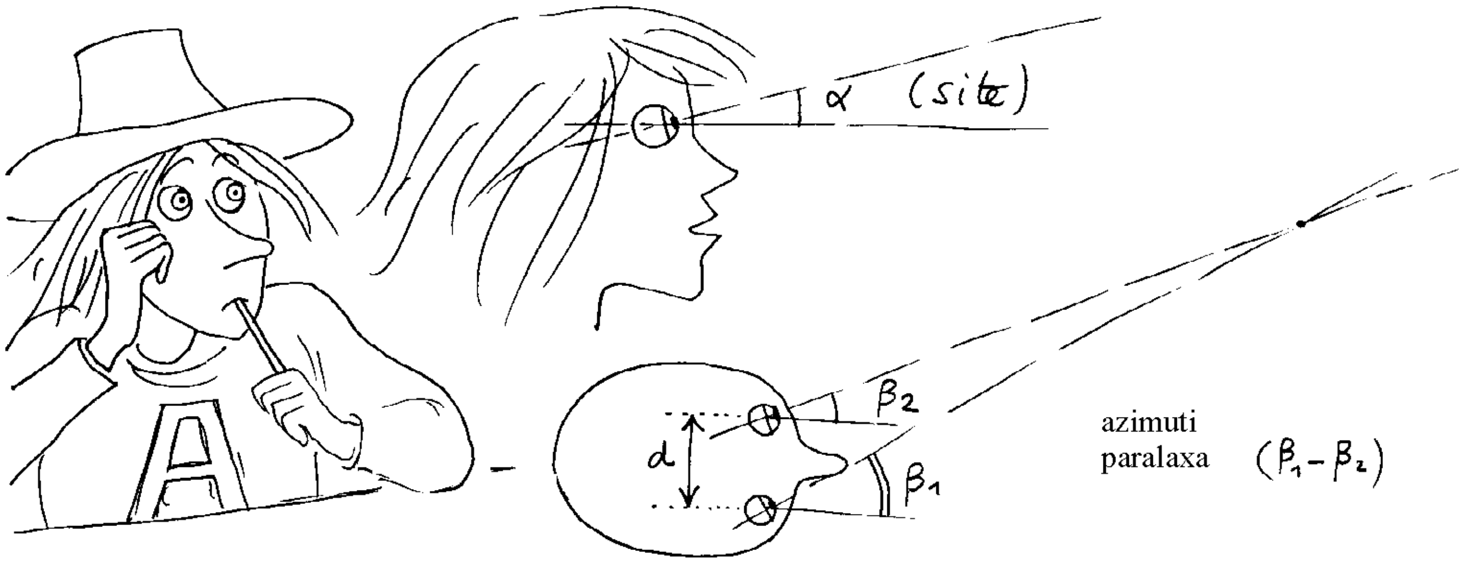
cal in g4



Longitudine, latitudine

Avem obiceiul sa zicem ca spatial nostru, fara sa luam in considerare timpul, are 3 dimensiuni.

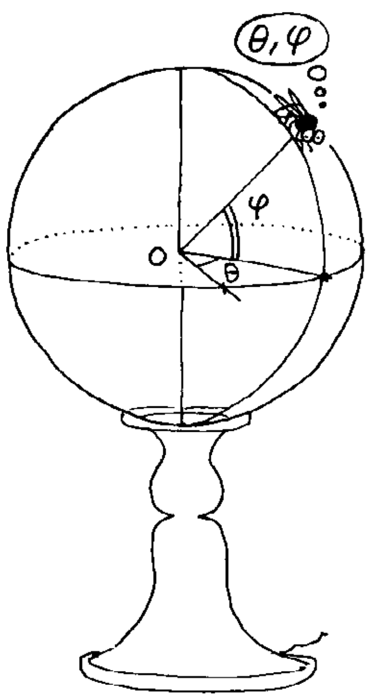




Anselme repera obiectele fata de corpul sau, fata de cutia sa craniana. Pozitia unui obiect punctual este cunoscuta cu ajutorul a 3 UNGHIURI : privelistea si pozitia azimuta a ochilor sai : béta1, béta2.

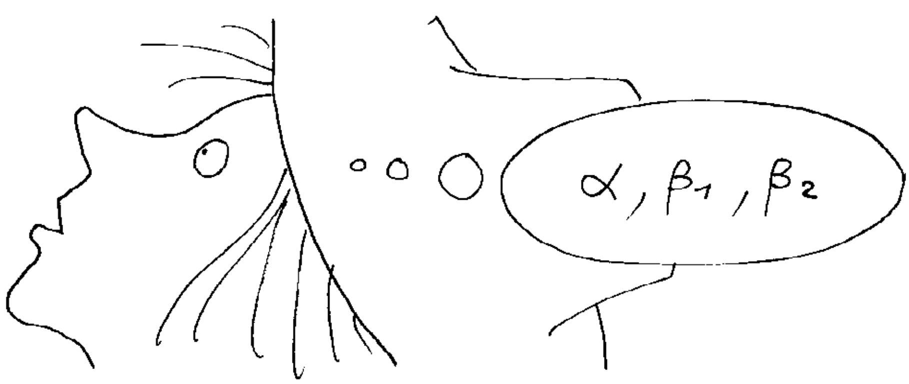
Diferenta unghiulara béta1- béta2 se numeste paralaxa. In creierul lui Anselme se produce un decodaj care transforma aceasta paralaxa in distanta.

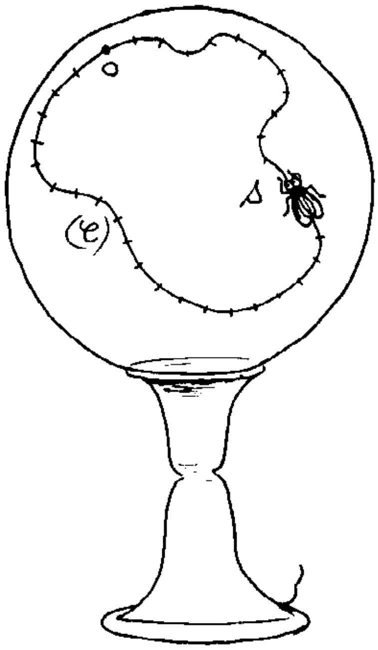
SCUFUNDAREA



Dar musca traverseaza globul sferic al lampii, unde pozitia sa, in acest spatiu bidimensional, poate fi reperata cu ajutorul a 2 unghiuri theta si phi (longitudine si latitudine).

Spunem ca acest spatiu in doua dimensiuni este SCUFUNDAT in spatiul nostru in trei dimensiuni.

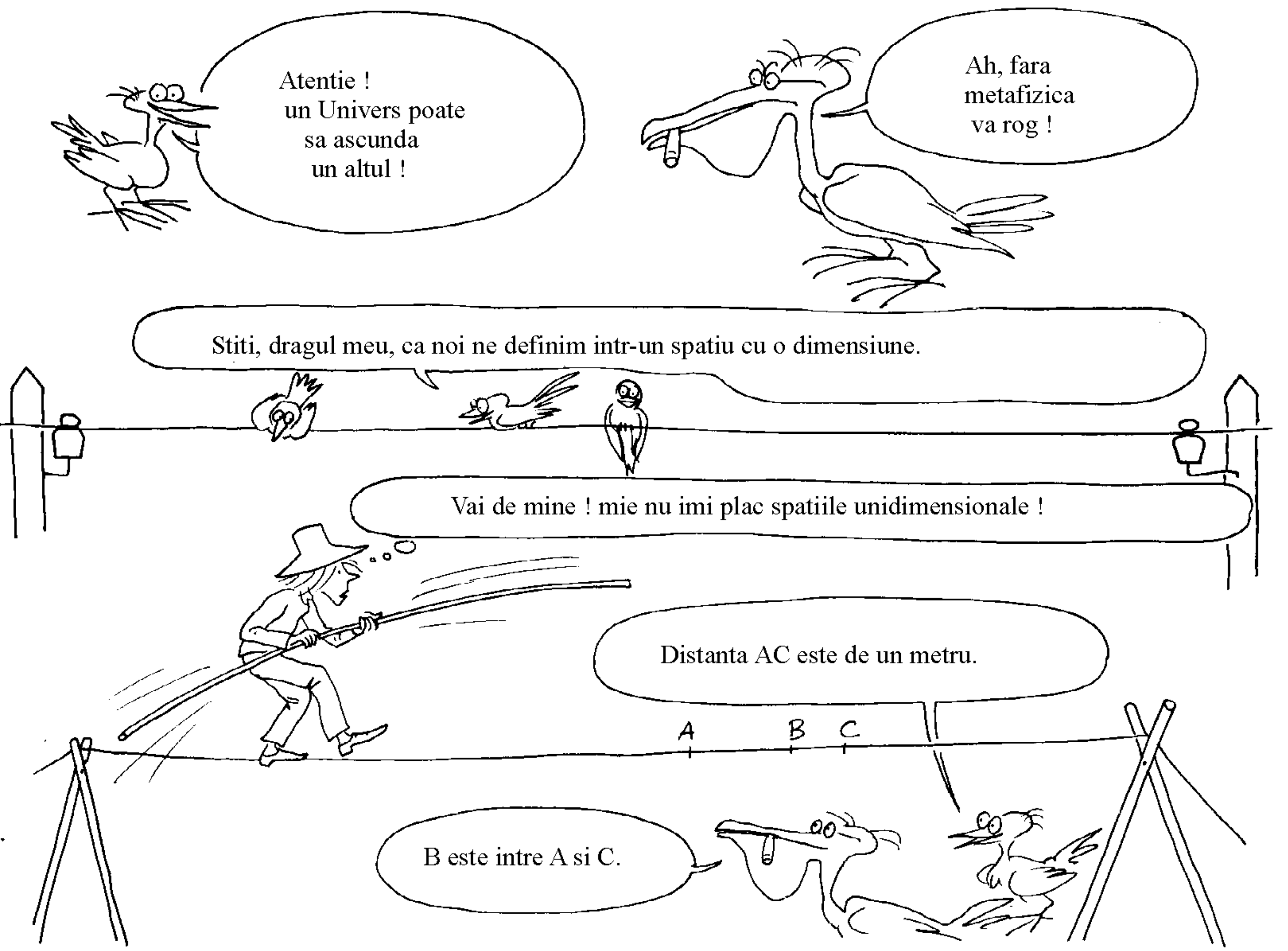


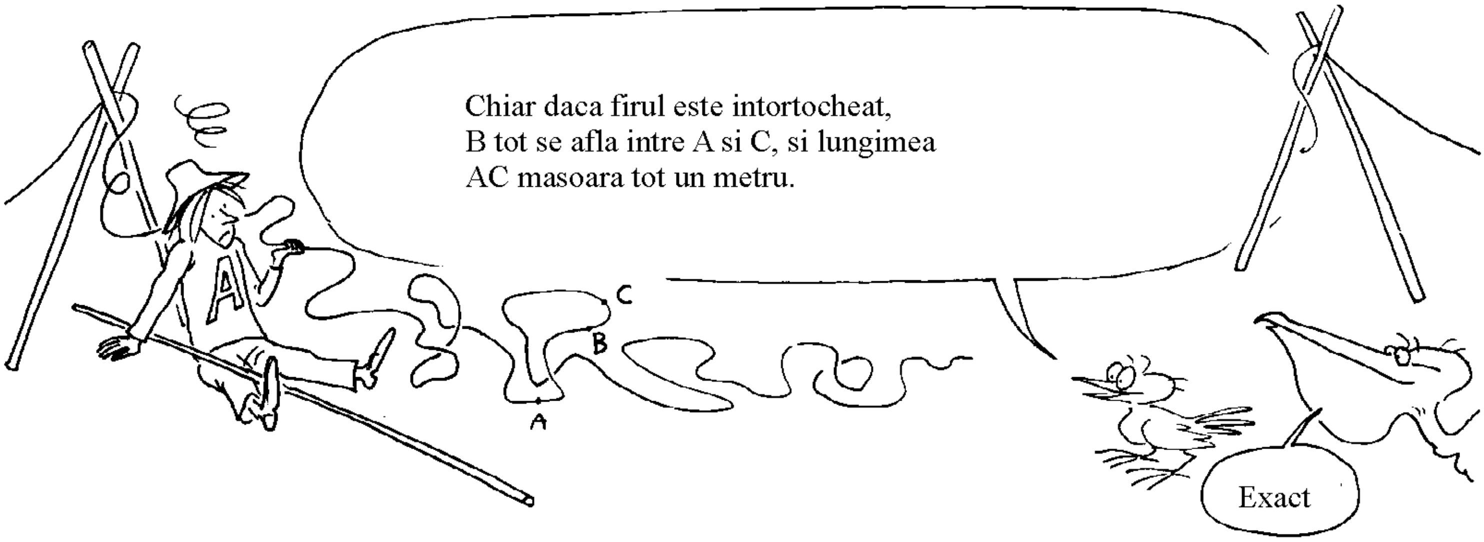


Sa presupunem ca musca merge de-a lungul unei curbe (C) trasata pe aceasta sfera. Vom putea repera pozitia sa cu ajutorul unei singure coordonate (distanta sa, S,fata de un punct luat drept origine, considerata o marime algebrica).

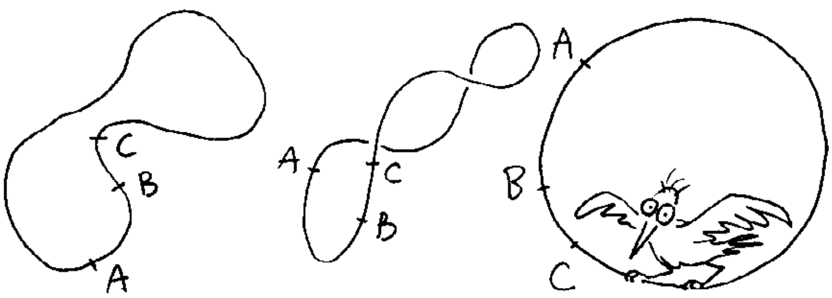
O curba este o imagine a unui spatiu cu O dimensiune.
Acest spatiu unidimensional face parte dintr-un spatiu bidimensional (sfera), care la randul sau face parte dintr-un spatiu tridimensional.

Deci spatiul in care noi traim, poate fi SCUFUNDAT intr-un spatiu de dimensiune superioara fara ca noi sa stim.





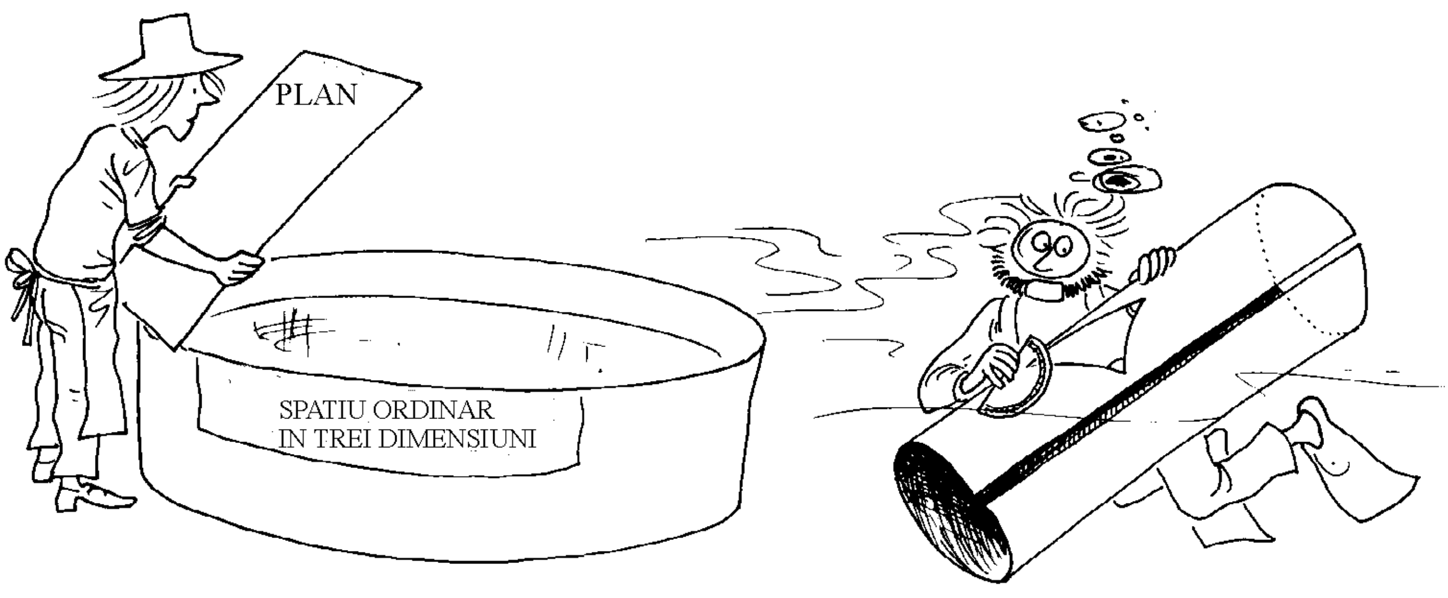
Aceasta sugera faptul ca unele proprietati pot sa fie independente de felul in care se face scufundarea.



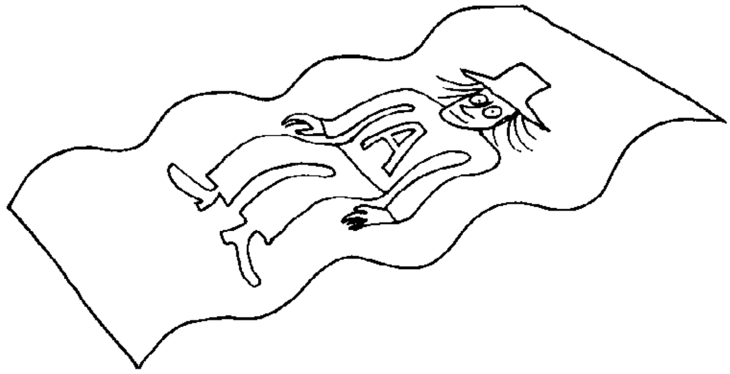
Uite diferite feluri de a SCUFUNDA o CURBURA INCHISA intr-un spatiu ordinar. Aceasta INCHIDERE este o proprietate independenta de scufundare.

Dar am avut grija sa nu modificam lungimea sforii dintre cele doua puncte successive atunci cand cam am intins-o sau intortocheat-o. O sa INTRODUCEM acum SUPRAFETE in spatiul ordinar in 3 dimensiuni .

Daca introducem un PLAN in spatiul ordinar in trei dimensiuni, putem sa il deplasam, sa il intoarcem, fara sa ii modfiicam GEOMETRIA.

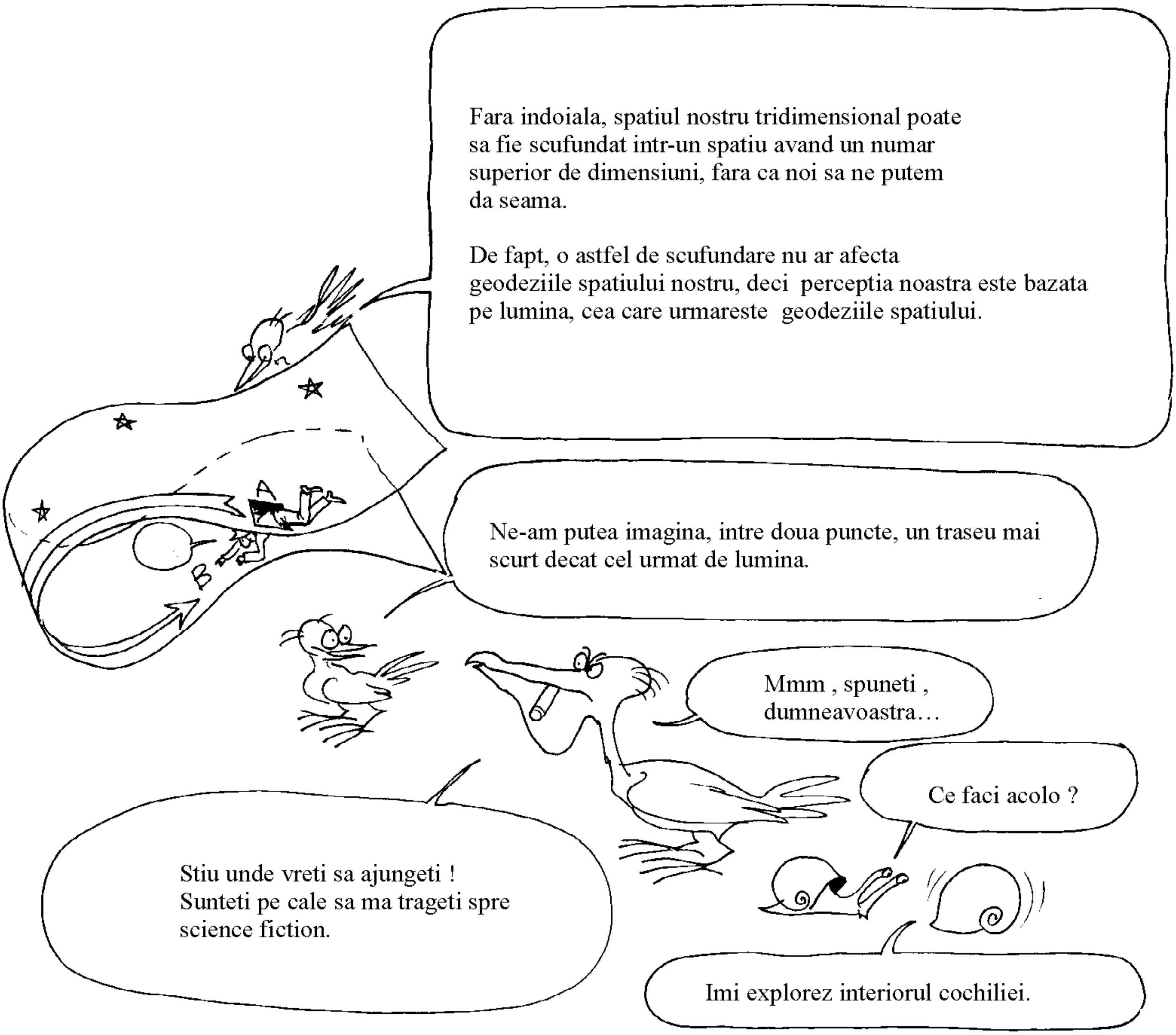


Am vazut ca faptul de deforma
un plan dupa forma unui cilindru
nu modifica nici geodezicile,
nici unghiurile.

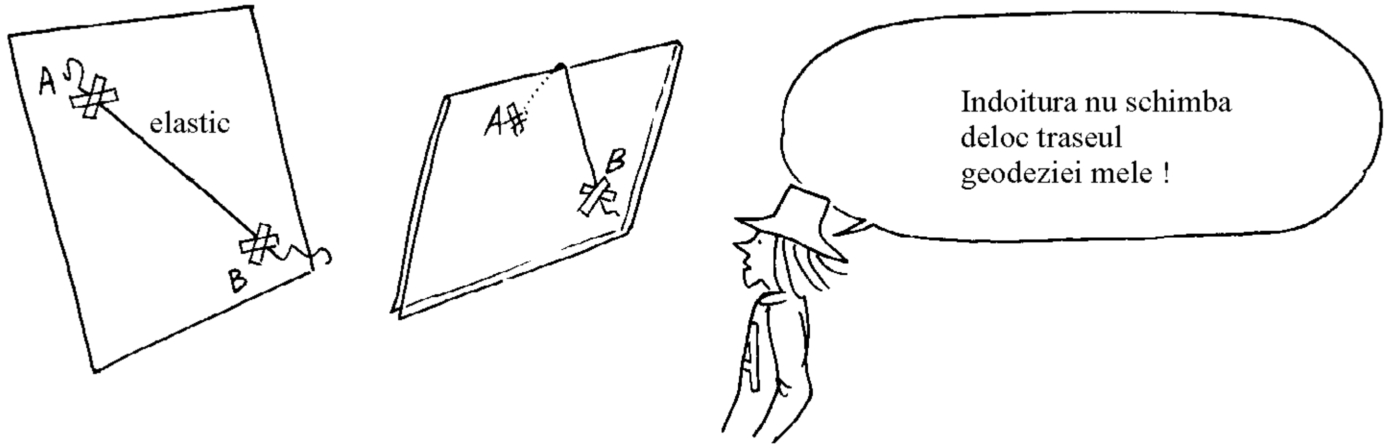


In aceasta optica, o tabla ondulata are tot
timpul o geometrie PLANA, EUCLIDIANA.

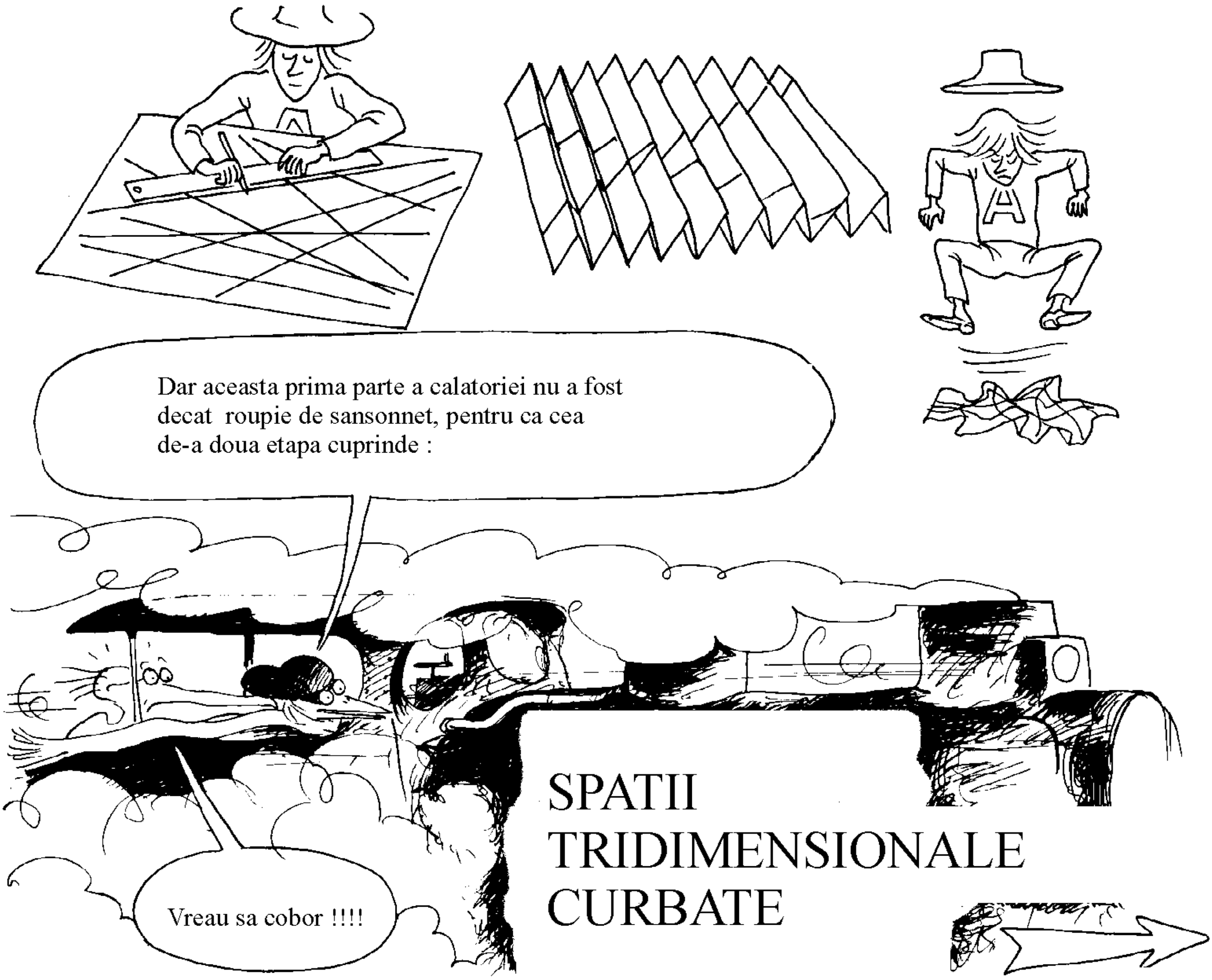
Un locuitor al unui astfel de spatiu bidimensional, euclidian, nu va fi la curent cu translatiile, rotatiile sau ondulatiile, care ar fi variatii ale scufundarii in spatiul tridimensional.

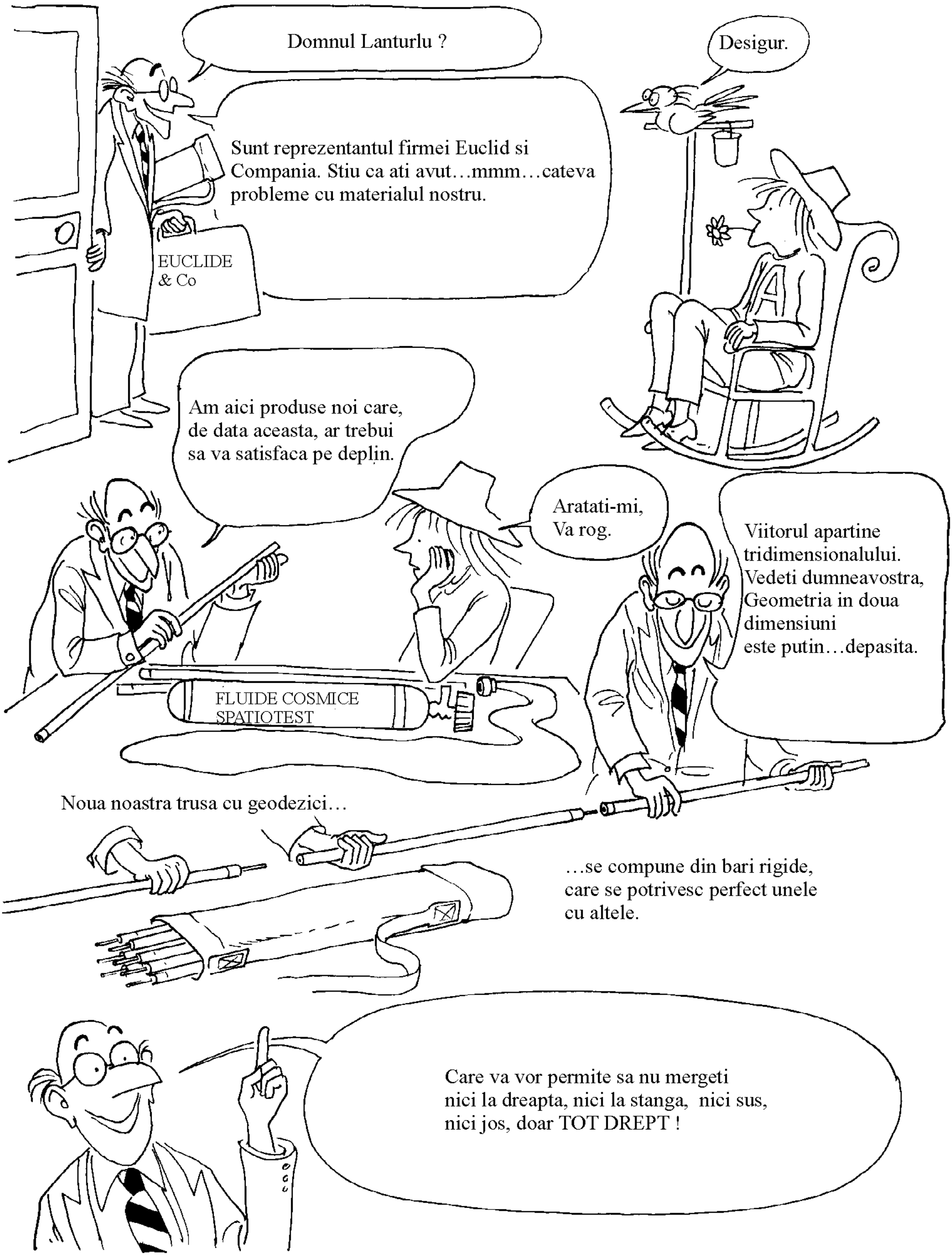


Sa luam un element plan si sa il indoim :

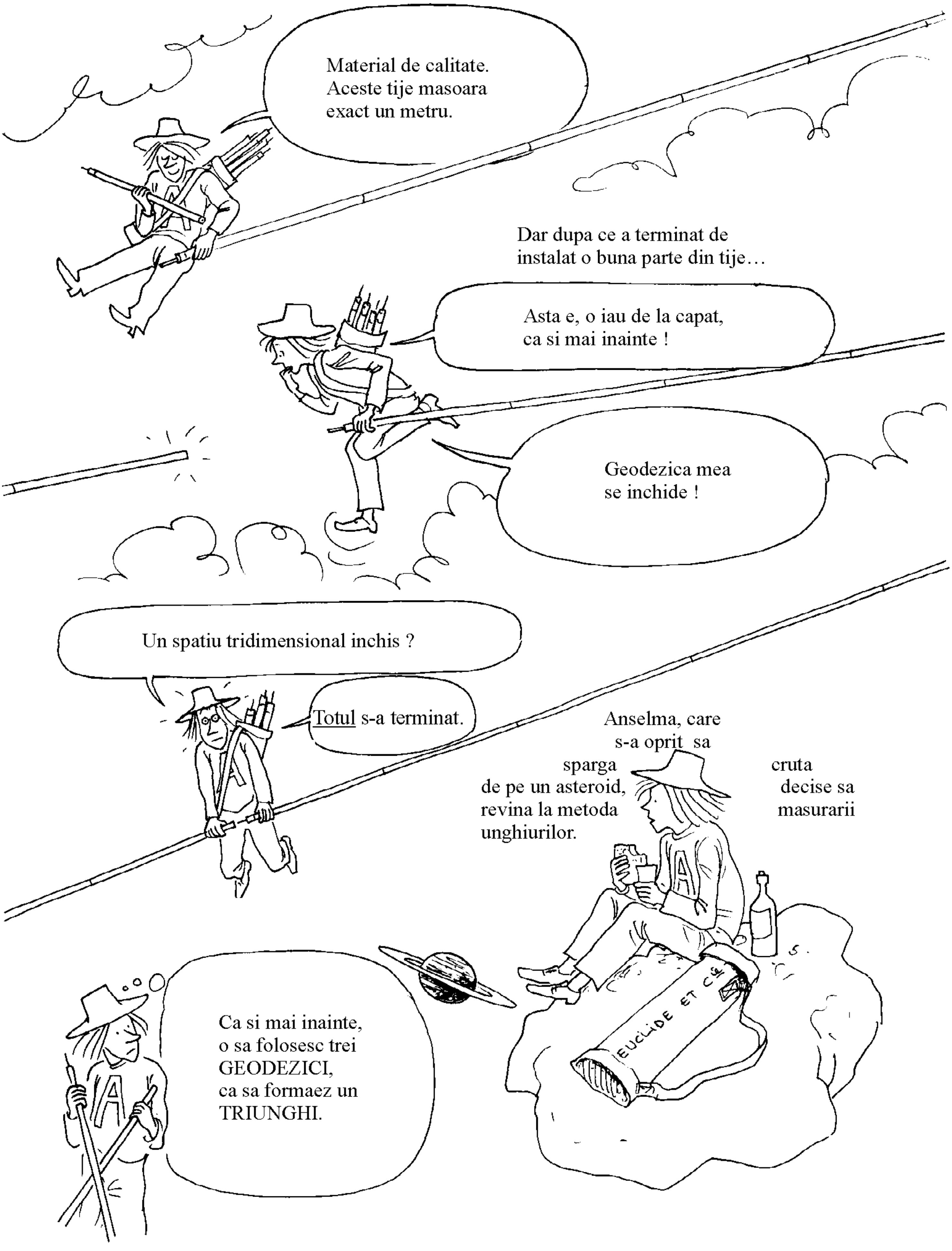


Pe o foaie de hartie, cu ajutorul unui liniar , trasati o multitudine de drepte, geodezii, apoi sifonati hartia. Aveti in fata ochilor geodeziile suprafetie cu sau fara indoituri.



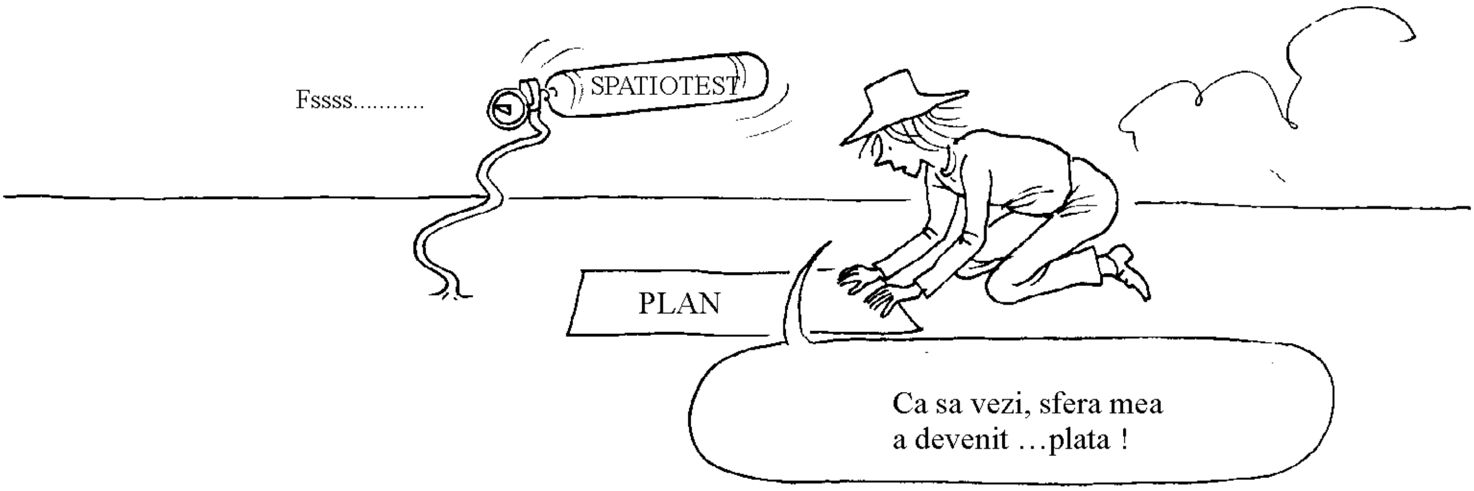

Domnul Lanturlu ?
Desigur.
Sunt reprezentantul firmei Euclid si Compania. Stiu ca ati avut…mmm…cateva probleme cu materialul nostru.
EUCLIDE & Co
Am aici produse noi care, de data aceasta, ar trebui sa va satisfaca pe deplin.
Aratati-mi, Va rog.
Viitorul apartine tridimensionalului. Vedeti dumneavoastra, Geometria in doua dimensiuni este putin…depasita.
FLUIDE COSMICE SPATIOTEST
Noua noastra trusa cu geodezici…
…se compune din bari rigide, care se potrivesc perfect unele cu altele.
Care va vor permite sa nu mergeti nici la dreapta, nici la stanga, nici sus, nici jos, doar TOT DREPT !


Pentru masurarea suprafetelor, aceasta vopsea. Mai exact, o suta de grame pentru un metru patrat.
Ingenios.
Pentru masurarea volumelor, umpleti acestia cu gaz. Cititi direct valoare de pe debimetrul SPATIOTESTULUI.
Si nu uitati :suprafata sferei : 4Pi L², volumul : 4/3Pi L³.
Am inteles.
EUCLIDE & Cie
Ce mai meserie !
Anselme, a aterizat de aceasta data, intr-un spatiu tridimensional si noi il vom urmari in explorarea sa.

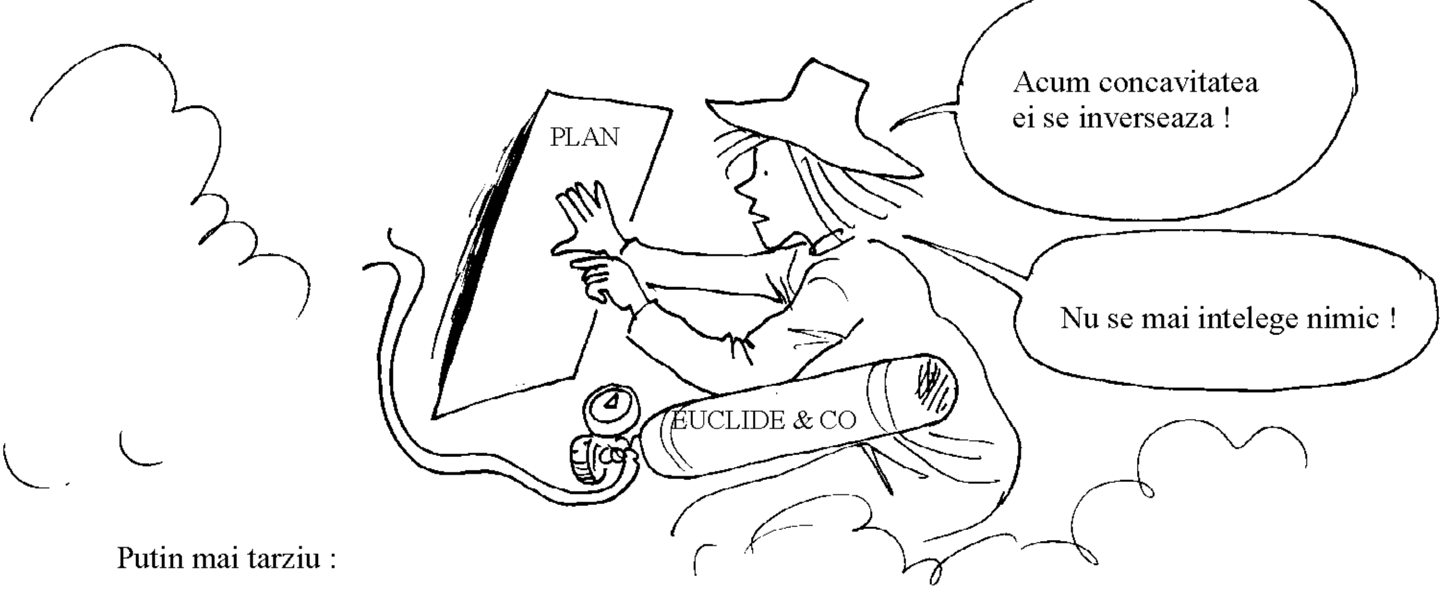

Material de calitate. Aceste tije masoara exact un metru.
Dar dupa ce a terminat de instalat o buna parte din tije…
Asta e, o iau de la capat, ca si mai inainte !
Geodezica mea se inchide !
Un spatiu tridimensional inchis ?
Totul s-a terminat.
Anselma, care s-a oprit sa sparga cruta
de pe un asteroid, decise sa
revina la metoda masurarii
unghiurilor.
EUCLIDE ET Cie
Ca si mai inainte, o sa folosesc trei GEODEZICI, ca sa formaez un TRIUNGHI.


?!?
Geodeziile mele sunt perfect imbinate, si totusi suma celor trei unghiuri este mai mare de 180° !!..
Bine…
SPATIOTEST
O sa fac o sfera si ii voi masura suprafata si volumul.
O sfera de raza L, este ansamblul punctelor situate la o distanta L fata de un punct fix, pe care il voi numi N .
Suprafata este mai mica de 4Pi L².
Uite , volumul este mai mic de 4/3Pi L³ !
Iarasi am fost dus de nas.

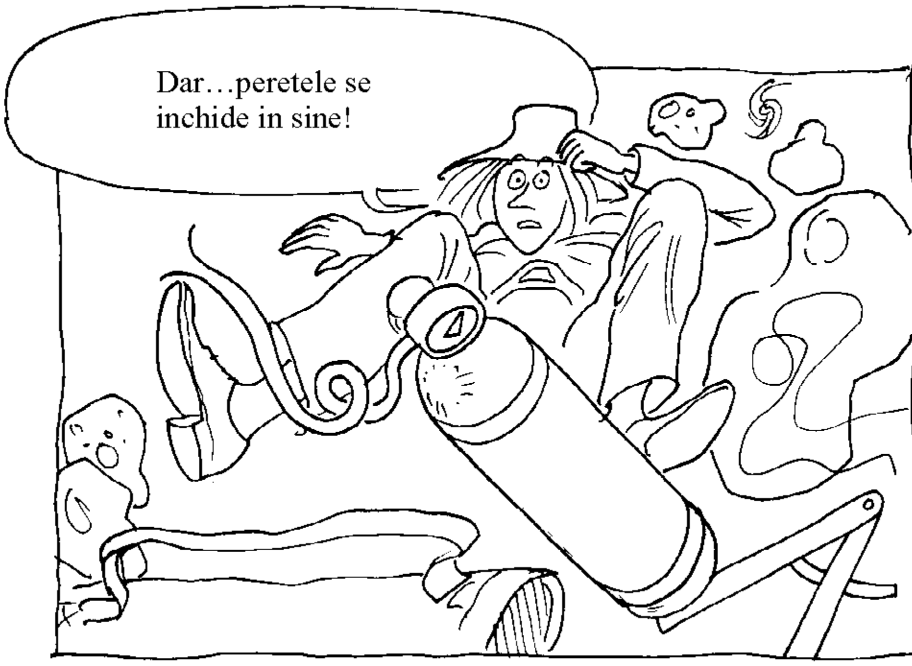
Anselme mai mareste raza L a sferei.



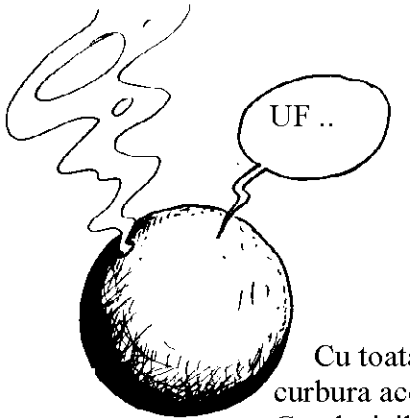
Inca si inca…



Putin mai tarziu :



Astfel, umfland un balon simplu intr-un spatiu tridimensional,
Lantarlu a sfarsit prin a se regasi …INAUNTRU !



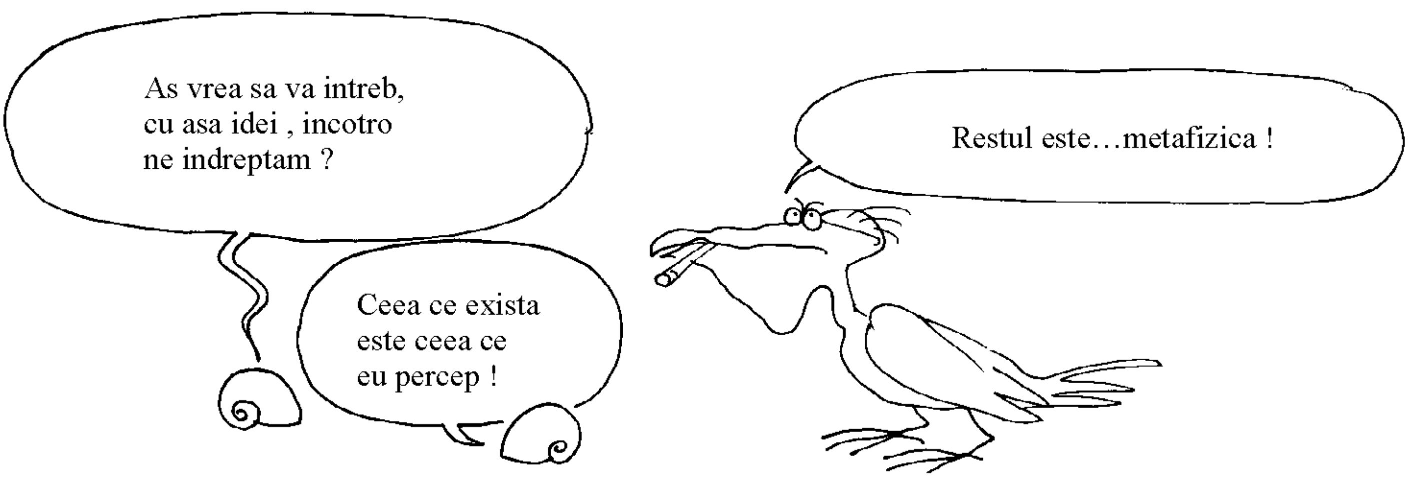
Daca nu ar fi taiat tubul la timp, ar fi murit strivit,
asa cum a sfarsit prin a se regasi imprejmuit de gardul sau, pagina 13.

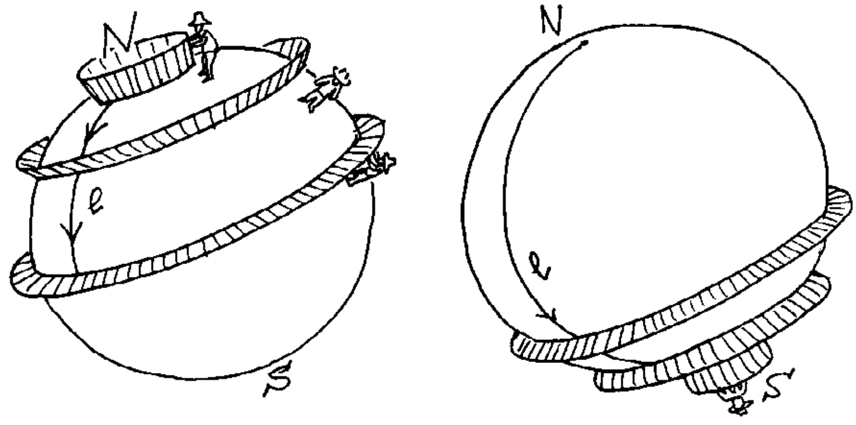
Cu toata bunavointa din lume, in acest moment nu mai putem vizualiza curbura acestui spatiu tridimensional.
Geodezicile sale se inchid din nou si volumul nu reprezinta decat un numar finit de metri cubi, la fel ca si suprafata planetei noastre, suprafata inchisa, cuprinzand un numar finit de metri patrati.

Suma unghiurilor triunghiului, apartinand acestui spatiu tridimensional, este mai mare de 180°. Pentru a putea vedea curbura sa, ar trebui sa putem fi capabili sa vedem in patru dimensiuni.

Putem inca sa ne zicem ca UNIVERSUL nostru in trei dimensiuni , este un HIPERUNIVERS, scufundat intr-un spatiu in patru dimensiuni, care la randul sau poate fi considerat ca o hipersuprafata scufundata intr-un spatiu in cinci dimensiuni, etc…

Dar, in zilele noastre, nu se cuvine sa gandim asa.



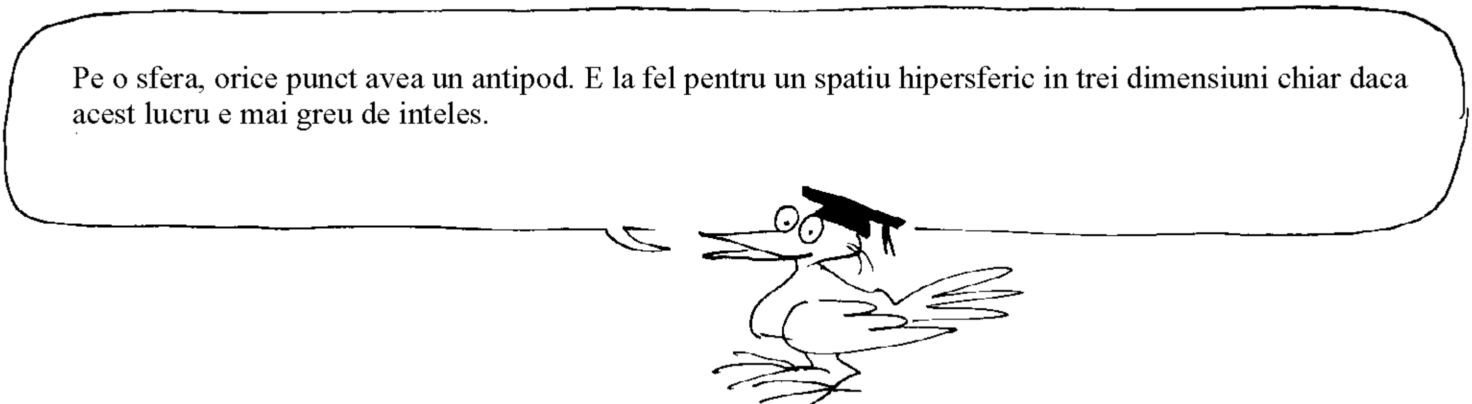


Pe sfera lui , marind raza L a domeniului, Lantarulu s-a regasit la antipodul S al punctului N,
centrul cercului sau, si oprit de propria lui imprejmuire.

In spatiu tridimensional cu curbura pozitiva, regasim acelasi lucru. In acest spatiu bidimensional care este sfera, Anselme a dat de ecuator cand a imprejmuit jumatate din suprafata sferei disponibile.
ECUATORUL spatiului tridimensional HIPERSFERIC de asemenea exista.

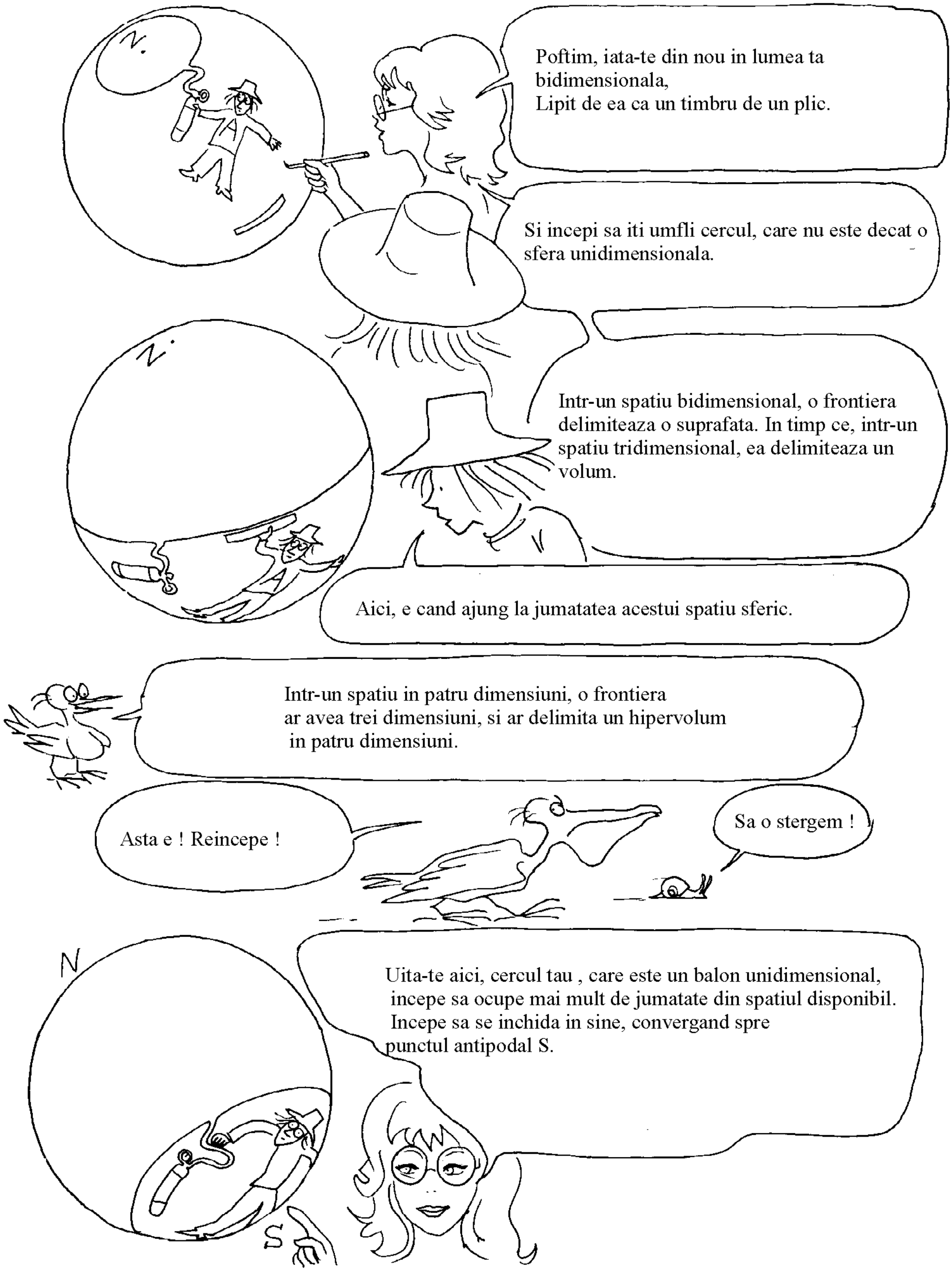
Anselme reuseste atunci cand balonul sau ocupa jumatate din volumul disponibil. Pe sfera, cercul ecuator ii aparea ca o DREAPTA. De asemenea, in spatiul hipersferic, « balonul ecuator » va avea pentru el aspectul unui PLAN.

Mai incolo de ecuator concavitatea balonului se inverseaza si se centreaza mecanic pe punctul antipodal S al punctului N, considerat centrul balonului.

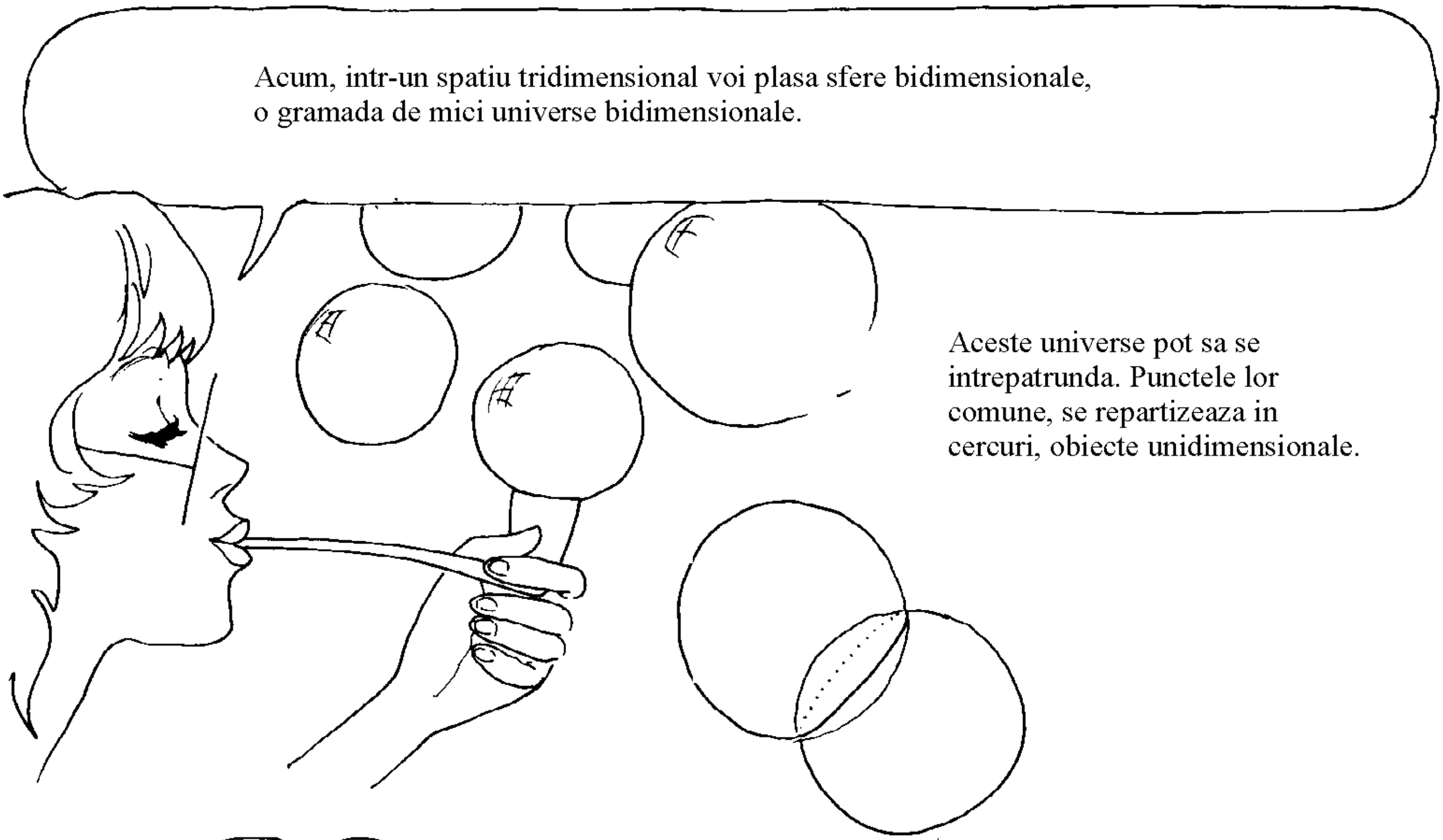



Probleme ?
Adica, mmm…, totul se amesteca putin in capul meu.
Ma cheama Sophie. Curburile de orice fel sunt specialitatea mea.
Navigarea in hipersfere ne ia intotdeauna un pic prin surprindere la inceput. Trebuie sa evitam sa ne blocam. Incepem putin cate putin.
Mda…
Am pierdut un pic firul…

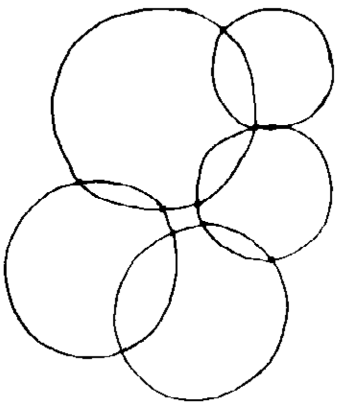

Dar, centrul acestei hipersfere, unde este ?
Daca desenez un cerc pe un plan, esti de accord ca este o reprezentare a spatiului unidimensional, inchis, SCUFUNDAT intr-un spatiu bidimensional : PLANUL.
Si centrul cercului NU se afla pe cerc.
mmm...
O sfera reprezinta un spatiu inchis bidimensional SCUFUNDAT intr-un spatiu tridimensional. Centrul acestei sfere nu este nici el situat pe sfera. Este in spatiul tridimensional.
Centrul unui spatiu hipersferic tridimensional ar putea sa se situeze intr-un spatiu in patru dimensiuni, presupunand ca este scufundat in acesta. Si asa mai departe… Asadar, centrul unui spatiu hipersferic in patru dimensiuni ar fi situat intr-un spatiu in cinci dimensiuni, etc…


N.
Poftim, iata-te din nou in lumea ta bidimensionala,
Lipit de ea ca un timbru de un plic.
Si incepi sa iti umfli cercul, care nu este decat o sfera unidimensionala.
N.
Intr-un spatiu bidimensional, o frontiera delimiteaza o suprafata. In timp ce, intr-un spatiu tridimensional, ea delimiteaza un volum.
Aici, e cand ajung la jumatatea acestui spatiu sferic.
Intr-un spatiu in patru dimensiuni, o frontiera ar avea trei dimensiuni, si ar delimita un hipervolum in patru dimensiuni.
Asta e ! Reincepe !
Sa o stergem !
N
Uita-te aici, cercul tau , care este un balon unidimensional, incepe sa ocupe mai mult de jumatate din spatiul disponibil. Incepe sa se inchida in sine, convergand spre punctul antipodal S.
S


De asemenea, in spatiul meu tridimensional curbat, in momentul in care introduc mai mult de jumatate din volumul total, balonul se inchide in sine, convergand spre punctul antipodal.
Am inteles!
Pentru ca sfera in acest spatiu tridimensional curbat, are bineinteles doua centre care sunt antipodale.
?!!?
In fine, nu stiu ce am inteles mai exact defapt, dar am avut impresia ca am inteles ceva.
Cata neliniste!
Ba nu , Anselme, cand este vorba despre mai mult de trei dimensiuni,
A INTELEGE INSEAMNA A EXTRAPOLA.
Extrapolez fara sa stiu
Desenul , voi o sa il faceti…
…in imaginatia voastra!



Aceste universe pot sa se intrepatrunda. Punctele lor comune, se repartizeaza in cercuri, obiecte unidimensionale.



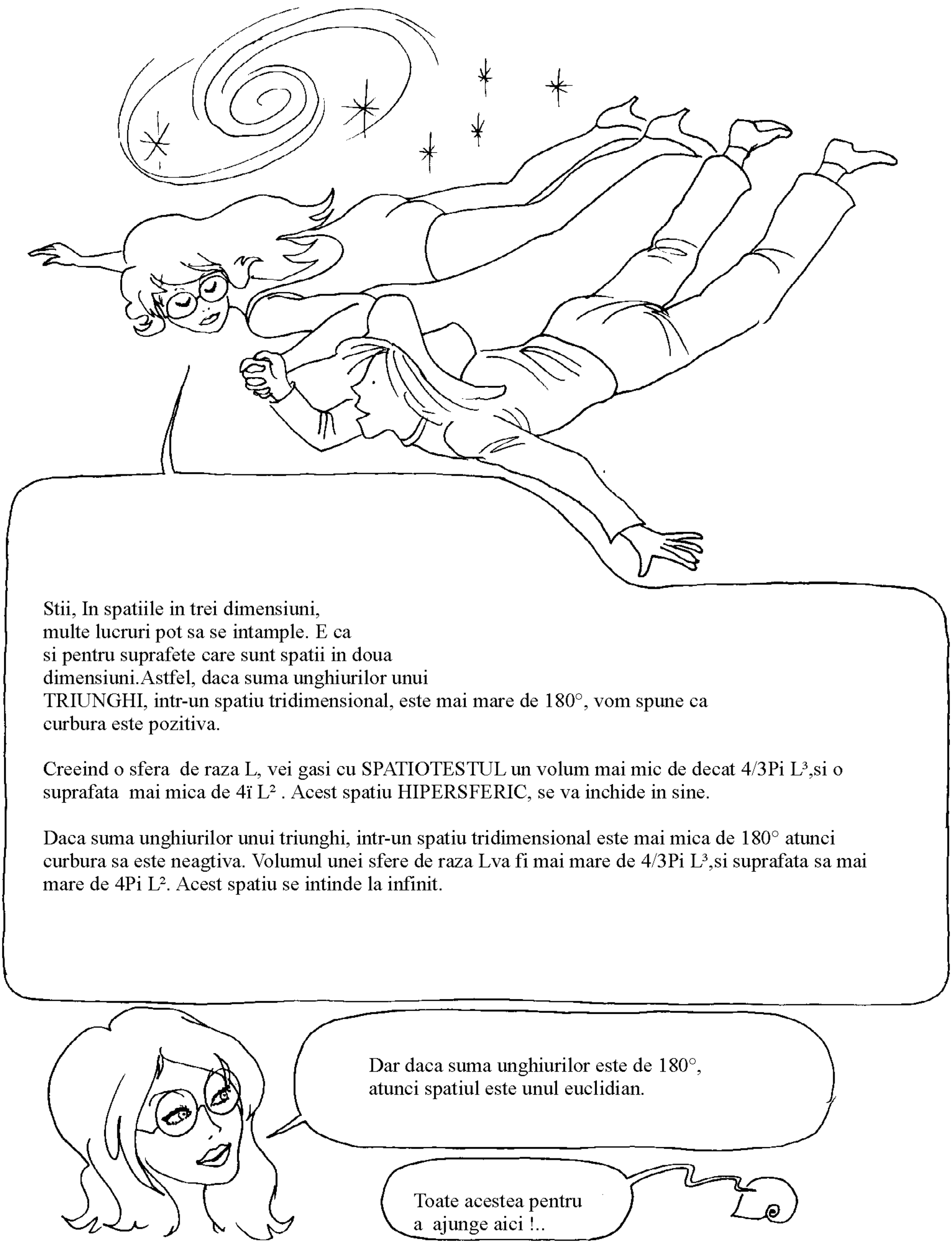
La fel si cercurile , obiecte unidimensionale, plasate pe o foaie de hartie (bidimensionala) s-ar intretaia in anumite puncte (Avem obiceiul sa zicem ca PUNCTUL are dimensiunea 0)

O sfera ar putea atunci sa fie considerata ca fiind intersectia a doua “bule” tridimensionale, aflate intr-un spatiu in patru dimensiuni.

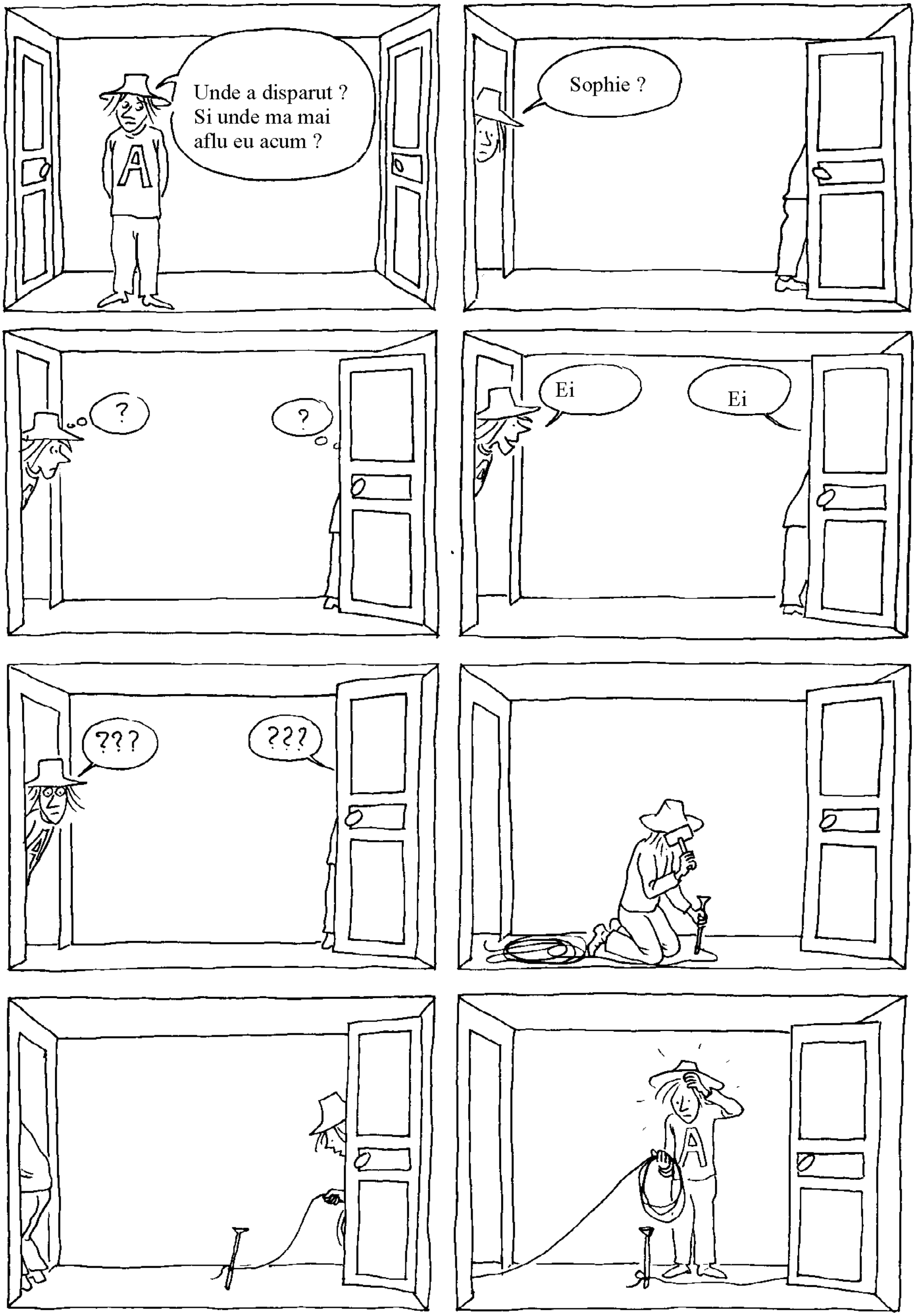
Si asa mai departe : un spatiu tridimensional curbat, hipersferic, ar putea el insusi sa fie vazut ca intersectia a doua bule de sapun in patru dimensiuni, aflate intr-un spatiu in cinci dimensiuni.

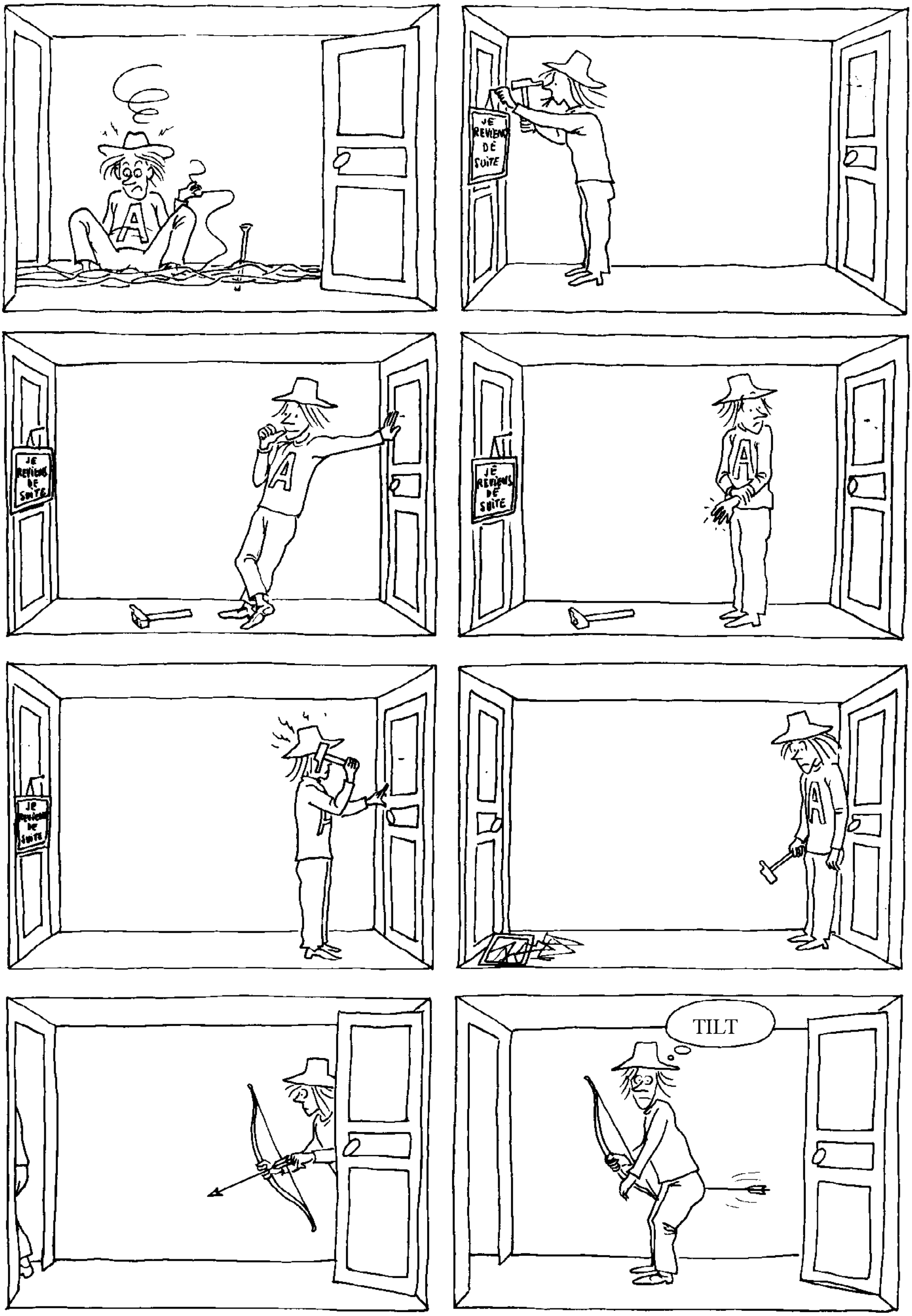
Dupa ce au facut cunostiinta cu ametelile extrapolarii,
Anselme si Sophia reiau explorarea de noi lumi
tridimensionale.

REZUMAT


Stii, In spatiile in trei dimensiuni, multe lucruri pot sa se intample. E ca si pentru suprafete care sunt spatii in doua dimensiuni.Astfel, daca suma unghiurilor unui TRIUNGHI, intr-un spatiu tridimensional, este mai mare de 180°, vom spune ca curbura este pozitiva.
Creeind o sfera de raza L, vei gasi cu SPATIOTESTUL un volum mai mic de decat 4/3Pi L^3,si o suprafata mai mica de 4ï L^2 . Acest spatiu HIPERSFERIC, se va inchide in sine.
Daca suma unghiurilor unui triunghi, intr-un spatiu tridimensional este mai mica de 180° atunci curbura sa este neagtiva. Volumul unei sfere de raza Lva fi mai mare de 4/3Pi L^3,si suprafata sa mai mare de 4Pi L^2. Acest spatiu se intinde la infinit.
Dar daca suma unghiurilor este de 180°, atunci spatiul este unul euclidian.
Toate acestea pentru a ajunge aici !..

TREBUIE CA UN SPATIU SA FIE INCHIS SAU DESCHIS


Unde a disparut ?
Si unde ma mai
aflu eu acum ?
Sophie ?
?
?
Ei
Ei
???
???

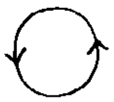

JE REVIENS DE SUITE
JE REVIENS DE SUITE
JE REVIENS DE SUITE
TILT


Ei bine, Lanturlu a fost proiectat intr-un spatiu cilindric in trei dimensiuni. Chiar daca este euclidian, fara curbura (suma unghiurilor unui triunghi este egala cu 180°) acest spatiu se inchide in el.
TILT
Bine, sa vedem… spatii sferice, hiberbolice, cilindrice. Am facut turul, nu ?
Credeti?
Sa ne intoarcem putin in lumea noastra bidimensionala.
Ha ?

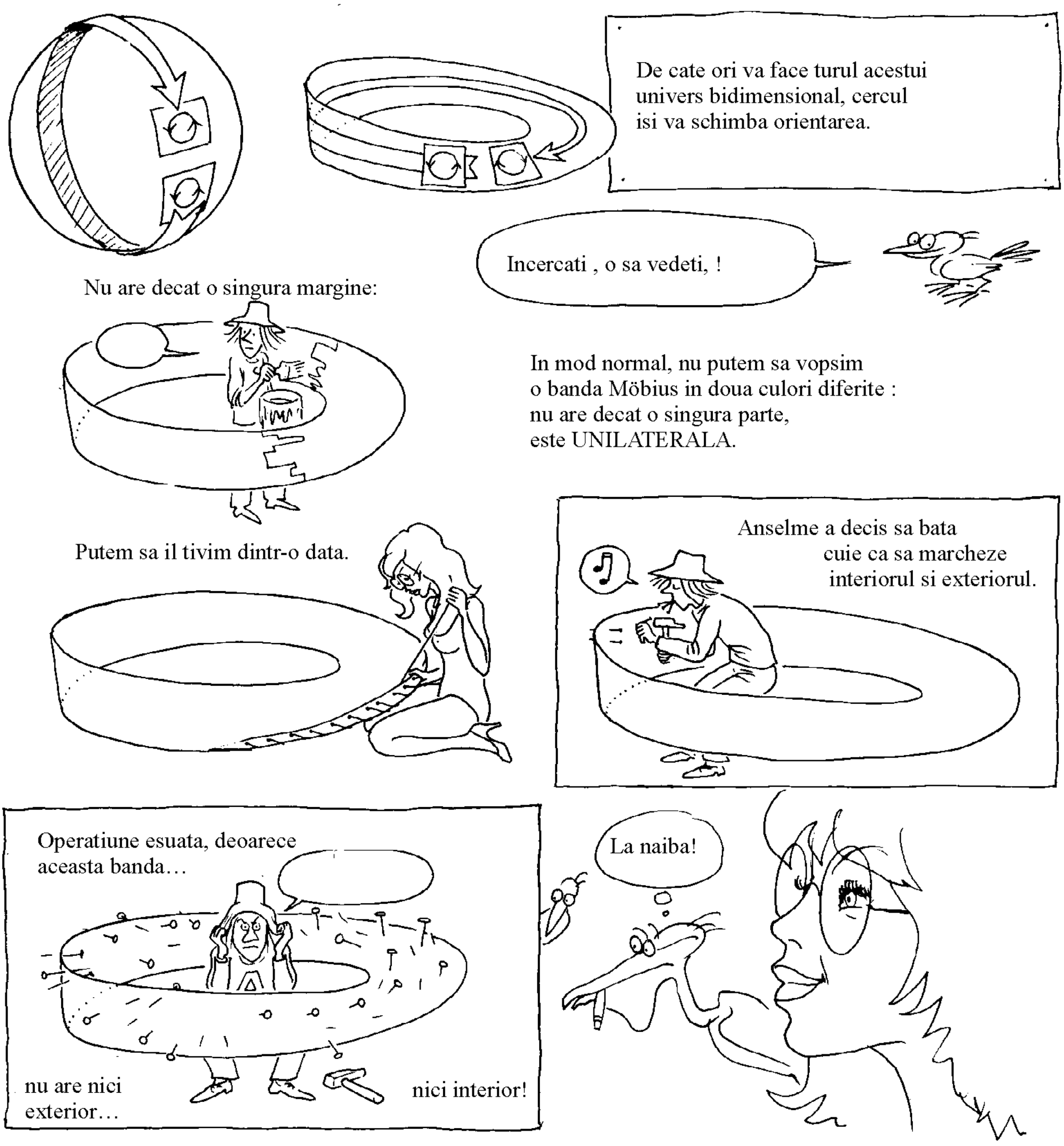
O MARE CONFUZIE :

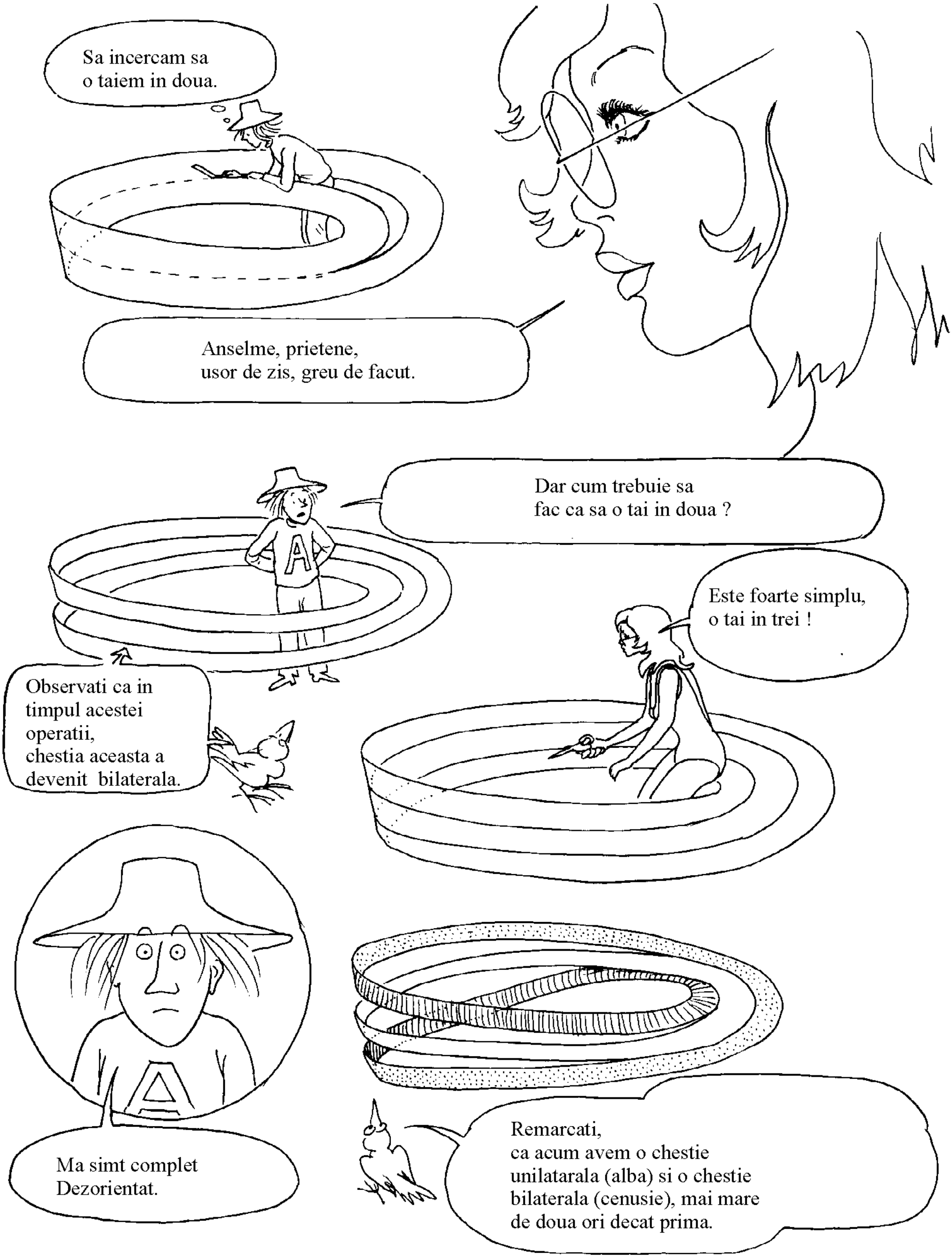

Se inchide in ea,
ca si mai inainte.
Suma unghiurilor 180°.
Este vorba despre o chestie
euclidiana.
Iarasi revin la cilindru.
Ba nu !...
!?!
Nu se poate !
Ca sa va zic totul, Anselme, s-a regasit de aceasta data intr-un
SPATIU BIDIMENSIONAL imposibil de NEORIENTAT.
Un spatiu tipic de acest gen, este banda lui Möbius (1830).
Aceasta idee le-a scapat grecilor, desi s-au gandit aproape la tot.
Sophie scoate-ma de aici

Sa desenam un cerc pe o suprafata si sa il orientam intr-un sens oarecare.
Sa ne imaginam ca acest cerc este o mica decalcomanie pe care o putem misca dupa placul nostru pe aceasta suprafata. Daca cercul se regaseste indentic cu el insusi, vom spune ca suprafata este ORIENTABILA (este cazul sferei, cilindrului, planului, etc….).



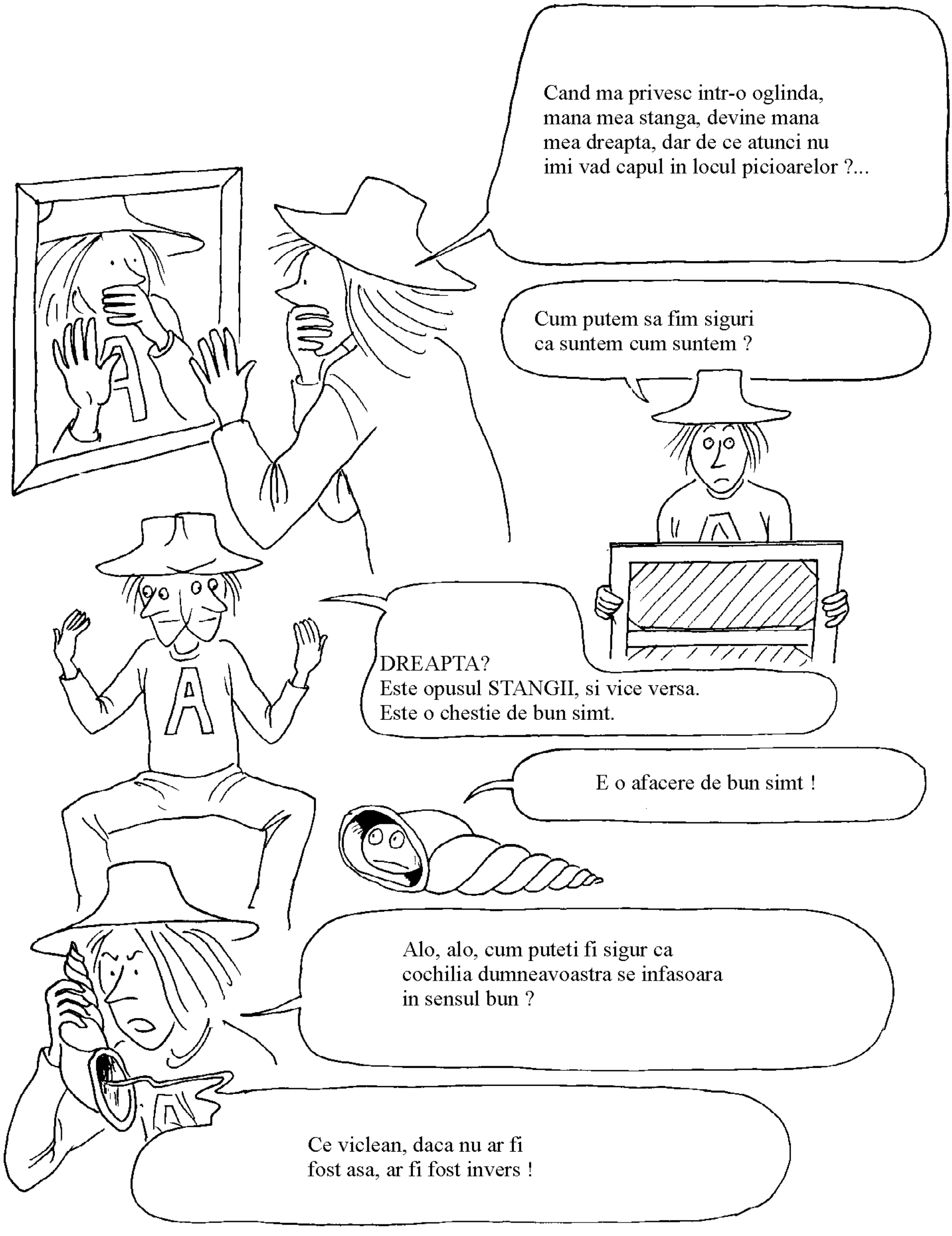
Dar daca aceasta suprafata aluneca pe banda lui Möbius, atunci este vorba despre altceva :



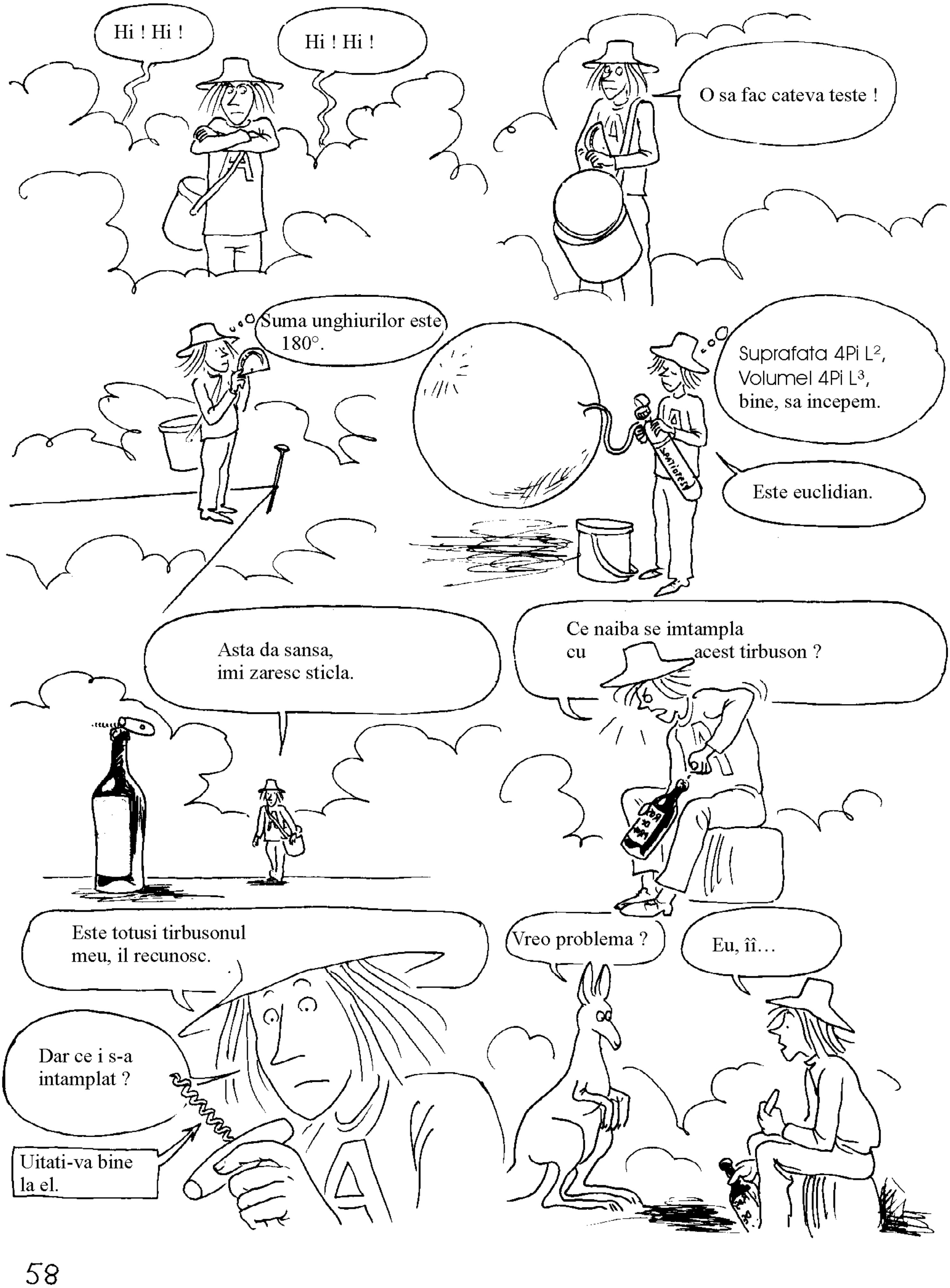

Sa incercam sa
o taiem in doua.
Anselme, prietene,
usor de zis, greu de facut.
Dar cum trebuie sa
fac ca sa o tai in doua ?
Este foarte simplu,
o tai in trei !
Observati ca in
timpul acestei
operatii,
chestia aceasta a
devenit bilaterala.
Ma simt complet
Dezorientat.
Remarcati,
ca acum avem o chestie
unilatarala (alba) si o chestie
bilaterala (cenusie), mai mare
de doua ori decat prima.

Dupa aceasta plimabare pe banda lui Möebius, sa revenim la spatiile noastre euclidiene (fara curbura) in trei dimensiuni :

ORIENTAREA SPATIULUI

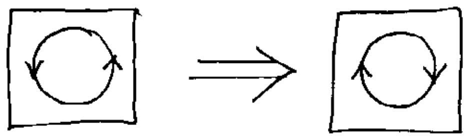


Sa il insotim pe Lanturlu intr-o noua explorare, cea a lumii tridimensionale euclidiene (fara curbura).

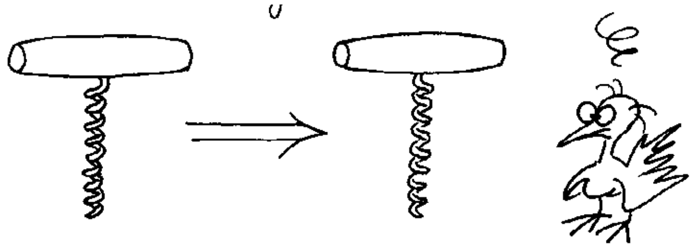

Hi ! Hi !
Hi ! Hi !
O sa fac cateva teste !
Suma unghiurilor este 180°.
Suprafata 4Pi L^2, Volumel 4Pi L^3, bine, sa incepem.
Este euclidian.
Asta da sansa, imi zaresc sticla.
Ce naiba se imtampla cu acest tirbuson ?
Este totusi tirbusonul meu, il recunosc.
Dar ce i s-a intamplat ?
Uitati-va bine la el.
Vreo problema ?
Eu, îi…


Este un roze din Sudul Frantei,
destul de bun, si totusi…
Aveti un tirbuson ?
Iîî…da .
Daca toti cangurii din lume
Vroiau sa isi dea mana ?
Nu ati remarcat
nimic anormal ?
Nu, doar ca
sunteti un pic indispus,
atata tot.
Luati cate putin de bisulfat de parmezan
de doua ori pe zi.
Spor in
continuare.
Cineva imi strica tirbusonul si un cangur
turmentat imi fura vinul. Ce inseamna
toate astea ?
La nailba !
NU AM STII CUM SA VA INCITAM SA PRIVITI
ACEST TIRBUSON CU CEA MAI MARE ATENTIE.

Banda lui Möbius (spatiu neorientabil in doua dimensiuni) are un echivalent in spatiul tridimensional. Pe banda lui Möbius cand cercul de tip decalcomanie facea turul acestiu spatiu euclidian, orientarea sa se schimba :



A vedea pagina 54 :

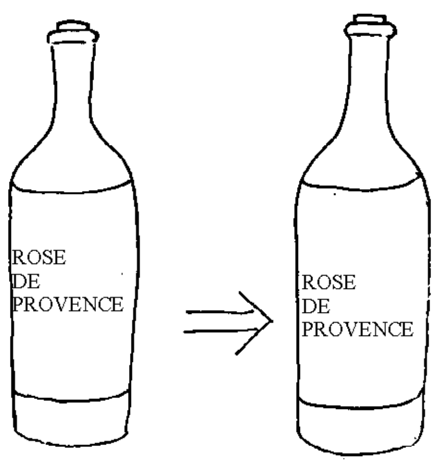


Vom remarca ca aceste obiecte sunt “in oglinda”. Tirbusonul sau chiar Anselme insusi, pot fi considerati « decalcomanii in trei dimensiuni”.

De fiecare data, cand un obiect face turul acestui spatiu tridimensional, orientarea sa se schimba.

Cum noi il insotim pe Lanturlu in calatoria sa circumspatiala, este normal sa vedem ca si el, sticla « in oglinda » si tirbusonul insurubandu-se in sensul rau.

Un al doilea tur in acest univers, ne-ar reda viziunea initiala a lucrurilor (cu conditia ca obiectele sa ramana la locul lor).



Anselme si cangurul (din spatiul anipozilor) locuiesc in acelasi spatiu, dar se deosebesc prin faptul ca ceea ce este «la locul lui pentru cangur » , este « invers pentru Lanturlu », si vice versa.

EPILOG

Totul merge anapoda. Nu mai este nici dreapta, nici stanga, nici inspre, nici drept. Unde ma duc toate acestea ? Si ce cale trebuie sa urmez ?
Trebuie sa urmezi geodezicile Anselme, geodezicile vietii tale.
Niciodata nu o sa cred ca universul poate sa fie atat de intortocheat. Sunt doar inventiile matematicienilor.
Este doar o banda desenata !
De ce sa ne batem capul cu toate acestea, doar stim ca spatiul ESTE euclidian(*).
(*) Citat al profesorului Ostrogradsky in 1830, titular al catedrei de matematica din Petrograd, inspirat de lucrarilor lui Rieman si Lobatchevsky.

Sa presupunem ca Universul nu este ceea ce pare. Va puteti imagina, toate acestea predate la scoli ?
Ce dezastru !
Si in fond, ceea ce conteaza, este viata. Si pentru viata de zi cu zi, fuga...
Dar ce se ascunde in spatele tuturor acestor lucruri ?
FIZICA, Dragul meu…
Vreau sa clarific toate acestea !
Tot inainte pentru CONCRET !
Este cineva ?


Daca densitatea medie de materie in univers este mai mica de 10^(-27) grame pe cm³….
?
Atunci universul ar avea o curbura negativa si ar avea o extensie infinita…
…din contra,daca densitatea ar fi mai mare de 10^(-29)grame/cm³
!..
…Universul ar fi hipersferic, si s-ar inchide in sine…
Dar daca aceata densitate este egala cu 10^(-29)grame/cm³, atunci universul ar fi euclidian.
Da
Sunteti Doctorul Einstein, presupun ?
Mda…
SFARSIT