

Modelo cosmológico de Janus
Universo bimétrico: perspectivas e desafios

Hicham ZEJLI¹

¹ Engenheiro graduado pela ENSISA - hicham.zejli@manaty.net

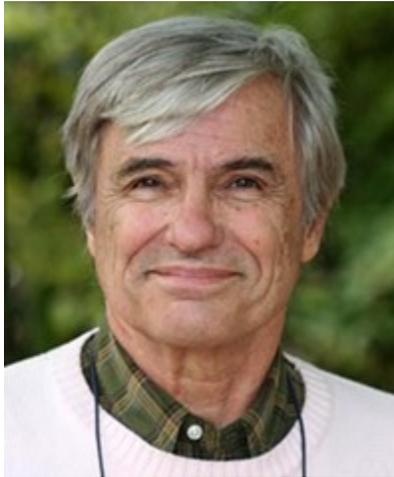
Tabela de conteúdo

Prefácio de Jean-Pierre Petit (França)	5
1 Introdução	12
1.1 Apresentação do contexto e dos objetivos do livro	12
1.2 Breve introdução ao modelo cosmológico Janus e sua importância.....	12
2 Fundamentos teóricos	14
2.1 Lei da Gravitação de Newton.....	14
2.2 Introdução à Relatividade Especial.....	14
2.2.1 Tempo-espaço e tempo próprio de Minkowski.....	14
2.2.2 A velocidade da luz como um limite	16
2.2.3 Conceitos fundamentais	16
2.2.4 Equivalência entre massa e energia.....	16
2.3 Introdução à Relatividade Geral.....	17
2.3.1 Uma revolução na física	17
2.3.2 Efeitos observáveis e confirmações experimentais.....	18
2.3.3 Geometria do espaço-tempo e equações geodésicas.....	20
Quadro inercial e coordenadas.....	20
Coordenar a transformação para uma estrutura de referência acelerada de laboratório	21
2.3.4 Tensores métricos.....	23
2.3.5 Símbolos de Christoffel	25
2.3.6 Aplicação da equação geodésica no limite do campo fraco	31
2.3.7 Soluções de Karl Schwarzschild e Ludwig Flamm.....	35
2.3.8 Construção de geodésicas para a métrica exterior de Schwarzschild	36
2.3.9 A solução Roy Kerr.....	43
2.4 O trabalho de Andrei Sakharov e Jean-Marie Souriau	44
2.5 Abordagem bimétrica introduzida pela geometria Riemanniana hiperbólica	45
3 Modelo cosmológico de Janus	47
3.1 Descrição	47
3.2 Implicações.....	48
3.3 O Repelente de Dipolo.....	56
3.3.1 Introdução.....	56
3.3.2 Algumas tentativas de interpretação.....	56

3.3.3	Interpretação por lacunas de matéria escura	57
3.3.4	Interpretação do modelo cosmológico Janus	58
3.3.5	Perspectivas futuras.....	77
4	Contribuição para a cosmologia e a física de partículas	77
4.1	Introdução aos grupos dinâmicos	77
4.2	Várias simetrias associadas a cada operador de reversão.....	80
4.3	Grupo de Dinâmica Lorentz	81
4.4	Grupo de dinâmica de Poincaré restrito	81
4.5	Grupos dinâmicos restritos de Kaluza e Janus	82
4.6	Grupo Janus Dynamic	82
4.7	Implicações.....	85
5	Interpretação alternativa do modelo de buraco de minhoca acoplado a uma fonte branca como uma <i>membrana unidirecional</i>	87
5.1	Soluções da equação de Einstein que refletem diferentes topologias.....	87
5.2	A hipótese da <i>estaticidade</i> : ausência do termo cruzado $dr dt$	90
5.3	Construção de uma solução geométrica infinita Lorentziana de duas folhas	91
5.3.1	Simetria T	91
5.3.2	Simetria P	92
5.3.3	Identificação das duas folhas	93
5.4	Outra representação dessa geometria	94
5.5	Conclusão	95
5.6	Apêndice	96
6	Interpretação topológica do modelo	97
6.1	Definição de.....	97
6.2	Modelo de buraco de minhoca	97
6.3	Modelo do universo.....	98
7	Interpretação alternativa dos objetos supermassivos subcríticos M87 e Sagittarius A*. 104	
7.1	Introdução	104
7.2	Interpretação alternativa do fenômeno	108
7.2.1	Comparação de criticalidades físicas e geométricas.....	108
7.2.2	Redshift gravitacional próximo à criticalidade física	109
7.2.3	Variação da velocidade da luz e da pressão em plasmas de densidade constante 112	
7.3	Conclusão	113

8	Desafios e debates	114
8.1	Desafios na comunicação e aceitação do modelo	114
8.2	Discussão de críticas e respostas.....	115
	Resposta de <i>Gravitação e Cosmologia</i>	115
	Minha resposta a esse crítico	116
	Análise crítica dos retornos do <i>Astronomische Nachrichten</i>	117
9	Conclusão e discussão	119
	Bibliografia.....	121

Prefácio de Jean-Pierre Petit (França)



O ano é 2024. Faça as contas. Eu nasci em 1937. Ao escrever estas linhas, estarei com 87 anos. O tempo passa tão rápido que, quando você ler isto, talvez eu não esteja mais entre nós. Estou escrevendo estas páginas e acho que Hicham se sente da mesma forma, como se estivesse jogando uma garrafa no mar com uma mensagem de apelo. Enquanto escrevo estas linhas, a equipe da Janus está reduzida a três homens. Além de Hicham, nascido em 1979, há um jovem matemático, David, nascido em 1985, e é isso. Em 2022, eu era o único responsável por esse projeto Janus há quarenta anos. Esses dois se juntaram a mim depois de ouvir uma palestra que dei em janeiro de 2023 em Paris.

Tenho vontade de dizer: O que está acontecendo no mundo da ciência?

Há mais de um século, como você sabe, o mundo científico foi virado de cabeça para baixo pelo surgimento repentino de duas novas disciplinas: a mecânica quântica e a cosmologia. Assim, durante setenta anos, o progresso científico se sucedeu em um ritmo fantástico. Os teóricos estavam fornecendo uma explicação para um fato conhecido há muito tempo, como o avanço do periélio de Mercúrio, um fenômeno que a mecânica newtoniana havia se mostrado incapaz de explicar. Ou se tratava de novas observações, como a descoberta da expansão do universo, que o russo Alexander Friedman foi rápido em explicar, produzindo a primeira solução instável para a equação introduzida por Einstein em 1915, que agora forma a base dessa nova visão do mundo, a relatividade geral.

Às vezes, os teóricos têm uma nova visão, propondo objetos estranhos que eles usam para tornar seus cálculos mais equilibrados. Um exemplo é a antimatéria, cuja existência foi conjecturada pelo inglês Paul Dirac em 1928.

A título de curiosidade, vamos citar a reação do dinamarquês Niels Bohr, após ler este artigo:

"Essa teoria parece ideal para capturar elefantes na África. Penduramos o artigo de Dirac em uma árvore. Um elefante aparece e lê o artigo de Dirac. Ele fica tão impressionado que é fácil capturá-lo.

Mas a natureza provou ser uma boa amiga de Dirac e, em 1931, confirmou a existência de antielétrons nos raios cósmicos. Na época, não conseguimos recriar essa antimatéria em colisores de partículas. Portanto, foram os fótons gama das profundezas do cosmos que foram transformados em um par elétron-antielétron, um objeto conhecido como pósitron.

Essa revolução, descrita como uma mudança de paradigma, começou em 1895 com as descobertas feitas por Conrad Röntgen, Henri Becquerel e J.J. Thomson, anunciando a entrada dramática das partículas e dos fenômenos atômicos no cenário científico. Durante décadas, os teóricos, de um lado, e os experimentadores e observadores, de outro, assemelhavam-se a dois grupos de puros-sangues galopando lado a lado, alguns um pouco à frente dos outros.

Tudo isso continuou por poucas décadas após a Segunda Guerra Mundial. Entre essas descobertas importantes estava a descoberta acidental, em 1967, da radiação cósmica de fundo em micro-ondas, uma população de fótons de baixa energia que provou que uma fantástica aniquilação de pares de matéria-antimatéria havia ocorrido no início do universo.

No final da década de 1960, a preocupação do que hoje chamamos de cosmólogos era simplesmente determinar o valor da densidade média no universo. Se ela fosse maior que 10^{-29} gramas por centímetro cúbico, então o universo está evoluindo ciclicamente. Após uma fase de expansão, ele entra em colapso sobre si mesmo, produzindo um Big Crunch. Se essa densidade for menor, então, no futuro distante do universo, as galáxias se afastarão umas das outras, indefinidamente, a velocidades que se tornarão constantes. E se essa densidade for igual a esse valor, digamos que a evolução esteja entre esses dois extremos.

Lembro-me perfeitamente: foi nessa época que comecei minha carreira de pesquisador, no final da década de 1960.

O que acontece depois?

Rapidamente, a mecânica ficou desordenada e tudo foi de mal a pior. Os teóricos da física de partículas, que surgiram com o século graças ao aumento das energias dos aceleradores, previram o surgimento de novos objetos, que eles chamaram de superpartículas.

Mas nada aconteceu.

No início da década de 1980, para explicar a velocidade com que as estrelas giram nas galáxias e para explicar por que a força centrífuga não as faz explodir, foi proposta a existência da matéria escura, responsável por quatro quintos da massa total do universo.

Em 1989, observações feitas pelo satélite COBE revelaram a extrema homogeneidade do universo primitivo. Para justificar esse fato, um jovem russo, Andrei Linde, propôs sua teoria da inflação, segundo a qual o universo, quando tinha apenas alguns segundos de idade, sofreu uma expansão repentina por um fator de um. 10^{-33} O universo, quando tinha apenas alguns segundos, sofreu uma expansão repentina por um fator de um. 10^{26} Isso foi causado por um novo campo composto de novas partículas, conhecidas como inflatons. Atualmente, existem tantos modelos de inflatons quanto pesquisadores especializados nesse campo.

Em 2011, um Prêmio Nobel foi concedido por outra descoberta: a da aceleração da expansão cósmica, atribuída à energia escura. Ao traduzir sua importância usando a expressão de Einstein $E = mc^2$ desta vez, 75% do conteúdo cósmico escapa à observação.

Em 2024, enquanto escrevo estas linhas, não há nenhum modelo confiável de energia escura. No final das contas, a matéria comum que é adequada para observação representa apenas 4% da sopa cósmica.

Vários candidatos foram propostos para a matéria escura, sendo o principal deles o neutralino, um membro da família hipotética de superpartículas. Entretanto, além do fato de ser impossível fazê-lo aparecer em colisores potentes, ele escapa de todas as tentativas de detecção em experimentos caros realizados em túneis e minas, protegidos da radiação cósmica por uma espessa camada de rocha.

E no que diz respeito à teoria?

Na virada da década de 1970, quando a falta de resultados dos experimentos de física de alta energia levou a uma nova mudança de paradigma, um grupo de pesquisadores propôs representar as partículas materiais e as partículas associadas à radiação usando um novo modelo composto de cordas vibratórias, abertas ou fechadas. A maioria dos teóricos adotou o que considerava uma direção nova e promissora. Foram criados postos de pesquisa e ensino em todos os países. Equipes foram formadas. As pessoas que estavam no centro desse movimento chegaram ao ponto de sonhar em construir uma teoria de tudo. Essa corrente de pensamento deu origem a montanhas de artigos e teses de doutorado.

Qual é a situação no início do terceiro milênio?

Nada: A montanha dá à luz um rato.

A situação atual lembra o conto "*A roupa nova do imperador*", de Hans Christian Andersen. Quando, no final da história, uma criança escreve: "*ele está nu!*"

O livro de Hicham é a história de uma mudança de paradigma que pode ser resumida em uma frase: *O universo é composto de massas positivas e negativas.*

Por que não, afinal de contas?

Mas essa ideia é como um fio que se destaca. Se você puxar esse fio, um cordão o seguirá. Você puxa o fio e uma corda é anexada. Você puxa a corda e o que se segue é um cabo pesado, cuja tração sacode o edifício.

Qual prédio?

A sacrossanta relatividade geral de Albert Einstein, cuja equação está gravada em pedra nos institutos de física de todo o mundo.

Isso significa que a teoria está errada?

Não. É apenas um lado da moeda. Ele precisa ser integrado em um sistema de duas equações de campo acopladas. Nas páginas deste livro, você encontrará tudo o que surgiu dessa ideia sacrílega.

Em janeiro de 2023, tendo sido a única pessoa a realizar esse grande projeto por quarenta anos, dei uma conferência em Paris, com a presença de David e Hicham.

David é um jovem matemático. Embora tenha uma tese de doutorado, ele não se sente atraído pelas pressões da pesquisa e prefere ensinar matemática na universidade.

Às vezes, diz-se que são os pesquisadores que assumem o controle das ideias. Na verdade, o oposto é verdadeiro. São as ideias que tomam conta dos pesquisadores. A ideia de uma topologia diferente do universo, a base do meu modelo Janus, tomou conta de David. Nos últimos dez meses, ele tem lutado para publicar a base matemática desse modelo em revistas de física matemática. Talvez, no momento em que você ler estas linhas, a publicação desse trabalho tenha finalmente chegado a essas revistas de alto nível. Nesse

caso, a armadilha estará montada, na esperança de que outros matemáticos sejam pegos de surpresa.

As novas ideias são como as armadilhas usadas na África para capturar pequenos macacos. Uma concha oca com um buraco é colocada ao alcance deles. Dentro da concha há um pedaço de fruta, que eles gostam muito, mas cujo diâmetro é exatamente igual ao do buraco. Quando o macaco enfia a mão no buraco, é impossível retirar a mão e a fruta. Eu mesmo fui vítima de uma armadilha semelhante há quarenta anos. Uma ideia que passava por mim me agarrou e tomou posse dos meus neurônios. Quando uma ideia é lógica, funcional e frutífera, é muito difícil se livrar dela. E, finalmente, se essa ideia for consistente com as observações, rejeitá-la simplesmente se torna impossível, o que complica muito sua vida, tornando-o uma espécie de mutante, um estranho dentro de sua comunidade científica. A menos que você decida permanecer no labirinto.

Em 1959, um inglês, Arthur Koestler, escreveu um livro intitulado *Les somnambules* (Os sonâmbulos). Ele descreveu os cientistas como pessoas que, durante o sono, caminham com os olhos fechados e as duas mãos estendidas à sua frente, tentando encontrar o caminho. Sem saber, eles estão caminhando por um labirinto. Sem saber como ele é construído, às vezes passam por uma porta que está aberta, sem poder vê-la, enquanto embarcam em um caminho que acaba sendo um beco sem saída. Essa ideia não é nova. Uma ideia semelhante, mais estática, pode ser encontrada no mito da caverna de Platão.

Gostaria agora de falar sobre o que aconteceu com Hicham Zejli. Em janeiro de 2023, enquanto trabalhava como engenheiro de computação em uma empresa francesa, ele ficou intrigado com o conteúdo da conferência que eu estava dando em Paris sobre meu modelo cosmológico Janus. Ele então assistiu aos cerca de trinta vídeos que eu havia criado em 2017 e leu todos os livros sobre o assunto, para apresentar os principais recursos desse modelo. Ele refaz todos os cálculos que encontra nos arquivos pdf que coloco na Internet, que acompanham meus vídeos. E aí a armadilha se fecha.

Se você ler o livro dele, tome cuidado! Você mesmo pode ser vítima dele. Essas páginas podem levá-lo a escalar uma das paredes do labirinto, abrindo os olhos. O mundo da ciência terá então uma aparência diferente para você. Como aconteceu com Hicham, de repente você verá pessoas, às vezes ganhadoras dos prêmios de maior prestígio, vagando como sonâmbulos, dando voltas e mais voltas em um círculo do labirinto. Os modelos que foram aceitos por aqueles que compõem a chamada comunidade científica aparecerão para você como a consequência óbvia de erros de cálculo flagrantes. Você verá como esses sonâmbulos passam repetidamente por novos caminhos que estão abertos, magnificamente alinhados com uma massa de observações, incapazes de vê-los, agarrando-se a ideias que não são mais do que tábuas, podres, febrilmente pregadas nas brechas que os recifes da dura realidade causaram em um Modelo Padrão que está vazando por todos os lados.

E você terá vontade de gritar, como o personagem de Andersen, "O rei está nu!

O trabalho que Hicham realizou em menos de um ano é considerável, e isso apesar do fato de ele ter feito tudo isso fora de suas atividades profissionais, no que pode ser descrito como seu tempo livre. Em doze meses, ele compreendeu e assimilou em profundidade, e não superficialmente, uma quantidade surpreendente de coisas relacionadas às diferentes áreas afetadas pelo meu modelo Janus. Nunca vi ninguém engolir e digerir tanta coisa, tão complexa, em tão pouco tempo.

Tornando-se o primeiro cronista dessa fantástica aventura que é o modelo Janus e tudo o que vem com ele, ele dá testemunho disso neste livro, que precisava ser escrito. Ele já está ativamente envolvido na redação de artigos há meses e não quer perder nada dessa aventura. Mais do que apenas uma testemunha, ele quer ser um dos jogadores, e nós queremos que ele se torne um, contribuindo com suas ideias e contribuições pessoais para o edifício. Para garantir a distribuição mais ampla possível, o livro que ele escreveu está disponível como um pdf gratuito para download em todos os idiomas e deve continuar a ser desenvolvido nesse espírito. O conhecimento tem algo de especial: uma vez que você o doa, não pode pegá-lo de volta e, até certo ponto, é difícil torná-lo seu.

A imagem é de três homens empoleirados em uma jangada improvisada, colocando mensagens em garrafas em diferentes idiomas, entregando-as uma após a outra às correntes aleatórias do mar. Talvez eu não esteja mais vivo quando você ler estas linhas. O tempo passa tão rápido. O que acontecerá com tudo isso? Eu não sei.

Tenho uma vaga sensação de que a humanidade tem hoje um encontro com seu destino, que além desse modelo cosmológico uma visão diferente e ainda mais vasta do universo está tomando forma. Para ilustrar isso, citarei o final do discurso de aceitação do Prêmio Nobel da Paz de Andréi Sakharov em 1975. Palavras que faço minhas:

"Milhares de anos atrás, as tribos humanas sofreram grandes dificuldades em sua luta pela existência. Naquela época, era importante não apenas saber manejar um cassete, mas também ter a capacidade de pensar de forma inteligente, levar em conta o conhecimento e a experiência acumulados pela tribo e desenvolver os laços que estabeleceriam as bases para a cooperação com outras tribos. Hoje, a raça humana enfrenta um teste semelhante. Várias civilizações poderiam existir no espaço infinito, incluindo sociedades que poderiam ser mais sábias e mais "eficientes" do que a nossa. Eu apoio a hipótese cosmológica de que o desenvolvimento do universo se repete um número infinito de vezes, de acordo com características essenciais. Outras civilizações, inclusive algumas das mais "bem-sucedidas", estão inscritas um número infinito de vezes nas páginas "seguintes" ou "anteriores" do Livro do Universo. No entanto, não devemos minimizar nossos esforços sagrados neste mundo, onde, como luzes fracas na escuridão, emergimos por um momento do nada da inconsciência obscura para a existência material. Devemos respeitar as exigências da razão e criar uma vida que seja digna de nós mesmos e dos propósitos que mal percebemos. "

Jean-Pierre Petit, cidadão do mundo - jean-pierre.petit@manaty.net



Hicham ZEJLI - 22 de setembro de 1979 - nacionalidade francesa

1 Introdução

1.1 Apresentação do contexto e dos objetivos do livro

No cenário atual da cosmologia e da física teórica, a exploração de novos modelos para explicar os fenômenos observados em nosso universo continua a ser uma área de pesquisa animada e controversa. Este livro se propõe a explorar e apresentar um modelo cosmológico inovador e revolucionário, o Janus Cosmological Model (JCM), desenvolvido pelo físico Dr. Jean-Pierre Petit.

Como engenheiro com formação avançada em matemática e física, identifiquei no estudo do Modelo Cosmológico de Janus uma abordagem inovadora e intelectualmente gratificante para explorar e interpretar alguns dos fenômenos mais enigmáticos do universo. Essa abordagem também abre caminho para o desenvolvimento de muitas aplicações práticas em escalas locais, com base nos princípios fundamentais derivados desse modelo.

Este livro tem dois objetivos principais:

Em primeiro lugar, fornecer uma explicação detalhada do Modelo Cosmológico Janus, seus fundamentos e suas implicações por meio de determinados estudos, acessíveis a cientistas com formação semelhante à minha, ou seja, um nível avançado em matemática e física teórica.

Em segundo lugar, apesar da colaboração intensa, gratificante e diversificada dentro da nossa equipe, gostaria de destacar o contraste marcante causado pela falta de comunicação com os revisores consultados pelas principais revistas científicas revisadas por pares. Essa situação destaca os desafios que as ideias inovadoras podem enfrentar ao surgirem e se desenvolverem sem um diálogo significativo e construtivo entre os pesquisadores.

1.2 Breve introdução ao modelo cosmológico Janus e sua importância

O Modelo Cosmológico Janus se destaca no cenário da física teórica por sua proposta ousada: descrever o universo como uma variedade Riemanniana com duas métricas. Essa construção se baseia na teoria da relatividade geral de Einstein e incorpora elementos da física de partículas e da geometria simpática. O modelo tem suas raízes no trabalho de Andrei Sakharov e Jean-Marie Souriau, que estabeleceram uma ligação entre a inversão do tempo, a inversão da energia e, conseqüentemente, a inversão da massa.

Uma das principais contribuições do modelo é sua capacidade de lidar com o problema da assimetria bariônica do universo. Essa questão, no centro dos debates atuais em cosmologia, diz respeito à predominância observada da matéria sobre a antimatéria, desafiando as previsões do modelo do Big Bang. O Modelo Cosmológico Janus oferece uma nova perspectiva sobre esse problema, postulando a existência de um universo bidimensional que surge da mesma singularidade, dominado por matéria e antimatéria. A originalidade do modelo também está em sua abordagem bimétrica do universo, em que duas "camadas" de espaço-tempo interagem por efeito gravitacional, oferecendo explicações alternativas para fenômenos como energia escura e matéria escura e, potencialmente, abrindo novos entendimentos sobre viagens interestelares.

Em suma, este livro tem como objetivo apresentar esse modelo como uma abordagem

inovadora, desafiando as perspectivas atuais da cosmologia e da física teórica e convidando a uma reflexão profunda sobre possibilidades inexploradas para nossa compreensão do universo.

2 Fundamentos teóricos

2.1 Lei da Gravitação de Newton

A lei de Newton, formulada no espaço euclidiano, afirma que quando uma massa m está sujeita à influência da força gravitacional G gerada por outra massa M essa força F é inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa as duas massas. d que separa as duas massas. Ela pode ser expressa pela seguinte equação:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2}$$

Quanto maior a massa, maior a força, mas essa força diminui rapidamente à medida que a distância aumenta devido ao termo d^2 no denominador. Essa lei é essencial para entender a gravidade e os movimentos dos objetos celestes.

Na física, essa lei da gravitação tem sido fundamental para a compreensão das interações gravitacionais entre os corpos celestes, desde a Terra até os planetas e as estrelas. Ela continua sendo uma lei fundamental da mecânica clássica e desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da astronomia e da astrofísica. Ela também foi confirmada por inúmeras observações e experimentos ao longo dos séculos, reforçando sua validade em nossa compreensão do universo.

Entretanto, embora a lei da gravitação de Newton tenha se mostrado extremamente poderosa e precisa em muitos cenários, ela começou a mostrar suas limitações quando aplicada a situações que envolviam velocidades próximas à da luz ou fenômenos em escala astronômica. Esse foi o ponto de partida para o surgimento da Teoria da Relatividade Especial de Albert Einstein, marcando uma mudança de paradigma em nossa compreensão dos conceitos fundamentais de espaço, tempo e gravitação. Na próxima seção, vamos nos aprofundar nos princípios fundamentais da Relatividade Especial, que estabelecerá as bases para nossa exploração posterior da Relatividade Geral. Isso nos levará a uma compreensão mais profunda das complexidades do cosmos.

2.2 Introdução à relatividade especial

No início do século XX, a física passou por uma revolução conceitual, desafiando os fundamentos estabelecidos por Sir Isaac Newton no século XVII. À medida que as observações e os experimentos se tornavam cada vez mais precisos, começaram a surgir anomalias ao estudar velocidades próximas à velocidade da luz e em ambientes cósmicos extremos. Nesse contexto, a Relatividade Especial de Albert Einstein entrou em cena, derrubando nossa compreensão tradicional de espaço, tempo e gravidade.

2.2.1 Tempo-espaço e tempo próprio de Minkowski

A Relatividade Especial nos convida a abandonar a ideia de que o universo ocorre em um espaço euclidiano tridimensional no qual o tempo é uma entidade separada. Em vez disso, ela propõe um modelo no qual residimos em uma hipersuperfície quadridimensional, em que as três dimensões do espaço são perpendiculares a uma dimensão do tempo. Essa fusão de espaço e tempo forma o que é conhecido como espaço-tempo de Minkowski, com uma assinatura métrica $(- + + +)$. Em outras palavras, a assinatura métrica é uma característica

importante do espaço-tempo que indica como os intervalos de tempo e espaço são combinados nas equações da relatividade especial. Nessa assinatura $(-+++)$ o primeiro termo corresponde ao intervalo de tempo, que é subtraído dos próximos três termos correspondentes aos intervalos de espaço. Isso significa que o tempo tem um sinal negativo na métrica, enquanto as três dimensões espaciais têm sinais positivos. Essa assinatura específica é fundamental para entender como as distâncias e os intervalos de tempo são medidos na relatividade especial.

Para entender melhor esse conceito, imagine um ponto M movendo-se nesse espaço-tempo descrito por duas coordenadas: tempo (t) e posição espacial (x) . À medida que esse ponto se move, um ponto vizinho M' corresponde a valores ligeiramente modificados: $(t + dt, x + dx)$, onde dt e dx representam pequenos incrementos de tempo e espaço. Se considerarmos que esse incremento ocorre ao longo de uma trajetória descrita por $x = ct$ (onde c é a velocidade da luz), então $dx = cdt$.

Neste ponto, apresentamos o conceito de *tempo limpo*. A quantidade desconhecida como tempo próprio, é uma medida de tempo que governa a vida de um objeto que se move a uma velocidade v . Para calcular usamos a seguinte equação:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

Essa equação mostra como o tempo adequado (s) está vinculado a mudanças no tempo (dt) e no espaço (dx) quando um objeto se move na velocidade v . Ela também revela que o tempo próprio pode variar como uma função da velocidade e da trajetória do objeto, levando a fenômenos como a dilatação do tempo.

Na teoria da relatividade especial de Einstein, o tempo não é absoluto, mas depende da velocidade relativa do observador. O desenvolvimento matemático a seguir descreve a relação entre o tempo próprio τ que é o tempo medido pelo relógio em movimento (a bordo da espaçonave), e o tempo coordenado t que é o tempo medido pelo relógio no solo (em repouso em relação ao observador):

$$\begin{aligned} s = c\tau &\Rightarrow ds = c d\tau && \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \\ &\Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 && \Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} && \Rightarrow \tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Isso implica que, em um cenário em que t representa o tempo medido por um observador estacionário equipado com um relógio no chão e v é a velocidade de um objeto equipado com um relógio a bordo que se move a essa velocidade em relação a essa imobilidade presumida, então o tempo próprio τ nesse objeto será afetado pela dilatação do tempo descrita por $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ conhecido como *fator de Lorentz*.

2.2.2 A velocidade da luz como um limite

É importante observar que, nesse espaço-tempo, a velocidade da luz é limitada pelas propriedades do espaço-tempo (e seu conteúdo) no qual ela está se propagando.

Se assumirmos que x é a coordenada espacial t é a coordenada de tempo e c é a velocidade da luz, então podemos definir uma velocidade v usando a expressão $v = \frac{dx}{dt}$.

Supondo que a variação do tempo próprio seja sempre maior ou igual a 0, ou seja $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \geq 0$ segue-se que a velocidade da luz no vácuo é o limite máximo de velocidade para objetos em movimento com uma massa de repouso positiva, pois $v \leq c$. Os fótons, por outro lado, seguem trajetórias para as quais $v = c$ levando a propriedades exclusivas associadas à luz.

A Relatividade Especial é uma teoria limitada ao estudo de quadros inerciais de referência, especificamente aqueles em movimento retilíneo uniforme (em espaços sem curvatura, movendo-se em linha reta a uma velocidade constante).

2.2.3 Conceitos fundamentais

A relatividade especial baseia-se principalmente em três conceitos:

- **Postulado da Invariância da Velocidade da Luz:** Esse postulado afirma que a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal e permanece a mesma para todos os observadores, independentemente de seu movimento relativo. Em outras palavras, a velocidade da luz não pode ser adicionada ou subtraída da velocidade de um observador. Essa ideia fundamental foi confirmada pelo famoso experimento de Michelson-Morley (Michelson e Morley, 1887).
- **Princípio cosmológico:** O princípio cosmológico postula que o universo é homogêneo e isotrópico. Isso significa que suas propriedades são uniformes e idênticas em todas as direções e em todas as escalas. Esse princípio nos permite estender a aplicação das leis da relatividade especial à escala cósmica, considerando o universo como um todo.
- **Princípio da relatividade especial:** O princípio da relatividade especial afirma que as leis da física são consistentes em todos os quadros inerciais de referência. Quadros inerciais são aqueles que se movem em uma velocidade constante em relação uns aos outros. Esse princípio generaliza o conceito de relatividade de Galileu e questiona a noção de um quadro de referência absoluto. Ele demonstra que as leis da física permanecem coerentes e invariantes, independentemente das velocidades relativas dos observadores.

2.2.4 Equivalência de massa e energia

Uma das equações mais emblemáticas da física é a equação de equivalência massa-energia de Albert Einstein. Essa equação significa uma conexão profunda entre massa (m) e energia (E), revelando que elas são intercambiáveis no universo.

A intuição revolucionária de Albert Einstein, que levou à formulação dessa equivalência, deriva de sua teoria da relatividade especial. Nessa teoria, Einstein postulou que a energia e a massa estão intrinsecamente ligadas, e a equação serve como a pedra angular dessa união.

O conceito central da equação é simples: ela afirma que a energia (E) de um objeto é diretamente proporcional à sua massa (m), com a velocidade da luz no vácuo (c) como a constante de proporcionalidade. Matematicamente, isso pode ser expresso da seguinte forma:

$$E = mc^2$$

Vamos explorar essa equação com mais detalhes usando um exemplo simples. Suponhamos que tenhamos um pequeno objeto com uma massa de 1 grama (0,001 quilograma). Ao aplicar a equação de Einstein, podemos calcular a energia equivalente a essa massa:

$$E = (0.001 \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

Essa quantidade surpreendentemente grande de energia enfatiza o profundo impacto da Equação (1). Ela demonstra que uma pequena massa pode produzir uma enorme quantidade de energia quando convertida por meio dessa equação. Essa equação desempenha um papel fundamental na compreensão das reações nucleares, como as que ocorrem em estrelas e usinas nucleares, em que pequenas alterações na massa resultam em liberações substanciais de energia.

A equação de Einstein, com sua capacidade de vincular massa e energia, continua sendo a pedra angular da física moderna, influenciando profundamente nossa compreensão de como o universo funciona.

Embora a Relatividade Especial tenha nos permitido explorar aspectos fascinantes do cosmos, guiando-nos em viagens a velocidades próximas à velocidade da luz e revelando como o espaço-tempo se curva em resposta ao nosso movimento, ela está confinada a uma estrutura específica, a de quadros de referência inerciais e movimento retilíneo uniforme. Mas o que acontece quando a gravidade entra em ação? Como a estrutura do espaço-tempo evolui na presença de objetos maciços ou de uma curvatura significativa? É aí que entra a Relatividade Geral de Albert Einstein, na próxima seção.

2.3 Introdução à Relatividade Geral

2.3.1 A revolução na física

A lei de Newton é uma teoria que funciona bem em muitas situações, conforme explicado na Seção 2.1, mas não consegue explicar certos fenômenos observados em velocidades próximas à velocidade da luz ou na presença de campos gravitacionais intensos. A Relatividade Geral (RG) de Albert Einstein é uma teoria mais completa que engloba esses efeitos gravitacionais. Pedra fundamental da física moderna, a Relatividade Geral revolucionou nossa compreensão da gravidade e do universo. Proposta por Albert Einstein em 1915, essa teoria baseia-se no princípio de que a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, induzida pela presença de massa e energia. A equação de campo de Einstein, no centro dessa teoria, descreve como a matéria e a energia influenciam

a geometria do espaço-tempo e, por sua vez, como essa geometria curva orienta o movimento da matéria e da energia.

De fato, a equação de campo de Einstein, publicada pela primeira vez em 25 de novembro de 1915, é a principal equação diferencial parcial da relatividade geral:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Essa curvatura da geometria em torno de uma fonte de matéria é então interpretada como o campo gravitacional dessa fonte. O movimento dos objetos nesse campo é descrito com muita precisão por sua equação geodésica. A métrica $g_{\mu\nu}$ produz uma família de geodésicas. Observe que as partículas com massa gravitacional positiva ou negativa se comportariam da mesma maneira, seguindo as mesmas geodésicas quando desviadas pelo potencial gravitacional criado por uma massa significativa M por exemplo, na gravidade terrestre ou solar. Portanto, um objeto maciço, como uma estrela, influencia o espaço-tempo não apenas por sua massa, mas também pela energia que emite, como a radiação. Na relatividade geral, a energia de um objeto - incluindo sua energia de massa de repouso representada por mc^2 e quaisquer formas adicionais de energia, como a radiação - contribui para o campo gravitacional que ele produz. Essa contribuição combinada de energia e massa é o que curva o espaço-tempo ao redor do objeto. Seu segundo termo leva em conta o conteúdo do universo em cada ponto do espaço-tempo:

- **Se for diferente de zero**, a solução geométrica que emerge dessa equação descreverá o interior de uma massa.
- **Se for zero**, a solução induzida por essa equação se referirá a uma porção completamente vazia do universo em torno dessa massa.

2.3.2 Efeitos observáveis e confirmação experimental

Entre os fenômenos explicados pela GR está o desvio do plano de rotação do planeta Mercúrio quando ele está mais próximo do Sol, conhecido como precessão do periélio. Esse fenômeno foi medido com uma precisão de 45 segundos de arco por século, um valor que não podia ser explicado pela lei de Newton.

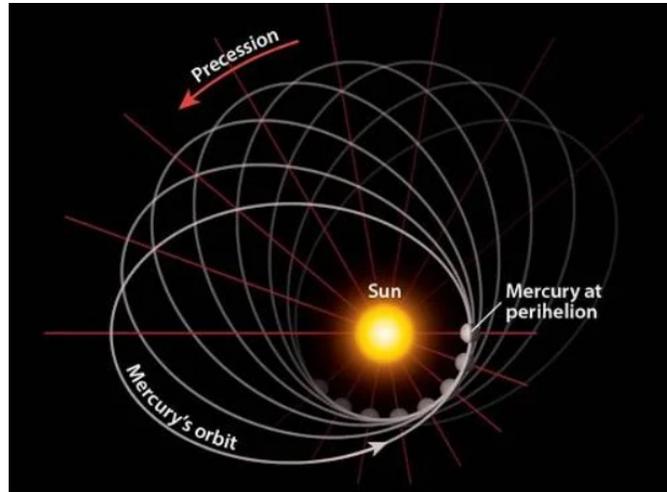


Figura 2.1 - Precessão do periélio de Mercúrio

Outro fenômeno observado é a curvatura aparente da luz ao redor do Sol. Durante o eclipse solar de 1919, Sir Arthur Eddington notou que os raios de luz pareciam se curvar ao redor do Sol. Na realidade, esses raios de luz seguem os caminhos mais curtos no espaço-tempo curvo, conhecidos como geodésicos. Essa aparente curvatura da luz se deve à deformação do espaço-tempo causada pela presença de massa, um efeito que a GR explicou com precisão ((Dyson, Eddington e Davidson 1920)).

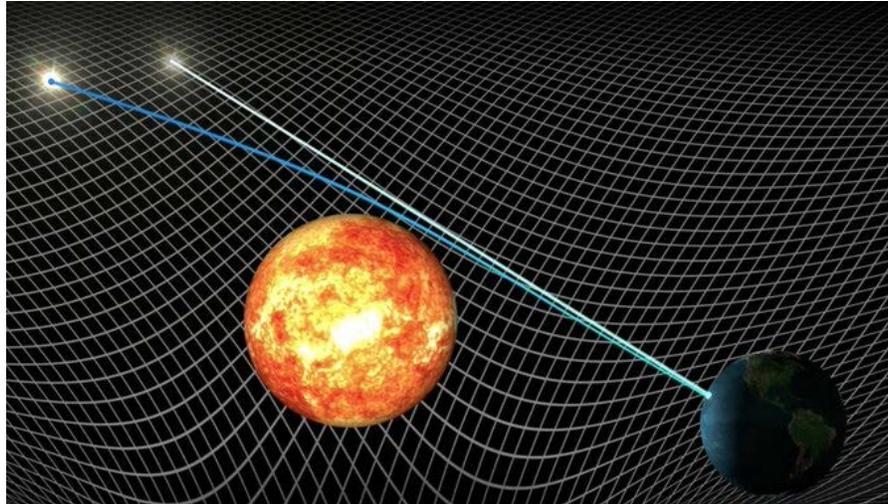


Figura 2.2 - Confirmação da ory de Einstein com a curvatura da luz das estrelas durante o eclipse solar

Esses fenômenos são considerados não lineares porque só podem ser explicados pela teoria GR. Entretanto, sob condições em que os efeitos relativísticos são desprezíveis, a lei de Newton pode fornecer aproximações válidas. Assim, a GR ampliou nosso entendimento da gravidade para além dos limites da lei de Newton, abrindo caminho para uma melhor compreensão das interações gravitacionais em grandes escalas e em altas velocidades.

2.3.3 Geometria do espaço-tempo e equações geodésicas

Lembre-se do princípio de equivalência de Einstein para uma estrutura inercial em queda livre:

"Em um campo gravitacional, é sempre possível, em qualquer ponto do espaço-tempo, escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de modo que, em uma região suficientemente pequena, as leis da física sejam idênticas àquelas na ausência de gravidade".

Nesse quadro de referência de queda livre, a força inercial sentida por um corpo em queda livre cancela a força gravitacional, o que significa que o objeto não está sujeito a nenhuma força (estado de ausência de peso). Consequentemente, o referencial inercial é o referencial fundamental para o estudo de objetos em interação (conhecido como referencial da relatividade especial) antes de analisá-los em um segundo referencial galileano conhecido como "referencial de laboratório", no qual esses objetos estão sujeitos aos efeitos da gravidade. Esse último quadro é, de fato, acelerado para cima ($a = -g$) em comparação com o quadro inercial natural (imagine que "o chão da Terra acelera você para cima").

Na teoria da relatividade especial, uma estrutura inercial é descrita pela métrica de Minkowski, que é uma representação matemática do espaço-tempo plano. Essa métrica se aplica em regiões onde os efeitos da gravidade estão ausentes. Nesse contexto, as trajetórias dos objetos são determinadas pelas equações de movimento derivadas dos princípios da relatividade especial. Embora o termo "geodésico" seja usado na relatividade geral para o espaço-tempo curvado pela gravidade, na métrica de Minkowski da relatividade especial essas trajetórias são mais bem descritas como linhas retas que representam o movimento de velocidade constante. Nessa estrutura, os objetos em estruturas inerciais movem-se em linhas retas com velocidade constante, um caso especial de uma geodésica no espaço-tempo plano.

Quadro inercial e coordenadas

Em primeiro lugar, vamos nos posicionar nesse quadro inercial e definir as coordenadas de uma massa pontual nesse quadro: consideramos as coordenadas ξ^α com $\xi^0 = ct$, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$ para os fins de nossa análise. Como esse corpo não está sujeito a nenhuma força (velocidade constante), podemos deduzir que :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$
$$d\tau^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Onde τ corresponde à métrica ou ao intervalo nesse espaço, que também poderíamos denotar se é importante observar que essa métrica é invariante independentemente do quadro de referência.

Transformação de coordenadas em uma estrutura de referência acelerada de laboratório

Vamos agora aplicar uma transformação de coordenadas em um novo quadro de referência de laboratório galileano "acelerado para cima" em relação ao quadro de referência inercial anterior:

$$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Entretanto, cada coordenada da nova estrutura galileana depende das coordenadas da estrutura inercial e vice-versa:

$$x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

E lembre-se de que ξ depende de τ :

$$\xi^\mu(\tau)(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Cada parâmetro de ξ na nova estrutura de referência também depende de τ . Portanto, podemos deduzir que :

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} + \frac{dx^1}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^1} + \frac{dx^2}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^3}$$

Isso pode ser expresso usando a notação de soma para índices repetidos:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

NB: em matemática, a notação de soma é uma forma compacta de representar a soma de uma série de termos. Quando um subscrito aparece como subscrito inferior e superior em uma expressão, isso geralmente implica a soma sobre esse subscrito, o que significa que todos os valores possíveis desse subscrito são somados. Essa notação é comumente usada em vários campos da matemática e da física para simplificar a representação de equações que envolvem índices repetidos.

Agora queremos derivar essa expressão novamente para derivar a equação geodésica (2), então :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \\ \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned}$$

Para realizar a soma nos índices repetidos, como segue:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$$

Precisamos realizar essa operação:

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) = 0$$

Entretanto, para $\beta \neq \mu$ as derivadas parciais de uma coordenada em relação a outra coordenada no mesmo sistema de coordenadas são zero (por exemplo, $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$), e para $\beta = \mu$ a derivada parcial é igual a 1. Isso corresponde ao símbolo de Kronecker (δ_μ^β):

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta$$

NB: Quando β e μ representam coordenadas diferentes no mesmo sistema de coordenadas, a derivada parcial de β com relação a μ é zero, pois isso significa que essas coordenadas são mutuamente independentes no sistema. Entretanto, quando β e μ representam a mesma coordenada, a derivada parcial é igual a 1, o que indica que a coordenada muda com ela mesma, conforme representado pelo símbolo δ_μ^β .

Isso nos dá :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

No entanto, se substituirmos μ por β ($\beta = \mu$), então $\delta_\mu^\beta = \delta_\beta^\beta = 1$ então $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$. Isso dá :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

Portanto, ao introduzir os *símbolos de Christoffel*, como segue:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Podemos deduzir a seguinte *equação geodésica*:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Isso representa uma expressão geral para os *símbolos de Christoffel* $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$, em termos das derivadas das funções de transformação de coordenadas. Os símbolos de Christoffel, como veremos mais adiante, são usados na matemática da relatividade geral e da geometria diferencial para descrever como os sistemas de coordenadas mudam localmente.

O que podemos aprender com essa equação geodésica?

- A segunda derivada das coordenadas no quadro de referência galileano "*acelerado*" não é mais zero, mas é igual ao equivalente das forças inerciais aplicadas na relatividade geral (nesse caso, a gravidade). De (3), podemos deduzir :

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Se μ e ν são coordenadas espaciais, então sua derivada em relação a τ corresponde a uma velocidade.

- Qualquer objeto que se mova no quadro de referência galileano "acelerado" do laboratório obedecerá a essa equação quando sujeito à força da gravidade da Terra.
- A forma dessa equação nos dá informações sobre os caminhos mais curtos ou mais longos (extremos) em uma superfície curva (variedade). Mais precisamente, as geodésicas correspondem a caminhos estacionários cujas propriedades físicas permanecem constantes ao longo do tempo (ausência de forças externas aplicadas).
- Podemos descrever a gravidade como um efeito puramente geométrico ligado às geodésicas percorridas por objetos em um espaço-tempo curvo (a forma como o espaço-tempo é curvo é descrita pelos símbolos de Christoffel). Uma analogia seria considerar dois objetos percorrendo caminhos paralelos e idênticos na mesma velocidade de um ponto da Terra em direção ao Norte; eles acabarão se cruzando no Polo Norte devido à curvatura da Terra. Esse cruzamento pode ser analisado pelo fato de que uma força os atraiu (analogia com a mecânica newtoniana) ou por um efeito puramente geométrico ligado à curvatura da Terra (analogia com a mecânica relativística). De acordo com a relatividade geral, a gravidade é, portanto, uma curvatura do espaço-tempo que faz com que os objetos em movimento retilíneo local sigam essas geodésicas. A relatividade geral nos permite determinar a curvatura do espaço-tempo como uma função de seus componentes (matéria, energia) e, em seguida, descrever as trajetórias das partículas que se movem nesse espaço-tempo.
- Os símbolos de Christoffel são calculados a partir da métrica e de suas derivadas parciais, capturando informações sobre a curvatura do espaço-tempo. Eles nos permitem calcular como os geodésicos são afetados pela curvatura do espaço-tempo.

2.3.4 Tensores métricos

Agora veremos os tensores métricos e como eles se relacionam com os símbolos de Christoffel determinados anteriormente.

Considere a métrica de Minkowski descrita usando as coordenadas de espaço-tempo de um objeto em movimento em um quadro de referência inercial, conforme mostrado na equação (4), e expressa da seguinte forma:

$$d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2$$

Ele também pode ser escrito desta forma, onde pode ser expresso como uma soma sobre os índices α e β :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Essa equação usa o tensor métrico $\eta_{\alpha\beta}$ do espaço de Minkowski (que descreve o espaço-tempo plano na relatividade especial) para calcular o intervalo espaço-tempo $d\tau^2$ em termos dos diferenciais de coordenadas $d\xi^\alpha$ e $d\xi^\beta$. O tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ tem componentes que são -1 para intervalos semelhantes ao tempo e +1 para intervalos semelhantes ao espaço na diagonal, e 0 fora da diagonal, como segue :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lembre-se de que as expressões a seguir representam as regras de transformação diferencial entre dois sistemas de coordenadas. Elas mostram como uma pequena mudança no conjunto de coordenadas x^μ e x^ν leva a uma pequena mudança em outro conjunto de coordenadas ξ^α e ξ^β .

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

$$d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Agora, se substituirmos essas duas formas diferenciais na expressão (5), podemos derivar a seguinte expressão:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

A partir disso, podemos extrair o seguinte tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

O tensor métrico desempenha um papel fundamental na relatividade geral porque determina a geometria do espaço-tempo e como a gravidade atua entre dois objetos localizados nas coordenadas x^μ e x^ν no mesmo quadro de referência. Ele permite a transformação das coordenadas desses objetos na distância entre eles, levando em conta a curvatura local do espaço-tempo, que pode variar de acordo com a distribuição de matéria e energia. Ao contrário da intuição convencional, a distância entre dois pontos no espaço-tempo curvo depende dessa curvatura e pode variar consideravelmente. O tensor métrico é, portanto, uma ferramenta matemática fundamental para calcular o intervalo entre dois eventos, o que também inclui a medição do tempo decorrido entre eles na presença de um campo gravitacional.

Como os índices μ e ν são mudos e repetidos, eles estão sujeitos à convenção de soma de Einstein e, portanto, podem ser trocados na expressão do tensor métrico. Isso implica que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

NB: De agora em diante, vamos considerar $g^{\mu\nu}$ como o inverso de $g_{\mu\nu}$ que é expresso pela seguinte relação com a soma sobre o índice repetido α produzindo o símbolo de Kronecker :

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

onde δ_{ν}^{μ} é o símbolo de Kronecker, que, como vimos anteriormente, é igual a 1 quando $\mu = \nu$ e 0 caso contrário. Essa relação define a natureza do inverso do tensor métrico na geometria diferencial e na relatividade geral.

2.3.5 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel, denotados por $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$ são derivados do tensor métrico e fornecem informações essenciais sobre a geometria do espaço-tempo. Eles não são tensores propriamente ditos, mas são derivados do tensor métrico, que é um tensor real.

Para calcular os símbolos de Christoffel, tomamos as derivadas parciais dos componentes do tensor métrico e, em seguida, aplicamos uma combinação específica dessas derivadas. A fórmula para os símbolos de Christoffel do segundo tipo é dada por :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

Cada termo envolve uma derivada parcial do tensor métrico com relação às coordenadas, e $g^{\beta\alpha}$ é o inverso do tensor métrico, garantindo que estamos somando os índices apropriados. Como veremos mais adiante, os símbolos de Christoffel desempenham um papel central na determinação das geodésicas, que descrevem a trajetória das partículas e da luz no espaço-tempo curvo e são usadas nas equações de movimento da Relatividade Geral.

Prova. Vamos agora expressar os símbolos de Christoffel em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Para fazer isso, consideramos a derivada parcial de $g_{\mu\nu}$ com relação às coordenadas x^{λ} . Essa operação introduz as segundas derivadas das funções de transformação de coordenadas ξ^{α} que podem então ser integradas à expressão dos símbolos de Christoffel (6).

Antes de começarmos nossos cálculos, aqui estão algumas dicas preliminares para simplificá-los:

- O tensor métrico é simétrico, portanto $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
- Para substituir ν por α devemos primeiro substituir o subscrito silencioso existente α por σ .

Obtemos o tensor métrico da seguinte forma:

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

Aplicando a regra do produto para derivação e lembrando que $\eta_{\sigma\beta}$ é uma constante, obtemos :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right)$$

As segundas derivadas parciais esperadas aparecem no lado direito da equação (duas vezes):

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

Para integrar a expressão dos símbolos de Christoffel (6) a essa relação, precisamos aplicar a seguinte transformação a ambos os lados para isolar a derivada parcial e introduzir uma soma no índice repetido β :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right)$$

No entanto, sabemos que :

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma$$

e, de acordo com (7), esse símbolo de Kronecker é igual a 1 quando $\sigma = \lambda$ então :

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Podemos então substituí-lo na expressão (8), tomando o cuidado de reformular os índices correspondentes na nova expressão de forma semelhante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \\ \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \end{aligned}$$

NB: Não colocamos β no símbolo de Christoffel porque é um índice de soma silencioso no termo em que queremos atribuí-lo, portanto, escolheremos outra letra, ρ :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

Por fim, podemos deduzir de (8) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

Assim, a diferenciação do tensor métrico pode ser expressa de três maneiras diferentes (as duas últimas envolvendo novos índices pela troca de ν e μ e substituindo μ por α) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho}\Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^\rho + g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

Essas três formas de expressar essa diferenciação nos permitem obter um resultado simplificado, somando as duas primeiras e subtraindo a última: (9a) + (9b) - (9c) :

$$g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$g^{\beta\alpha} g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

$$\delta_\rho^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

Então, finalmente:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Essa expressão do símbolo de Christoffel nos permite estabelecer uma ligação entre a curvatura do espaço-tempo induzida pela força gravitacional e as derivadas espaciais do tensor métrico. Ela é essencial para a formulação das equações que regem as geodésicas na teoria da Relatividade Geral. □

Exemplo de cálculo dos símbolos de Christoffel para uma métrica esférica :

Em coordenadas esféricas, o elemento de linha ds^2 para um espaço tridimensional é expresso da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$$

onde dr , $d\theta$ e $d\phi$ são os diferenciais da coordenada radial r o ângulo polar θ e o ângulo azimutal ϕ respectivamente. O tensor métrico correspondente $g_{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas é diagonal e é dado por :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Prova. A relação entre as coordenadas cartesianas e esféricas pode ser deduzida da Figura 2.3:

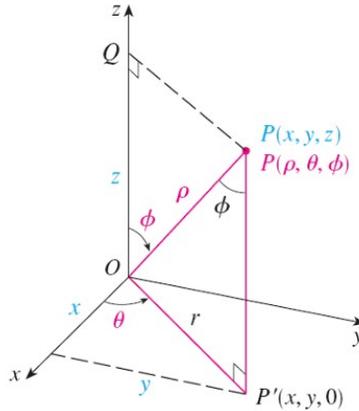


Figura 2.3 - A posição do ponto P é definida pela distância ρ e os ângulos θ (colatitude) e ϕ (longitude)

Se considerarmos os triângulos OPQ e OPP', teremos : $z = \rho \cos\phi$, $r = \rho \sin\phi$ onde $x = r \cos\theta$ e $y = r \sin\theta$. Portanto, :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

Usando as notações físicas da Figura 2.6, a transição para as coordenadas cartesianas é dada por :

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\phi \sin\theta \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

No entanto, a métrica em coordenadas cartesianas é dada por :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Para expressar isso em coordenadas esféricas, substituímos x , y e z por seus equivalentes em coordenadas esféricas, obtendo-se (11). □

Para calcular os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ primeiro encontramos o inverso do tensor métrico, que, para uma métrica diagonal, é simplesmente :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

Para o tensor métrico fornecido, calculamos as derivadas parciais necessárias para os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} &= 2r, \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} &= 2r\sin^2(\theta), \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} &= 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta).\end{aligned}$$

Ao inserir essas derivadas parciais na fórmula do símbolo de Christoffel (10), nós as calculamos somando o índice repetido α . Para o tensor métrico dado, a maioria dos símbolos de Christoffel será zero porque ele é diagonal e depende apenas de r e θ . Os símbolos de Christoffel não nulos são :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\sin^2(\theta) \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot(\theta)\end{aligned}$$

NB:

- O símbolo de Christoffel $\Gamma_{\theta\theta}^r$ é calculado da seguinte forma:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} \right)$$

já que a única derivada diferente de zero de $g_{\theta\theta}$ é com relação a r . Substituindo os valores, obtemos :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial(r^2)}{\partial r} \right) = -r.$$

- Outro exemplo é o símbolo de Christoffel $\Gamma_{r\theta}^\theta$ que é calculado da seguinte forma:

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} \right)$$

onde o único termo diferente de zero é $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}$. Isso nos dá :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) (2r) = \frac{1}{r}.$$

Cálculo do Tensor de Riemann, do Tensor de Ricci e do Escalar de Ricci

Nesse espaço esférico, todos os componentes do tensor de Riemann e do tensor de Ricci, bem como o escalar de Ricci, são zero, ilustrando a geometria de um espaço plano.

Prova. O tensor de curvatura de Riemann é definido pela expressão :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}$$

Considere, por exemplo, os símbolos de Christoffel fornecidos por (12):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Podemos calcular os componentes do tensor de Riemann. Por exemplo, podemos calcular $R_{r\theta r}^{\theta}$:

$$R_{r\theta r}^{\theta} = \partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda} - \Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda}$$

Assim, para calcular o componente do tensor de Riemann $R_{r\theta r}^{\theta}$ temos :

- O primeiro termo $\partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta}$ é zero porque Γ_{rr}^{θ} é zero.
- O segundo termo $\partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta}$ implica a derivada parcial de $\Gamma_{\theta r}^{\theta}$ com relação a r que é $-\frac{1}{r^2}$.
- O terceiro termo é a soma de λ de $\Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda}$ mas como Γ_{rr}^{λ} é zero para $\lambda \neq r$ esse termo é zero.
- O quarto termo é a soma de λ de $\Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda}$ que para $\lambda = \theta$ dá $\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$.

A soma dos dois termos diferentes de zero (termos 2 e 4) é :

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

Assim, o $R_{r\theta r}^{\theta}$ do tensor de Riemann é zero.

O tensor de Ricci, obtido pela contração do tensor de Riemann em seu primeiro e terceiro índices, é dado por :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$$

Por fim, o escalar de Ricci, que é o traço do tensor de Ricci, é calculado da seguinte forma:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

Como o tensor de Riemann é zero, segue-se que o tensor de Ricci e seu escalar também são zero. \square

Código de cálculo do Mathematica :

```
(*Importar pacote*)
(*-----*)
Necessidades["OGRe`"]
```

```

(*Definição de coordenadas*)
TNewCoordinates["Spherical", {r, \[Theta], \[Phi]}]
(*Definição do Tensor Métrico*)TShow@
  TNewMetric["SphericalMetricTensor", "Spherical",
    DiagonalMatrix[{1, r^2, r^2 Sin[\[Theta]]^2}]]
(*LineElement*)
TLineElement["SphericalMetricTensor"]
(*Cálculo dos símbolos de Christoffel*)
TList@TCalcChristoffel["SphericalMetricTensor"]
(*Cálculo do Tensor de Riemann*)
TList@TCalcRiemannTensor["SphericalMetricTensor"] (*Cálculo do tensor de
Riemann*)
(*Cálculo do Tensor de Ricci*)
TList@TCalcRicciTensor["SphericalMetricTensor"]
(*Cálculo do escalar de Ricci*)
TList@TCalcRicciScalar["SphericalMetricTensor"] (*Cálculo de escalar de
Ricci*)

```

2.3.6 Aplicação da equação geodésica no limite do campo fraco

Escrevemos a expressão do símbolo de Christoffel e a equação geodésica da seguinte forma (se $v = 0$ coordenada de tempo, caso contrário, uma coordenada de espaço x, y, z) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$$

onde

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\sigma,\nu}$$

NB:

- Essa equação representa a derivada parcial do componente do tensor métrico $g_{\mu\sigma}$ com relação à coordenada x^{ν} e geralmente é escrita com uma vírgula seguida pelo índice de diferenciação, que, neste caso, é ν . Notação de vírgula $g_{\mu\sigma,\nu}$. A notação de vírgula é uma abreviação comum na relatividade geral para as derivadas parciais dos componentes do tensor.
- No contexto da relatividade especial, é comum usar um sistema de unidades no qual a velocidade da luz c é definida como igual a 1 ($c = 1$). Isso simplifica as equações e facilita a expressão de determinadas quantidades. Nesse sistema de unidades, as distâncias são expressas em unidades de tempo (por exemplo, anos-luz em vez de metros) devido à equivalência $c = 1$. Para isso, o tempo deve ser expresso em segundos, e as unidades de comprimento se tornam a distância percorrida pela luz em um segundo, que é expressa em segundos-luz (equivalente a "anos-luz"). Assim, podemos expressar a métrica da seguinte forma:

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

No entanto, consideraremos agora que o tempo t expresso até agora, será o tempo adequado τ na expressão da métrica, para expressá-la da seguinte forma:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Mostraremos agora que a equação (13) se reduz à equação de movimento newtoniana quando os campos gravitacionais são fracos e estáticos (ou seja, na relatividade especial, onde $g_{\mu\nu}$ é muito próximo de $\eta_{\mu\nu}$ e independente do tempo) e quando as velocidades são muito menores que a velocidade da luz, ou seja $v/c \ll 1$ que pode ser expressa da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$$

NB: Na teoria da gravidade linearizada, assumimos que o espaço-tempo é quase plano. Para conseguir isso, representamos o tensor métrico total $g_{\mu\nu}$ como a soma da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ que descreve o espaço-tempo plano, conforme visto anteriormente, e uma pequena "perturbação" $h_{\mu\nu}$ que representa os desvios dessa planicidade devido à presença de massa ou energia. Veremos isso mais tarde no estudo do repelente de dipolo para um sistema estacionário (Seção 3.3).

Ao integrar esse tensor métrico na expressão (14), percebemos que as derivadas parciais do tensor métrico dependem apenas de $h_{\mu\nu}$ já que $\eta_{\mu\nu}$ é constante e suas derivadas são zero. Assim, na teoria linearizada da gravidade, os símbolos de Christoffel podem ser aproximados considerando-se apenas as contribuições da perturbação $h_{\mu\nu}$. Isso ocorre porque os símbolos de Christoffel são definidos pelas primeiras derivadas do tensor métrico e em um campo gravitacional fraco, $h_{\mu\nu}$ é pequeno em comparação com $\eta_{\mu\nu}$. Portanto, quando calculamos os símbolos de Christoffel para um campo gravitacional fraco, negligenciamos as derivadas de $\eta_{\mu\nu}$ e levamos em conta apenas as derivadas de $h_{\mu\nu}$. Portanto, obtemos:

$$g_{\mu\sigma,\nu} = h_{\mu\sigma,\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma} \quad \text{et} \quad g_{\nu\sigma,\mu} = h_{\nu\sigma,\mu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma}) (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Considerando que $h_{\mu\nu}$ é pequeno, percebemos que o produto de $h^{\lambda\sigma}$ com suas derivadas parciais contribuirá para termos de ordem dois ou superior (por exemplo, h^2 , h^3 etc.). Esses termos de ordem superior serão significativamente menores do que os termos de primeira ordem que estamos procurando. Portanto, ao calcular os símbolos de Christoffel, negligenciamos os produtos de $h_{\mu\nu}$ e suas derivadas, o que implica que as contribuições de $h^{\lambda\sigma}$ são insignificantes em comparação com as de $\eta^{\lambda\sigma}$. Assim, obtemos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Essa aproximação simplifica o processo de cálculo da curvatura do espaço-tempo em campos gravitacionais fracos e é fundamental para a análise das ondas gravitacionais, em

que as perturbações $h_{\mu\nu}$ representam ondulações na curvatura do espaço-tempo. Vamos considerar agora dois casos:

- Para $\lambda = 0$ que corresponde à coordenada de tempo na relatividade geral, a equação dos símbolos de Christoffel do primeiro tipo torna-se específica para a coordenada de tempo. Usando o tensor métrico de Minkowski η tensor métrico e a perturbação h o símbolo de Christoffel para $\lambda = 0$ é dado pela equação :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}\eta^{0\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Como $\eta^{0\sigma}$ não é zero somente quando $\sigma = 0$ que leva a $\eta^{00} = 1$ obtemos a seguinte relação :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0})$$

Entretanto, como o campo gravitacional é estático, ou seja, a métrica do espaço-tempo não varia com o tempo, a derivada parcial do tensor métrico com relação ao tempo ($\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$) é zero. Isso nos permite considerar o sistema como estando em um regime estacionário com relação à métrica do espaço-tempo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu})$$

- Para coordenadas espaciais denotadas por $\lambda = i$ (onde i, j, k representam índices espaciais), os símbolos de Christoffel podem ser calculados usando a métrica de perturbação $h_{\mu\nu}$. O tensor métrico de Minkowski $\eta^{i\sigma}$ é usado para aumentar o índice e é igual a -1 quando os índices coincidem. Assim, os símbolos de Christoffel para coordenadas espaciais são dados por :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Entretanto, dado o sinal negativo dos componentes espaciais de $\eta^{i\sigma}$ a equação para $\sigma = i$ simplifica para :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2}(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i})$$

Esse sinal negativo reflete a convenção de sinal oposto para os componentes espaciais do tensor métrico de Minkowski com relação ao componente temporal.

Vamos agora integrar esses resultados à equação geodésica (13) para cada caso:

- Pois $\lambda = 0$ sabemos que $x^\lambda = x^0 = ct$ então :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

No entanto, o produto a seguir gerará uma soma sobre os índices repetidos μ e ν quantidades de ordens 0, 1 e 2 :

$$(h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

Considerando que as quantidades de ordem superior, em particular as de ordem 1 e 2, são altamente insignificantes, especialmente porque são baseadas na quantidade já pequena $h_{\mu\nu}$ que é muito menor que $\eta_{\mu\nu}$ manteremos apenas os termos de ordem zero. Nesse contexto, ordem zero refere-se aos termos em que μ e ν são ambos iguais a 0, o que corresponde aos componentes de tempo. Essa simplificação nos leva à seguinte equação:

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{00,0} + h_{00,0}) c^2 \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

Nessa aproximação, somente os termos que envolvem a coordenada de tempo contribuem significativamente para a equação de movimento, simplificando a análise das geodésicas do espaço-tempo em um campo gravitacional fraco.

No entanto, como o campo gravitacional é estático, essas quantidades são zero, portanto :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} = 0$$

Isso implica que t é proporcional a s o que significa :

$$s = ct$$

- Para as coordenadas espaciais denotadas por $\lambda = i$ (15), obtemos :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} (h_{\mu i, \nu} + h_{\nu i, \mu} - h_{\mu\nu, i}) \frac{1}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

No entanto, como mencionado anteriormente, manteremos apenas as quantidades de ordem 0 para μ e ν que são iguais a 0. Devido à natureza estática dos campos gravitacionais, obtemos a seguinte equação :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} h_{00, i} = 0$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00, i}$$

Como i é um índice espacial que assume os valores 1, 2 ou 3, encontramos uma forma de equivalência "Aceleração - Força" que pode ser representada em forma de vetor:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

com

$$\phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$$

A ligação entre o potencial gravitacional e o componente de tempo do tensor métrico pode ser estabelecida com a introdução de (16) em (17):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

O potencial gravitacional ϕ é equivalente à velocidade ao quadrado (c^2). Sabendo que $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ podemos verificar localmente isso para a Terra, $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = \frac{2G \cdot M_t}{R_t \cdot c^2} = 10^{-9} \ll \eta_{00} = 1$ usando a conhecida expressão para calcular o potencial gravitacional :

$$\phi = \frac{GM}{R}$$

2.3.7 As soluções de Karl Schwarzschild e Ludwig Flamm

Karl Schwarzschild desenvolveu uma solução geométrica completa para a equação (18), que consiste em duas métricas publicadas em dois artigos separados ((Schwarzschild 1916b), (Schwarzschild 1916a)):

- **A primeira solução** descreve, usando a métrica abaixo, a geometria externa de uma massa esfericamente simétrica, como uma estrela de raio r_n no vácuo fora do objeto, onde não há matéria, ou seja, na Figura 2.4:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

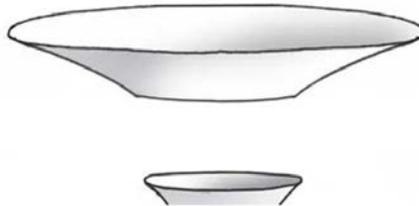


Figura 2.4 - Porção de uma hipersuperfície de Flamm

- **A segunda solução**, muitas vezes chamada de solução Schwarzschild interna, é estruturada pela seguinte métrica, que descreve a geometria do espaço-tempo dentro de um corpo estático e esfericamente simétrico de fluido incompressível, como uma estrela de raio r_n ou seja, Figura 2.5 :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^2}{3c^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2$$

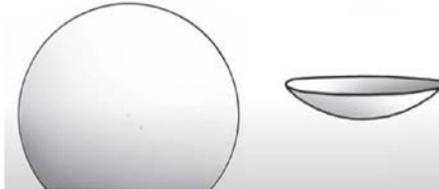


Figura 2.5 - Porção de uma esfera

Essa abordagem envolve a união de dois segmentos de soluções espaço-temporais, especificamente duas regiões de hipersuperfícies, cada uma caracterizada por suas métricas distintas. A união é realizada em um limite comum, garantindo a continuidade da geometria do espaço-tempo e a consistência física da solução combinada através da interface.

No mesmo ano, um jovem matemático ofereceu sua própria interpretação do trabalho de Schwarzschild. Seu nome era Ludwig Flamm. Seu trabalho e seu nome permaneceram amplamente desconhecidos dos especialistas em cosmologia por um simples motivo: seu artigo não foi traduzido para o inglês até 2012. Ele tinha um domínio perfeito da geometria de objetos como hipersuperfícies Riemannianas tridimensionais ((Flamm 1916)).

Com base na métrica exterior de Schwarzschild, Kruskal desenvolveu seu famoso modelo, considerado a base da teoria dos buracos negros. De fato, ao estender analiticamente a solução exterior de Schwarzschild, ele elimina "algebricamente" a singularidade de coordenadas encontrada no "horizonte de eventos" para $r = R_s$ (raio de Schwarzschild), introduzindo um novo sistema de coordenadas. Esse sistema foi projetado para tornar a métrica regular em todos os lugares, exceto na "singularidade física central" para $r = 0$ ((Martin D. Kruskal 1960), (Jean-Marie Souriau 1965)). Mas será que esse modelo realmente faz sentido do ponto de vista físico?

2.3.8 Construção de geodésicas para a métrica exterior de Schwarzschild

Considere a métrica externa de Schwarzschild (6.53) extraída de (Adler, Bazin e Schiffer 1975) (Página 194) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

onde m é uma constante de integração simples (um comprimento), x^0 é um marcador cronológico (também um comprimento) e s é o comprimento medido na hipersuperfície 4D.

Os autores escrevem:

$$x^0 = ct$$

Uma geodésica é um caminho inscrito na hipersuperfície, correspondendo a um comprimento mínimo :

$$\delta \int ds = 0$$

Isso significa que esse comprimento :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\}$$

tem um valor mínimo ao longo de um caminho parametrizado da seguinte forma : $t(s), r(s), \theta(s), \phi(s)$.

Vamos escrever :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$$

Isso significa buscar caminhos que minimizem :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) \right\} ds$$

A quantidade entre colchetes é :

$$L = L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad \text{ou} \quad L = L(x^i, \dot{x}^i)$$

Esse problema foi resolvido pelo matemático francês Lagrange, levando ao que hoje é conhecido como equações de Lagrange.

O cálculo de geodésicas é um problema de "extremo limitado". Isso ocorre porque consideramos todos os caminhos que conectam dois pontos a e b , portanto, estão ligados a esses pontos. As geodésicas são então dadas pelas equações :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

Com :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2$$

As três primeiras equações de Lagrange (6.75), (6.76), (6.77) de (Adler, Bazin e Schiffer 1975), correspondentes às variáveis θ, ϕ e t são as seguintes:

$$\frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) = r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{ds}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

Se dividirmos cada termo da métrica (25) por ds^2 :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

Na relatividade geral, a exploração da simetria esférica de uma solução pode simplificar a análise das geodésicas. No caso da métrica de Schwarzschild, que é de fato esfericamente simétrica, essa simetria pode ser explorada para reduzir o problema a duas dimensões.

A métrica de Schwarzschild, em coordenadas esféricas, depende das variáveis r , θ , ϕ e t . A simetria esférica significa que a métrica não muda quando são feitas rotações em torno do centro. Essa propriedade nos permite simplificar o problema escolhendo geodésicas que permanecem em um plano constante. É prática comum escolher o plano equatorial para simplificar os cálculos, o que corresponde a definir $\theta = \pi/2$. Nesse plano, o θ não muda, o que significa que $d\theta = 0$ e, portanto, o componente da métrica envolvendo $d\theta$ desaparece (veja a Figura 2.6).

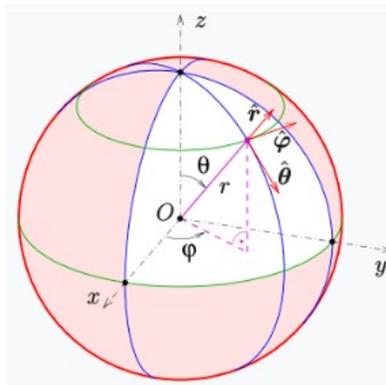


Figura 2.6 - Vetores em coordenadas esféricas

Em seguida, examinando o Lagrangiano (que é uma função que resume a dinâmica de um sistema) associado a essa métrica, podemos encontrar as equações de movimento para as geodésicas. Para um objeto que se move no plano equatorial, o componente azimutal de seu momento angular, ligado a ϕ Isso é uma consequência da simetria axial da métrica com relação ao eixo perpendicular ao plano equatorial. Matematicamente, isso é expresso pela equação :

$$r^2\dot{\phi} = h = \text{constante}$$

onde h é uma constante de movimento (momento angular por unidade de massa), r é a coordenada radial e $\dot{\phi}$ é a derivada da coordenada de azimute ϕ com relação ao tempo próprio s (o tempo medido por um relógio que se move com o objeto).

Isso nos diz que a quantidade $r^2\dot{\phi}$ permanece constante ao longo da geodésica.

A equação (19) acima pode ser integrada para dar :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = l = \text{constante}$$

Por substituição, obtemos a equação diferencial :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

que fornece r como uma função do parâmetro s . Mas, usando uma equação apresentada anteriormente, podemos passar para uma equação diferencial com a derivada :

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

De (20) e (21), obtemos :

$$\dot{r} = \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

Podemos então obter a equação diferencial ligando r e l :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

Podemos então fazer a transição da variável r para uma variável u como, por exemplo:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r' = -\frac{u'}{u^2}$$

Então, a partir de (22), podemos deduzir :

$$d\phi = \frac{dr}{r'} = \frac{du}{u'}$$

O que nos leva a :

$$(1 - 2mu) = c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu)$$

que se reduz a:

$$u'^2 = \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3$$

Assim, a partir de (23), a integração dá :

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{dv}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} v - v^2 + 2mv^3}}$$

Essa é uma solução exata para a equação de Einstein, que expressa o ângulo ϕ como uma integral de $u = \frac{1}{r}$, inversamente, isso nos dá u como a função inversa (implícita) de ϕ e resulta em geodésicas "quase elípticas", dependendo das duas constantes de integração l e h .

Se h for grande, isso significa que a geodésica percorrida por uma partícula de teste se desviará de uma trajetória radial de queda livre porque ela terá uma quantidade significativa de momento angular específico. Como resultado, sua trajetória será menos afetada pela força da gravidade diretamente em direção ao corpo central, fazendo com que ela se desvie de uma queda radial direta e siga um caminho mais curvo ou "quase elíptico". Ignorando a região dentro da esfera de Schwarzschild ($r < 2m$), é possível representar em 3D as geodésicas planas associadas a essa métrica estacionária. A representação da esfera de Schwarzschild pode ser considerada como um círculo que se projeta no espaço-tempo ao longo da dimensão temporal de Schwarzschild t_s . Se considerarmos uma estrela de nêutrons com um raio de 10 km, ela permanecerá estável no limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) de cerca de 2 massas solares. O limite TOV representa a massa crítica máxima que uma estrela de nêutrons pode ter enquanto permanece estável. Isso coloca o *horizonte de* uma massa pontual equivalente a uma distância de seu centro de cerca de 6 km ($r_s = \alpha$). Como o raio da estrela é cerca de 3/2 vezes r_s , posicionamos o *horizonte* desse objeto em $r_s = 2$ para um raio de 3. Essa configuração me permitiu representar, usando o Mathematica, as geodésicas de uma partícula de teste seguindo uma trajetória de queda em direção a esse objeto, conforme mostrado na Figura 2.7.

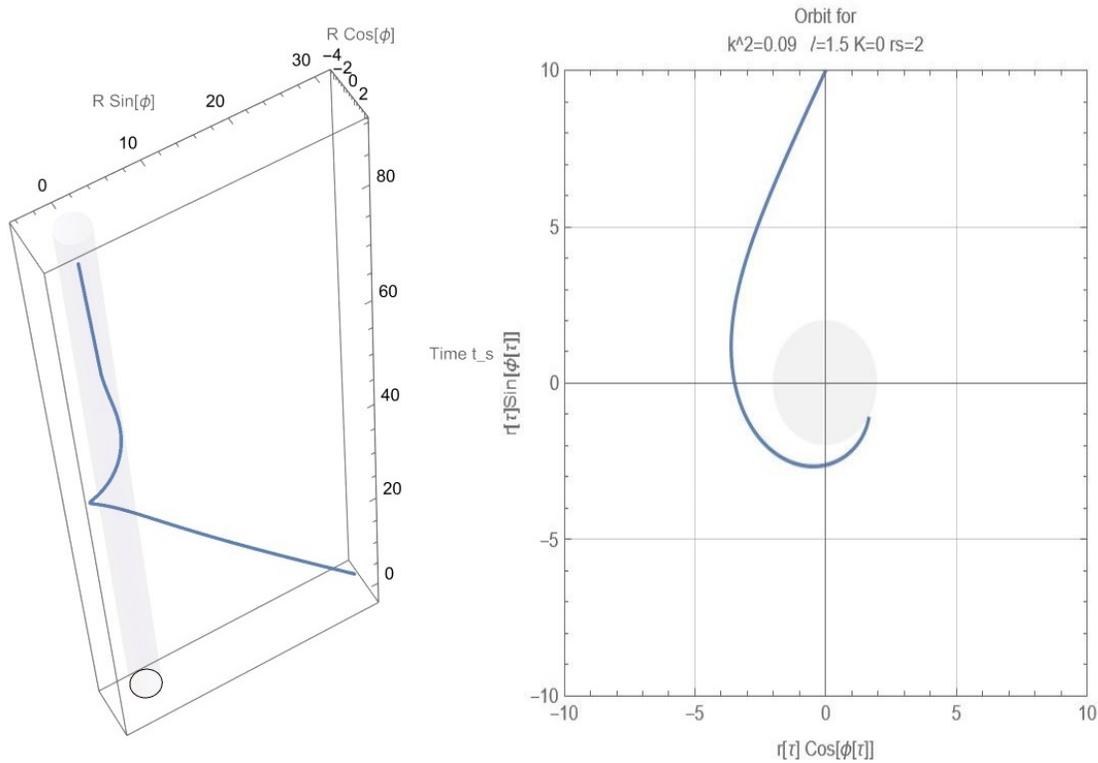


Figura 2.7 - Representação de uma geodésica em queda no sistema de coordenadas (r, ϕ, t_s)

Qualquer que seja a direção do movimento da geodésica, nesse caso centrípeta, com essa escolha de coordenada de tempo, levaria um tempo infinito para se aproximar da esfera de Schwarzschild. De fato, como podemos ver nas Figuras 2.8 e 2.9, para um observador distante, qualquer objeto que se aproxime do horizonte de uma estrela de nêutrons perto de sua criticalidade física ou de um objeto supermassivo, como aqueles cuja abordagem alternativa será estudada no Capítulo 7, sofreria dilatação de tempo perto do que é conhecido como raio de Schwarzschild. Entretanto, para o próprio objeto (ou para um observador que se move com o objeto), o tempo continuaria a progredir normalmente (a curva azul comparada com a curva pontilhada, respectivamente).

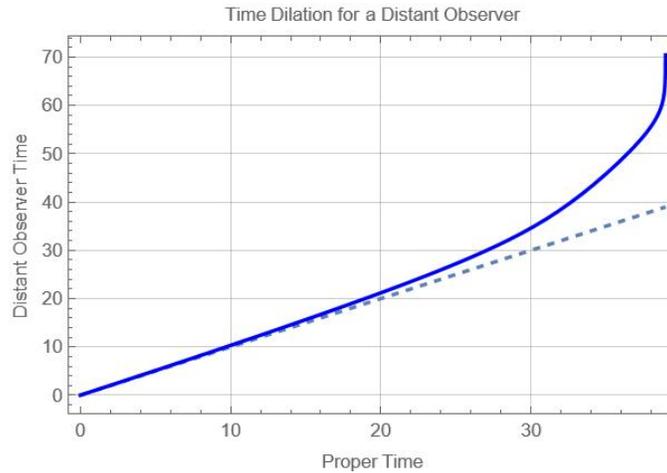


Figura 2.8 - Dilatação do tempo ation para um observador distante

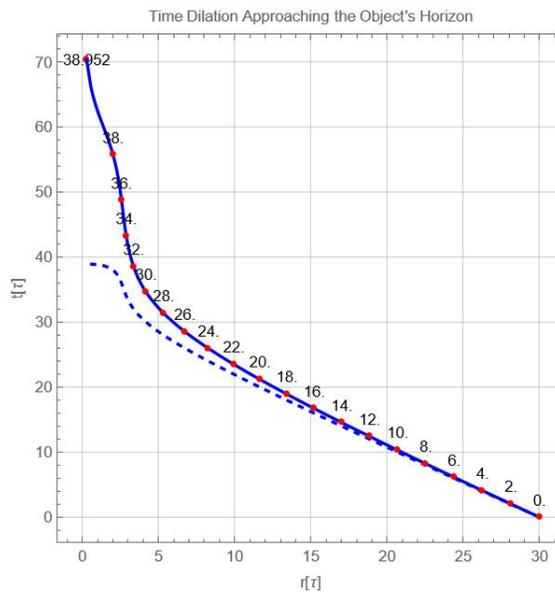


Figura 2.9 - Tempo dilatação real aproximando-se do horizonte do objeto

Do ponto de vista desse observador distante, o objeto aparentemente levaria uma quantidade infinita de tempo para alcançar o horizonte. Como resultado, ele seria percebido como se estivesse desacelerando gradualmente, parecendo quase congelado ou congelando perto do horizonte.

Esse fenômeno é uma consequência da relatividade geral, que prevê que a presença de massa significativa curva o espaço-tempo. Essa curvatura afeta a passagem do tempo, levando à dilatação do tempo em campos gravitacionais intensos.

Esse aspecto é um dos pilares da teoria dos buracos negros. Mas existe outra alternativa? Exploraremos isso mais adiante no Capítulo 5.

2.3.9 A solução de Roy Kerr

Em 1963, Roy Kerr, um eminente matemático da Nova Zelândia, revolucionou a compreensão da relatividade geral no contexto do modelo de buraco negro ao propor uma nova solução para a equação de campo de Einstein. Ao contrário da métrica externa de Schwarzschild ((Schwarzschild 1916b)), que é usada como base para o modelo de buraco negro estático e esfericamente simétrico, a solução de Kerr é axi-simétrica, representando um buraco negro em rotação ((Kerr 1963)). Essa descoberta foi particularmente importante na época porque forneceu um modelo mais realista para muitos objetos celestes.

A métrica de Kerr é expressa em coordenadas Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) ((Chaskalovic 2009)), e seu elemento de linha é dado para $c = 1$ por :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 sin^2\theta}{\rho^2}\right) sin^2\theta d\phi^2$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2\theta.\end{aligned}$$

M é a massa do objeto central em rotação, geralmente um buraco negro, que influencia o espaço-tempo ao redor, e a é o momento angular específico do objeto em rotação. O termo importante a ser observado aqui é $-\frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi$ que representa o arrasto no espaço-tempo devido à rotação do objeto, geralmente um buraco negro. Esse recurso pode ser interpretado como uma manifestação da ideia de Ernst Mach sobre a relatividade do movimento, em que o próprio espaço-tempo parece ser influenciado pela presença de matéria em movimento.

A relevância da solução de Kerr foi ainda mais enfatizada pela descoberta dos pulsares em 1967, inicialmente entendidos como estrelas de nêutrons girando em velocidades incrivelmente altas, às vezes chegando a mil rotações por segundo. Embora a métrica de Kerr seja aplicada principalmente ao modelo de buraco negro, suas implicações para a compreensão de outros objetos astrofísicos compactos, como as estrelas de nêutrons, também são significativas.

O renomado astrofísico Subrahmanyan Chandrasekhar saudou a solução de Kerr como um grande avanço na pesquisa matemática aplicada à física teórica ((Chandrasekhar 1983)).

O que é importante enfatizar sobre a abordagem de Kerr é a possibilidade de explorar outras propriedades de representação, como a introdução, por exemplo, de um termo $drdt$ termo na métrica externa de Schwarzschild, cujas implicações serão exploradas no Capítulo 5.

2.4 O trabalho de Andrei Sakharov e Jean-Marie Souriau

O modelo cosmológico de Janus compila a teoria da relatividade geral de Albert Einstein, o trabalho de Andrei Sakharov em física de partículas e cosmologia e o trabalho de Jean-Marie Souriau em geometria simpática. De acordo com a teoria dos grupos dinâmicos, ele explica como a inversão do tempo implica uma inversão da energia e, portanto, da massa.

De fato, a assimetria bariônica do universo é considerada um dos problemas mais significativos da física atual. Mais precisamente, isso se refere à observação de que há uma quantidade líquida de bárions (partículas compostas de três quarks, como prótons e nêutrons) no universo, mas quase nenhum antibárion (partículas compostas de três antiquarks). O universo deveria ter sido criado com uma quantidade igual de matéria bariônica e antimatéria antibariônica desde o Big Bang, o que teria levado à sua aniquilação mútua, com sua massa sendo transformada em fótons. Mas o que aconteceu com essa antimatéria primordial?

Na década de 1960, os cientistas descobriram que a taxa de produção de matéria (a partir da combinação de quarks primordiais) ocorre um pouco mais rápido do que a taxa de produção de antimatéria (a partir da combinação de antiquarks), um fenômeno conhecido como "*violação de CP*" ((Cronin 1964)). Isso era paradoxal porque esses processos de combinação eram considerados simétricos anteriormente. Entretanto, como resultado dessa *violação de CP*, mais matéria foi sintetizada no universo primordial e prevaleceu sobre a antimatéria.

O físico russo Andrei Sakharov foi o primeiro, a partir de 1967, a restaurar a simetria global, considerando que o universo não era formado por uma única entidade, mas por dois universos gêmeos que emanavam da mesma singularidade do Big Bang, com duas setas opostas de tempo a partir do momento da $t = 0$. A singularidade inicial Φ inverte não apenas o tempo (*simetria T*), mas também a paridade (*simetria P*, também chamada de "*enantiomorfia*") e a conjugação de carga (*simetria C*, que transforma uma partícula em sua antipartícula e vice-versa), induzindo a *simetria CPT* completa ((Sakharov 1967), (Sakharov 1980), (Sakharov 1982)). A *violação da simetria CP* também é revertida no universo gêmeo, o que significa que a antimatéria prevaleceu sobre a matéria. Deve-se observar que Sakharov se concentrou em descrever a *simetria CPT* somente no contexto da física de partículas, portanto, sem envolver a gravitação em seu modelo, de modo que os universos gêmeos nunca interagem, exceto no momento de seu nascimento, como na Figura 2.10:

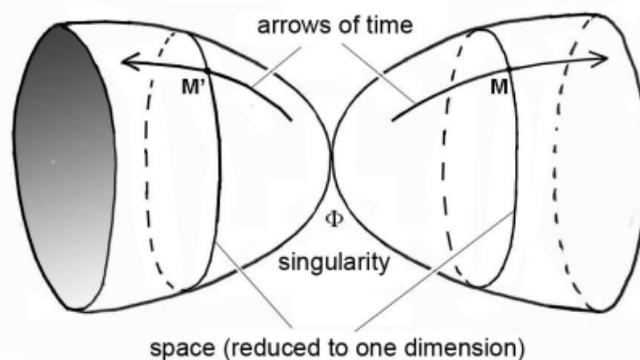


Figura 2.10 - Modelo Cosmológico Sakharov

2.5 A abordagem bimétrica introduzida pela geometria Riemanniana hiperbólica

A geometria Riemanniana hiperbólica desempenha um papel fundamental no modelo cosmológico de Janus. Esse ramo da geometria estuda espaços curvos com curvatura negativa constante. Essa geometria possibilita a conceituação de espaços com curvaturas positivas e negativas. Entretanto, é importante observar que atualmente não há nenhuma teoria matemática bimétrica ou multimétrica introduzida na geometria Riemanniana hiperbólica na qual um modelo cosmológico bimétrico possa se basear. De fato, os modelos teóricos atuais permanecem heurísticos. Por exemplo, duas abordagens foram tentadas em 2002 e 2008 por Thibault Damour ((Damour e Kogan 2002)) e Sabine Hossenfelder ((Hossenfelder 2008)), respectivamente. Uma delas baseava-se na introdução de grávitons pesados e leves em um sistema de equações de campo bimétrico, e a outra era mais ou menos semelhante ao nosso modelo.

De fato, Damour e Kogan tentam construir uma teoria de "duas membranas", envolvendo um espectro de grávitons maciços, mas esse documento de 40 páginas é interrompido bruscamente. De passagem, eles mostram que essa bigravidade deve obedecer a um sistema de duas equações de campo acopladas:

$$2M_L^2 \left(R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^L R(g^L) \right) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L = t_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^L$$

$$2M_R^2 \left(R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^R R(g^R) \right) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R = t_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^R$$

Posteriormente, Sabine Hossenfelder propôs um modelo refinado abordando o conceito de massa negativa no universo. Entretanto, em 1957, Hermann Bondi tentou introduzir essas massas no modelo de Albert Einstein. Mas o chamado fenômeno de vazamento revelou contradições físicas, de modo que o modelo violava princípios fundamentais da física, como o princípio de ação-reação e equivalência ((Bondi 1957)). Hossenfelder foi além e formulou um par de novas equações de campo acopladas:

$$R_{vk} - \frac{1}{2} g_{vk}^{(g)} R = T_{kv} - \underline{V} \sqrt{\frac{h}{g}} a_v^v a_k^k \underline{T}_{vk}$$

$$R_{\underline{v}\underline{k}} - \frac{1}{2} h_{\underline{v}\underline{k}}^{(h)} R = \underline{T}_{\underline{v}\underline{k}} - \underline{W} \sqrt{\frac{g}{h}} a_{\underline{k}}^k a_{\underline{v}}^v \underline{T}_{kv}$$

Depois, como ela não conseguiu resolver a inconsistência com os princípios físicos e acreditava que isso estava intrinsecamente ligado à "gravidade bimétrica", ela desistiu. O que essas duas abordagens têm em comum é o fato de serem puramente teóricas e não terem fornecido resultados validados por observações. O único crédito que pode ser dado ao nosso modelo cosmológico, em comparação com os dois anteriores, é que ele tem muitos pontos de ancoragem com a observação e várias previsões físicas que veremos na Seção 3.2

A geometria Riemanniana hiperbólica é um ramo da geometria Riemanniana que estuda espaços curvos com curvatura negativa constante, correspondendo matematicamente a uma forma hiperbólica frequentemente descrita como "*em forma de sela*". Mais precisamente, a curvatura negativa constante do espaço hiperbólico pode ser descrita como o comportamento assintótico da hipérbole em ambas as direções: os ramos da hipérbole divergem indefinidamente sem nunca convergir. Essa característica é uma propriedade importante do espaço hiperbólico e pode ser usada para diferenciá-lo da geometria euclidiana e da geometria Riemanniana esférica.

Por exemplo, na Figura 2.11, as linhas vermelhas que desenharam os triângulos são as *geodésicas* da superfície. Em termos simples, uma *geodésica* é o caminho mais curto entre dois pontos no espaço. Imagine que você está em um espaço euclidiano plano, como em uma grande folha de papel; aqui, esse caminho é apenas uma linha reta. Mas em superfícies curvas, sejam elas positivamente curvas (geometria esférica) ou negativamente curvas (geometria hiperbólica, como a sela de um cavalo), é possível desenhar uma *geodésica* usando um barbante ou um elástico esticado entre dois pontos dessa superfície, representando o caminho mais curto. Portanto, diferentemente da geometria euclidiana, em que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180 graus, essa soma excede 180 graus na geometria esférica (Riemanniana) e é menor que 180 graus na geometria hiperbólica (também um tipo de geometria Riemanniana).

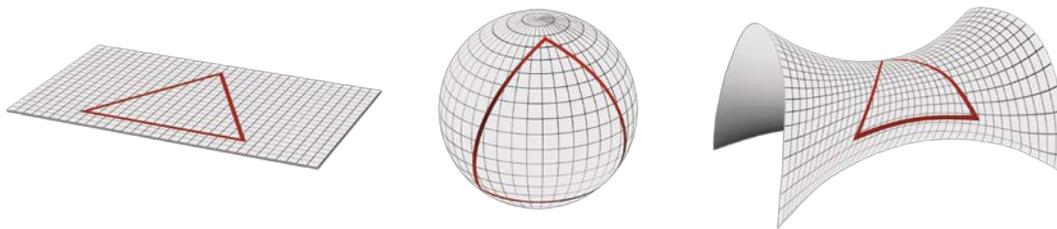


Figura 2.1 1 - Tipos de curvatura espacial

É importante observar que um espaço euclidiano "*plano*", ou seja, um espaço com curvatura zero, não é necessariamente um plano. Veja o exemplo anterior de uma folha de papel: mesmo que ela seja dobrada várias vezes, como um ferro corrugado, sua curvatura permanece zero em todos os lugares. Isso significa que a *geodésica* traçada em sua superfície não muda, porque a folha não se estica. O mesmo se aplica a superfícies euclidianas fechadas, como um cilindro ou um cone: ao contrário do que se possa pensar, elas não têm curvatura. De acordo com a geometria euclidiana, embora pareçam curvas, elas podem ser consideradas "*planas*" porque sua superfície pode ser desdobrada em um plano sem se esticar.

O conceito do Modelo Cosmológico de Janus, que será desenvolvido no próximo capítulo, é associá-lo a uma "*geometria gemelar*" definida por uma relação entre espaços com curvatura positiva e espaços com curvatura negativa, de acordo com um sistema de duas equações de campo acopladas.

3 Modelo Cosmológico 3Janus

3.1 Descrição

O Modelo Cosmológico Janus propõe uma visão revolucionária do universo, caracterizada por uma variedade Riemanniana com duas métricas distintas. Essas métricas lidam com massas positivas e negativas de uma maneira única, oferecendo uma interpretação coerente dentro da estrutura da relatividade geral, confirmada por observações, evitando os paradoxos tradicionais.

Com base no modelo cosmológico de Andrei Sakharov de dois universos bimétricos que não interagem, um novo modelo foi desenvolvido como um único universo composto de uma única variedade Riemanniana com duas métricas, ou seja, uma hipersuperfície quadridimensional com duas camadas dobradas uma sobre a outra na *simetria CPT*, mas dessa vez interagindo por efeito gravitacional.

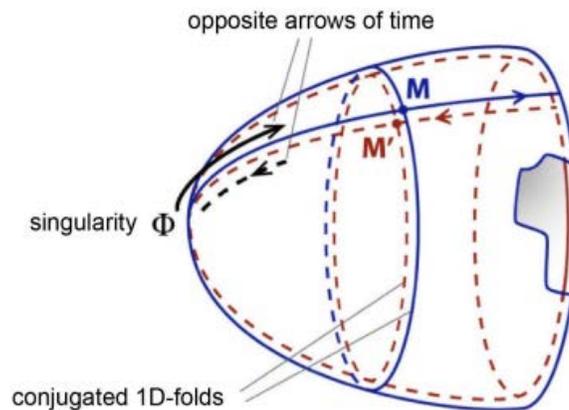


Figura 3.1 - Modelo Cosmológico Janus

A primeira camada é quadriculada com uma determinada unidade de comprimento que fornece uma métrica por meio da qual a matéria de energia e massa positivas passa entre dois pontos nesse espaço-tempo a uma velocidade limitada pela teoria da relatividade especial (Seção 2.2.2). E sua contraparte, dobrada, mas elevada ao quadrado de acordo com uma unidade de comprimento 100 vezes menor e uma velocidade 10 vezes maior para matéria de energia e massa negativas (fótons evoluindo nas mesmas proporções), resultando em um tempo de travessia 1000 vezes mais rápido. Assim, esse modelo oferece duas famílias de geodésicas que cruzam o espaço-tempo de duas maneiras diferentes e em velocidades diferentes, possibilitando viagens interestelares e explicando vários fenômenos físicos, como o desaparecimento da antimatéria primordial e o confinamento de galáxias ((Petit e d'Agostini 2014), (Petit 2018)).

Ele também demonstra que os estados de energia negativa são compatíveis com a mecânica quântica.

Esse modelo é construído com base em duas equações de campo acopladas que são uma extensão da equação de campo de Einstein, oferecendo uma alternativa confiável para a

presença de energia escura (poder repulsivo) e matéria escura (achatamento das curvas de rotação galáctica) no cosmos, ao mesmo tempo em que integra com sucesso as massas negativas na Relatividade Geral.

Ele se baseia na derivação de equações de um conceito chamado "*Lagrangiano*". Na física, geralmente usamos princípios para explicar como os objetos ou partículas se movem e interagem uns com os outros. No nosso caso, usamos princípios de variação, que são fórmulas matemáticas que descrevem como um sistema físico evolui ao longo do tempo, minimizando uma quantidade específica chamada "*ação*". Esse conceito de variação deve ser "*covariante*", o que significa que ele permanece o mesmo independentemente do quadro de referência inercial escolhido. Isso implica que ele se aplica a todos os observadores, independentemente de sua velocidade.

A derivação lógica desses princípios deve nos levar a equações que descrevam os movimentos e as interações de um sistema de partículas de forma a torná-los válidos para todos os observadores, independentemente de seu movimento relativo. A "*ação*" é definida como a integral do "*Lagrangiano*" em um determinado período de tempo, o que nos permite descrever a cinética e a dinâmica de um sistema físico. O *Lagrangiano* é uma função calculada a partir da energia cinética e potencial do sistema, bem como de outros fatores que podem influenciar seu comportamento. Usando o princípio da menor ação, procuramos encontrar a trajetória do sistema que minimiza a "*ação*", o que significa o caminho para o qual o valor da "*ação*" é o menor possível. As equações de movimento são obtidas pela diferenciação dessa trajetória de ação mínima em relação ao tempo.

3.2 Implicações

A cosmologia está em crise. O primeiro exemplo é a taxa de expansão do Universo, que vem inchando como um balão gigantesco há 13,8 bilhões de anos. Quando os astrofísicos usaram seus telescópios para medir a atual taxa de expansão, conhecida como constante de Hubble (ou H_0), eles encontraram um valor incompatível com o previsto pelo Modelo Padrão de Cosmologia (Λ CDM), a teoria que atualmente melhor descreve a história do Universo, desde sua origem (o Big Bang) e os primeiros átomos até os dias atuais, por meio das primeiras estrelas e galáxias.

A constante de Hubble (H_0) é um parâmetro fundamental na cosmologia que mede a velocidade de expansão do Universo. Ela indica a rapidez com que as galáxias estão se afastando umas das outras em função de sua distância. No entanto, recentemente, dois métodos principais de medição produziram resultados significativamente diferentes:

- Por um lado, as medições locais usando a observação direta de galáxias e a escala de distância cosmológica baseada em velas padrão, como cefeidas e supernovas tipo Ia, fornecem um valor de H_0 de 73 km/s/Mpc^2 . Essa medição vem da colaboração *Shoes*, liderada pelo americano Adam Riess.

² Um megaparsec é equivalente a cerca de 3,26 milhões de anos-luz. Para cada megaparsec de distância, a expansão do Universo aumenta a velocidade de separação das galáxias em 73 quilômetros por segundo.

- Por outro lado, os dados do Cosmic Microwave Background³, analisados como parte do Modelo Padrão da cosmologia, sugerem um valor mais baixo de 67,4 quilômetros por segundo por megaparsec (km/s/Mpc). Esse método é baseado em dados do satélite Planck.

Essa discrepância, se não for atribuída a erros de medição, exige uma reavaliação de certos aspectos fundamentais do Modelo Padrão, como o papel da energia escura na aceleração da expansão cósmica. O Modelo Cosmológico Janus atribui esse efeito antigравitacional a massas negativas e especifica sua natureza, um assunto que exploraremos com mais profundidade mais adiante na seção 3.3 dedicada.

Como outro exemplo, o Telescópio Espacial James Webb (JWST), com seus avançados recursos de observação em infravermelho, foi projetado para observar o Universo nos estágios iniciais de sua evolução, incluindo a formação das primeiras galáxias. Observações recentes do JWST revelam objetos ou comportamentos que não correspondem às previsões do Modelo Padrão, levando a uma revisão completa de seus fundamentos.

De acordo com o Modelo Padrão da cosmologia, o universo passou por um período de escuridão após o Big Bang, seguido pela formação das primeiras estrelas e proto-galáxias algumas centenas de milhões de anos depois. Essas primeiras estruturas evoluíram para grandes galáxias no decorrer do primeiro bilhão de anos, um processo guiado pela gravidade da matéria escura. As galáxias continuaram a se desenvolver e a se agrupar por bilhões de anos, formando os vários tipos observados atualmente. Acredita-se que a matéria escura e a energia escura desempenhem papéis cruciais nesse processo, influenciando a formação de estruturas e a expansão do universo, respectivamente.

O estudo recente publicado na revista *Nature Astronomy* (Boylan-Kolchin 2023) refere-se à descoberta feita por Mike Boylan-Kolchin, Professor Associado de Astronomia da Universidade do Texas em Austin, da formação mais cedo do que o esperado de várias galáxias de alto deslocamento para o vermelho (entre 500 e 700 milhões de anos após o Big Bang) que são muito mais massivas do que a nossa (10 bilhões de massas solares).

Por exemplo, *Abell 2744 Y1* é um aglomerado de galáxias localizado na constelação do Escultor, a cerca de 13,2 bilhões de anos-luz de distância, e aparece para nós como quando o universo tinha apenas 650 milhões de anos (Figura 3.2).

³ A radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB) é a radiação eletromagnética emitida cerca de 380.000 anos após o Big Bang, quando o universo havia esfriado o suficiente para que elétrons e prótons se combinassem e formassem átomos.

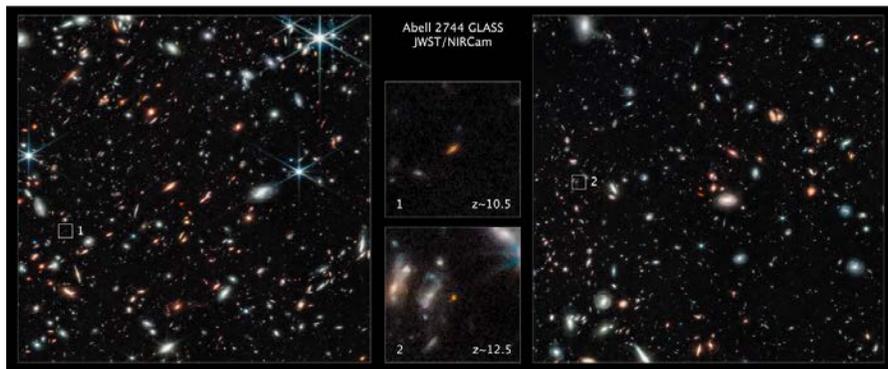


Figura 3.2 - Imagem do Telescópio James Webb - Abell 2744 Y1

Essa observação do Telescópio Espacial James Webb confirma mais uma vez uma das previsões do Modelo Cosmológico Janus. O Modelo Cosmológico Janus, portanto, lança uma nova luz sobre as principais questões cosmológicas, cujas respostas são confirmadas por várias observações e previsões, incluindo, entre outras, as seguintes:

- Explicação do confinamento de galáxias por espaços vazios ocupados por massas negativas que contribuem para sua estabilidade, como na Figura 3.3 ((Farnes 2017)).

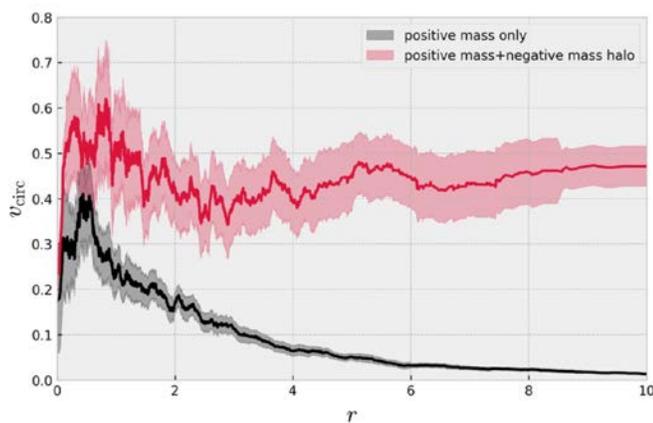


Figura 3.3 - Diferença entre a velocidade circular co urbes de uma galáxia composta de partículas de massa positiva em comparação com outra cercada por um halo de partículas de massa negativa.

- Explicação do formato das curvas de rotação das galáxias (achatamento)
- Esse modelo explica a aceleração gravitacional maior do que a esperada das estrelas que orbitam nas bordas das galáxias devido à presença de massas negativas.

- Explicação da alta velocidade de galáxias em aglomerados devido à contribuição antigravitacional de massas negativas.
- Ele propõe uma descrição matematicamente detalhada do comportamento das galáxias com base em uma abordagem comum das equações de Vlasov e Poisson. Ele prevê que as velocidades das estrelas em uma galáxia são organizadas em um elipsoide orientado para o centro galáctico, uma hipótese confirmada por medições das velocidades residuais de estrelas próximas ao sistema solar.
- Isso explica os efeitos de lente gravitacional em torno das galáxias, como em 3.4.

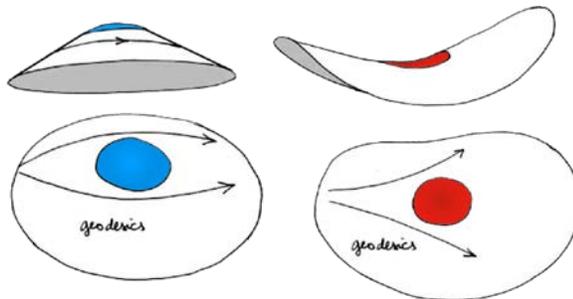


Figura 3.4 - Efeitos de lente gravitacional

- Explicação da estrutura lacunar do universo ocupada por aglomerados de massas negativas na forma de bolhas de sabão interconectadas, como em 3.5.

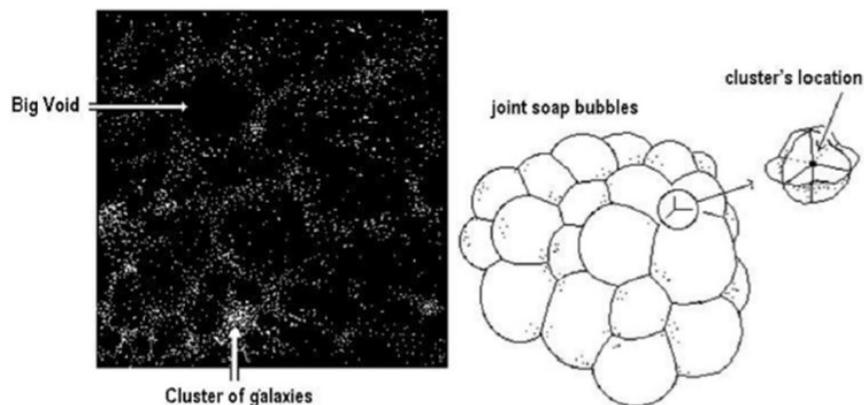


Figura 3.5 - Estrutura de lacunas

Essa estrutura também foi estabelecida em 2018 por Tsvi Piran em seu artigo (Piran 2018), no qual ele destaca a distribuição de galáxias no que ele chama de "paredes" devido à compressão antigravitacional das regiões subdensas de massas negativas concentradas na matéria escura dos espaços vazios. As observações mostram que esses espaços vazios ocupam uma parte significativa do volume do Universo. A correlação entre espaços vazios na distribuição de galáxias e regiões de baixa densidade de matéria escura demonstra claramente a origem gravitacional desses espaços vazios. As regiões subdensas primordiais, conhecidas como "vazios cosmológicos negativos", atuam como massas gravitacionais negativas e servem como sementes para os vazios observados. Os centros dessas regiões subdensas são massas gravitacionais efetivas que repelem a matéria, alinhando-a ao longo das

paredes entre os centros. Os vazios estão centrados em torno dessas massas e são cercados por paredes de galáxias. Por fim, as paredes racham, fazendo com que os espaços vazios se fundam com outros espaços vazios, criando uma rede mais ampla de espaços vazios que confinam as galáxias.

- Previsão e confirmação da formação inicial de todas as galáxias recentemente observadas pelo Telescópio Espacial James Webb ((Ferreira et al. 2022)). De fato, o modelo sugere que todas as galáxias se formaram juntas durante os primeiros 100 milhões de anos da história do universo (primordial). Essa formação ocorreu quando a massa positiva foi violentamente comprimida entre vários aglomerados de massa negativa, criando alta pressão. A forte contração da matéria e dos gases devido ao efeito antigравitacional das massas negativas induziu um aquecimento significativo, levando a um resfriamento rápido facilitado por uma estrutura semelhante a uma folha. Esse tempo de resfriamento permitiu que fosse atingida uma temperatura suficiente para iniciar as reações de fusão termonuclear, possibilitando o nascimento das primeiras estrelas e seu agrupamento para formar as galáxias que conhecemos hoje.
- Explicação para o fato de galáxias distantes em redshift alto (> 7) aparecerem como anãs (luminosidade reduzida). Isso ocorre porque os aglomerados de massa negativa (como na região do Dipole Repeller que estudaremos na Seção 3.3) criam um efeito de lente gravitacional negativa em seus fótons, o que tem o efeito de atenuar sua luminosidade.
- Verificações relativísticas locais confirmadas, como o avanço do periélio de Mercúrio ou a deflexão dos raios de luz pelo Sol. Como os dois tipos de massa se repelem mutuamente e considerando que a densidade de massa negativa é quase insignificante perto do Sol, a primeira equação do sistema corresponde à equação de campo de Einstein (consulte a Seção 3.3.4.2).

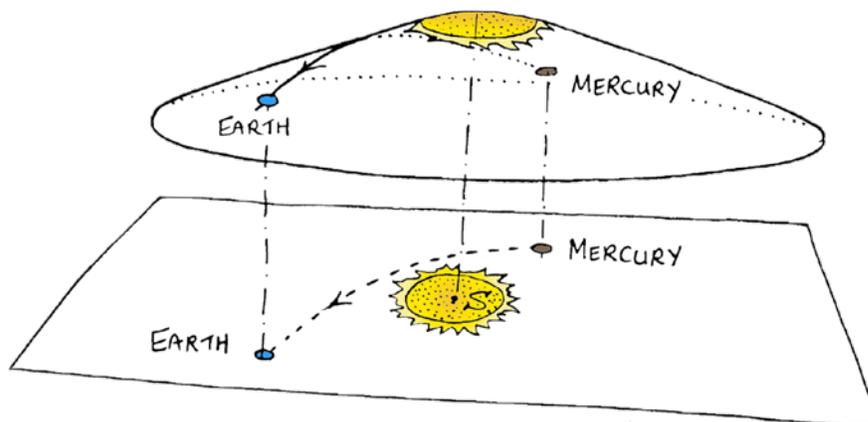


Figura 3.6 - Deformação do espaço-tempo induzida pela massa do Sol

- A exploração da assimetria entre as duas populações de massas positivas e negativas levou à consistência com os dados das observações das supernovas Tipo Ia. A observação de supernovas Tipo Ia tem sido uma ferramenta crucial para determinar as distâncias de objetos celestes e estudar a expansão do universo. As supernovas do

tipo Ia são explosões de supernovas que ocorrem em sistemas estelares binários, nos quais uma estrela conhecida como anã branca absorve material de uma estrela companheira até atingir uma massa crítica, causando sua explosão. Essa assimetria pode ser causada por processos como a rotação ou o campo magnético da estrela companheira, que transfere matéria para a anã branca. Se a assimetria existir, ela pode levar a uma diferença de luminosidade entre as supernovas Tipo Ia, o que poderia explicar as observações.

- Explicação da natureza do Grande Repulsor descoberto em janeiro de 2017 (consulte a Seção 3.3), onde foi demonstrado que ele existe em uma região aparentemente vazia do universo, oposta à do Atrator de Shapley, que parecia repelir toda a matéria.

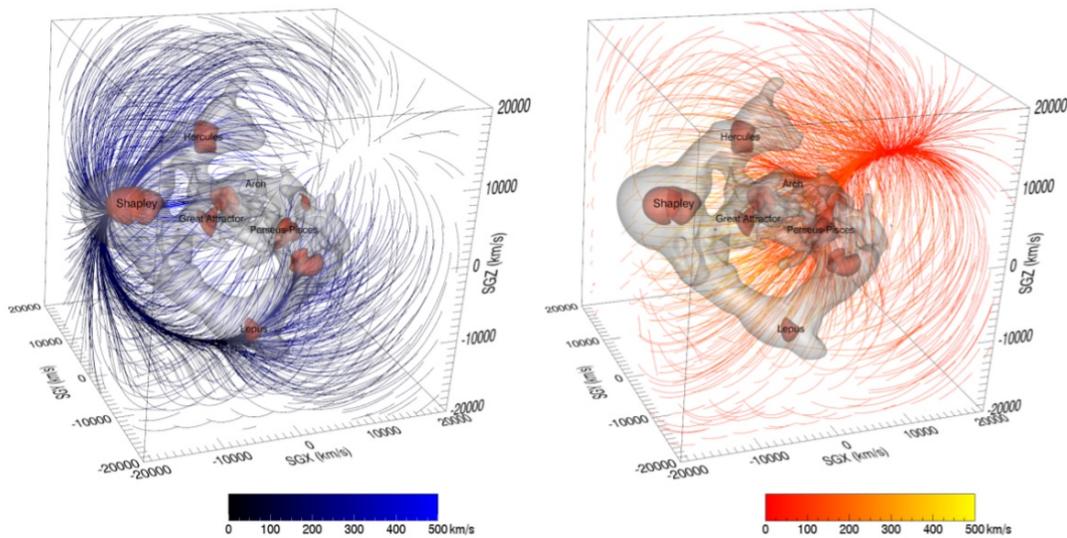
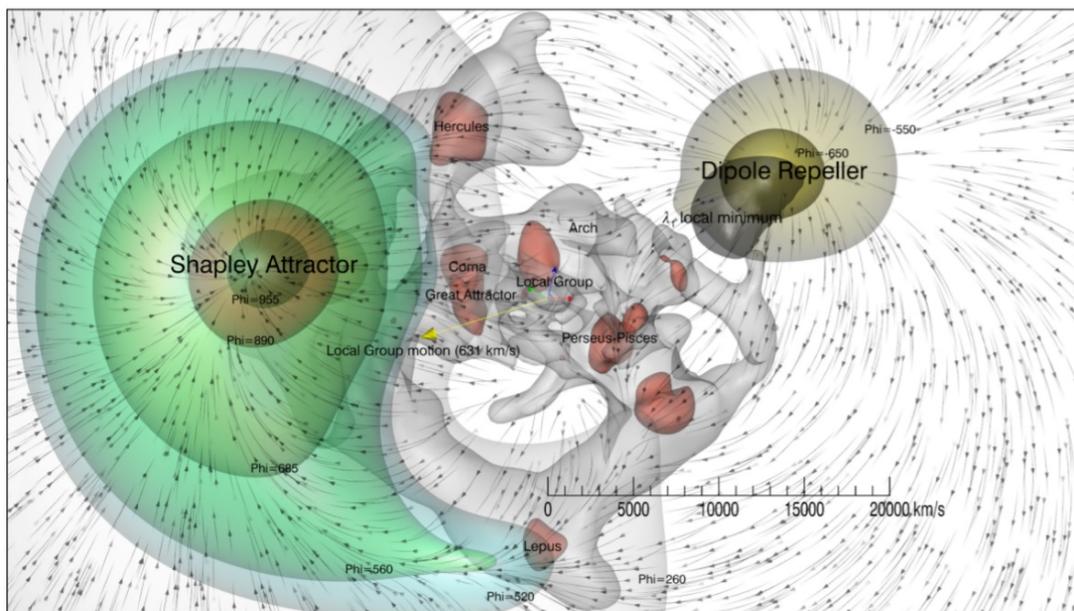


Figura 3.7 - O repelente grande

- O modelo demonstra uma estrutura espiral galáctica durável impulsionada por fricção dinâmica que transfere continuamente o momento para o ambiente menos denso de massa negativa, permitindo que os braços espirais girem de forma persistente e estável ao redor da galáxia. Conforme ilustrado abaixo, à medida que os braços passam por regiões de alta densidade (massa positiva), eles diminuem a velocidade e perdem energia, ao passo que, ao passarem por regiões de baixa densidade, eles aceleram e ganham energia. Isso cria ondas de densidade que se propagam pela galáxia, transferindo impulso para o ambiente de massa negativa.

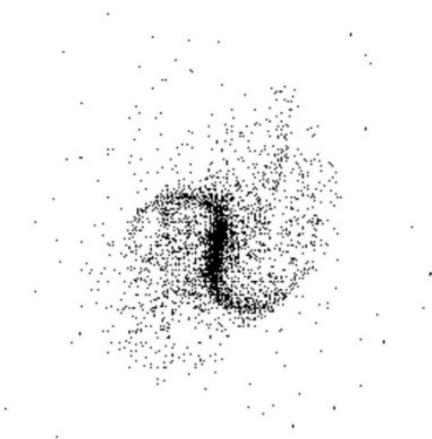


Figura 3.8 - Espiral com barras de uma simulação numérica (1992: 20.000 pontos)

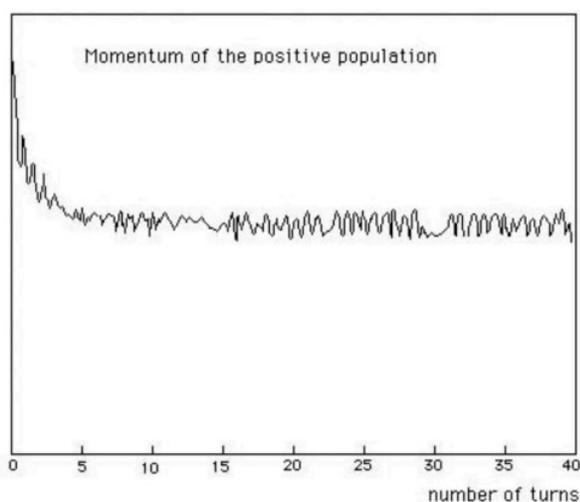


Figura 3.9 - Evolução do movimento cinético (1992: 20.000 pontos)

- Explicação do motivo pelo qual a antimatéria cósmica não foi observada, pois ela emite fótons de energia negativa.
- Explicação da natureza dos componentes invisíveis do universo: antiprótons, antineutrons, antielétrons, anti-hidrogênio e anti-hélio de massa negativa. Esses

elementos constituem a antimatéria primordial, que não pode ser observada porque emite fótons de energia negativa.

- **Conjectura confirmada recentemente em setembro de 2023 (Anderson 2023):** A antimatéria com simetria C (simetria de carga), desenvolvida em laboratório e que emite fótons de energia positiva, é gravitacionalmente empurrada para baixo, assim como a matéria comum.
- O modelo oferece sua própria interpretação das flutuações na radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), atribuindo-as à resposta da matéria comum de massa positiva às flutuações de densidade em células adjacentes do universo povoadas por uma distribuição de matéria de massa negativa. Essa situação está ligada à instabilidade gravitacional que ocorre dentro dessas células. A análise dessas flutuações fornece um meio de avaliar a relação entre os fatores de escala dos dois tipos de matéria. Podemos ver que a relação $\frac{a(+)}{a(-)}$ é da ordem de 100. Portanto, podemos deduzir que a razão $\frac{c(-)}{c(+)}$ é da ordem de 10 ((Petit 2018)). Isso implica que o efeito geral seria reduzir o tempo necessário para a viagem interestelar por um fator de mil para objetos que conseguem reverter sua massa, permitindo que eles se movam ao longo das geodésicas descritas pela métrica $h_{\mu\nu}$ da segunda equação de campo (24), como estudaremos na próxima seção.

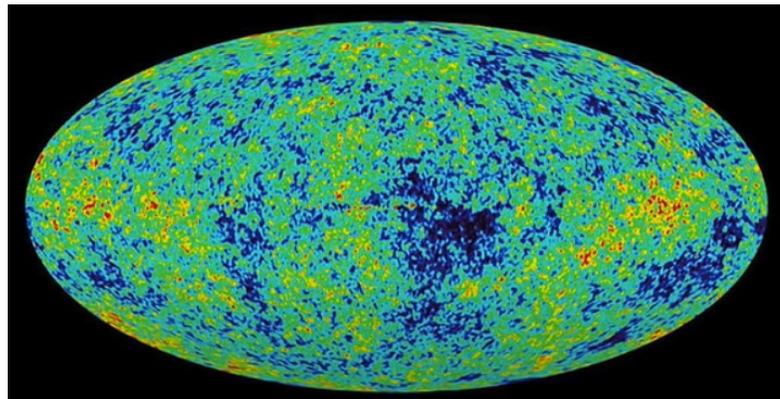


Figura 3.10 - Espessura difusa cosmológica e

- Redshift gravitacional de 3 deduzido das duas primeiras imagens de objetos supermassivos localizados nos centros das galáxias M87 e da Via Láctea (consulte o estudo realizado na seção 7).
- Atualmente, não há resposta para a pergunta: "O que havia antes do Big Bang?" De acordo com o Modelo Cosmológico Janus, uma estrutura topológica do universo, "interagindo com sua contraparte anticrônica", elimina essa pergunta ao invalidar o significado do advérbio "antes". De fato, como veremos mais adiante, no momento do Big Bang, a seta do tempo se inverte.

3.3 O repelente de dipolo

3.3.1 Introdução

Em 2017, Yehudi Hoffman, B. Tully, H. Courtois e D. Pomarède publicaram o primeiro mapa muito detalhado do universo (Hoffman et al. 2017). Esse mapa foi baseado não apenas nas posições das galáxias, mas também integrou seu campo de velocidade subtraindo a influência da expansão do Hubble das medições brutas de seu desvio para o vermelho. Os resultados foram incrivelmente impressionantes e são considerados uma das descobertas observacionais mais importantes da cosmologia atual, comparável em importância à descoberta de Edwin Hubble há um século. Antes desse estudo, sabia-se que algumas galáxias exibiam movimentos convergentes em direção a uma região chamada de Grande Atrator. A análise de 2017 revelou a influência de outra estrutura maior além do Grande Atrator, chamada de Atrator de Shapley. Entretanto, a descoberta mais notável foi a identificação de uma região quase oposta a essas duas formações, onde nenhuma galáxia foi detectada. Em vez disso, havia um vazio significativo cercado por galáxias vizinhas que exibiam movimento para longe dessa região, formando um padrão de "vazamento" centrado nesse vazio. Inicialmente chamado de Dipole Repeller (repelente de dipolo), esse fenômeno foi posteriormente chamado de Dipolar Attractor (atrator dipolar) quando ficou claro que estava ligado a formações atrativas. Compreender esse fenômeno, que não pode ser atribuído a artefatos de medição, sem dúvida exige um progresso significativo em nossa compreensão da dinâmica cósmica.

3.3.2 Algumas tentativas de interpretação

Quatro anos após a descoberta inicial, houve poucas tentativas de modelar o fenômeno do repelente de dipolo. Em seu artigo recente (Neiser 2020), Neiser não se concentra nessa questão, mas propõe hipóteses sobre a natureza do Big Bang, o vácuo quântico e a origem do universo. Neiser especula que a antimatéria poderia ter um efeito gravitacional repulsivo, levando à formação de estrelas de neutrinos e estrelas de antineutrinos que se repelem mutuamente. Aspectos semelhantes da repulsão primordial da antimatéria são mencionados por Benoit-Lévy et al. em 2012 ((Benoit-Lévy e Chardin 2012)), mas sem maiores justificativas. Heald, em seu artigo (Heald 2020), menciona a situação de Laniakea, que é empurrada pelo Repulsor de Dipolo e atraída pelo Atrator de Shapley. Mais uma vez, a ideia de uma repulsão entre matéria e antimatéria é sugerida como uma possível explicação para a estrutura em grande escala do universo e a organização dos vazios. No entanto, nenhum modelo concreto é fornecido para o objeto central no grande vazio, e a ausência de luz emitida permanece sem explicação. Em 2018, Vuyk sugere em seu artigo (Vuyk 2018) a existência de uma quinta força hipotética, enquanto Hoffman et al. usam simulações numéricas para reconstruir uma distribuição de matéria escura consistente com os dados observacionais ((Hoffman et al. 2018)). Dois esquemas explicativos emergem dessas explorações: um envolvendo objetos hipotéticos compostos de antimatéria repulsiva, que não são observáveis, e o outro sugerindo uma discrepância na distribuição da matéria escura. As observações revelaram que a expansão do universo está se acelerando, indicando a presença de um componente com pressão negativa ((Perlmutter et al. 1999), (Riess et al. 2004), (Schmidt et al. 1998)). Um modelo proposto para explicar esse fenômeno sugere a existência de massas negativas que podem contribuir para esses efeitos antigravitacionais,

combinando as influências repulsivas da matéria escura e da energia escura em componentes de massa positiva. Essa hipótese está no centro do trabalho correspondente às referências (Petit 1995) (Petit e D'Agostini 2014a) (Petit e D'Agostini 2014b) (Petit, D'Agostini e Debergh 2018) (Petit, D'Agostini e Debergh 2019) (Petit e D'Agostini 2021a) (Petit e D'Agostini 2021b).

3.3.3 Interpretação por lacunas de matéria escura

Vamos investigar a possibilidade de que um vácuo de matéria escura possa produzir o efeito repulsivo observado. Podemos começar considerando um vazio esférico em uma distribuição uniforme de matéria escura e usar a equação de Poisson para analisar esse sistema:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} = 4\pi G \rho_{dm}$$

Essa equação é linear e descreve o potencial gravitacional como uma função da densidade. Ao sobrepor duas distribuições de densidade ρ_1 e ρ_2 o potencial gravitacional resultante é a soma dos potenciais associados a essas duas distribuições: $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Considerando uma distribuição de densidade uniforme ρ_{dm}^{unif} obtemos um potencial ψ_1 que é a solução da equação de Poisson :

$$\psi_1 = \frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}_1 = -\frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

Agora, ao introduzir um volume com uma densidade oposta igual a $-\rho_{dm}^{unif}$ criamos um potencial ψ_2 que é a solução para a seguinte equação de Poisson :

$$\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_2}{dr} = -4\pi G \rho_{dm}^{unif}$$

Essa solução é :

$$\psi_2 = -\frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

Portanto, temos o mesmo campo gravitacional, mas com um sinal oposto. Portanto, ele é repulsivo e proporcional à distância do centro da esfera.

Então, ao calcular os potenciais gravitacionais associados a essas duas distribuições, podemos observar que o potencial gravitacional resultante é zero dentro do vácuo. Em outras palavras, a força gravitacional exercida pela distribuição uniforme da matéria escura é exatamente equilibrada pela força gravitacional exercida pela densidade oposta que cria o vácuo:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Entretanto, qualquer que seja a posição escolhida como origem das coordenadas, o campo gravitacional permanece diferente de zero dentro do vácuo. Isso significa que a força

gravitacional não está perfeitamente equilibrada, o que parece contradizer a ideia de que o vácuo cria um campo gravitacional repulsivo.

Para resolver esse paradoxo, a equação de Poisson deve ser considerada como a versão linearizada da equação de Einstein em uma situação estacionária, que define o potencial gravitacional em termos de uma perturbação da métrica de Lorentz:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}$$

O cálculo clássico fornece a densidade adequada ρ_0 ((Adler, Bazin e Schiffer 1975)) :

$$\varepsilon \sum_{i=0}^3 \gamma_{00|i|i} = -\chi\rho_0$$

NB: No contexto do limite de campo fraco estudado na Seção 2.3.6, a equação (26) relaciona as segundas derivadas espaciais do componente de tempo γ_{00} do tensor métrico com as fontes gravitacionais, representadas pela densidade de energia e massa local ρ_0 . Isso nos ajuda a entender como a curvatura do espaço-tempo reage à distribuição de massa e energia, mantendo uma relação precisa entre esses dois aspectos.

Assim, o potencial gravitacional é definido como (27) por :

$$\psi = -\frac{c^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}$$

Então, (26) pode ser identificada com a equação de Poisson. Entretanto, essa abordagem não pode ser aplicada a uma distribuição uniforme infinita de matéria escura. A conclusão é que é simplesmente impossível definir um potencial gravitacional em uma distribuição uniforme de matéria, porque a instabilidade gravitacional tende a levar à formação de aglomerados, não de vácuos, e não há uma estrutura clara para a formação de tais vácuos.

3.3.4 Interpretação usando o modelo cosmológico Janus

Vamos considerar agora a interação entre duas entidades: matéria comum com massa positiva interagindo com massa negativa por meio de efeitos gravitacionais. Esse modelo envolvendo massa negativa leva em conta a influência da matéria escura e da energia escura.

Podemos descrever esse sistema de duas entidades com métricas de g e h . Sejam G e H sejam os escalares de Ricci correspondentes. Em seguida, consideramos a seguinte ação de duas camadas:

$$A = \int_{\varepsilon} \left(\frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\varepsilon} \left(\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x$$

Os termos $S_{(g)}$ e $S_{(h)}$ fornecerão os termos de origem relacionados às populações das duas entidades, enquanto os termos $S_{(h,g)}$ e $S_{(g,h)}$ gerarão os tensores de interação. $\Gamma^{(g)}$ e $\Gamma^{(h)}$

são as constantes de Einstein para cada entidade. Para $\kappa = \pm 1$ aplicamos o princípio da menor ação. A derivação lagrangiana dessa ação nos dá :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta A \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left(\frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\varepsilon} \delta \left(\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left[\frac{1}{2\Gamma(g)} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x \\
&\quad + \int_{\varepsilon} \delta \left[\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \right] \delta h^{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^4x
\end{aligned}$$

Para qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$ e todas as variações $\delta h^{\mu\nu}$ obtemos localmente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Gamma(g)} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0 \\
\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} &= 0
\end{aligned}$$

Vamos apresentar os seguintes tensores:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(g,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(g)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(h)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \\
T_{\mu\nu}^{(g,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

Na relatividade geral, a derivada covariante é uma forma de generalizar a noção de derivada parcial para espaços curvos. Diferentemente de uma derivada parcial comum, a derivada covariante leva em conta a curvatura do espaço-tempo.

Então, para um tensor $A_{\nu\sigma}^{\rho}$ sua derivada covariante ao longo de um índice μ é dada pela expressão :

$$\nabla_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} A_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} A_{\nu\lambda}^{\rho}$$

Portanto, podemos deduzir as duas expressões a seguir:

$$\nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}$$

$$\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$$

NB:

- (28b) é obtida a partir de (28a) pela simples troca de μ e ν .
- O termo $\partial_\mu A_{\nu\sigma}^\rho$ é a derivada parcial comum do tensor. Se o espaço-tempo fosse plano (como na física newtoniana), isso seria suficiente para descrever a variação do tensor.
- Termos com símbolos Christoffel $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho$, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$ representam a correção devido à conexão espaço-tempo, que leva em conta a curvatura do espaço-tempo. De fato, no espaço curvo, a conexão (representada pelo símbolo de Christoffel Γ) introduz uma correção. Essa correção é necessária porque as bases do espaço tangente (o espaço no qual o tensor vive) mudam de um ponto a outro do espaço-tempo. Portanto, $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\nu\sigma}^\lambda$ é o termo que corrige a mudança no $A_{\nu\sigma}^\lambda$ ao se mover na direção μ para o índice mais alto ρ . $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{\lambda\sigma}^\rho$ e $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\rho$ são termos que subtraem a contribuição devido à mudança nos índices mais baixos ν e σ . Esses termos garantem que a derivada covariante respeite as regras de transformação do tensor.

Em resumo, a derivada covariante ∇_μ de um tensor é uma combinação de sua derivada parcial ordinária e termos que compensam as mudanças na geometria do espaço-tempo. Ela é construída de tal forma que a derivada do tensor é, em si, um tensor, o que não é o caso da derivada parcial comum.

Então, o tensor de Riemann está relacionado aos símbolos de Christoffel pela seguinte equação :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

NB: O tensor de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ é uma quantidade matemática na relatividade geral que descreve a curvatura intrínseca do espaço-tempo. Ele é definido como a diferença entre as derivadas parciais dos símbolos de Christoffel e a soma dos produtos dos próprios símbolos de Christoffel. O termo $\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ é a derivada parcial do símbolo de Christoffel $\Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ com relação à coordenada x^μ . Esse termo mede como o símbolo de Christoffel varia à medida que se move na direção μ . O termo $\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ é semelhante ao primeiro termo, mas com a derivada parcial tomada em uma direção diferente, x^ν . Os termos $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ e $\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$ descrevem o produto de dois símbolos de Christoffel que representam a interação entre duas conexões espaço-temporais. Ele mede como a curvatura em uma direção influencia a curvatura em outra direção.

Então, temos:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

Isso nos dá:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$$

Ao contrair os índices ρ e σ na relação anterior usando a convenção de soma de Einstein, que afirma que um índice repetido implica uma soma implícita sobre esse índice, podemos expressar a variação do tensor de curvatura de Ricci que satisfaz a identidade de Palatini ((Tsamparlis 1978), (Palatini 1919)):

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho})$$

NB: Na relatividade geral, a geometria do espaço-tempo é descrita por uma quantidade chamada tensor métrico, denotada por $g_{\mu\nu}$. Esse tensor contém todas as informações sobre distâncias e ângulos no espaço-tempo.

O escalar de Ricci, denotado R é uma medida da curvatura do espaço-tempo em um determinado ponto. Ele é calculado pela adição (ou contração) dos componentes do tensor de Ricci $R_{\sigma\nu}$ com o tensor métrico $g^{\sigma\nu}$. Matematicamente, é como multiplicar as matrizes do tensor de Ricci e do tensor métrico e, em seguida, adicionar os termos ao longo da diagonal.

Além disso, devemos ter a derivada covariante do tensor métrico igual a zero, ou seja $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$. Em outras palavras, à medida que você se move pelo espaço-tempo, a maneira como mede as distâncias e os ângulos não muda. Essa é uma propriedade fundamental do espaço-tempo na relatividade geral, que indica que a geometria local não muda quando você se move, seja qual for a curvatura global.

Em resumo, o escalar de Ricci R nos dá uma ideia da curvatura do espaço-tempo em um ponto, e o fato de que $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$ garante que a forma do espaço-tempo permaneça consistente à medida que nos movemos, qualquer que seja a curvatura geral, ou seja, essa consistência é garantida pela compatibilidade da métrica com a conexão Levi-Civita, que garante que conceitos geométricos como comprimentos e ângulos permaneçam constantes à medida que são transportados pelo espaço-tempo.

Então, podemos deduzir:

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\delta R_{\sigma\nu} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}(\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho})) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - g^{\sigma\nu}\nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\mu}) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}B^{\rho} \end{aligned}$$

NB: Para o cálculo acima, precisamos levar em conta duas regras:

- As propriedades da derivada covariante e a regra de Leibniz (a regra para o produto da derivada). A regra de Leibniz para a derivada covariante é semelhante à da derivada ordinária e é escrita da seguinte forma:

$$\nabla_{\rho}(AB) = (\nabla_{\rho}A)B + A(\nabla_{\rho}B)$$

onde A e B podem ser campos escalares, vetoriais ou tensoriais.

- Conforme observado anteriormente, os índices repetidos são chamados de índices *silenciosos* de acordo com a convenção de soma de Einstein. De fato, é útil lembrar que, quando o subscrito de uma variável aparece duas vezes em um termo, uma vez na posição superior e outra na posição inferior, isso implica um somatório de todos os valores possíveis que o subscrito pode assumir. Por exemplo $A^\mu B_\mu$ implica $\sum_\mu A^\mu B_\mu$. Considere os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$ e $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$. Nessas expressões, os índices μ e ρ são exemplos de índices mudos de acordo com a convenção de soma de Einstein. Isso significa que a expressão $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$ em que a soma é realizada sobre todos os valores possíveis de μ é idêntica a $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$ onde a soma é realizada sobre todos os valores possíveis de ρ . Portanto, podemos aplicar os índices de soma $(\rho, \nu) \rightarrow (\mu, \rho)$ no último termo.

Calculado de duas maneiras diferentes, obtemos :

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \nabla_\mu (\sqrt{|g|}) B^\mu + \sqrt{|g|} \nabla_\mu (\delta B^\mu) = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu + 0 = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \\ \nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \sqrt{|g|} \delta B^\nu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + 0 = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)\end{aligned}$$

NB: Da mesma forma, a derivada do determinante do tensor métrico, representada por $\sqrt{|g|}$ também é zero quando tomado de forma covariante, ou seja $\nabla_\mu \sqrt{|g|} = 0$. Essa última propriedade simplifica a expressão das integrais de volume e é fundamental para a aplicação do teorema da divergência no espaço-tempo curvo.

Em seguida, podemos deduzir:

$$\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)$$

Vamos considerar agora a contribuição de $\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu$ na ação. Seja n^μ seja um vetor unitário normal a $\partial\mathcal{E}$, $\varepsilon = n^\mu n_\mu$ e y^a representando coordenadas adaptadas ao limite $\partial\mathcal{E}$ h_{ab} a métrica induzida por g_{ab} no limite. Temos $|\varepsilon| = 1$ e $\sqrt{|h|} d^3 y$ é uma forma de volume de dimensão $(n - 1)$ no limite, com $h = \det(h_{ab})$. Pelo teorema de Stokes, temos :

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon} \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g} d^4 x &= \int_{\varepsilon} \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) d^4 x \\ &= \int_{\delta\mathcal{E}} \varepsilon \delta B^\mu n_\mu \sqrt{|h|} d^3 y\end{aligned}$$

Vamos presumir que a métrica não varia no limite (ou que não há limite). Nesse caso, o termo $\nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g}$ não contribui para a ação, portanto, temos :

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\rho B^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \approx R_{\mu\nu}$$

No entanto, de acordo com o corolário com $a = \frac{1}{2}$ temos :

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

Portanto, podemos deduzir:

$$\frac{R\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

NB: Para os cálculos acima, precisamos explicar duas coisas:

- A variação no determinante do tensor métrico, denotada por δg está relacionada à variação do próprio tensor métrico, $\delta g_{\mu\nu}$ por meio da relação $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ onde g é o determinante do tensor métrico e $g^{\mu\nu}$ é o seu inverso. Essa relação decorre da propriedade matemática dos determinantes, em que a derivada de um determinante pode ser expressa como o determinante multiplicado pelo traço do produto da inversa da matriz e da derivada da matriz. No caso de uma pequena variação, a variação da raiz quadrada do determinante negativo do tensor métrico, $\delta\sqrt{-g}$ é dada por $\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Essa fórmula é essencial para derivar as equações de campo de Einstein a partir da ação de Einstein-Hilbert, pois permite que a ação seja integrada à variedade de espaço-tempo quadridimensional.
- Em nosso estudo, usamos o teorema de Stokes para simplificar um cálculo crucial. Esse teorema estabelece uma relação interessante entre a integral de uma derivada de um campo vetorial em uma região tridimensional e a integral do mesmo campo vetorial ao longo do limite dessa região. Considere um exemplo simples: imagine uma superfície fechada no espaço (como a superfície de uma esfera). Se quisermos calcular algo dentro dessa superfície (por exemplo, a soma dos valores de um campo), o teorema de Stokes nos permite fazer isso simplesmente examinando o que está acontecendo na própria superfície. A Equação (29), que apresentamos em nosso cálculo, segue essa ideia. Ela nos diz que a integral da derivada de um campo ($\nabla_{\mu}\delta B^{\mu}$) em uma região de quatro dimensões (\mathcal{E}) pode ser equivalente à integral da divergência de outro campo ($\sqrt{|g|}\delta B^{\mu}$) sobre a mesma região (\mathcal{E}). Essa equivalência é obtida por meio da métrica e de um elemento de volume quadridimensional (d^4x). Em seguida, a equação (30) simplifica ainda mais a expressão, levando-a até o limite da região ($\delta\mathcal{E}$). Ela nos mostra que essa equivalência pode ser expressa como uma integral ao longo do limite ($\delta\mathcal{E}$), usando os vetores normais (n_{μ}) a esse limite e a métrica induzida nele ($\sqrt{|h|}d^3y$). Em outras palavras, essa equação nos permite entender o que está acontecendo na superfície da nossa região sem precisar calcular o que está acontecendo dentro dela. Em resumo, o teorema de Stokes nos permite racionalizar nossos cálculos,

mostrando-nos como os fenômenos dentro de uma região podem ser compreendidos simplesmente examinando o que está acontecendo no limite dessa região. Esse truque matemático é essencial para resolver esses problemas complexos.

A partir das equações (31a) e (31b), obtemos :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(h,g)}$$

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(g,h)}$$

Introduzidas em (32a) e (32b), levando em conta (33), podemos, portanto, deduzir as equações de campo acopladas que descrevem o sistema das duas entidades:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = \kappa \Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

Onde $T_{\mu\nu}^{(h,g)}$ e $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ são os tensores de interação do sistema de duas entidades correspondentes à "geometria induzida", ou seja, a maneira pela qual cada distribuição de matéria em uma camada do universo contribui para a geometria da outra (interação entre populações de massas positivas e negativas). Esse sistema deve obedecer às condições de Bianchi, que são expressas pela seguinte relação :

$$\nabla_{\mu}^{(g)} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \nabla_{\mu}^{(h)} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = 0$$

Suponha que os fluidos dentro das entidades g e h sejam perfeitos, com densidades de energia correspondentes aos seguintes tensores de fonte :

$$T_{\mu\nu}^{(g,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(h,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h)} \end{pmatrix}$$

Tomaremos $\{\alpha^{(g)} > 0, \beta^{(g)} > 0\}$ e $\{\alpha^{(h)} < 0, \beta^{(h)} < 0\}$. Asseguraremos que as leis de interação sejam tais que duas partículas pertencentes à mesma entidade se atraiam mutuamente, ao passo que se repelem quando pertencem a entidades diferentes.

Vamos apresentar seus tensores de interação:

$$T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h,g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h,g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h,g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h,g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g,h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g,h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g,h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g,h)} \end{pmatrix}$$

Para obter as leis de interação desejadas sob a aproximação newtoniana, devemos escolher $\kappa = -1$. O sistema de equações então se torna:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) = -\Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

3.3.4.1 Verificação de um sistema não estacionário, homogêneo e isotrópico

Se assumirmos que o universo bimétrico, estruturado pelas equações de campo acopladas (34a) e (34b), é homogêneo e isotrópico, a métrica de Robertson-Walker se torna, de acordo com (Adler, Bazin e Schiffer 1975) :

$$(ds^{(f)})^2 = (c^{(f)})^2 dt^2 - (a^{(f)})^2 \left[\frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left(1 + k^{(f)} \frac{r^2}{4}\right)^2} \right] \quad \text{ou } f \in \{g, h\}$$

Observe que $a^{(f)}$ é o fator de escala, $k^{(f)}$, $c^{(f)}$ e $\Gamma^{(f)}$ são, respectivamente, o índice de curvatura, a velocidade da luz e a constante de Einstein para cada entidade.

Se introduzirmos essas métricas no sistema de equações (34a) e (34b) com as pressões $p^{(g)} \approx 0$ e $p^{(h)} \approx 0$ obteremos o seguinte sistema clássico de equações:

$$\frac{3}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = -\Gamma^{(g)} \left[\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = 0$$

$$\frac{3}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = \Gamma^{(h)} \left[\Phi \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = 0$$

Aplicando os métodos matemáticos clássicos de (Adler, Bazin e Schiffer, 1975), as condições de compatibilidade das equações (35a), (35b), (35c) e (35d) resultam em :

$$3 \frac{da^{(g)}}{a^{(g)}} + \frac{d[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

$$3 \frac{da^{(h)}}{a^{(h)}} + \frac{d[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

Portanto, a energia (e a massa) é conservada em um universo de poeira:

$$E = \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^3 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^3$$

Se tivermos :

$$\Phi = \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3, \quad \phi = \Phi^{-1}$$

As equações de campo acopladas se tornam :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left[T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left[T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right]$$

Se ambas as entidades forem dominadas pela radiação. O tensor de interação de modo misto será :

$$T_{\mu}^{\nu(f)} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r^{(f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_r^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_r^{(f)} \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{cases} \text{si } \rho_r^{(f)} > 0 \text{ alors } p_r^{(f)} > 0 \text{ pour } f = g \\ \text{si } \rho_r^{(f)} < 0 \text{ alors } p_r^{(f)} < 0 \text{ pour } f = h \end{cases}$$

NB:

- Em um contexto cosmológico, o tensor energia-impulso $T_{\mu}^{\nu(f)}$ é usado para descrever a distribuição e a interação da matéria e da energia no universo. Para um campo específico f o componente de tempo $T_0^{0(f)}$ representa a densidade de energia, que é um determinante fundamental da curvatura do espaço-tempo. Os componentes espaciais $T_i^{i(f)}$ por outro lado, representam a pressão exercida nas direções espaciais, o que também influencia a estrutura do espaço-tempo. Em um modelo bimétrico, no qual dois campos distintos - um para cada camada do universo - são considerados, as condições associadas descrevem as relações entre as densidades de energia e as pressões de cada campo, refletindo como essas entidades interagem e influenciam coletivamente a dinâmica cósmica.
- O tensor energia-impulso é expresso na forma diagonal quando o universo é considerado isotrópico e homogêneo, o que significa que suas propriedades físicas são independentes de direção e localização. Essa suposição, fundamental para o modelo cosmológico padrão, é conhecida como o princípio cosmológico (Seção 2.2.3). A isotropia implica que o universo parece idêntico em todas as direções; não há uma direção preferencial na qual a distribuição de matéria ou energia seja diferente. Homogeneidade significa que, em grande escala, cada região do universo se assemelha a qualquer outra região. Consequentemente, os fluxos transversais de energia e momento, que seriam representados por termos não diagonais no tensor, estão ausentes, pois não há movimento privilegiado ou fluxo de energia em uma direção específica. Somente as densidades de energia e as pressões nas direções espaciais, que são uniformes e não variam com a direção, aparecem na matriz do tensor energia-impulso, explicando sua forma diagonal.

Então, ao introduzir a pressão radiativa induzida por cada entidade :

$$p_r^{(g)} = \frac{\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2}{3}, \quad p_r^{(h)} = \frac{\rho_r^{(h)}(c^{(h)})^2}{3}$$

Podemos então considerar que a entidade transportada pela métrica h chamada energia escura e matéria escura, poderia ser atribuída a massas negativas que, na fase radiativa, obedeceriam à mesma equação de estado:

$$\beta^{(h)} = \frac{\alpha^{(h)}}{3}$$

Sob essas condições, a relação de conservação é sempre expressa, em sua forma radiativa, pela conservação da soma das duas energias, a do gás de fótons e a das massas negativas:

$$\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 + \alpha^{(h)}(a^{(h)})^4 = \rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 = \text{Constante}$$

A solução exata do sistema, para os índices de curvatura $k^{(g)} = k^{(h)} = -1$ e $\Gamma^{(f)} = -\frac{8\pi G}{c^4}$ onde $f \in \{g, h\}$ torna-se uma solução das seguintes equações :

$$a^{(g)^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} = \frac{\Gamma^{(g)}}{2} E$$

$$a^{(h)^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} = -\frac{\Gamma^{(h)}}{2} E$$

Se assumirmos que $E < 0$ então $a^{(g)} > 0$ e $a^{(h)} < 0$. Portanto, podemos concluir que a parte visível do nosso universo está acelerando, enquanto as espécies negativas estão desacelerando. Aqui observamos o efeito da espécie negativa dominante, que leva ao fenômeno de aceleração da expansão cósmica, pois o lado direito da primeira equação se torna positivo ((Petit e D'Agostini 2021b)):

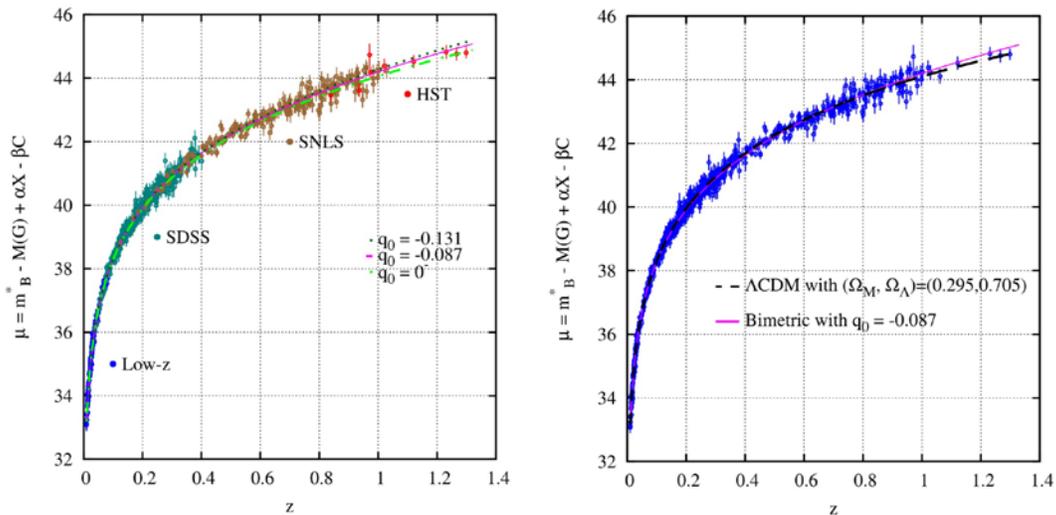


Figura 3.11 - Diagrama de Hubble dos dois modelos (redshift linear)

Esse sistema de duas espécies permite consolidar os efeitos atribuídos à matéria escura e à energia escura em uma única entidade composta de massas negativas que combina as duas ações, conforme ilustrado no diagrama a seguir:

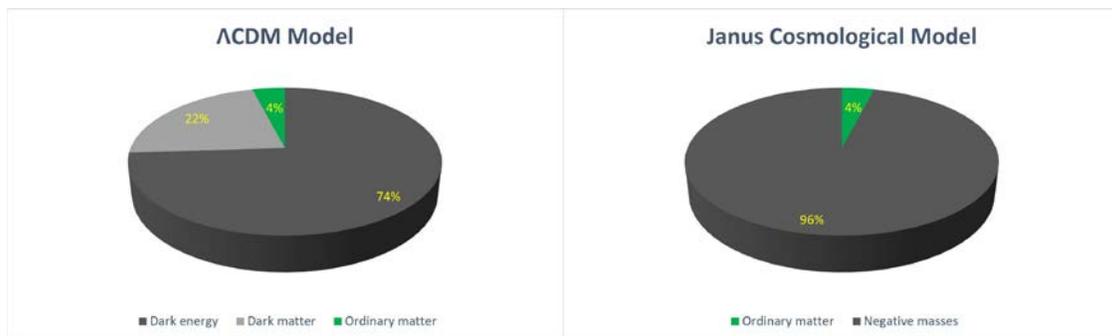


Figura 3.12 - Modelos do universo

3.3.4. 2Verificação local de um sistema estacionário

Ao estudar o universo, muitas vezes simplificamos os modelos para torná-los mais gerenciáveis. Uma simplificação comum é considerar uma pequena região do espaço como efetivamente vazia e isolada das vastas complexidades do cosmos. Essa abordagem é particularmente útil quando estamos interessados em fenômenos que ocorrem em curtos períodos de tempo, muito mais curtos do que as escalas de tempo em que o próprio universo muda. Nesses casos, podemos usar métricas "*independentes do tempo*", o que significa que presumimos que a estrutura do espaço não muda com o tempo durante nossa observação.

Para aumentar um pouco a complexidade, às vezes introduzimos o que é conhecido como "*perturbações*" no modelo. Essas perturbações são pequenas alterações no espaço simples que estamos considerando. Elas nos permitem estudar como pequenas mudanças ou perturbações podem afetar o sistema. No nosso caso, essas perturbações são representadas por termos como $\gamma_{\mu\nu}^{(g)}$ e $\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$ que significam pequenos desvios na estrutura geométrica do espaço, possivelmente representando diferentes aspectos ou componentes do universo.

$$g_{\mu\nu}^{(g)} = \eta_{\mu\nu}^{(g)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(g)}, \quad g_{\mu\nu}^{(h)} = \eta_{\mu\nu}^{(h)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$$

Para as métricas, temos :

$$(ds^{(g)})^2 = (c^{(g)})^2 dt^2 - (a^{(g)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

$$(ds^{(h)})^2 = (c^{(h)})^2 dt^2 - (a^{(h)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

Em cosmologia, quando falamos de "*condições quase estacionárias*", estamos nos referindo a uma situação em que se supõe que determinados aspectos do universo sejam relativamente constantes durante o período que estamos estudando. Mais especificamente, nesse contexto, supõe-se que os "*fatores de escala*" do universo, que descrevem como o tamanho do universo muda com o tempo, sejam constantes. Essa é uma aproximação útil para estudar determinados fenômenos de curto prazo.

Para investigar a física desse cenário, usamos o que é conhecido como uma "*expansão em série*" das equações de campo. Essa é uma técnica matemática em que dividimos equações complexas em partes mais simples e gerenciáveis. No entanto, nos concentramos apenas nas partes mais significativas - nesse caso, ignoramos os termos de ordem dois e superiores, pois eles têm impacto mínimo sobre os resultados de cenários de pequena escala ou de curto prazo.

As duas equações simplificadas resultantes descrevem o comportamento das perturbações nesse universo quase estacionário. Essas equações envolvem termos como $\varepsilon\gamma_{00}$ e $\delta\rho$ que representam pequenas mudanças na geometria do espaço e na densidade da matéria, respectivamente.

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(g)} = -\Gamma^{(g)} \left[\delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}} \right)^3 \delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(h)} = \Gamma^{(h)} \left[\delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 \right]$$

Além disso, definimos "*potenciais gravitacionais*" para cada componente do universo, denotados por $\psi^{(g)}$ e $\psi^{(h)}$. Esses potenciais estão relacionados a mudanças na geometria do espaço e são fundamentais para entender os efeitos gravitacionais em diferentes regiões ou componentes do universo (como (36)).

$$\psi^{(g)} = \frac{(c^{(g)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(g)}, \quad \psi^{(h)} = \frac{(c^{(h)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(h)}$$

Obtemos :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(g)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = -\Gamma^{(g)} \frac{(a^{(g)})^2}{2} \left[\delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = \Gamma^{(h)} \frac{(a^{(h)})^2}{2} \left[\delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 \right]$$

Na física, especialmente no estudo do espaço e do universo, como vimos nesta seção 2.3.8, as "*equações geodésicas*" descrevem como os objetos se movem sob a influência da gravidade. Em termos simples, essas equações nos dizem o caminho que um objeto seguirá quando estiver se movendo apenas sob a influência da gravidade. Por exemplo, como os planetas orbitam as estrelas ou como os objetos caem na Terra.

Em nosso cenário, estamos lidando com duas camadas (ou folhas) diferentes do universo, cada uma com suas próprias propriedades. A primeira camada, que podemos considerar como o universo da matéria comum, segue um conjunto de regras. A segunda camada de massas negativas, associada à matéria escura e à energia escura, segue outro conjunto de regras.

As duas equações a seguir são a maneira de expressar matematicamente como os objetos se moveriam nessas duas camadas diferentes (a camada de matéria comum e a de massas negativas, respectivamente). Essas equações se assemelham à equação clássica de Poisson na física, que é usada para descrever campos gravitacionais. Entretanto, as equações têm uma característica especial: elas levam em conta as diferentes "*velocidades da luz*" em cada camada. Essa modificação é fundamental para a exploração de teorias que vão além do nosso entendimento padrão da física.

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(g)})^2} \frac{\partial \psi^{(g)}}{\partial \xi_\alpha}$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(h)})^2} \frac{\partial \psi^{(h)}}{\partial \xi_\alpha}$$

As leis de interação que escolhemos garantem que as entidades das camadas estruturadas pelas métricas g e h são mutuamente exclusivas (3.13).

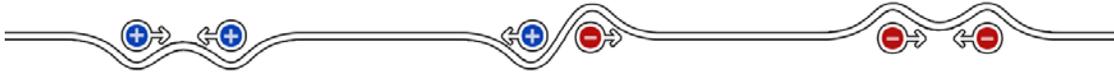


Figura 3.13 - Leis da ação inter entre massas

Consequentemente, podemos considerar uma região em que apenas uma das duas entidades está presente. Concentrando-nos no quadro de referência estruturado pela métrica g que é povoado por matéria comum, como no sistema solar, o sistema de equações de campo acoplado se simplifica para :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)}T_{\mu\nu}^{(g,g)}$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)}\sqrt{\frac{|g|}{|h|}}T_{\mu\nu}^{(g,h)}$$

A primeira equação pode ser identificada com a equação de Einstein sem a constante cosmológica Λ . Essa equação representa o Modelo Padrão de gravidade para a matéria comum. A segunda equação captura o que poderíamos chamar de "efeito de geometria induzida". Ela descreve como a geometria do espaço, influenciada pela presença de matéria comum em uma esfera de raio r e densidade $\rho^{(g)} = \rho$ afeta as geodésicas da camada de massa negativa. Consequentemente, podemos deduzir que esse modelo bimétrico, no qual a matéria comum em uma camada interage com massas negativas localizadas em uma segunda, está de acordo com os testes padrão da relatividade geral em nível local. No entanto, ainda é crucial verificar a coerência desse sistema sob condições estacionárias e não homogêneas.

3.3.4.3 Natureza da antimatéria primordial

Seguindo as propostas de Sakharov em (Sakharov 1967), (Sakharov 1980) e (Sakharov 1979), suponha que o par matéria/antimatéria na primeira camada do nosso universo seja formado por quarks e antiquarks de energia positiva. Ao mesmo tempo, um par de matéria/antimatéria em uma segunda camada seria formado por quarks e antiquarks de energia negativa. Se a síntese de matéria na primeira camada (o primeiro par) fosse mais rápida, enquanto a síntese de antimatéria na segunda camada (o segundo par) fosse mais lenta, isso poderia levar à hipótese de que os objetos localizados no centro dos grandes vazios na estrutura de grande escala do universo, conforme indicado pelo fenômeno do repulente de dipolo, são compostos de antimatéria. Essa antimatéria inclui antiprótons, antineutrons e antielétrons com energia negativa, ou seja, massas negativas ((J. M. Souriau 1997)). Esses últimos poderiam formar objetos esféricos compostos de anti-hidrogênio (elementos leves) com propriedades repulsivas semelhantes às imensas protoestrelas formadas durante a fase radiativa primordial (no início do universo).

A rede lacunar de massa positiva confina esse espaço de densidade negativa, impedindo sua fusão. Por outro lado, esses conglomerados de massa negativa atuam como pontos de ancoragem para essa rede porosa no universo de massas positivas, garantindo a estabilidade geral.

As estrelas de massa positiva inicialmente se assemelham a aglomerados esferoidais de gás, aquecidos a temperaturas entre 1.000 e 2.000°C. Essas protoestrelas esfriam gradualmente, emitindo radiação principalmente nos espectros vermelho e infravermelho. Para se transformar em estrelas completas, a matéria e os gases devem sofrer contração gravitacional, atingindo temperaturas e densidades altas o suficiente para iniciar reações de fusão termonuclear. Esse processo de contração libera energia térmica, que é irradiada na superfície da estrela em forma eletromagnética, incluindo a luz visível. Essa liberação de energia é proporcional ao quadrado do raio da estrela. Estrelas maiores têm superfícies maiores e podem dissipar mais calor. Entretanto, a quantidade de calor produzida é proporcional ao cubo do raio da estrela, associado ao seu volume. Portanto, para estrelas muito grandes, a taxa de resfriamento pode ser relativamente lenta e pode levar um tempo considerável para que a temperatura atinja o limite necessário para desencadear as reações de fusão termonuclear que permitem que a estrela brilhe.

Em nosso mundo positivo, considera-se que as reações de fusão nuclear podem começar no coração de uma protoestrela quando a temperatura atinge um nível ótimo de cerca de 10 milhões de graus Celsius. É nessa temperatura que os núcleos de hidrogênio, que constituem a maior parte da matéria na protoestrela, adquirem energia cinética suficiente para superar a barreira eletrostática devido à sua carga positiva. Quando essa barreira é superada, os núcleos de hidrogênio podem se fundir para formar hélio, liberando uma quantidade considerável de energia radiante e térmica. Essa temperatura ideal permite uma reação de fusão nuclear mais eficiente, produzindo o brilho característico das estrelas.

Por exemplo, uma protoestrela de massa negativa muito maciça e muito quente pode levar muito tempo para esfriar o suficiente para que as reações de fusão comecem, porque o processo de contração da protoestrela deve gerar calor suficiente para compensar a perda de calor na superfície.

Como resultado, essas protoestrelas de massa negativa muito maciça têm tempos de resfriamento tão longos que nunca entrarão em combustão (excedendo a idade do universo). Como resultado, nenhuma galáxia, nenhum elemento pesado, nenhuma molécula ou qualquer outra forma de matéria necessária para o desenvolvimento da vida no mundo negativo pode se formar.

3.3.4. 4 Simulações digitais 2D

Foram realizadas simulações numéricas bidimensionais usando dois conjuntos de 5.000 pontos de massa, representando aglomerados de matéria comum (densidade populacional $\rho^{(g)}$) e massas negativas (densidade populacional $\rho^{(h)}$).

Foi mantida uma assimetria significativa entre as duas populações, com $|\rho^{(h)}|$ sendo muito maior do que $\rho^{(g)}$. Além disso, as distribuições de velocidade térmica Maxwelliana 2D foram aplicadas a ambos os conjuntos, com a velocidade média da distribuição de massa negativa sendo quatro vezes maior do que a da matéria comum.

Essas simulações revelaram uma estrutura lacunar de massas negativas nos centros dos grandes vazios na estrutura de grande escala do universo. Como os tempos de Jeans variam inversamente com a raiz quadrada da densidade, o tempo de desenvolvimento da distribuição de massa negativa é mais curto. Isso leva à formação de uma rede regular de conglomerados esferoidais. A distribuição de matéria comum, portanto, é forçada a ocupar o espaço restante, levando a uma estrutura lacunar semelhante a um conjunto de bolhas de sabão unidas em simulações tridimensionais. Esse modelo também foi observado por Brennen em 1995 (Brennen 1995) (Figuras 3.14 e 3.15), conforme citado por El-Ad em 1997 ((El-Ad, Piran e Costa 1997)).

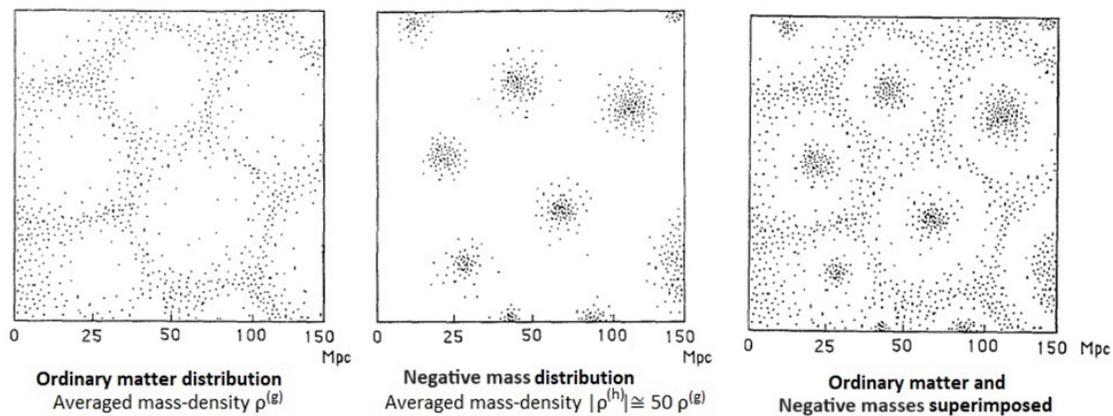


Figura 3.14 - Distribuição de matéria comum e massa negativa quando $|\rho^{(h)}| \gg \rho^{(g)}$

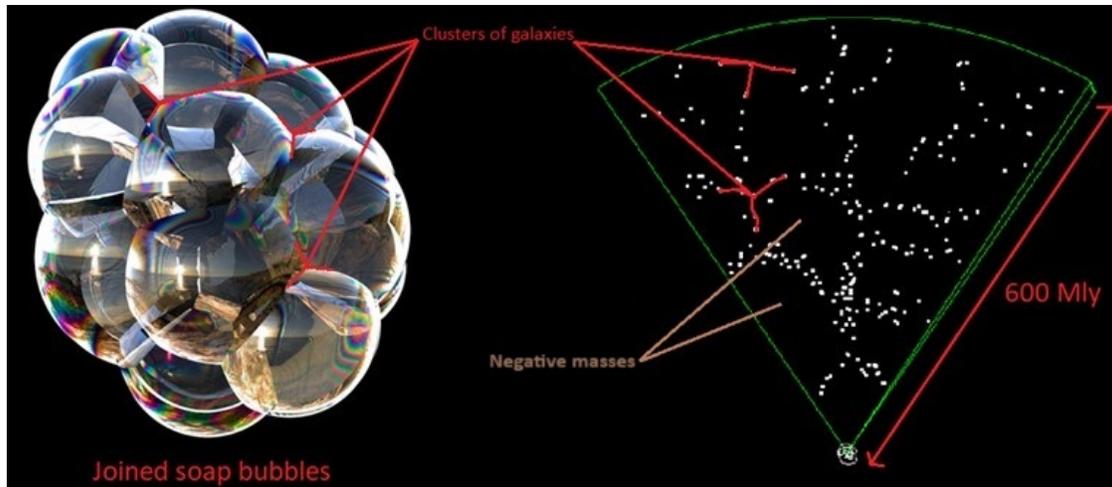


Figura 3.15 - Estrutura lacunar esferoidal ture

É importante considerar que, na estrutura de massa negativa, não temos dados observacionais para comparar com possíveis previsões numéricas, exceto pelos efeitos geométricos induzidos por essa estrutura de referência (a de massa negativa) por meio de fenômenos de lente gravitacional, conforme estruturado pela métrica $g_{\mu\nu}$.

Conseqüentemente, a pressão derivada da equação diferencial TOV (Tolman - Oppenheimer - Volkoff) ((Adler, Bazin e Schiffer 1975)) no espaço-tempo estruturado pela métrica $h_{\mu\nu}$ sempre permanecerá hipotética. Conseqüentemente, não é prático tentar estruturar o tensor de interação $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ da segunda equação de campo (34b). De fato, nunca poderemos comparar os resultados obtidos pelo cálculo das geodésicas de $h_{\mu\nu}$ com dados observacionais relacionados ao movimento de partículas de massa negativa. Em vez disso, temos de trabalhar com uma função $\beta(r)$ (não vinculada à pressão negativa) apenas para garantir a existência de uma solução nesse quadro de referência. O aspecto mais importante é garantir que a derivada covariante de seu tensor de interação seja zero (37).

Para entender completamente esse efeito da geometria induzida, precisamos nos colocar no contexto do sistema com duas equações de campo acopladas do modelo. É importante lembrar que isso estrutura uma hipersuperfície 4D de acordo com duas métricas associadas a duas camadas distintas de espaço-tempo. Cada tipo de massa está associado à sua própria métrica, o que implica que uma massa sempre cria uma curvatura positiva no espaço-tempo de acordo com sua própria métrica (onde a massa emite fótons de energia visível) e sempre uma curvatura negativa na métrica conjugada (onde a massa emite fótons de energia invisível), como pode ser visto na figura 3.16 a seguir.

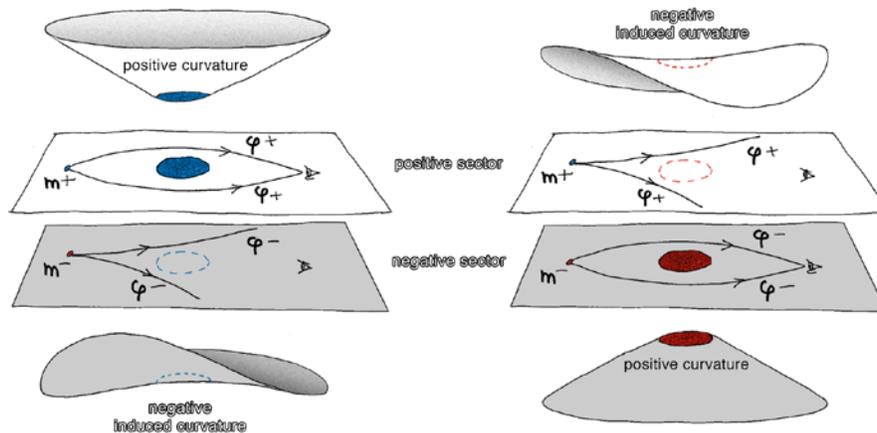


Figura 3. 16 - Efeito de geometria induzida

À esquerda da Figura 3.16, o objeto azul maciço pertencente ao universo positivo cria uma curvatura positiva. Como resultado, ele produz um efeito de lente gravitacional positiva na imagem de uma pequena massa positiva m^+ causando fótons de energia positiva ϕ^+ ao redor do objeto azul maciço. Entretanto, esse objeto maciço induz uma curvatura negativa no universo negativo. Consequentemente, embora seja invisível, sua massa aparente no universo negativo é sentida como negativa.

Por outro lado, à direita da Figura 3.16, o objeto vermelho maciço pertence ao universo negativo. Ele cria uma curvatura positiva com relação ao seu próprio quadro de referência (e não uma curvatura negativa). Esse objeto maciço induz uma curvatura negativa que é percebida em nosso universo, embora seus fótons de energia sejam invisíveis. Portanto, concluímos que sua massa aparente é negativa. Isso ocorre porque ele produz um efeito de lente gravitacional negativa na imagem de uma pequena massa m^+ causando fótons de energia positiva ϕ^+ ao redor do objeto negativo maciço invisível, cujo efeito gravitacional está sempre presente.

Podemos deduzir vários corolários do conceito de massa negativa:

- Basicamente, não há massa negativa (e, portanto, não há energia negativa). Pelo menos, a "negatividade da massa" (e a "negatividade da energia", porque as duas estão obviamente ligadas) não é uma propriedade física intrínseca de uma "partícula de massa negativa". De fato, a "negatividade" ou "positividade" da massa é simplesmente uma quantidade de curvatura medida localmente no espaço-tempo por um observador. O sinal dessa curvatura é relativo ao quadro de referência da hipersuperfície ou métrica na qual essa massa é medida. Trata-se, de fato, de uma massa aparente cuja presença só é revelada pela curvatura que ela induz no espaço-tempo.

Em outras palavras, todas as partículas com massa no universo têm massa inercial exclusivamente positiva, mas sua massa gravitacional é relativa. O sinal de sua massa gravitacional é oposto (positivo ou negativo), dependendo da perspectiva adotada: uma massa distorce o espaço-tempo em sua própria métrica, induzindo uma certa

quantidade de curvatura que é sempre positiva. No entanto, ela será percebida como massa aparente no universo oposto, a partir do qual um observador perceberá essa curvatura como negativa. Isso se deve à natureza acoplada das equações de campo e resulta em um efeito chamado de *curvaturas conjugadas*. Isso poderia ser descrito como "*a mesma massa induzindo duas curvaturas opostas*".

Por exemplo, a Terra, conforme vista de nosso quadro de referência, tem massa positiva. Por algum processo desconhecido, imagine que você pudesse reverter sua energia (reverter sua massa). A Terra (e todas as estrelas no céu) desapareceria porque você não seria mais capaz de perceber fótons de energia positiva. No entanto, você ainda pode perceber e medir a curvatura que ela continua a induzir no espaço-tempo. Ao fazer isso, você detectaria que a Terra, agora invisível, tem massa negativa.

Entretanto, não existem universos distintos de energias positivas e universos de energias negativas. Trata-se simplesmente de uma escolha arbitrária de nomenclatura. Os dois são equivalentes. Por convenção, chamamos o setor em que vivemos de universo positivo. A inversão da seta do tempo não significa que começamos a viver "*de cabeça para baixo*" e nos tornamos mais jovens. Ela se manifesta fisicamente pela inversão das energias das partículas. Mais uma vez, essa inversão é uma observação relativa. Na prática, ela se traduz em uma mudança para o universo oposto.

- É importante observar que as partículas de energia negativa (e seus fótons) não podem ser detectadas por instrumentos ópticos porque seguem geodésicas de sua própria métrica $h_{\mu\nu}$ distintas das geodésicas de nossa métrica $g_{\mu\nu}$. Portanto, há dois conjuntos de geodésicas que nunca se "*cruzam*". Como as espécies de energia positiva e de energia negativa não podem se ver e evoluem ao longo de duas famílias distintas de geodésicas, os dois quadros de referência de espaço-tempo nos quais elas residem são chamados de quadro de referência de massa positiva e quadro de referência de massa negativa, respectivamente. Portanto, são dois quadros de referência dentro da mesma hipersuperfície 4D, estruturados por duas equações de campo acopladas, em vez de uma única. Entretanto, mesmo que as massas negativas sejam invisíveis para nós porque não interagem eletromagneticamente com o nosso universo e não trocam fótons, elas só revelam sua presença por meio de um efeito antigravitacional, porque induzem curvaturas opostas no espaço-tempo.
- As massas negativas estão espalhadas pelo universo, mas suas proporções variam de acordo com a região do espaço em que nos encontramos, e elas existem apenas para contribuir para sua estabilidade por meio de um efeito antigravitacional. O universo é definido por um único espaço-tempo estruturado por duas métricas que nos permitem medir o comprimento ou a distância entre dois pontos nesse espaço-tempo de duas maneiras diferentes, usando dois conjuntos distintos de pontos de referência (três pontos de referência espaciais e um ponto de referência temporal). Para fins didáticos, podemos pensar nesse espaço-tempo como uma folha de papel com duas grades diferentes em cada uma das duas páginas.

3.3.5 Perspectivas para o futuro

A abordagem científica para entender um fenômeno pode ser resumida pela capacidade de reproduzi-lo e medi-lo. É importante observar que é totalmente possível demonstrar o fenômeno da inversão de massa em laboratório invertendo uma quantidade infinitesimal de matéria, desde que seja possível induzir uma perturbação significativa nessa matéria produzindo parâmetros eletromagnéticos da ordem de várias dezenas de milhões de teslas em um período muito curto, usando explosivos, por exemplo. A União Soviética já havia produzido 100 milhões de amperes ao comprimir um fluxo magnético usando explosivos na década de 1950, usando um gerador magneto-cumulativo ((Pavlovskii 1994)). Seria então possível demonstrar essa inversão de massa medindo as ondas gravitacionais emitidas e detectadas pelos interferômetros a laser Virgo e Ligo.

A unificação da Teoria da Relatividade com a Mecânica Quântica só seria possível por meio da quantização da gravidade. Entretanto, não há nenhum conceito de quantização da energia na Teoria da Relatividade, com exceção da equivalência massa-energia, porque a equação de campo de Einstein não descreve fundamentalmente as partículas. É por isso que a teoria das cordas é a única abordagem contemporânea aceita e aceitável para preencher a lacuna entre a Relatividade e a Mecânica Quântica. Entretanto, essa unificação é impossível seguindo essa abordagem porque a Mecânica Quântica considera as forças em termos de campos, e uma partícula é necessária nesses campos para transmitir a interação. Por exemplo, o fóton é a partícula elementar que transmite o campo eletromagnético, e sua quantificação é possível graças à inclusão de cargas elétricas positivas e negativas. Por outro lado, a única partícula que emerge da teoria das cordas para transmitir a gravidade é o gráviton, mas essa pseudopartícula nunca foi observada experimentalmente. De fato, o conceito de gravidade quântica permanece especulativo nesse modelo. Uma conjectura alternativa para quantificar a gravidade na escala quântica seria considerar a existência de massas de sinais opostos que exibem propriedades repulsivas no modelo computacional, semelhante ao modelo de fótons com cargas elétricas de sinais opostos para transmitir a interação.

4 Contribuição para a cosmologia e a física de partículas

4.1 Introdução aos grupos dinâmicos

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos é um ramo da matemática que se concentra no estudo do movimento e da mudança ao longo do tempo. Seu objetivo é entender como os sistemas evoluem em função de suas condições iniciais e das forças externas que atuam sobre eles. A Geometria Simplética é uma integração da teoria dos sistemas dinâmicos e da geometria diferencial, que estuda as formas e as propriedades dos espaços curvos, em particular como esses espaços se deformam e se curvam sob a influência de forças externas. Esse campo, que tem suas raízes na mecânica hamiltoniana, examina objetos matemáticos chamados de "variedades simpáticas", que têm uma estrutura exclusiva que permite a medição de tamanhos. Diferentemente da geometria Riemanniana, que usa um tensor métrico para medir comprimentos e ângulos, a geometria simpática usa uma forma matemática chamada

"forma simpática" para medir áreas.

Jean-Marc Souriau foi um dos principais pioneiros da geometria topológica simpática. Ele desenvolveu o conceito de quantificação geométrica, transformando quantidades físicas fundamentais, como energia e momento, em objetos puramente geométricos. O trabalho de Souriau deu significado físico à inversão da seta do tempo em nosso modelo cosmológico ((Bergmann e Einstein 1938), (Kaluza 1921)).

O que é um grupo?

Em termos matemáticos, ela se refere a certas matrizes agindo sobre outras matrizes. Mas, fisicamente, o que ela representa?

De acordo com J-M Souriau, um grupo é criado para ser transportado, e o método de transporte é mais significativo do que a entidade transportada: *"Diga-me como você se move e eu lhe direi quem você é"*.

Nosso foco principal são os grupos de Lie (consulte (Bourbaki 2006)), que são tanto grupos quanto variedades diferenciais ("*espaços curvos*" projetados localmente em um espaço euclidiano n -dimensional). Eles são essenciais para descrever movimentos e transformações no espaço. Dois grupos importantes são o grupo ortogonal $O(3)$ e o grupo euclidiano $E(3)$:

- **O grupo ortogonal $O(3)$** é usado para descrever rotações e simetrias em três dimensões, preservando as distâncias no espaço. Ele inclui um subgrupo crucial chamado $SO(3)$, o grupo de rotação, que lida com as rotações em torno de um eixo.
- **O grupo euclidiano $E(3)$** descreve movimentos tridimensionais, como rotações, simetrias e translações. Com base no grupo ortogonal $O(3)$, ele pode ser decomposto em uma força e um torque aplicados a um objeto na mecânica dos sólidos. Esse é um grupo no qual o teorema de Pitágoras pode ser usado para calcular a distância entre dois pontos. Esse grupo transforma um ponto com coordenadas x, y, z em um novo ponto com coordenadas x', y', z' . O recurso exclusivo desse grupo dinâmico é sua capacidade de gerar uma família de objetos geométricos invariantes dentro do grupo. Por exemplo, uma linha sujeita à translação continua sendo uma linha, o que a torna um objeto geométrico invariante unidimensional. Uma esfera é um exemplo perfeito de um objeto simétrico tridimensional. Sua propriedade exclusiva é que ela permanece inalterada sob rotações em torno de seu centro, demonstrando simetria rotacional. Em termos geométricos, isso significa que uma esfera passa por si mesma durante qualquer movimento de rotação, mantendo suas propriedades geométricas de forma consistente em todos os pontos. Na física, especialmente no estudo do espaço-tempo na relatividade geral, a solução de Schwarzschild é um conceito importante. Ela descreve o campo gravitacional fora de uma massa esfericamente simétrica e não rotativa, como um buraco negro. A métrica de Schwarzschild, uma solução das equações de campo de Einstein, é invariante sob rotações e translações no tempo e no espaço, assemelhando-se à invariância observada na geometria

euclidiana, mas aplicada ao espaço-tempo curvo da relatividade geral. No espaço-tempo de Schwarzschild, as geodésicas são determinadas pela curvatura do espaço-tempo, que é descrita pela métrica de Schwarzschild. Para um objeto que se move ao longo de uma geodésica, certas quantidades, como seu momento angular e sua energia em relação à massa que causa a curvatura do espaço-tempo, são conservadas. Essa conservação é o resultado das simetrias do espaço-tempo, análogas às leis de conservação da mecânica clássica.

Portanto, os grupos de Lie descrevem os movimentos no espaço, preservando as distâncias e os comprimentos. Eles são grupos de isometria quando as propriedades geométricas dos objetos em movimento permanecem inalteradas (distâncias e ângulos) no espaço durante uma transformação. As rotações são exemplos de simetrias no espaço tridimensional, pois não alteram as propriedades geométricas do espaço. Por exemplo, a rotação de um cubo não altera as distâncias entre seus vértices. Em outras palavras, as propriedades geométricas do objeto permanecem inalteradas, mesmo que sua posição tenha sido alterada.

De acordo com a teoria da relatividade especial, em vez de viver em um espaço euclidiano tridimensional $[x, y, z]$ com uma assinatura $(+ + +)$ onde o tempo é uma entidade separada, na verdade existimos em um espaço-tempo quadridimensional onde as três dimensões espaciais são perpendiculares a uma dimensão temporal $[t, x, y, z]$ chamado espaço de Minkowski, cuja assinatura é $(- + + +)$.

O grupo dinâmico associado a esse espaço é o grupo Poincaré. Ele permite a geração de movimentos especiais, como o movimento de partículas sem massa, como os fótons (que nunca estão em repouso, mas sempre se movem à velocidade da luz, não são afetados pela gravidade em termos de velocidade, apenas modificáveis em energia) e uma família de partículas de massa diferente de zero. Esse grupo dinâmico, aplicado à relatividade especial, inclui o movimento de massas ou fótons com uma possível inversão da seta do tempo, ou seja, do passado para o futuro e vice-versa, e pode ser representado em forma de matriz da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Onde L é a matriz do grupo de Lorentz que descreve como as coordenadas do espaço-tempo mudam entre diferentes quadros de referência inerciais. Essas transformações incluem rotações no espaço, bem como transformações de Lorentz (boosts), que são mudanças de quadros de referência que se movem em uma velocidade constante em relação um ao outro. C é um vetor correspondente às translações do espaço-tempo em $\mathbb{R}^{1,3}$.

Na verdade, metade dos elementos do grupo dinâmico inverte o tempo, o que significa que, se considerarmos um elemento do espaço-tempo, como uma massa ou um fóton, e aplicarmos um movimento temporal do passado para o futuro, poderemos realizar o mesmo movimento na direção oposta usando o grupo de Poincaré. Portanto, de acordo com a teoria de Souriau em seu trabalho "*Structure of Dynamic Systems*" ((Kaluza 1921)), se o grupo dinâmico puder fazer com que fótons ou massas se movam com uma seta do tempo na direção oposta, então sua energia e, portanto, sua massa, também podem ser revertidas.

Nota: O grupo Poincaré restrito lida exclusivamente com o movimento relativístico "ortocrono" em quatro dimensões do espaço de Minkowski, passando do passado para o futuro. Sua forma de matriz inclui a submatriz de Lorentz L_0 como segue:

$$\begin{pmatrix} L_0 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos agora considerar esses movimentos com energia e massa negativas e uma seta do tempo oposta como parte da Física? Eles podem ser medidos ou observados?

As partículas com energia negativa emitem fótons de energia negativa, portanto não podem ser observadas ou medidas opticamente. No entanto, foi observado e medido que a expansão do universo está se acelerando por causa da pressão negativa ligada à energia escura ((Perlmutter et al. 1999)). A pressão é uma densidade de energia por unidade de volume.

Portanto, a expansão do universo está diretamente ligada à energia negativa. Isso sugere que uma parte substancial do universo, atualmente definida como matéria escura com energia escura, afeta essa expansão por meio do efeito gravitacional. Essa abordagem dinâmica e geométrica, portanto, fornece uma resposta para sua origem e natureza. Ela poderia conter massas ou fótons carregados com energia negativa.

4.2 Diversas simetrias associadas a cada operador de reversão

O grupo de Poincaré restrito lida com o movimento relativístico em quatro dimensões do espaço de Minkowski. O grupo de Poincaré é o grupo de acordo com a seguinte matriz :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde C é o vetor correspondente às translações espaço-temporais em $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Ele atua em pontos no espaço de Minkowski:

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Esse grupo de 10 dimensões é o grupo de isometria desse espaço, definido por sua métrica :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

O grupo de Lorentz de acordo com sua submatriz L pertencente ao espaço \mathcal{L} tem quatro componentes conectados:

- \mathcal{L}_n o componente neutro, não reverte nem o espaço nem o tempo.

- \mathcal{L}_s inverte o espaço.
- \mathcal{L}_t reverte o tempo, mas não o espaço.
- \mathcal{L}_{st} inverte o espaço e o tempo.

Os dois primeiros componentes são agrupados para formar o subgrupo conhecido como "ortocrono" ou grupo de Lorentz restrito:

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_n \cup \mathcal{L}_s$$

Os dois últimos componentes formam o conjunto "anticrônico", cujos componentes revertem o tempo:

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_t \cup \mathcal{L}_{st}$$

Observe que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &= -\mathcal{L}_s & \mathcal{L}_{st} &= -\mathcal{L}_n \\ \mathcal{L}_{st} &= -\mathcal{L}_n & \mathcal{L}_t &= -\mathcal{L}_s \end{aligned}$$

4.3 Grupo de dinâmica de Lorentz

A aplicação da ação conjunta de um grupo dinâmico ao dual de sua álgebra de Lie, iniciada pelo matemático Jean-Marie Souriau, esclareceu alguns aspectos da abordagem seguida na física. O grupo dinâmico de Lorentz restrito, limitado a seus dois componentes ortocronos, traduz aspectos da relatividade especial por meio de suas propriedades de invariância resultantes. Em 1970, J. M. Souriau estabeleceu que a análise dos componentes de seu momento destaca a natureza geométrica de um spin (não quantificado) ((J. M. Souriau 1964) (J. M. Souriau 1997)). O grupo de Lorentz tem dois componentes ortocronos conectados, a saber, seu primeiro componente neutro, contendo o elemento neutro do grupo, e seu segundo componente enantiomórfico, invertendo o espaço sinônimo da *simetria P*. Na teoria dos grupos dinâmicos, uma classificação em termos de movimentos torna-se óbvia. Nesse estágio, a ação desses elementos de inversão de espaço é ilustrada no fenômeno da polarização da luz, em que qualquer fóton "direito" pode ser convertido em um fóton "esquerdo". Esse grupo pode ser representado por uma família de matrizes 4×4 L definidas axiomáticamente como $L^T G L = G$ onde L^T é a transposição da matriz de Lorentz L e G é a matriz métrica de Minkowski, geralmente chamada de matriz de Gram nesse contexto. Na relatividade especial, ela é geralmente representada por uma matriz diagonal com elementos $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Essa equação significa que a transformação de Lorentz preserva o produto escalar de Minkowski, uma condição crucial para a coerência da teoria da relatividade especial.

4.4 Grupo dinâmico de Poincaré restrito

O produto do grupo de Lorentz com o grupo de translação espaço-temporal nos permite construir o grupo dinâmico de Poincaré restrito, sempre limitado a seus dois componentes ortocronos. Em seu momento, primeiro encontramos a energia relacionada ao subgrupo de

translações temporais. Em seguida, o impulso, ligado às translações espaciais, sendo os dois ligados pela invariância do módulo do quadri-vetor energia-impulso sob a ação do grupo de Lorentz. A matriz associada a esse grupo deve incluir a submatriz "ortocrônica" de Lorentz L_o de dimensão 3×3 bem como o vetor de translação C e componentes adicionais para completar sua estrutura (consulte (45)).

4.5 Grupos dinâmicos restritos de Kaluza e Janus

Ao adicionar uma translação ao longo de uma quinta dimensão ao grupo de Poincaré restrito, formamos um grupo de Lie que chamamos de *Grupo de Kaluza restrito* ((Bergmann, Bergmann e Einstein 1941), (Bergmann 1942), (Bergmann e Einstein 1938), (Kaluza 1921), (Klein 1926)). Esse grupo não é o grupo de Kaluza de 15 dimensões associado a uma variedade Lorentziana de 5 dimensões, mas um novo grupo de 5 dimensões que conta apenas as translações. Essa nova dimensão dá ao impulso um escalar adicional que pode ser identificado com a carga elétrica q que pode ser positiva, negativa ou zero, e que ainda não foi quantificada. Em seguida, demonstramos a translação geométrica de acordo com um escalar ϕ dando às massas uma carga elétrica invariante. Em seguida, introduzindo uma nova simetria que reflete a inversão da quinta dimensão, sinônimo da inversão do escalar de q à $-q$ dobramos o número de componentes conectados de 2 para 4. A ação sobre o momento então vincula essa nova simetria à inversão da carga elétrica q . Assim, derivamos o modelo geométrico de conjugação de carga ou *Simetria C*, que traduz a simetria matéria-antimatéria introduzida por Dirac. Portanto, é lógico chamar essa nova extensão de *Grupo de Janus Restrito*.

4.6 Dynamic Janus Group

Ao introduzir uma nova simetria no grupo anterior, que descrevemos como *Simetria T* e que converte a matéria em antimatéria com massa negativa - um conceito que poderíamos chamar de *antimatéria no sentido de Feynman* -, construímos o *Grupo Dinâmico de Janus*. Dessa forma, dobramos o número de componentes conectados de quatro para oito, agrupados em dois subconjuntos: "ortocrono", que mantém as propriedades de tempo e energia, e "anticrônico", que inverte o tempo e a energia. Como resultado, estamos destacando a tradução geométrica que consiste em dotar as massas de uma carga elétrica invariante. Como Jean-Marie Souriau, pioneiro na teoria dos grupos dinâmicos, demonstrou já em 1970 ((J. M. Souriau 1964), (J. M. Souriau 1997)), essa abordagem tornou possível conferir uma natureza puramente geométrica a elementos-chave que marcaram o progresso da física relativística.

Aqui está a matriz associada ao Grupo Dinâmico de Janus, a partir da qual é possível reconstruir todos os grupos de simetria:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^\mu & 0 & \phi \\ 0 & T^\lambda S^\nu L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{0,1\}, \phi \in \mathbb{R}, L \in \mathcal{L}, C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}$$

- **Simetria P:**

Devemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 0$ e $\nu = 1$ e então obteremos :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esse operador de simetria corresponde à inversão do espaço, em que um elemento do segundo componente conectado do grupo ortócrono é considerado. É essa simetria que inverte a helicidade de um fóton, transformando um "fóton direito" em um "fóton esquerdo", o que corresponde ao fenômeno da polarização da luz.

- **Simetria C:**

Devemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 0$ e $\nu = 0$.

A partir do elemento L_n do grupo de Lorentz restrito ortocronicamente, invertendo a quinta dimensão que carrega a carga elétrica q obtemos o operador "simetria C" ou "conjugação de carga" (quântica) :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

É essa simetria que representa a transformação "Matéria-Antimatéria".

- **Simetria T:**

Devemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 1$ e $\nu = 0$.

Essa operação remove a simetria C ($Jan_{11} = 1$) e a simetria P ($Jan_{22} = -L_s$) da seguinte forma:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_t & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simetria CP:**

Devemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 0$ e $\nu = 1$.

Essa operação adiciona a simetria C ($Jan_{11} = -1$) e a simetria P ($Jan_{22} = L_s$) da seguinte forma:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

NB: Isso também pode ser deduzido removendo-se a simetria T ($Jan_{22} = L_s$) da simetria CPT usando essa operação: **CP = T · CPT**

- **Simetria CPT:**

Devemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 1$ e $\nu = 1$.

Sabemos que o elemento L_n do grupo neutro não reverte nem o tempo nem o espaço, portanto o elemento $Jan_{22} = -L_n$ inverte tanto o espaço quanto o tempo para formar o operador de simetria *PT*. Entretanto, se adicionarmos a simetria *C* ($Jan_{11} = -1$), formamos o grupo *Janus CPT com simetria de carga* da seguinte forma:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simetria PT:**

Devemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 1$ e $\nu = 1$.

Ao remover a simetria *C* ($Jan_{11} = 1$) da simetria *CPT* usando essa operação : **PT = C · CPT**obtemos :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simetria de CT:**

Devemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 1$ e $\nu = 0$.

Ao remover a simetria *P* ($Jan_{22} = -L_s$) da simetria *CPT* seguindo essa operação : **CT = P · CPT**obtemos :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Operador neutro:**

Devemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 0$ e $\nu = 0$.

O objeto se move pelas cinco dimensões sem mudar sua natureza. Somente o elemento neutro do subgrupo "ortocrônico" é considerado ($Jan_{22} = L_n$) :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

É importante observar que Feynman considera que a aplicação da simetria *PT* ao movimento de partículas leva à criação de antimatéria pela aplicação da simetria *C*. Consequentemente, a simetria *PT* é equivalente à simetria *C*, o que significa que uma partícula de matéria "vista em um espelho" e que se move para trás no tempo é antimatéria.

Essa perspectiva decorre do trabalho de Weinberg, "*Quantum Field Theory*", na Seção 2.6, intitulada "*Inversion of Space and Reversal of Time*" ((Weinberg 2000)). De fato, uma escolha arbitrária é aplicada ao operador de inversão T , o que faz com que o operador CPT se torne a identidade.

Assim, dado que $CPT = I$ segue-se que $PT = PT \cdot I = PT \cdot CPT = C$. Portanto, a visão de Feynman baseia-se principalmente na mecânica quântica, em que os teóricos quânticos fazem escolhas a priori totalmente arbitrárias sobre os operadores P e T , limitados pela "*necessidade de evitar o surgimento de estados de energia negativa (considerados não físicos)*". Consequentemente, o operador P deve ser linear e unitário, e o operador T , antilinear e antiunitário. E para concluir, acrescentando na página 104 que: "*Não são conhecidos exemplos de partículas que forneçam representações não convencionais de inversões, portanto essas possibilidades não serão exploradas aqui. A partir de agora, será considerado que as inversões têm a ação convencional descrita na Seção 2.6*".

Os estados de energia negativa (associados à pressão negativa) existem porque são responsáveis pela aceleração da expansão cósmica, conforme evidenciado pelo trabalho de Perlmutter

, ganhador do Prêmio Nobel em 2011 ((Perlmutter et al. 1999)). Entretanto, na época do surgimento da teoria quântica de campos, esse fenômeno ainda não era conhecido.

Consequentemente, para Feynman, a presença do operador de reversão de tempo T em sua *simetria PT* global não leva à inversão de massa, mas transforma a matéria em antimatéria de massa positiva por inversão de carga via *simetria C*.

Do ponto de vista do grupo de Janus, a partir do movimento de uma partícula de massa positiva em um espaço de 5 dimensões, a *simetria C* (realizada pela inversão da quinta dimensão) transforma essa partícula (esse movimento) em uma antipartícula de massa positiva que podemos chamar de "*antipartícula do tipo Dirac*". Por outro lado, o PT aplicada a uma partícula produz uma antipartícula com energia e massa negativas, devido à *simetria T*, que pode ser chamada de "*antipartícula do tipo Feynman*". A equivalência $PT = C$ de acordo com Feynman não é mais aplicável.

4.7 Implicações

As contribuições significativas deste estudo afetam principalmente os campos da mecânica quântica e da cosmologia:

- Um aspecto notável **da mecânica quântica** é a inversão da energia e da massa de determinados objetos. Isso leva à exploração de duas categorias de antimatéria: um tipo de antimatéria com massa positiva resultante da *simetria C*, conhecida como *antimatéria no sentido de Dirac*, é aquela produzida em laboratório e recentemente demonstrou se comportar da mesma forma que a matéria comum sob a influência da gravidade ((Anderson 2023)). A outra, originada da *simetria PT* com massa negativa, conhecida como *antimatéria no sentido de Feynman*, corresponde à antimatéria primordial localizada entre as galáxias e é encontrada, em particular, na forma de conglomerados no *Grande Defletor* ((Hoffman et al. 2017)). Surge uma questão intrigante sobre a possibilidade de objetos com massa e energia negativas na física. Tais entidades sugeririam a presença de estados de energia negativa na mecânica quântica. Ao lidar com a *simetria T*, os físicos quânticos tradicionalmente adotam

uma perspectiva antilinear e antiunitária para o operador T , a fim de excluir estados de energia negativa, que geralmente são considerados não intrínsecos à física. Da mesma forma, um operador P é escolhido como unitário e linear por motivos semelhantes (consulte (Weinberg 2000)). Essas escolhas sustentam o teorema CPT, reforçando a ideia de que a *simetria PT* se alinha com a *simetria C*. Por outro lado, a adoção de um operador T linear e unitário revela que os estados de energia negativa são um resultado natural nas equações de Schrödinger e Dirac (consulte (Debergh et al. 2018)), abrindo caminho para novas áreas de pesquisa. Além disso, as observações cosmológicas confirmaram que a expansão do universo está acelerando, atribuída à pressão negativa associada à energia escura, conforme evidenciado pelo trabalho de Perlmutter, ganhador do Prêmio Nobel em 2011. Como a pressão representa uma densidade de energia por unidade de volume, esse fenômeno está diretamente ligado à energia negativa que influencia a expansão do universo.

- **No campo da cosmologia**, a relatividade geral rejeita firmemente o conceito de massas negativas, citando o surgimento do fenômeno de escape e os conflitos com os princípios de ação-reação e equivalência (consulte (Bondi 1957)). Consequentemente, qualquer novo modelo que proponha a integração de energia negativa e estados de massa exigiria uma extensão da estrutura geométrica fundamental da relatividade. A teoria dos grupos dinâmicos, centrada em vários grupos, como Lorentz, Poincaré e Kaluza, fornece uma estrutura para descrever um universo livre de força caracterizado por uma estrutura plana e não curva. Nesse universo, as partículas seguem as geodésicas do espaço de Minkowski em uma métrica Lorentziana ou navegam em um espaço fibrado influenciado por uma quinta dimensão, seja ela aberta ou fechada. Essa abordagem teórica sugere a coexistência de dois tipos distintos de matéria, que existem isoladamente, sem interação mútua. As partículas nesses espaços não interagem umas com as outras. Essa perspectiva inovadora abre novas maneiras de entender as interações entre partículas, espaço e tempo.

5 Interpretação alternativa do modelo de buraco de minhoca acoplado a uma fonte branca como uma *membrana unidirecional*

O estudo da métrica exterior desenvolvida por K. Schwarzschild em 1916, como uma solução para a equação de Einstein no vácuo, revela a introdução de uma hipótese: a invariância por simetria temporal de $t \rightarrow -t$ comumente conhecida como "*estaticidade*". Essa suposição, que não tinha base física comprovada na época, levou à eliminação de um termo cruzado $dr dt$ na métrica. Assim, foi feita uma escolha arbitrária de coordenadas, marcada especificamente pela ausência desse termo cruzado $dr dt$. O objetivo deste estudo é explorar as possibilidades físicas de uma nova abordagem baseada na introdução de um termo cruzado $dr dt$ na métrica e demonstrar a possibilidade de construir um buraco *de minhoca* e uma *fonte branca* como uma *membrana unidirecional*, conectando dois espaços semi-Riemannianos *PT-simétricos* por meio de uma "*ponte*" que só pode ser atravessada em uma direção.

5.1 Soluções da equação de Einstein que refletem diferentes topologias

Em 1916, Karl Schwarzschild publicou dois artigos sucessivos ((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a)). O primeiro apresentava a construção da solução para a equação de Einstein no vácuo, com base nas seguintes suposições:

- *Estacionariedade*: Independência dos termos da métrica com relação à coordenada de tempo, ou seja, invariância por translação de tempo.
- *Isotropia* e simetria esférica, ou seja, invariância por $SO(3)$.
- Nenhum termo cruzado $dr dt$.
- Lorentziano até o infinito.

Ele rapidamente complementou essa solução, chamada de métrica exterior de Schwarzschild, com uma métrica interior (Schwarzschild 1916a) que descreve a geometria dentro de uma esfera preenchida com um fluido de densidade constante ρ_0 e uma solução para a equação de Einstein com um segundo membro. As condições para vincular as duas métricas (continuidade das geodésicas) foram satisfeitas. Os fenômenos do avanço do periélio de Mercúrio e a deflexão dos raios de luz confirmam essa solução (Figura 3.4). K. Schwarzschild trabalhou para garantir que as condições que regem essas duas métricas fossem consistentes com a realidade física.

Como exemplo, atualmente as estrelas de nêutrons, devido à sua densidade impressionante e massa formidável, servem como laboratórios cósmicos naturais, explorando regiões de densidade e gravidade inacessíveis em laboratórios terrestres. Vamos considerar duas maneiras distintas pelas quais uma estrela de nêutrons poderia atingir um estado de criticalidade física.

Em um cenário em que a densidade da estrela, ρ_0 permanece constante, um raio característico \hat{r} pode ser definido. Então, a criticalidade física é atingida quando o raio da estrela é :

$$R_{\text{cr}\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_o}}$$

com

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_o}}$$

E assim,

- Para a métrica externa, o raio da estrela tinha que ser menor que \hat{r} .
- Quanto à métrica interna, o raio da estrela tinha de ser menor que $R_{\text{cr}\phi}$ porque um raio maior leva a um aumento da pressão até o infinito no centro da estrela.

Em segundo lugar, para estrelas maciças, uma esfera de ferro em implosão pode apresentar um cenário complexo. Supondo que a massa da esfera M seja conservada durante a implosão, precisamos considerar dois raios críticos importantes:

- Na parte central, o raio geométrico crítico é dado pelo *raio de Schwarzschild*, que é :

$$R_{\text{cr}\gamma} = R_s = 2 \frac{GM}{c^2}$$

- Fora dessa massa, o raio crítico físico é dado por (38)

Com a conservação da massa expressa como $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$ podemos explorar como a variação da densidade ρ_o durante a implosão afeta esses raios críticos.

De fato, se a criticalidade física for atingida durante a implosão, teremos $R = R_{\text{cr}\phi}$.

Então, ao substituir a equação de conservação de massa em (38), obtemos :

$$R = R_{\text{cr}\phi} = 2,25 \frac{GM}{c^2} > R_{\text{cr}\gamma}$$

Podemos deduzir disso que, se a criticalidade física for atingida para uma massa M ela ocorre antes do surgimento da criticalidade geométrica.

K. Schwarzschild também apontou que as medições se referiam a condições muito além do que era compreendido dentro da estrutura da realidade astrofísica de sua época.

Também é importante observar que a topologia dessa solução geométrica é construída conectando-se duas variedades limitadas ao longo de seu limite comum, uma esfera S^2 com uma área de $4\pi R_o^2$ (*Raio da estrela*).

Em 1916, Ludwig Flamm considerou a solução externa como uma possível descrição de um

objeto geométrico. A preocupação então era tentar descrever as massas como uma região de espaço não contrátil ((Flamm 1916)).

Em 1934, Richard Tolman foi o primeiro a considerar uma possível manipulação da solução métrica mais geral, introduzindo um termo cruzado $dr dt$. Entretanto, no interesse da simplificação, ele o eliminou imediatamente usando uma simples mudança de variável ((Tolman 1934)).

Em 1935, Einstein e Rosen propuseram uma estrutura geométrica não contrátil no contexto de um modelo geométrico de partículas, graças à seguinte mudança de coordenadas ((Einstein e Rosen 1935)):

$$u^2 = r - 2m$$

A solução métrica então se torna :

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4u^2(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Assim, os autores obtêm uma estrutura geométrica não contrátil, chamada de "*ponte espacial*", em que uma superfície fechada de área $4\pi\alpha^2$ correspondente ao valor $u = 0$ conecta duas "*folhas*": uma correspondente aos valores de u de 0 a $+\infty$ e a outra de $-\infty$ a 0. Observe que essa métrica não é Lorentziana no infinito. Embora essa métrica, expressa nesse novo sistema de coordenadas, seja regular, os autores destacam que, na superfície do desfiladeiro, seu determinante se torna zero. Nessa estrutura geométrica, distinguem-se duas folhas semi-Riemannianas limitadas, a primeira correspondendo a $u > 0$ e a segunda a $u < 0$. Isso corresponde à junção delas ao longo de seu limite comum. O espaço-tempo global não se encaixa na estrutura padrão da geometria semirriemanniana porque não satisfaz a condição $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ na garganta. Conforme declarado em (Stoica 2014), ele se enquadra na estrutura mais geral da geometria semirriemanniana singular, que permite tensores métricos degenerados.

Em 1939, Oppenheimer e Snyder, aproveitando a dissociação completa entre o tempo próprio e o tempo experimentado por um observador distante, na ausência de um termo cruzado em $dr dt$, sugeriram o uso da solução métrica externa para descrever o "*freeze frame*" da implosão de uma estrela maciça no final de sua vida. Considerando que a variável t é identificada com o tempo próprio de um observador distante, isso cria um motivo de "*quadro congelado*", como um fenômeno de contração cuja duração, em tempo próprio, medida em dias, parece para um observador distante ocorrer em tempo infinito ((Oppenheimer e Snyder 1939)). Esse documento é considerado a base do modelo do buraco negro (consulte a seção 2.3.8).

Em 1960, Kruskal ampliou a solução geométrica para abranger um espaço-tempo contrátil, organizado em torno de uma singularidade central correspondente a $r = 0$. As geodésicas

são estendidas para $r < \alpha$. O modelo de buraco negro (com simetria esférica⁴) assume então sua forma definitiva como a implosão de uma massa, em um breve instante, percebida como um "freeze-frame" por um observador distante ((M. D. Kruskal 1960)). A esfera de Schwarzschild é então chamada de "horizonte de eventos".

Em 1988, M. Morris e K. S. Thorne revisitaram essa interpretação geométrica abandonando a contratibilidade, não em uma tentativa de obter um modelo geométrico da solução, mas para estudar a possibilidade de viagens interestelares, por meio de "buracos de minhoca", usando a seguinte métrica ((Morris e Thorne 1988)):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Ao se concentrar no estudo da viabilidade da viagem interestelar, os autores destacam as enormes restrições associadas a essa geometria, bem como sua natureza instável e transitória.

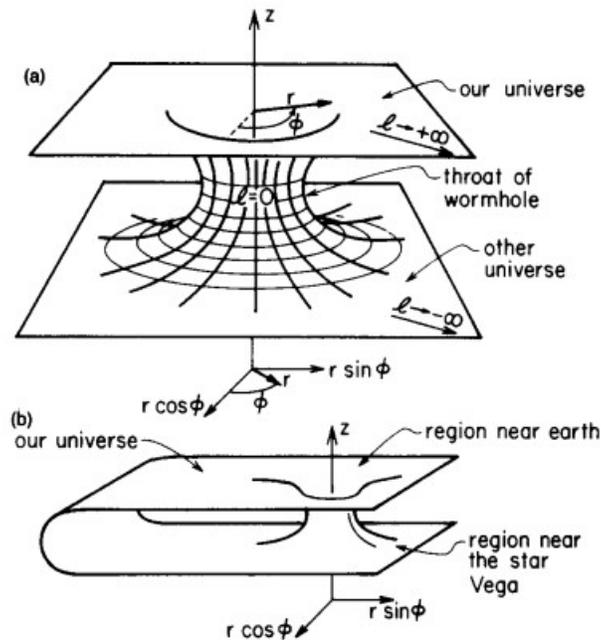


Figura 5.1 - Página 396 do artigo de M. Morris e K.S. Thorne (1988)

5.2 A hipótese da estaticidade: ausência do termo cruzado $dr dt$

O conceito de "estaticidade" na relatividade geral refere-se a uma métrica que é estacionária, ou seja, invariante sob a translação de tempo "independente do tempo" de

⁴ Em 1963, Roy Kerr construiu a solução estacionária axissimétrica da equação de Einstein no vácuo. Entretanto, neste estudo, nos restringimos às interpretações da solução estacionária com simetria esférica (2.3.9).

$t \rightarrow +t$, e *estática*, ou seja, invariante sob a simetria de "reflexão do tempo" de $t \rightarrow -t$, levando naturalmente à ausência do termo cruzado $dr dt$. De fato, quando uma métrica tem um termo cruzado $dr dt$, isso significa que há uma dependência mista entre as coordenadas de espaço e tempo. Essa dependência mista quebra a invariância pela simetria de *reflexão temporal*, porque a métrica não permanece a mesma sob a transformação $t \rightarrow -t$. R. Wald menciona essa peculiaridade em 1984 em seu livro "General Relativity" (*Relatividade geral*) na página 120 (Wald 1984).

Também podemos observar que, na página 186 de (Adler, Bazin e Schiffer 1975), o requisito de simetria de *reflexão temporal* para uma linha dx^0 que pode ser traçada "para trás" até $-dx^0$ (chamada de "estaticidade") é estabelecida como uma suposição inicial.

De fato, a noção de *estaticidade* no sentido de R. Wald refere-se à invariância pela *simetria de reflexão temporal* de $t \rightarrow -t$ que é uma hipótese puramente matemática sem nenhum significado físico. Entretanto, nosso estudo oferece uma abordagem diferente para essa suposição.

5.3 Construção de uma solução geométrica infinita Lorentziana de duas folhas

Considere a métrica exterior de Schwarzschild em sua forma clássica sob a assinatura (+ - - -):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

5.3.1 Simetria T

Essa métrica construída em 1916 ((Schwarzschild 1916b)), como uma solução para a equação de Einstein no vácuo, foi dotada de uma suposição adicional, que seu autor não mencionou, a de invariância por simetria temporal. É importante observar que essa suposição não tem base física e leva à eliminação de um termo cruzado $dr dt$ na métrica, como Tolman havia previsto já em 1934 (página 239 de (Tolman 1934)).

Por outro lado, A. Eddington a introduziu para eliminar a singularidade da coordenada na superfície de Schwarzschild em $r = \alpha$ usando a mudança de variável ((Eddington 1925), (Koiran 2021)):

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

A métrica então se torna :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Sabemos que, com essas condições, do ponto de vista de um observador distante, o tempo de queda livre se torna finito (39), enquanto o tempo de escape permanece infinito. A métrica para a qual o tempo de escape é finito será obtida com essa mudança de variável :

$$t_E^- = -t - \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

Assim, a métrica se torna :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Isso é equivalente a inverter a coordenada de tempo em (40). Assim, essa escolha de associar duas métricas que descrevem dois espaços semirriemannianos nos leva a considerar uma solução geométrica global com duas folhas *T-simétricas* conectadas por uma "ponte" nesse sistema de coordenadas específico, bem como no sistema de coordenadas de Einstein e Rosen ((Einstein e Rosen 1935)).

Agora vamos mostrar que essas transformações também são acompanhadas por uma *simetria P*.

5.3.2 Simetria P

Nessa representação, as geodésicas radiais da primeira folha são ortogonais ao plano tangente da "ponte espacial" quando chegam a ela. Essas mesmas geodésicas, quando emergem na segunda folha, também são ortogonais a esse mesmo plano tangente. Vamos considerar agora quatro pontos formando um tetraedro, que convergem para a "ponte espacial" ao longo de trajetórias radiais. Podemos definir uma orientação 3D definindo uma direção de cruzamento para os pontos em cada um dos triângulos equiláteros que formam o tetraedro. Com relação ao r parece que esses pontos ricocheteiam em uma superfície rígida, fazendo com que a orientação do tetraedro seja invertida. Os tetraedros a montante e a jusante tornam-se então *enantiomórficos* (Figura 5.2).

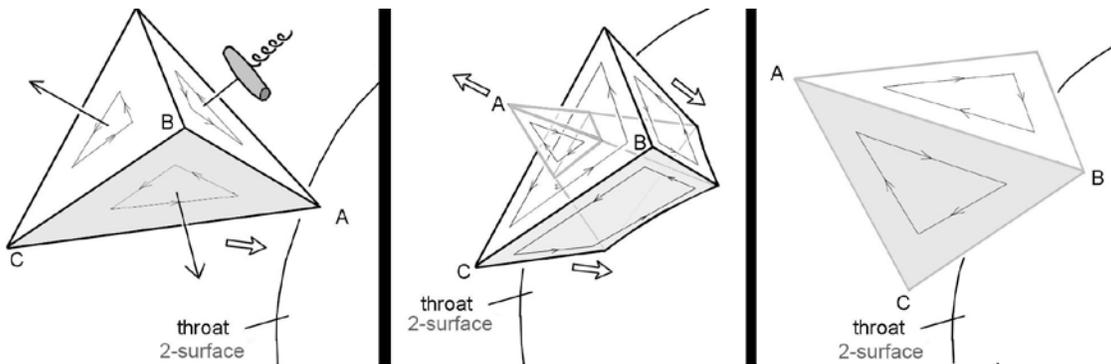


Figura 5.2 - Inversão do espaço ao atravessar a "ponte espacial"

A mudança na orientação já é visível na representação 2D simplificada de um buraco de minhoca na Figura 5.1. Vejamos essa figura de cima e imaginemos um triângulo deslizando ao longo da superfície da folha superior em direção à ranhura. Depois de atravessar a ranhura, o triângulo começa a deslizar pela folha inferior e agora o vemos de cabeça para baixo de nossa posição acima da folha superior. Portanto, do nosso ponto de vista, sua orientação mudou. O significado físico dessa mudança de orientação será discutido na Seção 5.3.3.

A estrutura geométrica do par de métricas (41) e (42) representa, portanto, uma "ponte"

que conecta dois espaços semi-Riemannianos *PT-simétricos*.
O elemento dessa superfície 2D é então dado por :

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} = \alpha^2 \sin(\theta)$$

Como essa métrica descreve uma superfície esférica 2D (como uma esfera de raio constante em um espaço-tempo 4D), o elemento de superfície diferencial é dado por :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Para encontrar a área mínima da superfície dessa "*ponte espacial*", precisamos integrar esse elemento de superfície em todos os ângulos possíveis:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

Portanto, não é contrátil, com uma área de superfície mínima de $4\pi\alpha^2$.

5.3.3 Identificação das duas folhas

Na Seção 5.3.2, descrevemos a mudança de orientação de um tetraedro que cruza a ranhura do buraco de minhoca na Figura 5.2 e de um triângulo que cruza a ranhura na Figura 5.1. A mudança de orientação do triângulo só é visível para quem olha a Figura 5.1 como um todo. Consequentemente, ela não corresponde a nenhum fenômeno fisicamente observável, pois qualquer observador físico deve estar localizado em uma das duas folhas e não pode ver a outra folha diretamente. A situação é a mesma na Figura 5.2: a foto no meio representa a situação de um ponto de vista em que poderíamos olhar para os dois lados do buraco de minhoca simultaneamente (B e C ainda não chegaram ao desfiladeiro, enquanto A já o atravessou e está emergindo do outro lado). Novamente, isso é impossível para um observador físico: parece que a *simetria P*, conforme descrita até agora, não corresponde a nenhum fenômeno fisicamente observável. Entretanto, podemos dar a ela um significado físico real com um ingrediente adicional introduzido por Einstein e Rosen (Einstein e Rosen, 1935).

Deve-se lembrar que a motivação deles não era estudar viagens interestelares, como na Figura 5.1, mas descrever partículas elementares usando soluções para as equações da relatividade geral. Para citar o resumo de seu artigo: "*Essas soluções envolvem a representação matemática do espaço físico por um espaço de duas folhas idênticas, sendo uma partícula representada por uma 'ponte' conectando essas folhas.*" Einstein e Rosen também sugerem que o problema das muitas partículas poderia ser estudado por métodos semelhantes, mas esse trabalho não é realizado em seu artigo.

Vamos citar novamente (Einstein e Rosen, 1935): "*Se várias partículas estiverem presentes, esse caso corresponde à busca de uma solução sem singularidades das equações modificadas (3a), a solução que representa um espaço com duas folhas congruentes conectadas por várias 'pontes' discretas*". Do ponto de vista deles, dois pontos na representação matemática (41) com valores idênticos de θ, ϕ mas valores opostos de u correspondem, portanto, a dois

pontos no espaço físico com o mesmo valor de r ($r = u^2 + m$). Se fizermos a mesma identificação de pontos com valores opostos de u a situação representada na foto do meio da Figura 5.2 pode ser vista por um observador físico. A *simetria P* descrita na Seção 5.3.2 agora tem um significado físico real. Desenvolveremos a interpretação da *simetria PT* combinada na próxima seção.

5.4 Outra representação dessa geometria

Aplicando a seguinte mudança de variável às equações (40) e (43) :

$$r = \alpha(1 + \text{Log ch}(\rho))$$

Obtemos as duas métricas a seguir:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{+2} - \left(\frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ &\quad - 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^+ - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ ds^2 &= \left(\frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{-2} - \left(\frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ &\quad + 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^- - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned}$$

Para obter a métrica que estrutura a segunda folha para $\rho < 0$ a fim de garantir a continuidade das geodésicas que traduzem a passagem da matéria pela "ponte" com um tempo de fuga finito nessa folha, devemos aplicar a *simetria T* em que a coordenada de tempo é invertida durante a travessia, ou seja $t_E^+ = -t_E^-$

Essas métricas, que são Lorentzianas ao infinito, portanto, estruturam duas folhas correspondentes a valores de ρ variando respectivamente de 0 a $+\infty$ e de $-\infty$ à 0. Na "ponte espacial" para $\rho = 0$ os componentes g_{tt} e $g_{\rho\rho}$ do tensor métrico desaparecem, deixando apenas os dois últimos componentes espaciais $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$ que são :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Nesse sistema de coordenadas específico, podemos deduzir que seu determinante é zero. A *simetria P* decorre do fato de que os pontos adjacentes, dessa vez explicitamente diferenciados, são inferidos por $\rho \rightarrow -\rho$. Essa transformação desempenha o mesmo papel que $u \rightarrow -u$ em (41).

Combinando essas soluções métricas sob essas duas condições, obtemos um Buraco de Minhoca e uma Fonte Branca como uma Membrana Unidirecional, conectando dois espaços

semirriemannianos por meio de uma "ponte" que só pode ser atravessada em uma direção. Suponha ainda que o Buraco de Minhoca não leve a outro universo, como na Figura 5.1.a, ou a um ponto distante no mesmo universo, como na Figura 5.1.b; mas que as duas folhas congruentes correspondam aos mesmos pontos no universo físico pela transformação $u \rightarrow -u$ transformação (ou $\rho \rightarrow -\rho$), conforme sugerido em (Einstein e Rosen 1935) e na Seção 5.3.3. Podemos então concluir que as duas folhas são *PT-simétricas*.

Na literatura, a inversão da coordenada de tempo foi analisada de várias maneiras. Em particular:

- Pela teoria de grupos dinâmicos de J-M Souriau ((J. M. Souriau 1964), (J. M. Souriau 1997)), onde foi demonstrado que ela induz uma inversão de energia. Consequentemente, a simetria de inversão de tempo transforma qualquer movimento de uma partícula de massa m em um movimento de uma partícula de massa $-m$ ((Oppenheimer e Volkoff 1939), página 191). Na página 192 do mesmo livro, o autor oferece uma análise alternativa que evita massas negativas. Souriau enfatiza que essas alternativas devem ser avaliadas de acordo com sua capacidade de serem confirmadas por experimentos.
- Feynman propôs uma interpretação da antimatéria como matéria comum se movendo *para trás* no tempo.
- Sabe-se, por meio de análises teóricas (o teorema *CPT*) e experimentos, que as partículas elementares obedecem a leis físicas que são invariantes sob a *simetria CPT*.

A *simetria PT* descoberta na Seção 5.3 pode ser considerada como uma *simetria CPT* seguida por uma *simetria C* (inversão da carga elétrica). Portanto, obteríamos antimatéria na segunda folha. Se a segunda folha já contiver matéria comum, ela poderia interagir com a antimatéria da primeira folha, constituindo assim uma fonte de energia.

5.5 Conclusão

Apresentamos uma nova construção geométrica baseada na solução estacionária esféricamente simétrica da equação de Einstein no vácuo, com apenas duas suposições inspiradas na física: *isotropia* (invariância por $SO(3)$) e *estacionariedade* (invariância por translação no tempo). Ao fazer isso, não estamos acrescentando, como foi feito anteriormente sem nenhuma justificativa física real, a invariância pela simetria *inversa* do tempo de $t \rightarrow -t$ (solução "estática"). Esse novo conjunto de suposições menos restritivas introduz a presença de um termo cruzado $dr dt$, que a suposição de *estaticidade* havia proibido anteriormente. Esse novo objeto geométrico se comporta como uma "membrana unidirecional", uma combinação de um *buraco de minhoca* e uma *fonte branca* em uma "ponte". Com uma métrica Lorentziana no infinito, essa estrutura conecta dois espaços

semi-Riemannianos enantiomórficos *PT-simétricos* com setas de tempo opostas. Consequentemente, esse objeto corresponde à cobertura de duas folhas de um espaço-tempo quadridimensional, apresentando-se como *PT-simétrico*, conectado ao longo de uma "ponte". Inspirados por Einstein e Rosen, sugerimos representar um ponto no espaço físico por um par de pontos congruentes, um em cada uma das duas folhas. Mostramos que essa identificação de pontos congruentes deve levar a efeitos físicos observáveis quando um objeto cruza a ponte espacial entre as duas folhas.

5.6 Apêndice

Agora vamos analisar o caso da transferência de matéria para uma segunda camada do universo, onde temos liberdade para definir a métrica de saída para a segunda camada. Ao aplicar a seguinte nova mudança de variável à métrica de Schwarzschild (42), invertendo o sinal da constante de integração $\alpha \rightarrow -\alpha$ podemos, portanto, construir uma métrica "repulsiva" na segunda folha:

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} + 1 \right|$$

Ele garante a continuidade das geodésicas da primeira folha para a segunda com um tempo de queda livre finito na primeira e um tempo de fuga finito na segunda.

A métrica de entrada que estrutura a primeira folha é :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

E a métrica de saída que estrutura a segunda folha é :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Tomando a forma geral :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

onde $\delta = -1$ para a métrica que estrutura a primeira folha e $\delta = +1$ para a métrica de saída que estrutura a segunda folha. Assim, como as duas métricas são simétricas por inversão de tempo $t \rightarrow -t$ a continuidade das geodésicas é garantida de uma folha para a outra com um tempo de queda livre finito na primeira e um tempo de fuga finito na segunda.

Isso implica que a matéria comum poderia ser potencialmente convertida em antimatéria de massa negativa, que seria então transferida para uma camada separada do universo. Esse processo envolve essencialmente a transformação da matéria em antimatéria de massa negativa. Ao combinar essa solução geométrica com a solução desenvolvida anteriormente na Seção 5.3, podemos explorar a viabilidade da viagem interestelar explorando as propriedades métricas dessa segunda camada.

6 Interpretação topológica do modelo

6.1 Definição

Na cosmologia, a topologia se refere ao estudo das propriedades espaciais fundamentais do universo que permanecem invariantes sob transformações contínuas. Ao contrário da geometria, que se concentra em distâncias e ângulos precisos, a topologia está mais interessada em como o espaço está conectado e estruturado em grande escala. Ela examina aspectos como a conectividade, a continuidade e os limites do espaço cósmico, independentemente de sua forma e tamanho exatos.

Em um contexto cosmológico, a topologia ajuda a entender a estrutura geral do universo, incluindo questões como se o universo é finito ou infinito, se tem "bordas" ou é ilimitado e se pode ser conectado de maneiras não triviais (como nos modelos de universos multiconectados). Isso inclui examinar a forma e a estrutura em grande escala do universo, conforme determinado pela distribuição de galáxias, fundos de radiação cósmica e outras observações astrofísicas.

A topologia é particularmente relevante para modelos cosmológicos avançados, como o modelo cosmológico Janus, pois fornece uma estrutura para explorar conceitos como o universo multicamadas, a conectividade entre diferentes regiões do espaço-tempo e outras propriedades não intuitivas que podem surgir da física teórica avançada.

Em resumo, a topologia em cosmologia é uma ferramenta poderosa para explorar e compreender a estrutura e a natureza fundamentais do nosso universo, além das restrições da geometria clássica.

Antes de prosseguir com este capítulo, é fundamental ler e entender completamente a história em quadrinhos *Topologicon* (Petit 1985), escrita pelo Dr. Jean-Pierre Petit, que está disponível gratuitamente neste site <http://www.savoir-sans-frontieres.com/>. Esse trabalho populariza os conceitos de topologia em relação à cosmologia e à relatividade geral. Na verdade, este capítulo trata principalmente de ferramentas conceituais que são bastante contra-intuitivas. Portanto, é altamente recomendável que você leia essa história em quadrinhos com antecedência para uma melhor compreensão.

6.2 Modelo de buraco de minhoca

Ao desenvolver a nova interpretação do modelo de buraco de minhoca discutido no capítulo 5 anterior, propomos uma perspectiva topológica mais profunda em relação à relatividade geral. Por exemplo, considere a esfera do desfiladeiro S^2 que conecta duas camadas de espaço-tempo por meio da *simetria PT*. Essa configuração poderia ser análoga a um plano projetivo? Na topologia, um plano projetivo é uma superfície não orientável com propriedades exclusivas, como linhas que divergem em um ponto, mas se encontram no outro. Isso sugere que a conexão entre as camadas do espaço-tempo através do desfiladeiro do buraco de minhoca poderia desafiar a orientação tradicional do espaço, evocando o plano projetivo.

Nossa conjectura se baseia na nulidade do determinante métrico nessa superfície, o que poderia indicar uma natureza 2D não orientável. Se essa esfera do desfiladeiro for fechada e tiver uma superfície limitada, ela poderá ser identificada com um plano projetivo. P^2 .

Embora essa ideia possa parecer contraintuitiva, ela decorre diretamente da topologia do objeto, conforme descrito pela solução externa de Schwarzschild (42).

No contexto da relatividade geral, o conceito de volume elementar no espaço-tempo curvo é crucial. O volume elementar em dimensões n definido por uma métrica Riemanniana, é dado por $dV = \sqrt{|\det(g)|} d^n x$ onde g é o tensor métrico e $\det(g)$ seu determinante. Esse volume elementar não é simplesmente o produto de diferenciais de coordenadas, como no espaço euclidiano, mas é modificado pela estrutura curva do espaço-tempo. O fator $\sqrt{|\det(g)|}$ reflete como o espaço-tempo é distorcido pela presença de massa e energia, de acordo com as equações de Einstein. Em regiões de alta curvatura, esse volume elementar pode se comportar de maneiras contraintuitivas, revelando características topológicas fascinantes e, às vezes, surpreendentes do espaço-tempo.

Lembre-se de que a esfera S^2 tem uma métrica definida pela expressão :

$$ds^2 = \alpha^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

A métrica de uma esfera é uma função matemática que descreve as distâncias entre os pontos na superfície da esfera. Como essa métrica descreve uma esfera 2D (como uma esfera de raio constante em um espaço-tempo 4D), o elemento de superfície diferencial é dado por :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

E, na verdade, é um elemento de superfície, porque uma esfera é uma superfície bidimensional em um espaço tridimensional. Quando integramos esse elemento de superfície, obtemos a superfície descrita pela expressão :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

Isso corresponde à área de superfície de uma esfera de raio α . Também podemos ver que essa superfície é análoga à de um plano projetivo P^2 um conceito raramente abordado na geometria padrão.

6.3 Modelo do universo

Na geometria, uma esfera S^2 pode ser facilmente visualizada porque podemos *mergulhá-la em* nosso espaço tridimensional familiar R^3 . Entretanto, um plano projetivo, como o P^2 não pode ser *mergulhado da* mesma forma. Um plano projetivo é um tipo de superfície não orientável, o que significa que ele não pode ser disposto de forma plana no espaço tridimensional sem autointersecção. Para visualizar um plano projetivo, precisamos usar a *"imersão"*, um método em que a superfície *se intercepta de* acordo com um conjunto de *autointersecções*. Esse conceito desafia nossa compreensão tradicional de formas e espaços.

Para entender planos projetivos de dimensões maiores, como P^3 ou P^n precisamos abandonar as representações visuais e adotar o pensamento abstrato. Essa mudança mental é necessária para explorar estruturas topológicas complexas que vão além de nossas próprias dimensões.

Por exemplo, uma esfera pode ser invertida se considerarmos que cada tira que forma os meridianos que a cobrem é capaz de se cruzar por "imersão" para formar uma cobertura de duas folhas de uma tira de Möbius com três meias-voltas ((Morin e Petit 1978)). Esse efeito de "autointersecção" está ligado apenas à imersão desse revestimento em nosso espaço de representação tridimensional R^3 .

Podemos então fazer o polo M de uma folha dessa esfera S^2 com o polo oposto M' da outra folha do mesmo revestimento. Isso é chamado de "a junção dos pontos antípodas". Essa transformação permite que as setas do tempo, transportadas pelos meridianos dessa esfera, se encontrem, mas em oposição, em cada folha do mesmo revestimento, como na Figura 6.1.

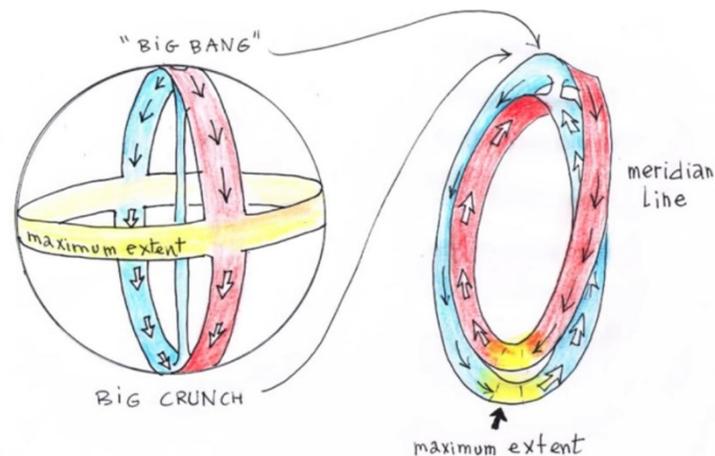


Figura 6.1 - Inverter uma esfera unindo os pontos antípodais

NB: A faixa de Möbius é uma superfície com um único lado e uma única borda. É um objeto matemático clássico da topologia, um ramo da matemática que estuda as propriedades dos espaços que permanecem invariantes sob transformações contínuas. A tira de Möbius pode ser criada pegando-se uma tira de papel, dando-lhe meia volta e, em seguida, unindo as duas extremidades da tira. Essa configuração produz uma superfície que, se você começar a desenhar uma linha ao longo dela, retornará ao ponto inicial depois de cruzar os dois "lados" da tira sem nunca levantar a caneta.

O que torna a faixa de Möbius fascinante é sua natureza não orientável. Em um espaço normal, como uma folha de papel, há uma distinção clara entre "acima" e "abaixo". Em uma faixa de Möbius, no entanto, não há essa distinção: à medida que você se move pela superfície, você se move perfeitamente de cima para baixo e vice-versa.

A faixa de Möbius é frequentemente usada para ilustrar conceitos importantes em topologia e geometria, como a ideia de uma superfície unilateral e os limites de nossa intuição espacial. Na física teórica e na cosmologia, a faixa de Möbius também pode ser usada como

modelo para explorar estruturas e fenômenos espaciais complexos, como a torção do espaço-tempo ou a conexão entre diferentes dimensões. Por exemplo, a simetria PT pode ser interpretada como o caminho de um plano projetivo de uma folha de revestimento para outra (Figura 6.2).

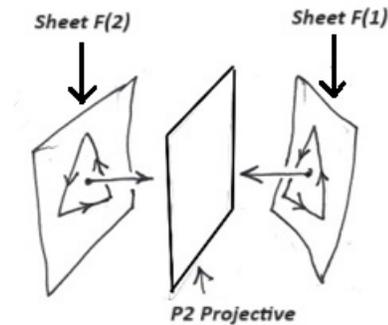


Figura 6.2 - Projetor P^2 Projetor

Para que um objeto geométrico seja equipado com um sistema de coordenadas funcionais, a não nulidade do determinante de sua métrica é essencial. Em particular, no contexto das "coordenadas gaussianas", esse princípio é crucial. Em um espaço quadridimensional, esse requisito permite que o espaço seja folheado por um conjunto de hipersuperfícies tridimensionais. Essas hipersuperfícies são "ortogonais" às geodésicas, ou seja, perpendiculares aos caminhos que um objeto em movimento livre seguiria, e são caracterizadas apenas pela coordenada de tempo. A distinção entre a "seta do tempo" e o "tempo próprio" é importante aqui: a seta do tempo refere-se a uma dimensão temporal unidirecional, enquanto o tempo próprio é uma medida de tempo específica para o observador.

No contexto do espaço-tempo bidimensional que estamos examinando, a foliação é realizada usando uma série de círculos. Cada ponto nesses círculos pode ser associado a um "vetor de tempo", que é ortogonal aos círculos. A ortogonalidade, nesse caso, significa que o vetor de tempo é posicionado de forma perpendicular à superfície de cada círculo, formando um componente temporal distinto do espaço-tempo (Figura 6.3).

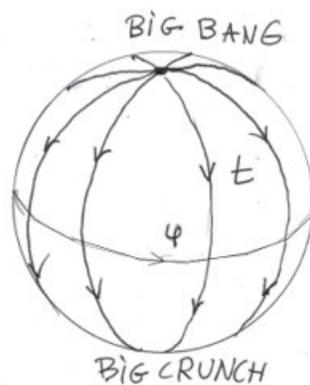


Figura 6.3 - Ilustração do "vetor de tempo" ortogonal a um círculo em uma família de círculos que folheia uma esfera S^2

Mesmo assim, esse "objeto" tem dois pontos singulares, ou seja, seus polos, onde o azimute é indefinido. Esses polos representam "singularidades de malha" inevitáveis. Existem dois porque a característica de Euler-Poincaré desse objeto é igual a 2. Por exemplo, se considerarmos um poliedro simples, como um tetraedro, para representar uma aproximação da esfera, que é uma pirâmide com base triangular, sua característica de Euler-Poincaré é 4 (vértices) - 6 (arestas) + 4 (faces) = 2 . A característica de Euler-Poincaré de uma esfera S^n é igual a 2 se n for par e zero se n for ímpar (5.3.3).

Do nosso ponto de vista, o universo seria uma esfera S^4 com duas singularidades, o Big Bang e o Big Crunch. Uma esfera quadridimensional S^4 é análoga a uma esfera regular, ampliando o conceito para dimensões superiores. Se considerarmos essa esfera com seus dois polos, o Big Bang e o Big Crunch, ela pode ser mapeada por "paralelos" (semelhante a círculos paralelos em uma superfície 2D S^2). Esse processo de foliação envolve a criação de camadas ou "fatias" na esfera, que são análogas às linhas que representam as latitudes na Terra. A orientação passado-futuro torna-se, então, uniforme em todos os lugares. Nesse contexto, a orientação passado-futuro refere-se à direção do tempo desde o Big Bang até o Big Crunch, que se torna coerente em toda essa estrutura folheada. Em relação a essa normal às superfícies paralelas, o espaço-tempo é orientável, o que significa que há uma noção bem definida de "para cima" e "para baixo" na estrutura do espaço-tempo.

No entanto, ao "dobrar" essa superfície (seja S^2 ou S^4), criamos uma situação em que duas paralelas são sobrepostas. Dobrar, nesse sentido, significa manipular a estrutura da esfera de tal forma que diferentes partes da superfície entrem em contato. Seus vetores de tempo tornam-se, então, antiparalelos ou opostos, conforme mencionado anteriormente. O vetor de tempo é uma forma de representar a direção do tempo em cada ponto do espaço-tempo. Quando esses vetores se tornam antiparalelos, isso significa que a direção do tempo é invertida nos pontos de contato. Isso leva ao que poderíamos chamar de "orientação induzida". A orientação induzida aqui se refere à nova orientação dos vetores de tempo resultantes do processo de dobramento. Em cada ponto desse espaço-tempo, estruturado como uma cobertura de duas folhas de uma faixa de Möbius com três meias-voltas (cobertura de duas dobras), a "matéria antípoda" (tanto espacial quanto temporal) aparece "retrocronica". Uma tira de Möbius com três meias-voltas é uma superfície de um único lado que pode ser visualizada torcendo-se uma tira de papel três vezes antes de unir as extremidades.

No artigo de Jean-Pierre Petit (Petit 1994), ele considera a interação do universo com o campo gravitacional criado por seu antípoda, supondo que as leis de interação sejam :

1. As massas comuns se atraem mutuamente, de acordo com Newton.
2. De acordo com Newton, as massas "antípodas" se atraem.

3. As massas comuns e as massas "antipodais" se repelem de acordo com uma lei "anti-Newton".

Essa hipótese o levou a "dobrar" o universo, dando-lhe a topologia de uma "cobertura de duas folhas" de uma superfície 2D.

Assim "dobrada", a esfera S^2 (superfície fechada) se torna a cobertura de outra superfície fechada, a superfície de Boy, que tem um único polo e cuja característica de Euler-Poincaré é igual a 1, como na Figura 6.4. A superfície de Boy é uma superfície 3D única não orientável com uma única face e uma única borda, com um ponto singular para o qual convergem todos os pontos antípodas. A superfície Boy é um exemplo de superfície não orientável em 3D com uma única face e uma única borda. Ela é intrigante porque, diferentemente da esfera clássica, tem um ponto singular para o qual convergem todos os pontos antípodas. Isso significa que, se você começar a desenhar uma linha na superfície de Boy, acabará retornando ao ponto de partida sem nunca ter cruzado uma borda ou usado o outro lado, pois não há nenhum.

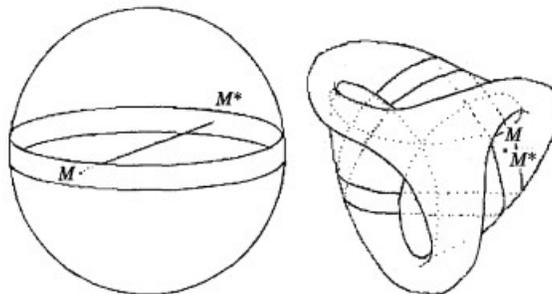


Figura 6.4 - A vizinhança do equador de uma esfera dupla e sua localização em uma superfície Boy

Nesse estágio, o Big Bang e o Big Crunch "coincidem".

Um "tubo" poderia então ser imaginado no lugar dessa singularidade polar para ligar essas duas singularidades de malha:

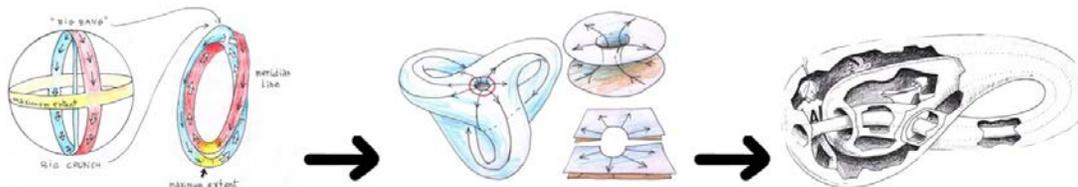


Figura 6.5 - A superfície de Boy no meio após a foliação da esfera S^2 e a garrafa de Klein K^2 à direita

A natureza singular desaparece, e o objeto se torna o revestimento de uma garrafa de Klein K^2 . A garrafa de Klein é outra superfície não orientável que não tem limite ou interior distinto, cuja característica de Euler-Poincaré é zero, conforme mostrado na Figura 6.5. A garrafa de Klein é outra superfície não orientável que não tem limite ou interior distinto.

Imagine uma tira de Möbius cujas bordas também são unidas. Ao contrário da superfície de Boy, a garrafa de Klein não pode ser representada em nosso espaço tridimensional sem autointersecção. Seu interesse está em seu comportamento topológico, em que os conceitos de "*interior*" e "*exterior*" não são separados, proporcionando uma representação útil para determinadas ideias em topologia e cosmologia teórica.

Acredito que as limitações da física teórica e da cosmologia durante a década de 1950 podem ser atribuídas ao atraso do campo em adotar a topologia. A topologia, o estudo das propriedades preservadas por meio de deformações contínuas, poderia ter oferecido novas maneiras de compreender a estrutura do universo e suas estruturas complexas.

7 Interpretação alternativa dos objetos supermassivos subcríticos M87 e Sagittarius A*.

As primeiras imagens de objetos supermassivos localizados no centro das galáxias, publicadas no *Astrophysical Journal*, foram interpretadas principalmente como buracos negros gigantes. Essa interpretação baseia-se na ausência de explicações alternativas amplamente aceitas. Este estudo reexamina essas imagens, em particular as de objetos no centro da galáxia M87 e da Via Láctea. Ele destaca a possibilidade de supermassivos subcríticos, cujo raio é apenas 5,72% menor do que o raio de Schwarzschild calculado a partir de sua massa. Também veremos que as partes centrais dessas características são escurecidas pelo efeito de redshift gravitacional, representado por $z + 1$. Esse deslocamento é calculado como a razão entre o comprimento de onda da luz recebida por um observador distante e a emitida pela superfície, correspondendo à razão entre as temperaturas máxima e mínima observadas do centro e da coroa desses objetos, um valor notavelmente próximo de 3. Exploraremos a ideia de que sua estabilidade poderia resultar de um equilíbrio entre o colapso gravitacional, devido a uma criticalidade física que ocorre muito antes da criticalidade geométrica, e uma pressão radiativa extremamente alta em densidade constante que emana de seus centros, proporcional ao quadrado da velocidade da luz - um fenômeno considerado pela primeira vez por Karl Schwarzschild em seu segundo artigo publicado em fevereiro de 1916. Nossa análise tem o objetivo de enriquecer nossa compreensão dos objetos supermassivos no centro das galáxias, propondo uma interpretação alternativa.

7.1 Introdução

As imagens dos dois objetos supermassivos localizados no centro da galáxia M87 e da Via Láctea atraíram grande interesse da mídia, sendo imediatamente descritas como "*as primeiras imagens de buracos negros gigantes*". Essas imagens foram publicadas no prestigioso *Astrophysical Journal* (M87 (Akiyama 2019) e Sagittarius A no centro da Via Láctea (Akiyama 2022)). Abaixo, uma barra relaciona a tonalidade da cor ao que é chamado de "*temperatura de brilho*":

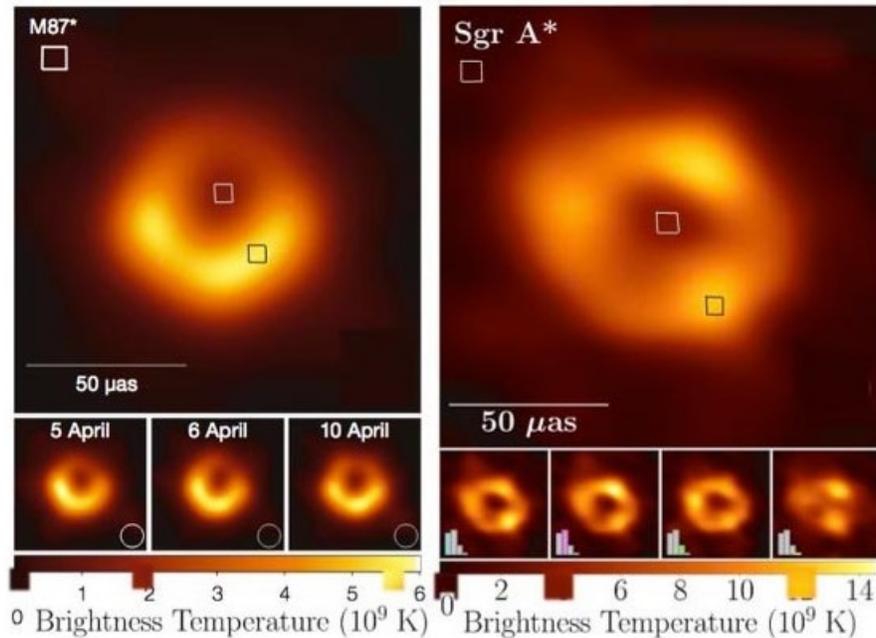


Figura 7.1 - Imagens dos objetos M87 e Sagittarius A

Na Figura 7.1, à esquerda, a primeira imagem do objeto no centro da galáxia M87 foi publicada em 1999, mostrando temperaturas mínimas de luminosidade de 1,8 bilhão de graus e temperaturas máximas de 5,7 bilhões de graus, com uma proporção próxima de 3. Três anos depois, em 2022, uma segunda imagem à direita foi publicada, mostrando temperaturas mínimas de 4 bilhões de graus e temperaturas máximas de 12 bilhões de graus, também com uma proporção próxima de 3. Esses dois objetos têm massas muito diferentes, sendo o primeiro 1.625 vezes mais maciço que o segundo. Parece curioso que, nessas circunstâncias, para ambos os objetos, uma nuvem de gás quente em primeiro plano tenha características tais que a razão entre as temperaturas máxima e mínima seja tão próxima de 3 em ambos os casos. Se a imagem de um terceiro objeto levasse à mesma observação, seria prudente questionar a verdadeira natureza desses objetos.

As primeiras imagens de objetos supermassivos localizados no centro das galáxias foram associadas a buracos negros gigantes, e a parte central que não é perfeitamente preta parece se dever à luz que emana de um disco de gás quente que orbita o buraco negro. Entretanto, como veremos mais adiante neste estudo, uma estrela de nêutrons pode atingir a criticalidade em dois cenários:

- De forma abrupta, envolvendo o colapso repentino de uma estrela supermassiva em seu núcleo de ferro antes de se transformar em uma supernova.
- De forma mais progressiva, em sistemas binários, uma estrela de nêutrons subcrítica acumula massa lentamente ao absorver o gás emitido por uma estrela companheira por meio de um "vento estelar". A massa crítica para a qual ela poderia sofrer transformações adicionais depende da equação de estado da matéria dentro da

estrela de nêutrons e pode variar. Normalmente, os modelos atuais estimam que a massa crítica necessária para uma transformação adicional está aproximadamente na faixa de 2 a 3 vezes a massa solar, próxima ao limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

A particularidade desse modelo é que o objeto maciço deve ter uma relação de temperatura de brilho de 3 entre sua coroa e seu centro (temperaturas máxima e mínima). Como demonstraremos mais adiante, uma interpretação alternativa mais coerente seria atribuir o escurecimento da parte central desses objetos a um efeito de redshift gravitacional, que dilata ou desacelera o tempo perto de seu horizonte.

Isso ocorre porque um objeto maciço curva o espaço-tempo ao seu redor, afetando a trajetória não apenas de objetos maciços, mas também da luz. Quando um fóton passa perto de um objeto desse tipo, sua trajetória é curvada devido a essa curvatura do espaço-tempo, um fenômeno conhecido como lente gravitacional (consulte a Figura 3.4). Entretanto, não é apenas a trajetória do fóton que muda: ao se afastar do objeto maciço, o fóton perde energia para escapar do forte campo gravitacional. Essa perda de energia resulta em uma diminuição em sua frequência, o que estende seu comprimento de onda em direção à extremidade vermelha do espectro de luz, um fenômeno conhecido como desvio para o vermelho gravitacional.

Para calcular a energia perdida por um fóton devido ao desvio para o vermelho gravitacional, é essencial entender que a energia de um fóton está diretamente relacionada à sua frequência f por meio da equação $E = hf$ onde h é a constante de Planck.

Se considerarmos um fóton emitido com uma frequência f_e e observado em uma frequência reduzida f_r devido ao desvio gravitacional para o vermelho, a energia perdida pelo fóton pode ser expressa como a diferença entre as energias inicial e final :

$$\Delta E = h(f_e - f_r)$$

Usando a relação entre frequência e comprimento de onda ($f = \frac{c}{\lambda}$), em que c é a velocidade da luz, essa equação pode ser reescrita em termos de comprimentos de onda :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_r} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

E usando a definição de redshift gravitacional $z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}$ podemos reorganizar para obter uma expressão em termos de z :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_e(1+z)} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda_e} \left(\frac{z}{1+z} \right)$$

Essa equação mostra que a energia perdida por um fóton devido ao deslocamento para o vermelho gravitacional depende do comprimento de onda no qual ele foi emitido e do valor do deslocamento para o vermelho gravitacional z . O sinal negativo indica uma perda de energia.

Essa perda de energia não é apenas aparente. Por exemplo, o fundo cósmico de micro-ondas é a radiação que sofreu o maior redshift gravitacional, com um fator z de cerca de 1.100, o que corresponde a uma temperatura e energia muito baixas de cerca de 3 Kelvin (-270°C), bem abaixo da energia original (consulte a Figura 3.10).

Também é importante observar que os jatos muito finos e colimados observados perto de objetos supermassivos indicam a presença de um poderoso campo magnético que se opõe ao colapso do objeto sob o efeito da gravidade, exercendo uma intensa pressão magnética oposta. Esses objetos, como as estrelas de nêutrons em sua massa máxima, são subcríticos, resultando em um efeito de redshift gravitacional limitado a 3. Isso sugere que esses objetos podem ser objetos subcríticos maciços.

Na ciência, quando uma observação não corresponde à teoria, geralmente é a teoria que é questionada. No entanto, nesse artigo muito recente publicado no *Astrophysical Journal* (Medeiros 2023), os pesquisadores modificaram as observações para alinhá-las com o modelo de buraco negro. Eles geraram imagens sintéticas de buracos negros manipulando vários parâmetros, como massa, momento angular, etc., e selecionando a que melhor correspondia aos dados observados usando o software PRIMO, conforme mostrado na Figura 7.2.

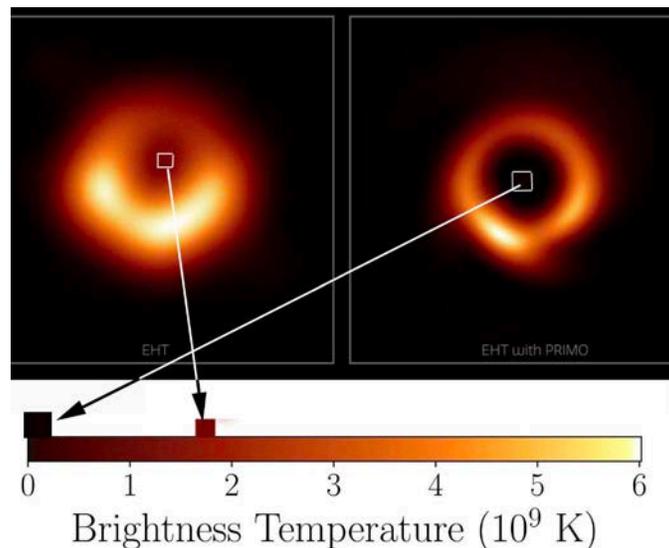


Figura 7.2 - Imagem sintética do buraco negro M87 processada pelo PRIMO à direita, comparada com a imagem original à esquerda

O resultado confirmou a teoria, mas levantou questões sobre o rigor científico e a objetividade da pesquisa.

7.2 Interpretação alternativa do fenômeno

Uma interpretação alternativa é atribuir essa variação de cor do centro para a borda a um desvio gravitacional para o vermelho, com $z = 2$ levando a um alongamento do comprimento de onda por um fator de $1 + z = 3$. O que podemos dizer sobre esses objetos?

7.2.1 Comparação de criticalidades físicas e geométricas

Na Seção 5.1, examinamos as soluções de Schwarzschild para as equações de Einstein, destacando a métrica externa de Schwarzschild e a métrica interna correspondente para um fluido de densidade constante ρ_0 . Essas soluções foram confirmadas por fenômenos como o avanço do periélio de Mercúrio e o fenômeno das lentes gravitacionais (Figura 3.4). Karl Schwarzschild procurou garantir que as condições que regem essas duas métricas fossem consistentes com a realidade física.

Em um cenário em que a densidade da estrela, ρ_0 permanece constante, um raio característico \hat{r} pode ser definido. De fato, se considerarmos a métrica interna publicada por Schwarzschild em seu segundo artigo de fevereiro de 1916 (Schwarzschild 1916a):

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Schwarzschild considerou a velocidade da luz c como sendo igual a um. Portanto, a expressão $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ deve ser escrita como $\frac{3c^2}{\kappa\rho_0}$. Em seguida, K. Schwarzschild definiu uma constante κ como sendo igual a $8\pi k^2$ "onde k^2 é a constante gravitacional de Gauss", o que lhe permitiu introduzir o raio característico \hat{r}^2 igual a $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ que também é o raio do círculo que faz parte do meridiano da superfície de Flamm ((Oppenheimer e Snyder 1939)). Assim, a equação anterior nos leva a:

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \hat{r}^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Então, como K. Schwarzschild usa o ângulo χ para localizar os pontos dentro da esfera, ele muda para a variável r aplicando a mudança de variável $r = \hat{r}\sin\chi$. Isso nos dá a forma moderna da métrica. Tolman forneceu uma declaração precisa em 1934, apresentando o seguinte ((Tolman 1934)):

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 c^2 dt^2$$

Onde r_n é o raio da estrela e \hat{r} é uma constante estelar em função de sua densidade ρ_0 . Observe que ele formula a ordem dos termos, na métrica, de acordo com a assinatura (---+) mas preserva os sinais dos respectivos termos. Considere um observador estacionário ($dr = d\theta = d\phi = 0$) localizado dentro de uma estrela. A métrica se torna :

$$ds = cd\tau = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right] cdt = f(r)dt$$

onde τ é o tempo adequado conforme observado pelo observador estacionário dentro da estrela e $f(r)$ é o fator de tempo.

Então, como visto na seção 5.1, quando o fator de tempo é zero no centro da estrela, a criticalidade física é atingida antes que a criticalidade geométrica apareça, quando o raio da estrela é apenas 5,72% menor do que o raio crítico \hat{r} deduzido de sua densidade:

$$r_n = R_{cr\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}}$$

7.2.2 Redshift gravitacional próximo à criticalidade física

A solução de Schwarzschild foi então retomada, em uma forma diferente, por Tolman ((Tolman 1934)), Oppenheimer ((Oppenheimer e Snyder 1939)) e outros ((Adler, Bazin e Schiffer 1975)), levando à equação de estado, conhecida como equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), apresentada em sua forma diferencial:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2} \left(\frac{4\pi G}{c^4} p r^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}$$

O valor integrado foi dado por Karl Schwarzschild um século antes (veja a Figura 7.3), onde em seu segundo artigo (Schwarzschild 1916a), publicado em fevereiro de 1916, ele descreve a geometria dentro de uma esfera preenchida com um fluido incompressível de densidade constante ρ_0 :

$$f_2 = \frac{3}{x\rho_0} \sin^2 \chi, \quad f_4 = \left(\frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right)^2, \quad f_1 f_2 f_4 = 1. \quad (29)$$

$$\longrightarrow \rho_0 + p = \rho_0 \frac{2 \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left(\frac{x\rho_0}{3} \right)^{-3/2} \left[\frac{9}{4} \cos \chi_a \left(\chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi \right) - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \right]. \quad (31)$$

Figura 7.3 - A lei da pressão obtida em 1916 por Karl Schwarzschild

Nessa fórmula, a velocidade da luz é sempre ajustada a um valor unitário. Consequentemente, essa fórmula é equivalente a:

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{\cos \chi - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \right)$$

Então, como visto na Seção 7.2.1, K. Schwarzschild mudou para a variável r pela seguinte mudança simples de variável :

$$r = \hat{r} \sin \chi$$

A pressão se torna zero na superfície da estrela para $\chi = \chi_a$ com um raio dado por :

$$r_a = \hat{r} \sin \chi_a$$

O centro da estrela corresponde a $\chi = 0$ portanto, a pressão se torna :

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{1 - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - 1} \right)$$

Isso impõe um limite máximo a esse raio para $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$ significado :

$$r_a = R_{cr\phi} = \hat{r} \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428 \hat{r}$$

No entanto, se considerarmos a massa correspondente a uma criticalidade física :

$$M_{cr\phi} = \frac{4}{3} \pi \hat{r}^3 \rho_0$$

e o correspondente à criticidade geométrica :

$$M_{cr\gamma} = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0$$

obtemos a seguinte relação :

$$M_{cr\phi} = \left(\frac{8}{9} \right)^{\frac{3}{2}} M_{cr\gamma} = 8.838 M_{cr\gamma} = 2.5 M_{solar}$$

Esse valor é compatível com as massas de algumas estrelas de nêutrons que conseguimos deduzir diretamente das observações disponíveis e para as quais Thorne, Wheeler e Misner estimaram em seu livro (página 611 de (Thorne, Wheeler e Misner 1973)) como a massa crítica além da qual a pressão voa para o infinito, conforme mostrado na Figura 7.4:

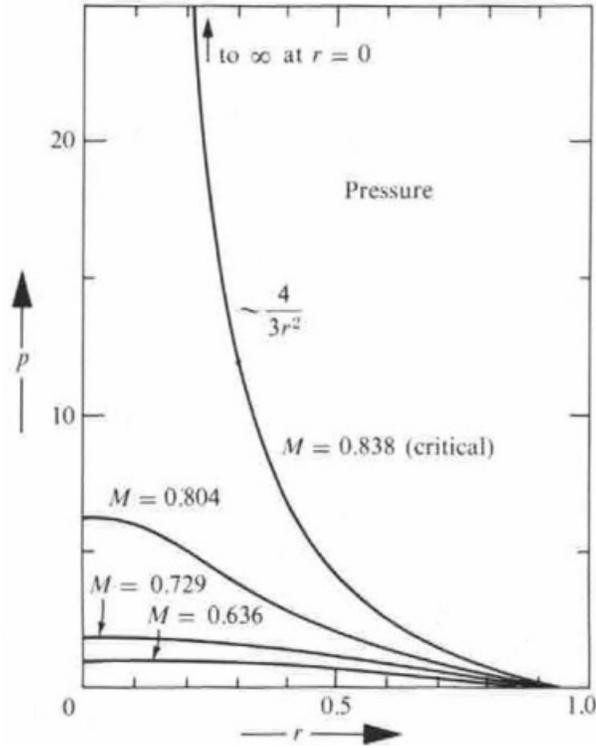


Figura 7.4 - Variação da pressão dentro de uma estrela de nêutrons de densidade constante

É claro que nunca teremos imagens de estrelas de nêutrons comparáveis às dos objetos no centro da M87 e da Via Láctea. Portanto, vamos calcular o efeito de desvio para o vermelho gravitacional $z + 1$ (correspondente a corpos celestes maciços próximos a essa criticidade física. Esse efeito afeta a luz emitida de sua superfície em uma direção radial em direção a um observador distante, que a perceberá com um comprimento de onda esticado (desvio para o vermelho). λ_r comprimento de onda (*redshifted*). Ele é dado por:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_a}}}$$

Entretanto, na parte central, o raio de criticidade geométrica é definido pelo *raio de Schwarzschild*, que é :

$$R_s = \frac{2GM_{cr\gamma}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \left(\frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \right) = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r_a^3 = \frac{r_a^3}{\hat{r}^2}$$

Portanto, o desvio para o vermelho gravitacional dará :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_a^2}{\hat{r}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_a c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3$$

Esse é precisamente o valor deduzido da relação entre as temperaturas máxima e mínima deduzidas das duas primeiras imagens de buracos negros localizados no centro das galáxias

M87 e da Via Láctea. Portanto, as imagens desses objetos supermassivos também poderiam corresponder a entidades subcríticas, onde a pressão em seu centro - definida como uma densidade de energia por unidade de volume - seria infinita ou, pelo menos, extremamente alta.

7.2.3 Variação da velocidade da luz e da pressão em plasmas de densidade constante

Vamos considerar agora um fluido (plasma de hidrogênio) com uma densidade constante presumida. Em uma temperatura abaixo de 3000° a pressão interna é dada por :

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3}$$

onde v é a velocidade média de agitação térmica das partículas que compõem o plasma. Assim, o raciocínio de que "se a pressão p tende ao infinito, então essa velocidade também deve tender ao infinito, o que contradiz um princípio central da relatividade especial, o "princípio da causalidade", segundo o qual nenhum efeito físico pode se propagar a uma velocidade $v > c$ " ((Thorne, Wheeler e Misner 1973)), levaria a uma aberração física. No entanto, nessa região do espaço-tempo, a pressão dentro desse plasma se torna radiativa:

$$p_r = \frac{\rho_0 c^2}{3}$$

Se estivermos pensando em aumentar essa pressão radiativa em uma densidade constante, isso só poderá ser feito considerando-se uma variação na velocidade da luz no meio, o que Karl Schwarzschild foi o primeiro a prever (Schwarzschild 1916a):

Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3 \cos \chi_a - \cos \chi_s}, \quad (44)$$

Figura 7.5 - Variação da velocidade da luz em uma esfera de densidade constante

Portanto, como ele apontou em seu artigo, o aumento da velocidade da luz acompanha o aumento da pressão. O que acontece quando essa pressão aumenta, assim como o valor da velocidade da luz? Muito simplesmente, Karl Schwarzschild (página 433 de (Schwarzschild 1916a)) deixa claro que essas duas quantidades se tornam infinitas para $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$ correspondente a $r = R_{cr\phi}$ (44), conforme visto na Seção 7.2.2.

Podemos deduzir do estudo de Karl Schwarzschild que a estabilidade desses objetos supermassivos subcríticos se deve ao fato de que o colapso gravitacional, devido à criticalidade física que ocorre bem antes da criticalidade geométrica, é compensado por uma pressão radiativa extremamente alta em densidade constante de seus centros, proporcional ao quadrado da velocidade da luz.

7.3 Conclusão

Analisamos imagens de objetos supermassivos localizados no centro de galáxias, que foram inicialmente apresentadas no *Astrophysical Journal* como as primeiras imagens de buracos negros gigantes. Por meio de nosso estudo aprofundado, propomos uma interpretação alternativa desses objetos, que poderiam corresponder a características supermassivas subcríticas, exibindo uma relação de temperatura máxima para mínima próxima de 3. De fato, seu raio é apenas 5,72% menor do que os comprimentos de Schwarzschild deduzidos de sua massa. Essa observação se alinha bem com o efeito de redshift gravitacional, potencialmente característico de estrelas de nêutrons que se aproximam da criticalidade física, conforme sugerido pela solução geométrica interior de Schwarzschild publicada em seu segundo artigo em fevereiro de 1916. Essa solução, em grande parte desconhecida pela maioria dos cosmólogos do pós-guerra e não traduzida para o inglês até 1999, oferece uma perspectiva única para a observação desses fenômenos. Ao examinar aspectos como a pressão, a velocidade da luz e o fator tempo dentro desses objetos, pretendemos enriquecer a descrição existente dos complexos fenômenos astrofísicos no coração das galáxias. Isso inclui uma exploração de sua estabilidade, que poderia ser mantida por um equilíbrio entre o colapso gravitacional, resultante da criticalidade física que ocorre muito antes da criticalidade geométrica, e a pressão radiativa extremamente alta em densidade constante originada de seus centros, proporcional ao quadrado da velocidade da luz. O trabalho centenário de Karl Schwarzschild nos lembra que ainda há mistérios a serem desvendados dentro de teorias bem estabelecidas. As questões que levantamos, em particular com relação à evolução do fator tempo e suas profundas implicações para o próprio conceito de tempo, são cruciais e convidam a mais pesquisas. Se observações futuras confirmarem nossas hipóteses, especialmente se for descoberta uma imagem de um terceiro objeto supermassivo com uma relação de temperatura semelhante, isso incentivaria uma reavaliação de alguns de nossos modelos astrofísicos atuais. Em última análise, o universo, em toda a sua vastidão e complexidade, continua a nos estimular em nossa busca insaciável por conhecimento.

8 Desafios e debates

8.1 Desafios encontrados na comunicação e aceitação do modelo

Em nossos esforços para disseminar e validar o Modelo Cosmológico Janus, encontramos desafios formidáveis, especialmente no campo da publicação científica. Esta seção tem o objetivo de detalhar essas dificuldades, destacando as complexidades e os vieses inerentes ao sistema de publicação internacional dominante.

Um dos obstáculos mais significativos que encontramos foi o processo de revisão por pares em revistas de renome. Descobrimos que o sistema, da forma como existe atualmente, costuma ser rígido e impermeável a novas ideias, especialmente aquelas que desafiam os fundamentos estabelecidos da física e da cosmologia. Nossas tentativas de publicar em revistas de prestígio, como *Physical Review D*, *Modern Physics Letters A*, *Astrophysical Journal* e *Astrophysics and Space Science*, entre outras, encontraram resistência e ceticismo. Essa resistência parece não se originar de nenhuma falta de rigor científico de nossa parte, mas sim de uma tendência geral da comunidade científica de manter o status quo.

Em nossas tentativas de publicar, recebemos respostas que ilustram os desafios que enfrentamos. Por exemplo, uma carta do Dr. Ethan T. Vishniac, editor do *The Astrophysical Journal*, destacou a natureza não convencional de nosso trabalho no contexto de sua publicação:

Prezado Dr. Zejli,

*Estou escrevendo para você com relação ao seu manuscrito citado acima, que você enviou recentemente para o *The Astrophysical Journal*.*

Li seu manuscrito e considerei sua adequação para publicação em nossa revista. Nossa revista é especializada em manuscritos que apresentam novos resultados de observações astronômicas ou teoria aplicada diretamente a sistemas astrofísicos. Infelizmente, o assunto do seu manuscrito, que trata de aspectos fundamentais da relatividade bimétrica, não se enquadra na área de assunto da nossa revista. Consequentemente, lamento informá-lo de que não poderemos publicar seu manuscrito. No entanto, desejo-lhe os melhores votos de sucesso em suas pesquisas futuras.

O tópico deste artigo estaria bem dentro do escopo de uma revista especializada em física da gravidade. Como política geral, não recomendo revistas específicas. Observarei apenas que este manuscrito não está bem organizado como um trabalho de pesquisa. A maior parte do artigo analisa trabalhos anteriores e os novos resultados e sua importância são difíceis de discernir. Não há, por exemplo, nenhuma menção a nenhum deles no resumo.

Atenciosamente,

Ethan T. Vishniac

Editor-chefe da AAS

Universidade Johns Hopkins

Isso significa que, embora nosso manuscrito tratasse de aspectos fundamentais da "relatividade bimétrica" (que significa bimétrica), ele não se alinhava com o foco da revista em novos resultados astronômicos e teorias aplicadas a sistemas astrofísicos. Essa resposta

educada e informativa reflete uma tendência geral de favorecer trabalhos que se enquadram na estrutura estabelecida da pesquisa científica. Em contraste, as respostas da *Physical Review D* foram muito mais sucintas, muitas vezes resumidas pela frase "Not suitable" (*Não é adequado*). Essa breve resposta destaca a dificuldade de se obter aceitação para ideias que se afastam significativamente dos paradigmas existentes na física teórica e na cosmologia.

Essas interações com as principais revistas destacam um desafio significativo na comunicação de novas teorias científicas: a necessidade de alinhar o trabalho inovador com as expectativas e os padrões estabelecidos pelas revistas científicas e, ao mesmo tempo, preservar a integridade e a novidade da pesquisa.

Além disso, as recentes mudanças na política do *arXiv*, um importante repositório de pré-publicação, introduziram uma camada extra de complexidade. A nova exigência de que os envios sejam inicialmente precedidos pela publicação em um importante periódico revisado por pares pode parecer paradoxal e contra-intuitiva, especialmente para pesquisas pioneiras que podem encontrar resistência inicial em fóruns tradicionais. Essa mudança na política prejudicou consideravelmente nossa capacidade de compartilhar resultados preliminares rapidamente e interagir mais amplamente com a comunidade científica.

Apesar desses desafios, houve lampejos de esperança e reconhecimento. Duas revistas, a russa *Gravitation and Cosmology* (Pleiades Publishing) e a alemã *Astronomische Nachrichten*, demonstraram disposição para levar nosso trabalho a sério. Seu compromisso com a nossa pesquisa, embora não seja tão extenso quanto esperávamos, é um passo positivo em direção a uma aceitação e compreensão mais amplas do JCM.

Na seção a seguir, analisaremos as respostas e críticas dessas revistas, destacando tanto os comentários construtivos quanto as áreas em que o processo de revisão por pares poderia ser aprimorado para acomodar teorias científicas inovadoras.

8.2 Discussão sobre as críticas e respostas enviadas

No decorrer de nossos esforços para publicar o Modelo Cosmológico Janus, enfrentamos alguns desafios significativos, um dos quais foi o longo processo de revisão da revista *Gravitation and Cosmology*. Após oito meses de acompanhamento persistente, a revista finalmente encontrou um revisor para avaliar a qualidade do nosso trabalho. Entretanto, o resultado não foi o que esperávamos. Aqui está a correspondência que resume a essência dos desafios que enfrentamos.

Resposta de *Gravitação e Cosmologia*

Prezado Dr. Zejli,

Após várias tentativas, recebemos um relatório de avaliação do seu artigo GC23-019 "Nature of the Dipole Repeller". Lamentavelmente, o relatório contém uma série de observações críticas sérias. Em vista desse relatório, não podemos aceitar seu artigo para publicação em nossa revista.

Atenciosamente,
Dr. Sergey V. Bolokhov
Conselho Editorial da Gravitation and Cosmology

RELATÓRIO DO ÁRBITRO

Os autores tentam explicar o fenômeno do chamado Dipole Repeller na estrutura do "modelo cosmológico Janus", que é, na verdade, um tipo de teoria bimétrica. O próprio modelo contém algumas entidades que são muito improváveis de existir na natureza, como partículas com massa negativa e fótons com energia negativa. Para isso, é apropriado lembrar que experimentos recentes mostraram que as partículas de antimatéria estão sujeitas às mesmas forças de gravidade que as partículas de matéria com a mesma massa. Isso torna a suposição dos autores de massas negativas ainda mais duvidosa. Além disso, parece estranho que a teoria em questão seja invocada para explicar apenas um fenômeno e não tenha impacto sobre outros sistemas observados. Um ponto fraco do artigo é que ele contém apenas argumentos qualitativos sem cálculos específicos que levem em conta os parâmetros observados do repelente.

Minha resposta a esse crítico

Prezado Dr. Sergey V. Bolokhov,

Obrigado por encaminhar o relatório do árbitro sobre nosso manuscrito, "Nature of the Dipole Repeller". Agradecemos o tempo e o esforço investidos na revisão de nosso trabalho. No entanto, acreditamos que possa haver alguns mal-entendidos em relação aos conceitos centrais de nossa pesquisa, os quais gostaríamos de esclarecer.

1. Sobre massa negativa e antimatéria: A preocupação do árbitro com massas negativas à luz de experimentos recentes com antimatéria destaca um aspecto fundamental do nosso modelo que pode ter sido ignorado. O modelo cosmológico Janus, que forma a base de nosso artigo, prevê a existência de dois tipos distintos de antimatéria. A antimatéria do Tipo C, semelhante à antimatéria de Dirac produzida em laboratórios, responde às forças gravitacionais de forma semelhante à matéria comum. Em contraste, a antimatéria do Tipo PT, correspondente ao conceito de massa negativa de Feynman, é proposta para existir nos centros de vazios cósmicos, como o Repelente de Dipolo. Esse tipo exerce um efeito antigravitacional, que é um componente essencial de nosso modelo e está claramente detalhado na página 10 de nosso manuscrito.

2. Confirmações observacionais e aplicações do modelo: A validade do nosso modelo vai além da explicação do Repelente de Dipolo. Ele oferece insights sobre vários fenômenos astronômicos, que o árbitro pode não ter visto em nosso artigo:

Confinamento e estabilidade das galáxias: explicados por espaços lacunares preenchidos com massas negativas.

Efeitos de lente gravitacional: o modelo explica os fenômenos de lente gravitacional em torno

das galáxias.

Estrutura universal: Nossa teoria propõe uma estrutura lacunar do universo repleta de aglomerados de massa negativa, semelhante a bolhas de sabão interconectadas.

Curvas de rotação de galáxias e anomalias gravitacionais: Explicamos o achatamento das curvas de rotação e a aceleração inesperada de estrelas nas bordas das galáxias.

Formação inicial de galáxias: Com o apoio de observações recentes do Telescópio James Webb, nosso modelo sugere a formação simultânea de galáxias nos primeiros 100 milhões de anos do universo.

High-Redshift Galaxies: Abordamos a luminosidade reduzida de galáxias distantes (redshift > 7) devido ao efeito de lente gravitacional negativa de aglomerados de massa negativa.

Verificações Relativísticas Locais: O modelo se alinha com fenômenos como a precessão do periélio de Mercúrio e o desvio de luz pelo Sol.

Observações de supernovas: A assimetria entre populações de massa positiva e negativa está correlacionada com observações de supernovas Tipo Ia.

3. Interpretação equivocada do escopo do modelo: Por fim, a alegação de que nossa teoria é invocada apenas para explicar um único fenômeno ignora sua ampla gama de aplicações. Nosso modelo oferece explicações para estruturas de galáxias em espiral, invisibilidade da antimatéria cósmica devido a fótons de energia negativa e a natureza dos componentes invisíveis do universo, entre outros.

Acreditamos que essas informações e esclarecimentos adicionais ajudarão a abordar as preocupações levantadas no relatório do árbitro. Estamos preparados para fornecer mais detalhes ou revisões, se necessário.

Agradecemos por considerar nossa resposta e esperamos ter a oportunidade de contribuir com a revista.

Atenciosamente

Infelizmente, após nossa resposta detalhada abordando cada uma das preocupações do revisor, não recebemos mais nenhuma comunicação. A editora e o revisor pareciam ter se retirado do diálogo, ilustrando os desafios e, às vezes, as barreiras aparentemente intransponíveis encontradas na promoção de novas teorias científicas dentro da estrutura estabelecida da publicação acadêmica.

Análise crítica dos retornos da revista *Astronomische Nachrichten*

Nossas interações com o *Astronomische Nachrichten* também representaram desafios, mas permitiram uma exploração mais profunda de uma questão fundamental na aceitação de novas ideias em cosmologia. O único revisor, encontrado depois de uma busca de dois meses, iniciou um diálogo que destacou um problema generalizado: a dependência das suposições estabelecidas por físicos renomados, que então moldam e solidificam os paradigmas dentro dos quais a maioria dos cosmólogos opera.

O objetivo do nosso trabalho é fornecer uma nova interpretação geométrica e cosmológica da solução exterior de Schwarzschild, com base em duas suposições principais:

- **Isotropia:** invariância sob a ação de $SO(3)$, ou seja, o grupo de rotações 3D e translações espaciais.
- **Estacionariedade:** Independência dos termos da métrica com relação à coordenada de tempo, ou seja, invariância por translação de tempo.

A solução geral, como originalmente descrita por Schwarzschild, é frequentemente apresentada sem justificativa adequada. Tolman observou em 1934 ((Tolman 1934)) que a forma mais geral inclui um termo cruzado em $drdt$. No entanto, esse termo foi posteriormente negligenciado por conveniência. Essa abordagem, incluindo a de Schwarzschild, foi seguida por muitos pesquisadores, conforme discutido em detalhes no Capítulo 5.

O revisor apontou que a inexistência de tal termo cruzado resultou das suposições de simetria assumidas. Somos acusados de negligenciar uma suposição de simetria essencial: a solução deve ser invariante quando t é alterado para $-t$ (conforme observado no livro de Wald (Wald 1984), entre outros). Consequentemente, uma solução com um termo cruzado $drdt$ não satisfaria essa condição de invariância, pois a mudança de t para $-t$ altera o sinal do termo cruzado. Mas qual é a base física para essa suposição de simetria com relação à variável de tempo? Não há nenhuma. Ela não foi mencionada por Schwarzschild nem por muitos de seus sucessores.

De fato, o raciocínio (se é que podemos chamá-lo assim) baseia-se no "*modelo de buraco negro*" centrado na "*forma moderna*", em que o termo cruzado está ausente (42). Essa é uma hipótese puramente matemática, projetada para se alinhar não com realidades observacionais tangíveis, mas com a crença geral na existência de buracos negros. Para os cosmólogos, portanto, essa hipótese pode parecer "*natural*".

Nossa experiência com o *Astronomische Nachrichten* ilustra como paradigmas bem estabelecidos podem influenciar a recepção de ideias inovadoras em cosmologia, destacando a necessidade de abertura de espírito e reavaliação de suposições fundamentais à luz de novos desenvolvimentos teóricos.

9 Conclusão e discussão

Considerando o princípio da navalha de Occam, que favorece a teoria mais simples que seja mais consistente com os dados observacionais, é razoável concluir que o Modelo Janus supera o Modelo Padrão. O Modelo Cosmológico Janus oferece uma abordagem coerente para explicar muitos fenômenos astrofísicos, além de oferecer uma interpretação clara dos dados observacionais disponíveis. Já o Modelo Padrão apresenta inconsistências com os dados observacionais, exigindo construções ad hoc para contornar essas inconsistências.

De fato, o modelo Janus vai além de simplesmente propor alternativas para os fenômenos normalmente atribuídos à matéria escura e à energia escura, como a aceleração da expansão cósmica, o confinamento de galáxias, os efeitos pronunciados de lentes gravitacionais e a homogeneidade quase perfeita da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), entre outros. Ele fornece esclarecimentos detalhados sobre a natureza e a identidade dos componentes invisíveis do universo. O modelo resolve o paradoxo da falta de observação da antimatéria primordial e oferece uma explicação para o Repelente de Dipolo, vendo-o como um conglomerado de massa negativa. Essa perspectiva reforça a credibilidade do Modelo Cosmológico Janus no estabelecimento da estrutura em larga escala do universo, ao mesmo tempo em que explica as razões da dificuldade de detectar massa negativa com instrumentos observacionais ópticos. Ele também explica a baixa magnitude dos objetos astronômicos com um redshift gravitacional maior que 7 e adere ao princípio da refutabilidade estipulando testes observacionais específicos, como a presença de conglomerados de massa negativa, com o Dipole Repeller como um exemplo notável. Além disso, ele propõe um mapeamento alternativo do universo com base em uma interpretação diferente do efeito de lente gravitacional fraca.

Além disso, o modelo Janus encontra confirmação nos dados observacionais mais recentes, em particular aqueles obtidos pelo Telescópio Espacial James Webb, prevendo a formação de galáxias em suas formas atuais durante os primeiros 100 milhões de anos da idade do universo. Além disso, a estrutura de seu grupo dinâmico confere *simetria CPT* à sua geometria, para a qual uma previsão específica feita em 2017 foi confirmada em setembro de 2023. Essa previsão diz respeito à antimatéria com simetria C (simetria de carga), sintetizada em laboratório e emitindo fótons de energia positiva, que, de acordo com as observações, está sujeita a uma atração gravitacional para baixo, assim como a matéria comum.

Ele também abre caminhos promissores de pesquisa em mecânica quântica, sugerindo que a integração de energia negativa e estados de massa pode ser crucial para a quantificação da gravitação. O modelo Janus, portanto, se encaixa perfeitamente na natureza, não apresentando grandes contradições.

Ao longo deste livro, nos aprofundamos nas complexidades do modelo, desvendando suas nuances e seu potencial para esclarecer os mistérios que há muito confundem cosmólogos e físicos.

Essa jornada pelos campos da matemática avançada, da física teórica e da cosmologia demonstra a capacidade do modelo de desafiar as perspectivas convencionais e oferecer explicações alternativas para fenômenos que os modelos atuais não conseguem elucidar completamente. As discussões e análises apresentadas têm o objetivo de enriquecer a compreensão do leitor e estimular a curiosidade de explorar e questionar ainda mais os limites do nosso conhecimento científico.

Acredito que as limitações da física teórica e da cosmologia podem ser atribuídas à demora do campo em adotar a topologia desde a década de 1950. A topologia, o estudo das propriedades preservadas por meio de deformações contínuas, poderia ter oferecido novas maneiras de entender a estrutura do universo e suas estruturas complexas.

Concluindo, espero que este livro sirva não apenas como um guia abrangente para o modelo ancorado em um sólido fundamento teórico da relatividade geral, mas também como inspiração e motivação para uma nova geração de pensadores que ousarão corajosamente explorar os territórios inexplorados da cosmologia. Que ele promova uma apreciação mais profunda da beleza complexa do nosso universo e da busca contínua pela compreensão que nos impulsiona como cientistas e seres humanos.

No campo dinâmico e em constante evolução da Cosmologia, esse modelo surge como uma luz orientadora essencial, iluminando o caminho para territórios inexplorados e novas perspectivas. Essa jornada está longe de terminar; ao contrário, ela representa um chamado contínuo para novas explorações e descobertas.

Bibliografia

- Adler, R., R. Bazin e M. Schiffer. 1975. *Introduction to General Relativity [Introdução à Relatividade Geral]*. McGraw-Hill.
- Akiyama, K. et al. 2019. "Primeiros resultados do telescópio do horizonte de eventos M87. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole" (A sombra do buraco negro supermassivo). *The Astrophysical Journal*.
- Akiyama, K. et al. 2022. "Primeiros resultados do telescópio do horizonte de eventos de Sagittarius a*. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way" (A sombra do buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea).
- Anderson, E. K. et al. 2023. "Observação do efeito da gravidade no movimento da antimatéria". *Nature*.
- Bargmann, V., P. G. Bergmann e A. Einstein. 1941. "On the Five-Dimensional Representation of Gravitation and Electricity" [Sobre a representação quadridimensional da gravitação e da eletricidade]. *Volume de Aniversário de Theodore von Karman*, 212.
- Benoit-Lévy, A., e G. Chardin. 2012. "Introducing the Dirac-Milne Universe" [Apresentando o Universo Dirac-Milne]. *Astronomy and Astrophysics* 537: A78.
- Bergmann, P. 1942. *An Introduction to the Theory of Relativity [Introdução à Teoria da Relatividade]*. Prentice-Hall.
- Bergmann, P., e A. Einstein. 1938. "On a Generalization of Kaluza's Theory of Electricity" [Sobre uma generalização da teoria da eletricidade de Kaluza]. *Annals of Mathematics* 39: 683.
- Bondi, H. 1957. "Negative Mass in General Relativity" [Massa negativa na relatividade geral]. *Reviews of Modern Physics* 29 (3).
- Bourbaki, N. 2006. *Eléments de Mathématique: Groupes Et Algèbres de Lie*. Springer.
- Boylan-Kolchin, Michael. 2023. "Teste de estresse. Λ CDM with High-Redshift Galaxy Candidates". *Nature*.
- Brennen, C. E. 1995. *Cavitation and Bubble Dynamics [Cavitação e dinâmica de bolhas]*. Oxford University Press.
- Chandrasekhar, S. 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes (A teoria matemática dos buracos negros)*. Clarendon press.
- Chaskalovic, Joël. 2009. "Gravitation Theory for Mathematical Modelling in Geomarketing" (Teoria da gravitação para modelagem matemática em geomarketing). *Journal of Interdisciplinary Mathematics* 12 (3): 417.

- Cronin, J. W. 1964. "The Experimental Discovery of CP Violation" [A descoberta experimental da violação de CP]. *Sociedade Americana de Física*.
- Damour, T., e Ian I. Kogan. 2002. "Effective Lagrangians and Universality Classes of Nonlinear Bigravity" [Lagrangianos efetivos e classes de universalidade da bigravidade não linear]. *Phys. Rev. D*.
- Debergh, N. et al. 2018. "On Evidence for Negative Energies and Masses in the Dirac Equation Through a Unitary Time-Reversal Operator" [Sobre evidências de energias e massas negativas na equação de Dirac por meio de um operador de reversão de tempo unitário].
- Dyson, F. W., A. S. Eddington e C. Davidson. 1920. "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 291-333.
- Eddington, A. 1925. "A Comparison with Whitehead's and Einstein's Formulae" [Uma comparação entre as fórmulas de Whitehead e Einstein]. *Nature*.
- Einstein, A., e N. Rosen. 1935. "The Particle Problem in the General Theory of Relativity" [O problema da partícula na teoria geral da relatividade]. *Phys. Rev.* 48: 73.
- El-Ad, H., T. Piran e L. N. da Costa. 1997. "Mon. Não. R. Astro. Soc."
- Farnes, J. S. 2017. "Uma proposta para uma teoria unificadora da energia escura e da matéria escura." *arXiv Physics.gen-Ph*.
- Ferreira, Leonardo et al. 2022. "Pânico! At the Disks: First Rest-Frame Optical Observations of Galaxy Structure at $z>3$ with JWST in the SMACS0723 Field". *The Astrophysical Journal Letters*.
- Flamm, L. 1916. "Contributions to Einstein's Theory of Gravitation" [Contribuições para a teoria da gravitação de Einstein].
- Heald, G. 2020. "The Stronger Case for Gravitational Repulsion Between Matter and Antimatter" [O caso mais forte de repulsão gravitacional entre matéria e antimatéria]. *Research Gate Publication*, no. 339339776.
- Hoffman, Y. et al. 2018. "O Universo Quase Linear Próximo". *Nature Astronomy*.
- Hoffman, Y., D. Pomarède, R. B. Tully e H. Courtois. 2017. "The Dipole Repeller" (O repelente de dipolo). *Nature Astronomy* 1: 0036.
- Hossenfelder, S. 2008. "A Bi-Metric Theory with Exchange Symmetry." *arXiv*.
- Kaluza, Th. 1921. "On the Unification Problem in Physics" [Sobre o problema da unificação na física]. *Sitzungsberichte Pruss. Acad. Sci.* 966.

- Kerr, Roy P. 1963. "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics" [Campo gravitacional de uma massa giratória como exemplo de métrica algebricamente especial]. *Physical Letters* 11: 237.
- Klein, O. 1926. "Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity" [Teoria Quântica e Teoria da Relatividade Quadridimensional]. *Z.Phys.* 37: 895.
- Koiran, P. 2021. "Tempo de queda na métrica de Eddington-Finkelstein, com aplicação às pontes de Einstein-Rosen". *Inter. Jr. de Mod. Phys. D* 14.
- Kruskal, M. D. 1960. "Extensão máxima da métrica de Schwarzschild". *Physical Review* 119 (5).
- Kruskal, Martin D. 1960. "Maximal Extension of Schwarzschild Metric" [Extensão máxima da métrica de Schwarzschild]. *Physical Review* 119: 1743-45.
- Medeiros, L. et al. 2023. "Modelagem Interferométrica de Componentes Principais (PRIMO), um Algoritmo para Dados EHT. I. Reconstrução de imagens a partir de observações simuladas do EHT".
- Michelson, A. A. e E. W. Morley. 1887. "On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether" (Sobre o movimento relativo da Terra e do éter luminífero). *American Journal of Science* 34: 333-45.
- Morin, Bernard e Jean-Pierre Petit. 1978. "Le Retourneement de La Sphère". HAL.
- Morris, M. e K. S. Thorne. 1988. "Wormholes in Spacetime and Their Use for Interstellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity". *Am. J. Phys.* 56: 395.
- Neiser, T. F. 2020. "Modelo de estrela antineutrino degenerada de Fermi da energia escura". *Avanços em Astronomia* 2020: Artigo ID 8654307.
- Oppenheimer, J. R. e H. Snyder. 1939. "On Continued Gravitational Contraction" [Sobre a contração gravitacional contínua]. *Phys. Rev.* 56: 455-59.
- Oppenheimer, J. R. e G. M. Volkoff. 1939. "On Massive Neutron Cores" [Sobre núcleos de nêutrons maciços]. *Physical Review* 55 (4): 374-81.
- Palatini, A. 1919. "Deduzione Invariantiva Delle Equazioni Gravitazionali Dal Principio Di Hamilton." *Rend. Circ. Matem. Palermo* 43: 203-12. <https://doi.org/10.1007/BF03014670>.
- Pavlovskii, A. I. 1994. "Magnetic Cumulation-a Memoir for Andrei Sakharov." Em *Megagauss Magnetic Field Generation and Pulsed Power Applications*, editado por M. Cowan e R. B. Spielman, 9-22. Nova York: Nova Science Publishers.
- Perlmutter, S. et al. 1999. "Measurements of Ω e Λ from 42 High-Redshift Supernovae". *Astrophysical Journal* 517 (2).
- Petit, Jean-Pierre . 1985. *Le Topologicon*. Edição Belin.

- Petit, Jean-Pierre. 1994. "The Missing-Mass Problem" [O problema da falta de massa]. *IL NUOVO CIMENTO*.
- Petit, Jean-Pierre. 1995. "Cosmologia do Universo Gêmeo". *Astrophysics and Space Science* 226: 273-307.
- Petit, Jean-Pierre. 2018. "O modelo cosmológico de Janus e as flutuações da CMB". *Progress in Physics*.
- Petit, Jean-Pierre, e G. D'Agostini . 2021a. "Bimetric Models. Quando a massa negativa substitui tanto a matéria escura quanto a energia escura. Excelente concordância com os dados observacionais. Solving the Problem of the Primeval Antimatter" [Resolvendo o problema da antimatéria primitiva]. *Banco de dados do Centro Nacional Francês*, 2021a.
- Petit, Jean-Pierre, e G. D'Agostini. 2021b. "Constraints on Janus Cosmological Model from Recent Observations of Supernovae Type Ia". *Astrophysics and Space Science*, 2021b.
- Petit, Jean-Pierre, e G. D'Agostini. 2014a. "Modelo Cosmológico Bimétrico com Massas Positivas e Negativas Interagentes e Duas Velocidades Diferentes da Luz, em Concordância com a Aceleração Observada do Universo." *Modern Physics Letters A* 29 (34).
- Petit, Jean-Pierre e G. D'Agostini. 2014b. "Negative Mass Hypothesis in Cosmology and the Nature of Dark Energy" [Hipótese de massa negativa em cosmologia e a natureza da energia escura]. *Astrophysics And Space Science* 354 (2014b): 611-15.
- Petit, Jean-Pierre, e G. d'Agostini. 2014. "Cosmological Bimetric Model with Interacting Positive and Negative Masses and Two Different Speeds of Light, in Agreement with the Observed Acceleration of the Universe." *Modern Physics Letters A*.
- Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini e N. Debergh . 2018. "Evidence of Negative Energies and Masses in the Dirac Equation Through a Unitary Time-Reversal Operator" [Evidência de energias e massas negativas na equação de Dirac por meio de um operador de reversão de tempo unitário]. *J. Phys. Comm.* 2 (115012).
- Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini e N. Debergh. 2019. "Consistência física e matemática do modelo cosmológico de Janus (JCM)". *Progress in Physics* 15.
- Piran, Tsvi. 2018. "On Gravitational Repulsion." *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/9706049>.
- Riess, A. et al. 2004. "Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope, Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution" [Descobertas de supernovas do tipo Ia em $z > 1$ pelo Telescópio Espacial Hubble, evidências de desaceleração passada e restrições à evolução da energia escura]. *Astrophysical Journal* 607 (2).
- Sakharov, A. D. 1967 . "Violação da invariância de CP, assimetria de C e assimetria de bárions do universo". *Pi'sma ZhÉTF* 5 (1): 32-35.
- Sakharov, A. D. 1979. "ZhETF Pis'ma". *JETP* 49: 594.

Sakharov, A. D. 1980. "Cosmological Models of the Universe with Reversal of Time's Arrow" [Modelos cosmológicos do universo com reversão da seta do tempo]. *Pi'sma ZhÉTF* 79 (3): 689-93.

Sakharov, A. D. 1982. "Multisheet Models of the Universe" [Modelos de Múltiplas Folhas do Universo]. *Pi'sma ZhÉTF* 82 (3): 1233-40.

Schmidt, B. P. et al. 1998. "The High-z Supernova Search. Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae" (Medindo a desaceleração cósmica e a curvatura global do universo usando supernovas tipo Ia). *Astrophysical Journal* 507 (1).

Schwarzschild, K. 1916a. "Über Das Gravitationsfeld Einer Kugel Aus Inkompressibler Flüssigkeit Nach Der Einsteinschen Theorie." *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.

Schwarzschild, K. 1916b. "Über Das Gravitationsfeld Eines Massenpunktes Nach Der Einsteinschen Theorie". *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.

Souriau, J. M. 1964. *Geometry And Relativity [Geometria e Relatividade]*. Hermann.

Souriau, J. M. 1997. *Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics [Estrutura de Sistemas Dinâmicos, uma Visão Simplética da Física]*. Birkhäuser Verlag.

Souriau, Jean-Marie. 1965. "Prolongamentos do Campo de Schwarzschild". *Bulletin de La Société Mathématique de France* 93: 193-207.

Stoica, O. C. 2014. "On Singular Semi-Riemannian Manifolds." *Revista Internacional de Métodos Geométricos em Física Moderna* 11.

Thorne, K. S., J. A. Wheeler e C. W. Misner. 1973. *Gravitation*.

Tolman, R. 1934. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology [Relatividade, Termodinâmica e Cosmologia]*. Oxford na Clarendon Press.

Tsamparlis, Michael. 1978. "On the Palatini Method of Variation" [Sobre o método de variação de Palatini]. *Journal of Mathematical Physics* 19 (3): 555-57.

Vuyk, V. 2018. "Um repelente de dipolo a vácuo de quinta força, necessário para criar todas as forças de atração, mesmo em torno de buracos negros na teoria quântica de FFF". *Research Gate Publication*, no. 325995732.

Wald, R. 1984. *General Relativity*.

Weinberg, S. 2000. *The Quantum Theory of Fields: Volume 1, Foundations [A Teoria Quântica de Campos: Volume 1, Fundamentos]. Volume 2, Modern Applications (Aplicações modernas). Volume 3, Supersymmetry (Supersimetria)*. Vol. 1-3. Cambridge University Press.