

JEAN-PIERRE PETIT

As Aventuras de Anselmo Curioso

**OS MISTÉRIOS
DA GEOMETRIA**





Há algum
matemático na
sala?

ADVERTÊNCIA

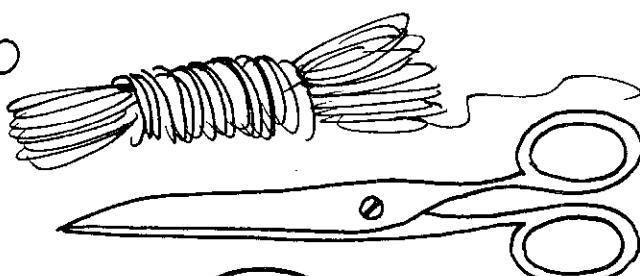
ISTO NÃO É UM TRATADO, NEM UM CURSO.
É SIMPLEMENTE A HISTÓRIA DE ANSELMO
E DE UMA DAS SUAS VIAGENS,
AO PAÍS DA GEOMETRIA.

PARA LER DE PREFERÊNCIA, ACOMPANHADO DE:

* UM TUBO DE ASPIRINAS



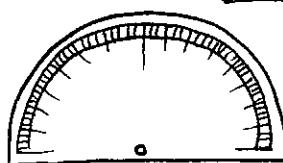
* UMA MEADA DE FIO



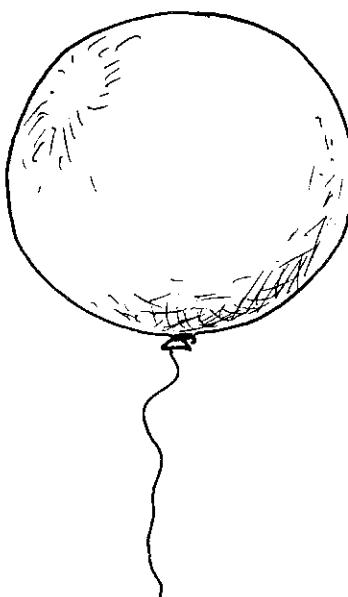
* UMA TESOURA



* UM ROLO DE FITA-GOMADA



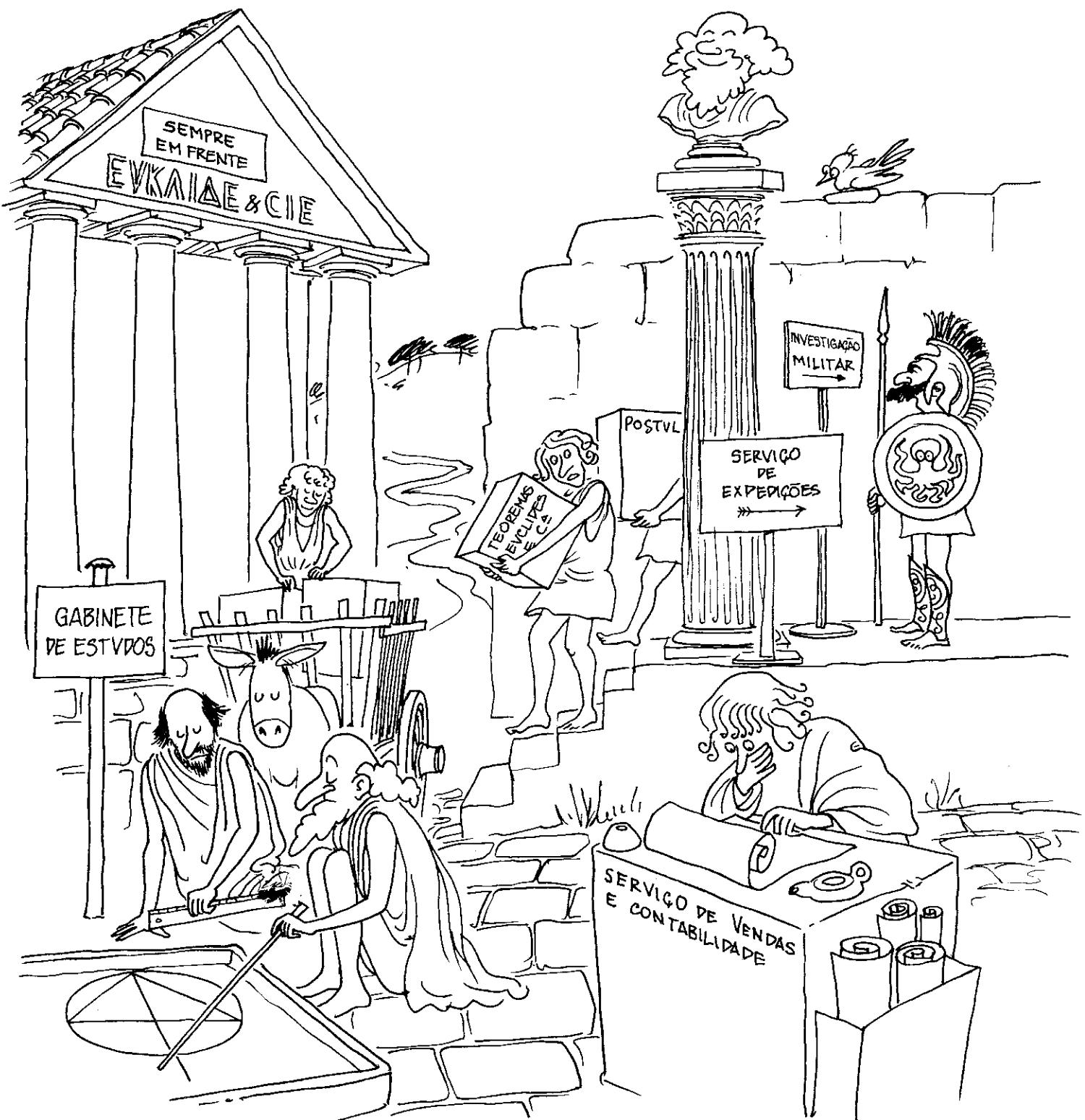
* UM TRANSFERIDOR



* E UM LINDO BALÃO

BEM CHEIO...

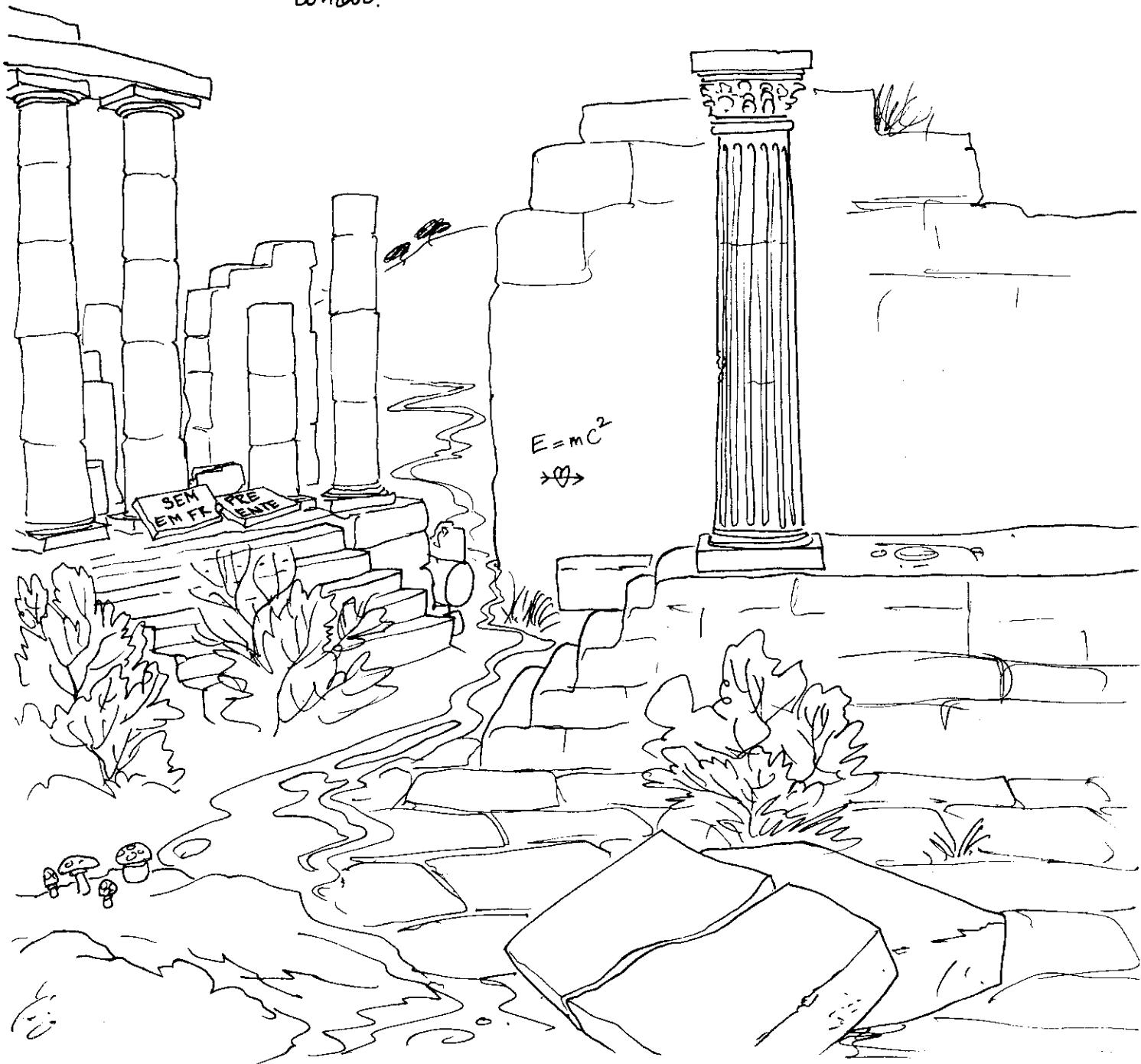
A Sociedade Euclides & C^a nasceu em Alexandria no século III a.C. Durante dois mil e duzentos anos os negócios prosperaram. Os produtos eram apreciados e a clientela estava satisfeita e era dedicada.



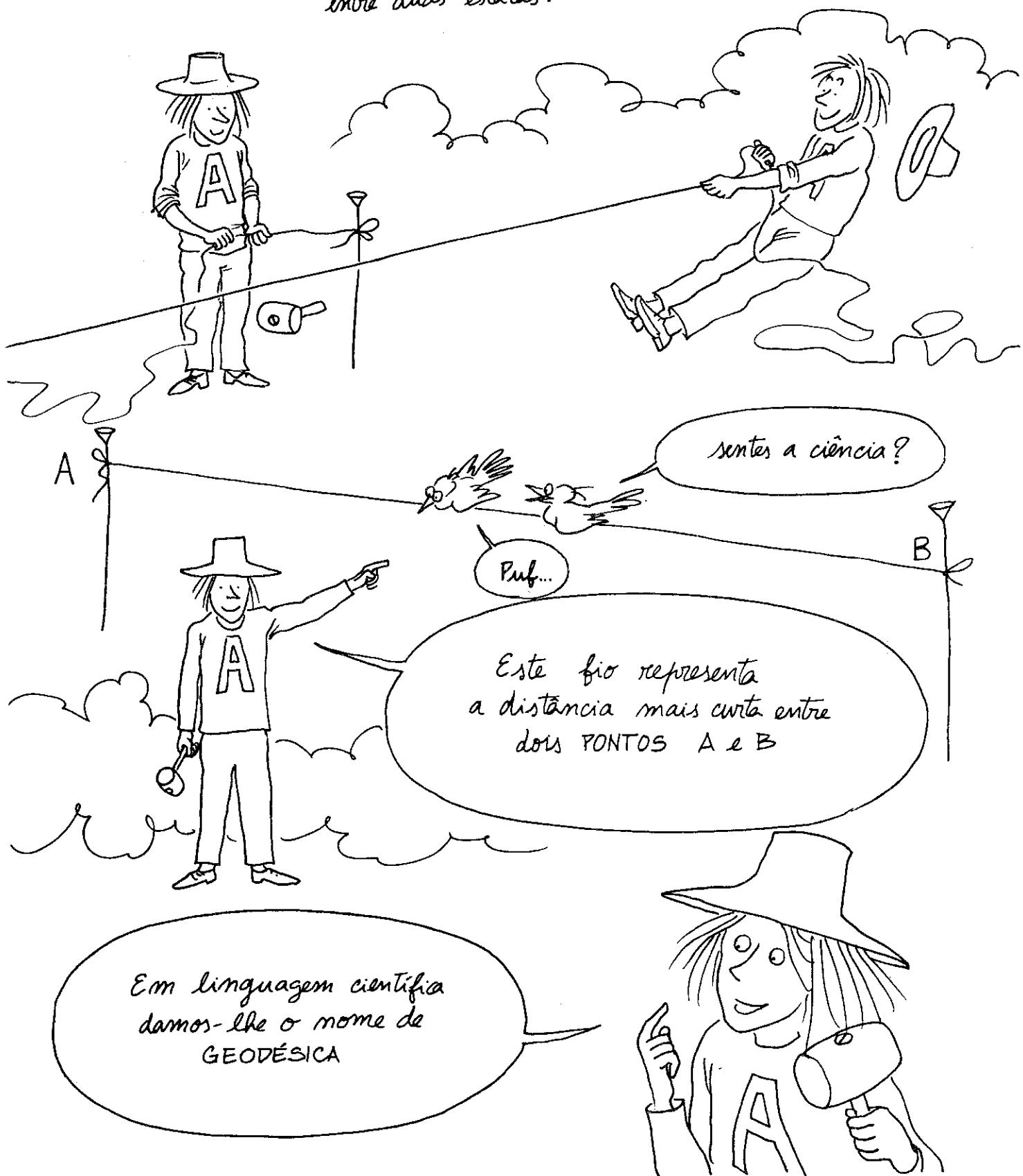
Mas, pouco a pouco, os gostos dos clientes mudaram. Alguns deles, outrora fervorosos adeptos da forma em questão, depois de curiosas experiências, perguntaram-se:

"O Euclides é realmente o que há de melhor em toda a parte e para tudo?"

A história de um deles é a que aqui vamos contar.



PRÓLOGO: Um dia, Anselmo decidiu esticar um fio entre duas estacas:



Com três fios esticados, quer dizer,
com três GEODÉSICAS



Adaptando o seu transferidor a cada vértice
desse TRIÂNGULO, mediu os ângulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} ,
e fez a soma.



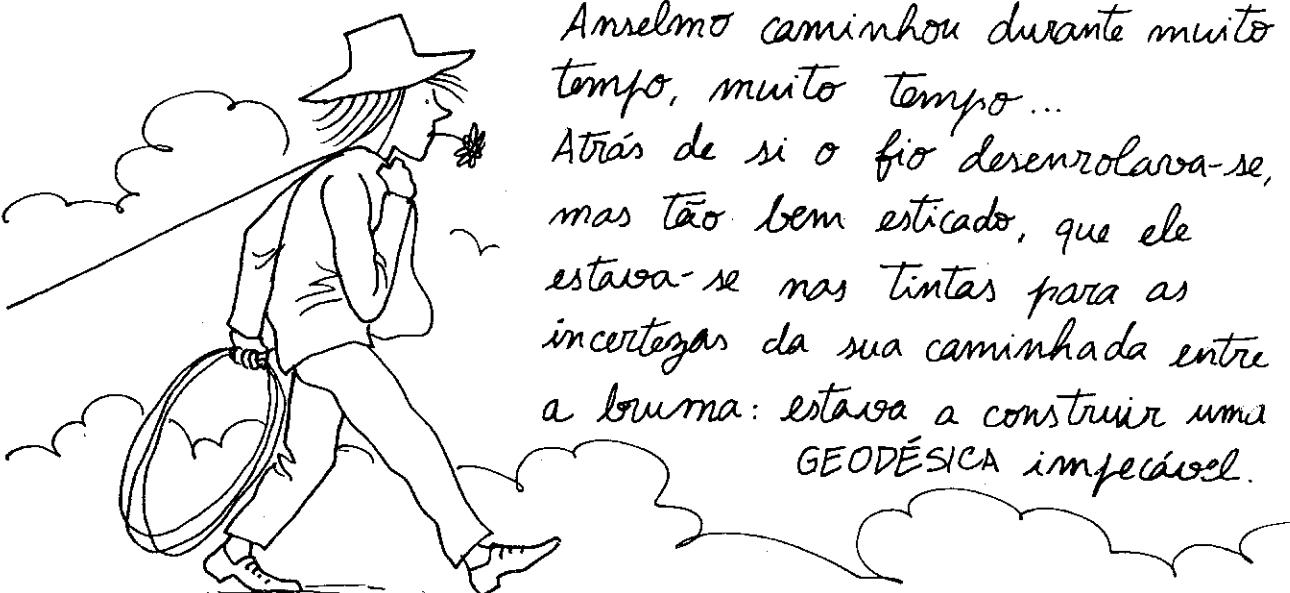
Segundo o excelente
teorema da sociedade
Euclides & Cia essa soma
equivale a 180°
Ora bem...

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ Euklides}$$

O mundo onde Anselmo vivia era nebuloso como o diacho. Não se via um palmo diante do nariz.



O que acontece quando se vai LONGE?
O que esconde este nevoeiro?
Uma GEODÉSICA é uma RECTA.
E se eu fosse SEMPRE EM FRENTE,
o mais LONGE possível? Se eu
explorasse este espaço, só faria ver?



Anselmo caminhou durante muito tempo, muito tempo...
Atrás de si o fio desenrolava-se,
mas tão bem esticado, que ele
estava-se nas tintas para as
incertezas da sua caminhada entre
a loura: estava a construir uma
GEODÉSICA imperfeita.

Mas, não sei se já deram por isso, há dias em que tudo corre ao contrário.

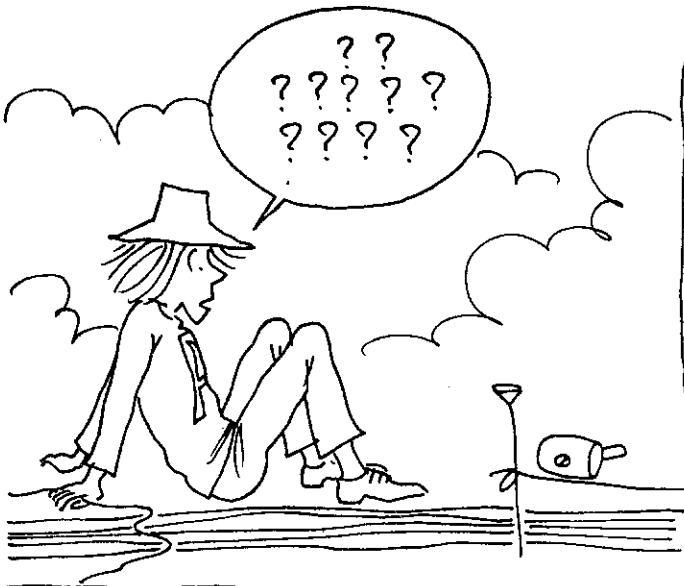


Imperturbável, continuou portanto a esticar o fio, e prosseguiu, SEMPRE EM FRENTE, cheio de curiosidade.

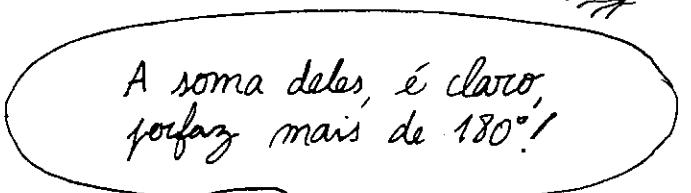


A RECTA de Anselmo fechava-se sobre si própria!





Tentemos um teorema de Euclides.
Vou traçar três GEODÉSICAS de igual tamanho. Isso dar-me-á um TRIÂNGULO cujos três ângulos devem ter cada um deles 60° e cuja soma será de 180° . Está descrito no texto.





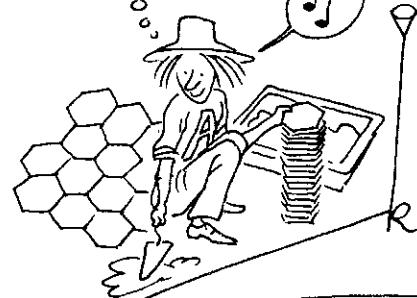


Para medir uma ÁREA, utilize os ladrilhos Euclides. Para obter um perímetro, a rede Euclides é o melhor material que existe no mercado. O agrado dos nossos clientes é a nossa melhor publicidade.

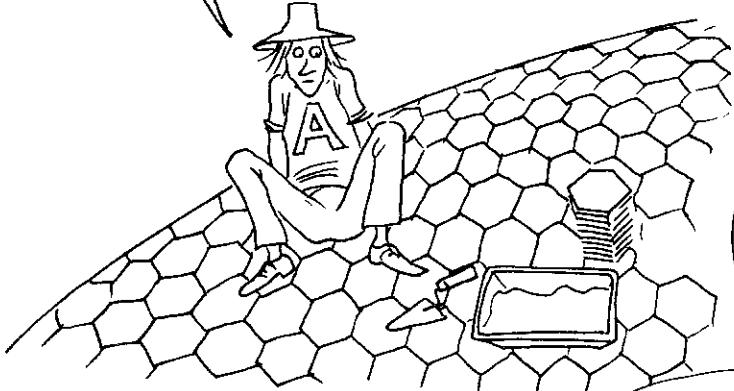


Começo bem,
tenho ladrilhos
a mais!

Área πl^2

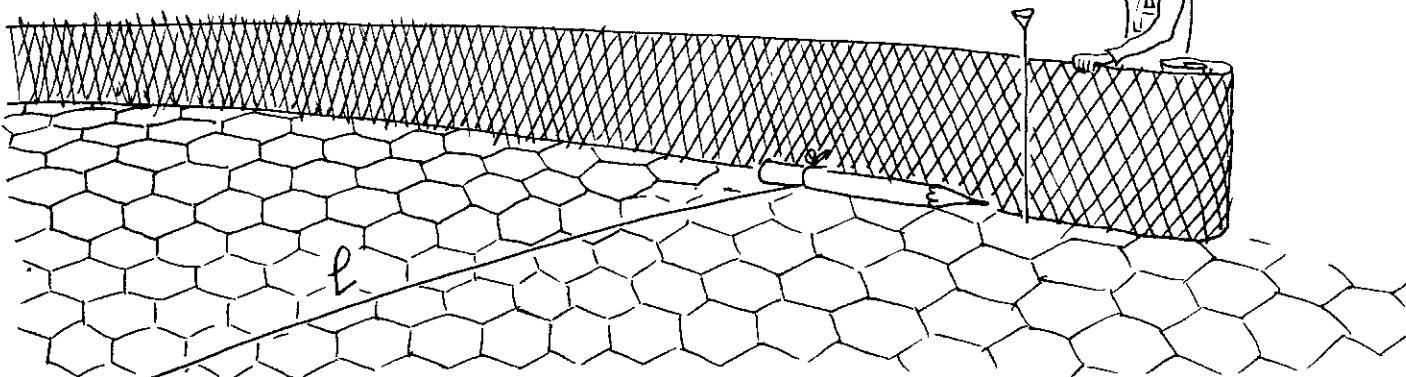


Tudo aqui é ordem
e beleza, luxo, calma
e voluptuosidade



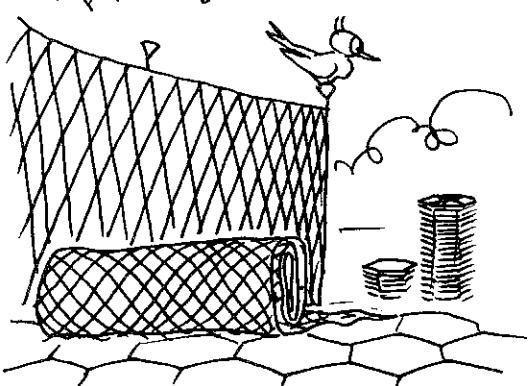
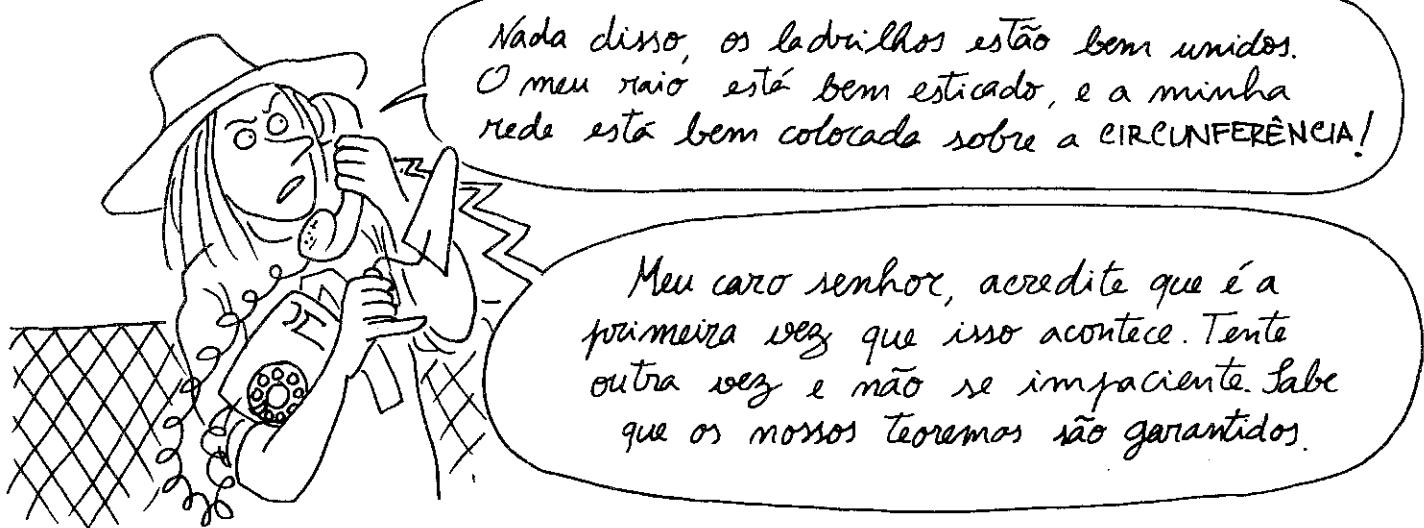
Vou medir o
perímetro com a ajuda
da sua rede

Perímetro: $2\pi l \dots$





Esta? É da casa Euclides? Sou eu outra vez! Tenho uma data de sobras de ladrilhos E de rede. Essa coisa do πl^2 e do $2\pi l$, não funciona mesmo nada!



Anselmo prosseguiu assim com a sua experiência, aumentando cada vez mais o ralo E da sua circunferência.
Mas as sobras eram cada vez maiores.

Ora esta, agora tenho muito mais de 36% de rede e 19% de ladrilhos! E a circunferência que eu traço tornou-se... uma RECTA!

Estou a sonhar, ou quê?

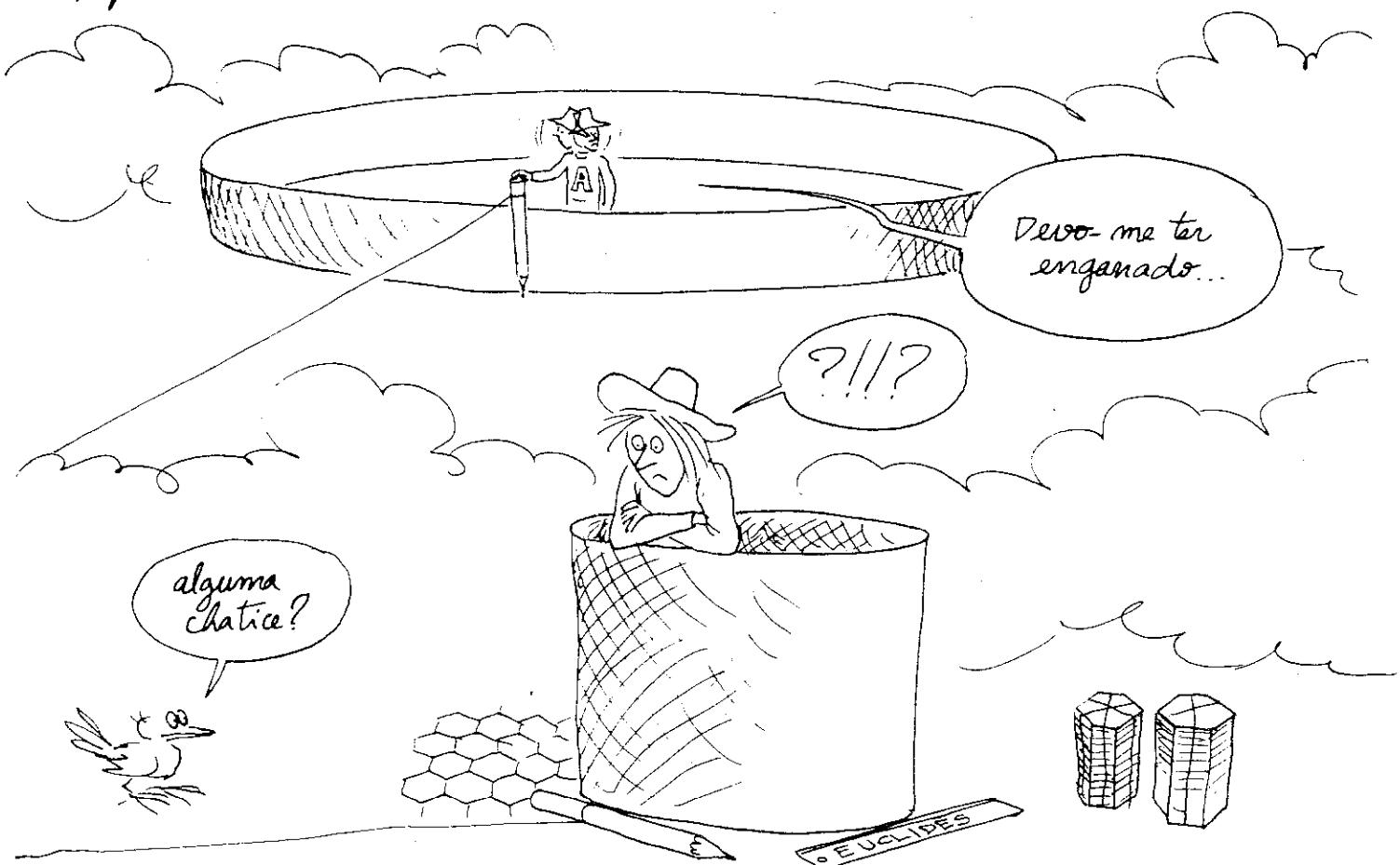
Pelos céus! Esta régua é mesmo DIREITA!

Anselmo aumenta então o raio r , e desta vez...

A curvatura da minha circunferência passou para o outro lado

E agora, quando AUMENTO o raio r , o perímetro DIMINUI, é uma história de lóridos!

Depois dum ultimo calcetamento:

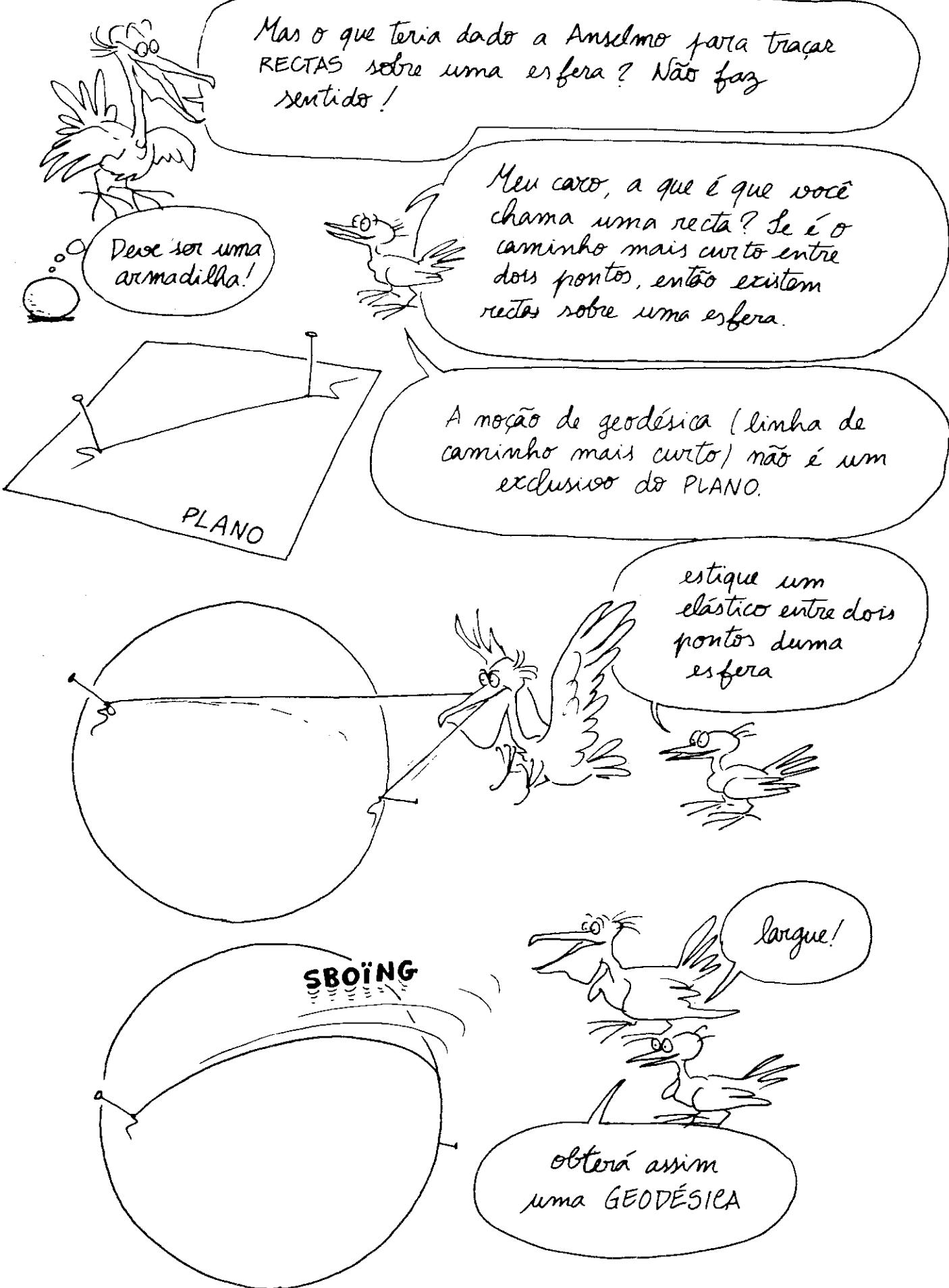


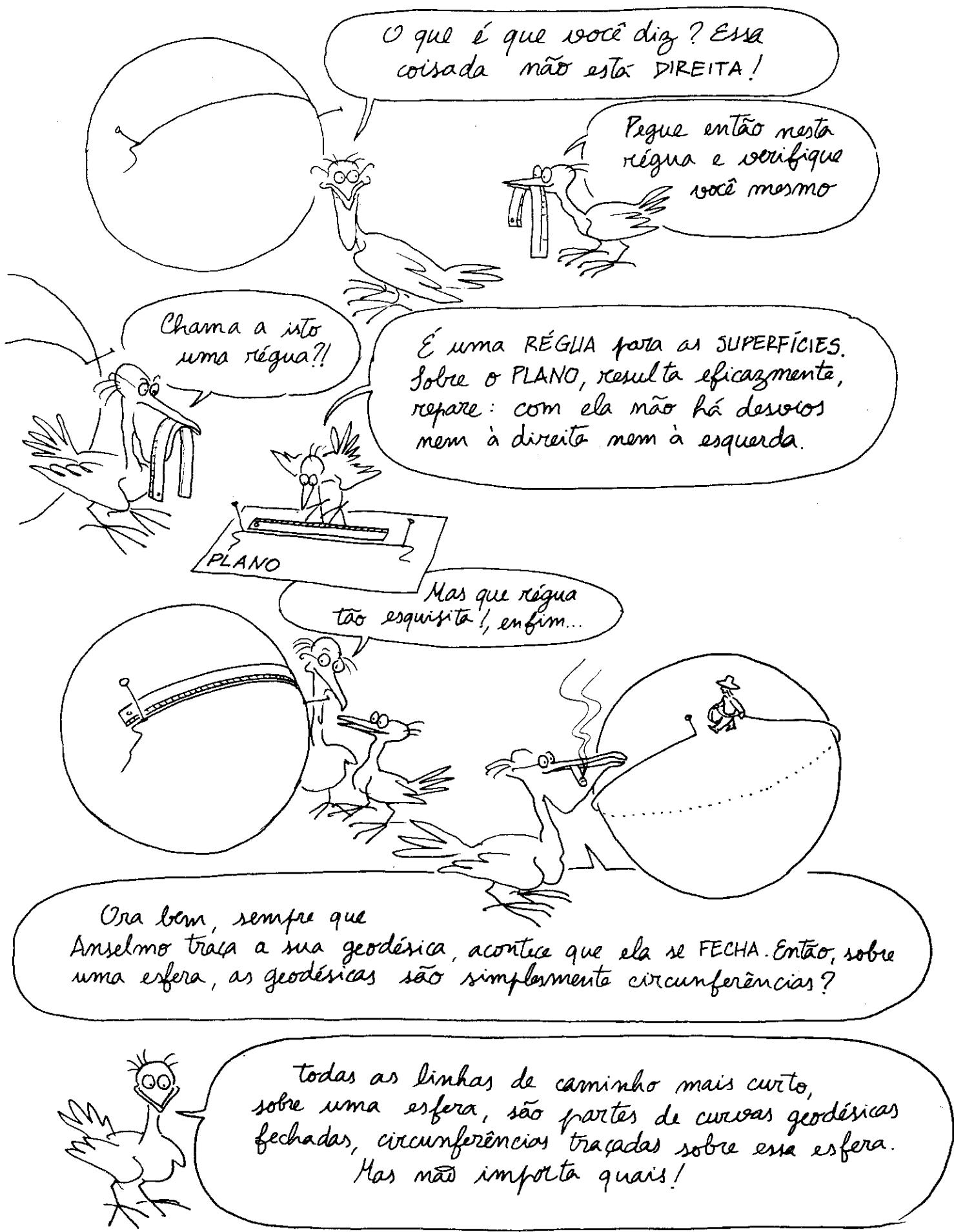
O QUE FOI QUE ACONTECEU ?

Para o saber, afastemos as nuvens:



Anselmo apercebe-se de repente que se encontra sobre uma esfera na qual aplicou as regras da GEOMETRIA NO PLANO.





????!

Mas que história é essa? Você está a brincar com as palavras. Você quer dizer que existem imensas espécies diferentes de circunferências sobre uma esfera?!?

C'um raio, julgava que estava a perceber tudo e afinal já não percebo mais...

Uma circunferência é o conjunto de pontos situados a uma distância inalterável a dum ponto fixo N, a que chamaremos POLO.

mmmm...

Eis aqui um conjunto de circunferências do mesmo polo N, a que chamaremos PARALELAS.

EQUADOR

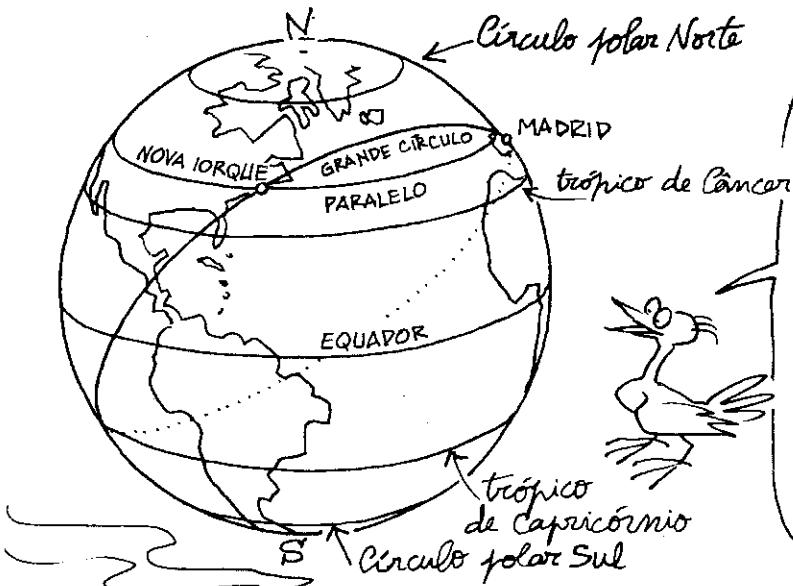
Estas circunferências paralelas são também os pontos que ficam a igual distância l' do ponto S "polo sul", antípoda do "polo norte" N

Entre estas aqui, há uma maior que as outras, e que poderia servir de EQUADOR à esfera.

Compreendo agora porque uma circunferência, sobre uma esfera, tem dois CENTROS N e S!

Chamaremos a estes "EQUADORES" GRANDES CÍRCULOS da ESFERA. E estes serão precisamente as suas GEODÉSICAS.

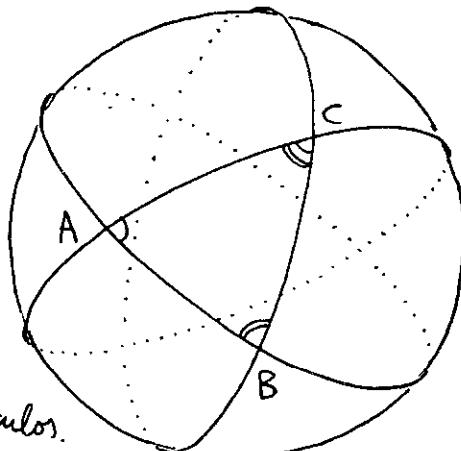
É a primeira vez que vejo uma linha GEODÉSICA de tão forte... é impressionante!



Sobre o planeta TERRA os círculos polares, e os trópicos, são paralelos. Madrid e Nova Iorque estão no mesmo círculo. Mas é sabido que este arco de paralelo que os une não é o mais curto caminho. O caminho mais curto é o GRANDE CÍRCULO!



Um TRÂNGULO será constituído por três arcos inevitavelmente tomados de três grandes círculos.



Pode-se materializar esses triângulos com a ajuda de fita-gomada ou de elásticos e medir os ângulos colocando um transferidor em cada vértice na superfície da esfera

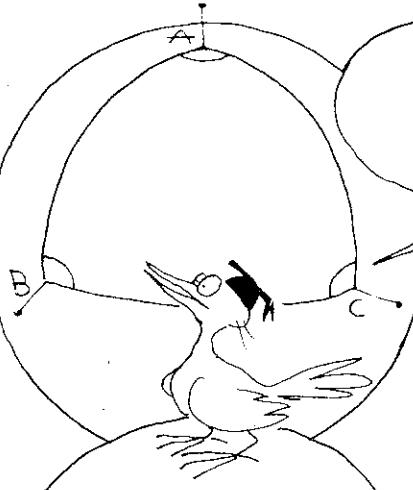
Então quanto faz a soma de $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$?

Isso depende da superfície do triângulo.
Entre 180° e 900° !

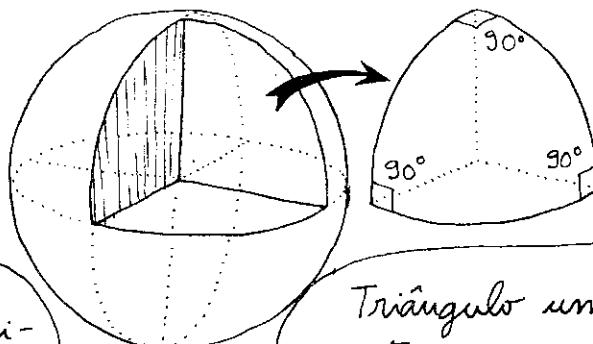
A uma curta distância a calote da esfera difere pouco dum PLANO.
A soma, neste caso, está também...

...muito próxima dos 180°

Eis aqui um triângulo, por exemplo, que se poderia materializar com a ajuda de três pedaços de elástico



Triângulo que seria então tri-rectângulo e equilátero

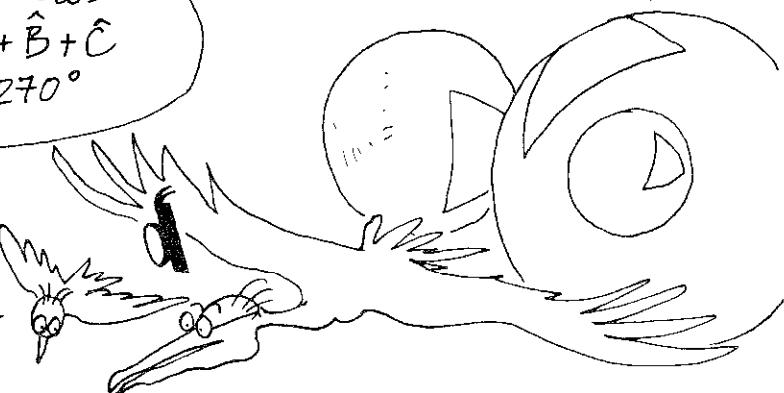


Triângulo um pouco especial visto que ocupa um oitavo da superfície da esfera

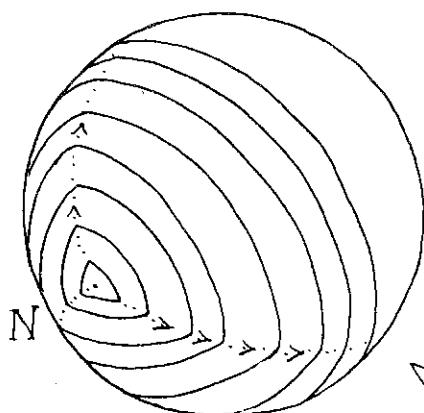
E a soma dos ângulos: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ perfaz 270°

!!??!

E você ainda não viu tudo!

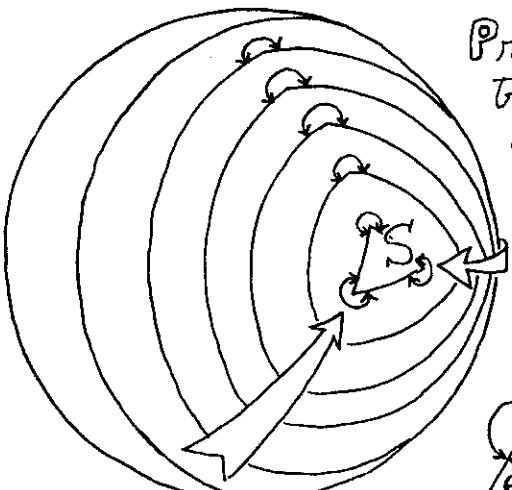


Imaginemos agora um triângulo constituído ainda por fios elásticos, do qual afastarmos progressivamente os vértices. Os ângulos nestes vértices aumentarão. E a sua soma será a mesma.



180°!

Finalmente podemos fazer com que os três vértices se inscrevam sobre um equador da esfera. Os ângulos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} são então RASOS, medem 180° , e a sua soma atinge 540° !!...

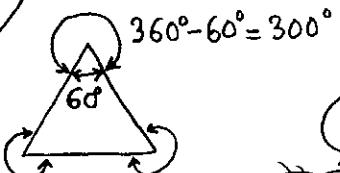


$$\text{Soma: } 300 \times 3 = 900^\circ$$

Prolongando esta migração dos vértices do Triângulo sobre o outro hemisfério, este convergirá para o ponto S, antípoda de N. Conservando a definição inicial dos ângulos nos vértices, cada um deles terá então mais de 180° !

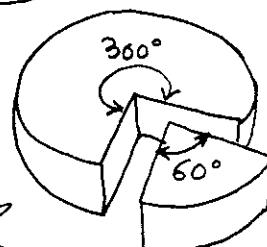
Para ser mais preciso, terão cada um

$$360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$



A circunferência completa representa 360°

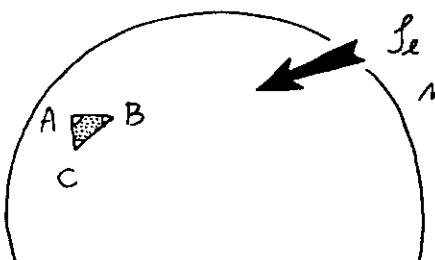
Assim, sobre a esfera, a soma dos ângulos dum Triângulo pode ir de 180° a 900° !



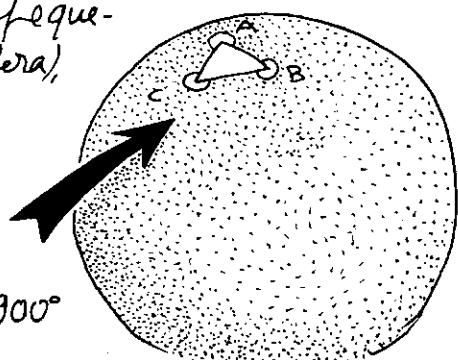
Segundo o teorema de Gauss, a soma dos ângulos dum triângulo traçado sobre uma esfera perfaz:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 + \frac{A}{3.1416 R^2} \right) \text{ graus}$$

onde R é o raio da dita esfera e A a área do triângulo.



Se o triângulo tem a área pequena (em relação à da esfera), reencontrarmos Euclides ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$)



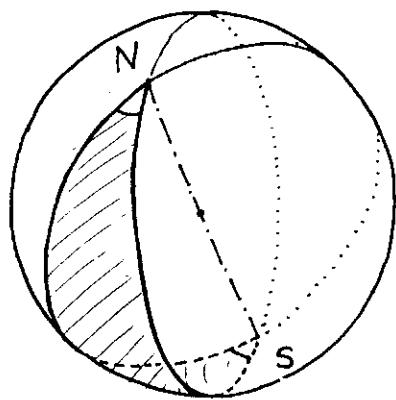
Se, pelo contrário, o triângulo tem quase a mesma área da esfera ($4 \times 3,1416 \times R^2$), cai-se nos 900°

Nota de serviço: Dois pontos duma esfera podem unir-se por dois Arcos Geodésicos constituindo UM grande círculo.

Mas se os pontos N e S são ANTÍPODAS, então por estes passa uma infinidade de GEODÉSICAS !...

Duas destas "rectas da esfera" determinam um BIÂNGULO, cujos ângulos e lados são iguais.

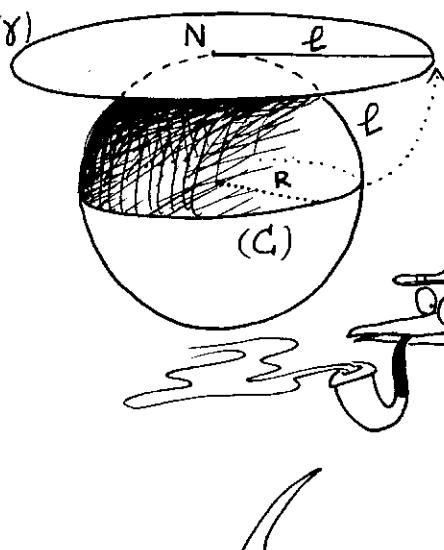
A soma dos ângulos perfaz...
não importa quanto!...



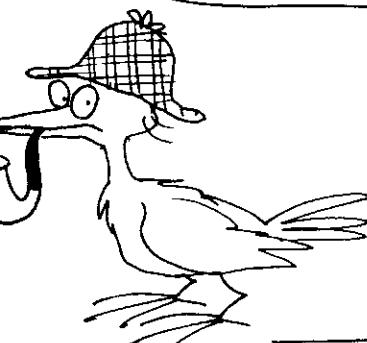
Completamente
idiota...

A Directo

(8)



Tratemos agora de compreender
porque, há instantes, Anselmo tinha
ladrilhos e rede de sobre.



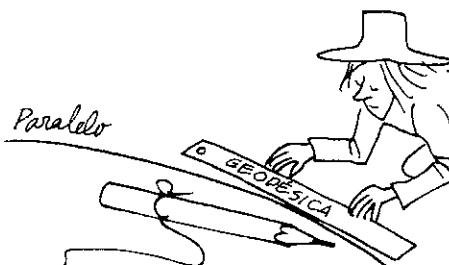
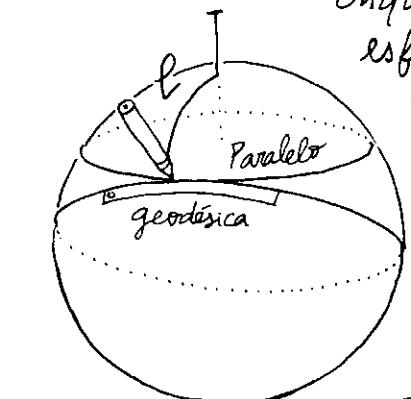
(C) é a circunferência que ele traça e (γ) a circunferência que JULGA traçar. Ele avalia a área do círculo com a ajuda da fórmula de geometria plana πl^2 ($\pi = 3,1416$). A área real é a metade da área da esfera: $2\pi R^2$. l é o quarto do perímetro, ou seja $\frac{1}{2}\pi R$, e a relação entre estas duas áreas é de $\pi^2/8 = 1,233$. A relação dos perímetros é de $2\pi l / 2\pi R$, ou seja $\pi/2 = 1,57$. Agora, se não acredita, tente embrulhar uma esfera com um plano!



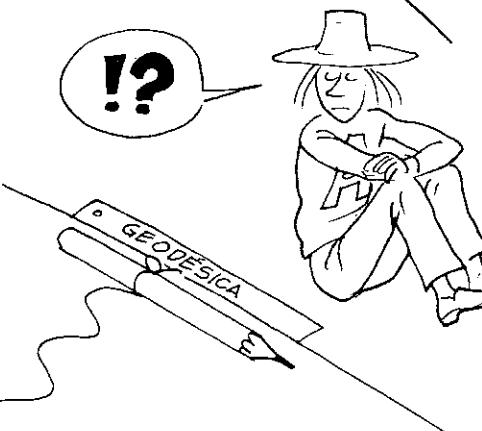
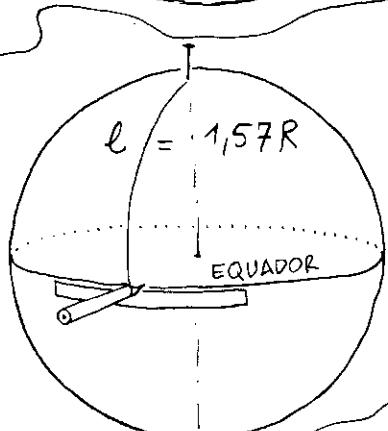
Bolas!
Faz pregas!

Um plano!
Qual plano??

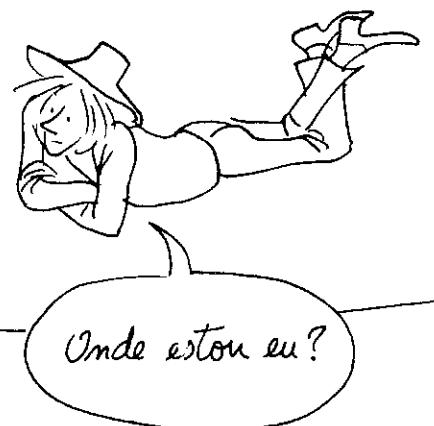
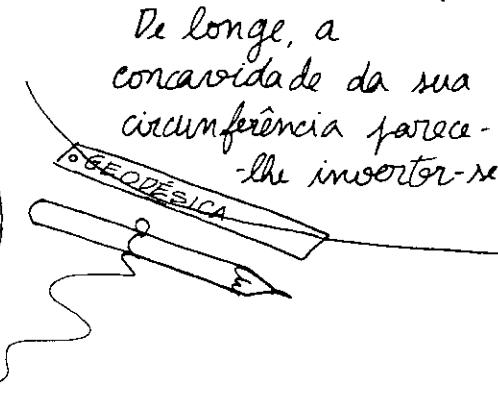
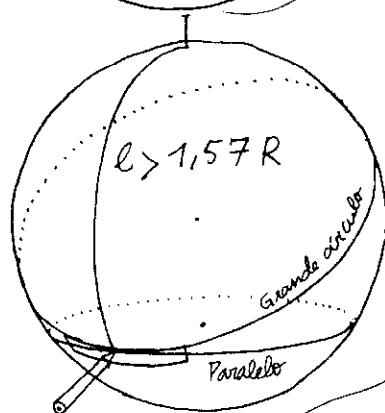
Enquanto Anselmo não atinge o equador da esfera, a CONCAVIDADE do seu círculo parece-lhe normal:



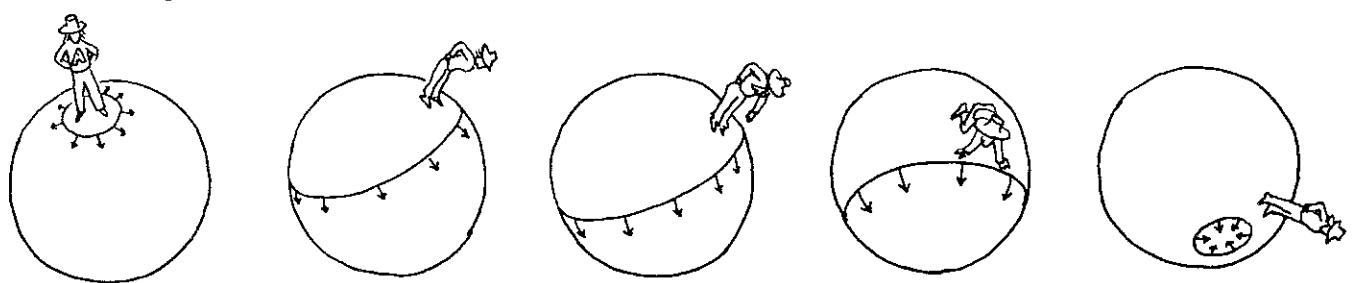
Este círculo é uma paralela, embora a sua régua siga uma GEODESICA, quer dizer, um GRANDE CÍRCULO da esfera.



No equador, quer dizer, quando $l = \pi/2 R$ o paralelo confunde-se com a geodésica e o círculo surge-lhe "DIREITO".

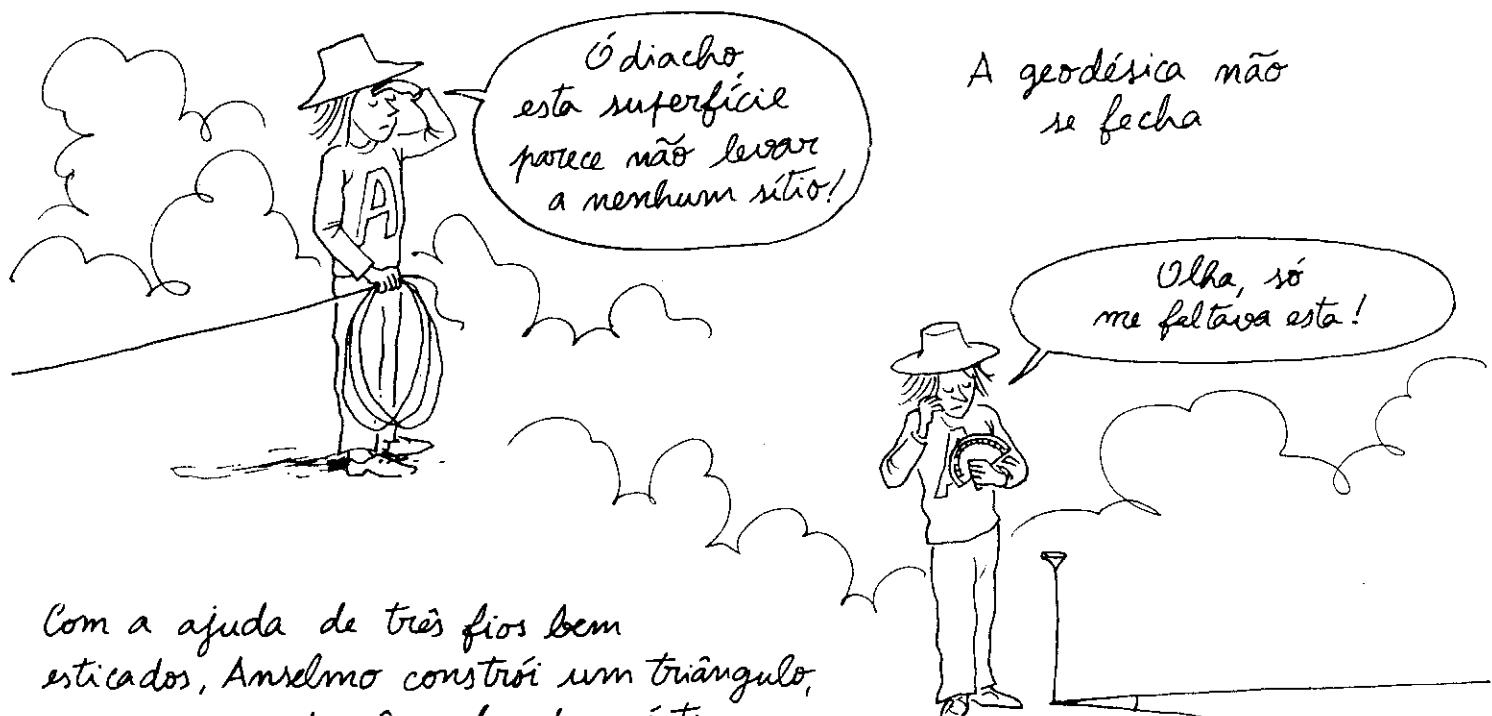


Esta propriedade explica como se pode "entrar" ou "sair" dumha circunferência, sem a transpor, quando ela é traçada sobre uma esfera. É preciso imaginar esta circunferência como um anel elástico que se fizesse deslizar sobre uma bola de bilhar.

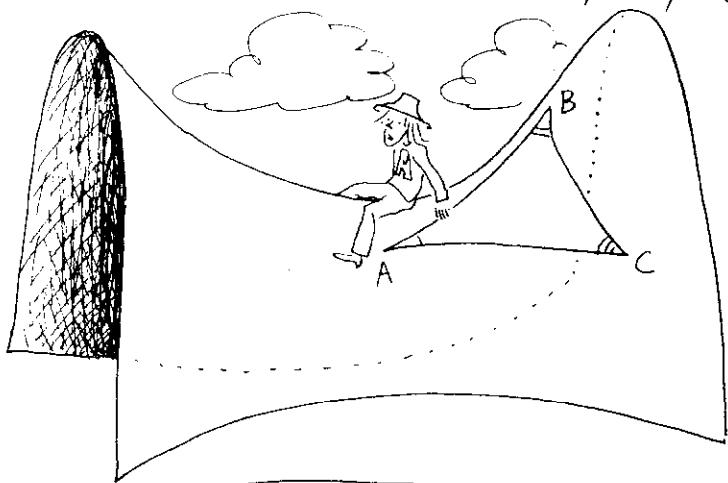
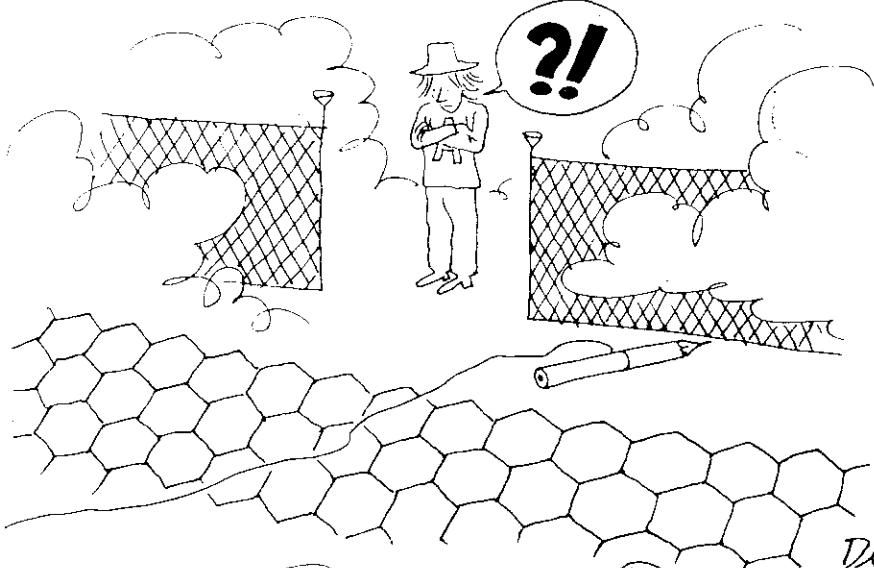




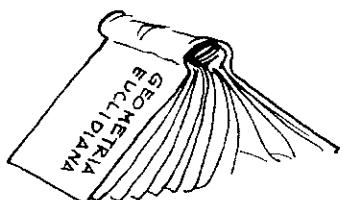
Tendo aterrado num mundo novo, Anselmo desenvolve uma vez mais uma GEODÉSICA, mas, desta vez:



Com a ajuda de três fios bem esticados, Anselmo constrói um triângulo, mas a soma dos ângulos dos vértices mostra-se, desta vez, inferior a 180° .



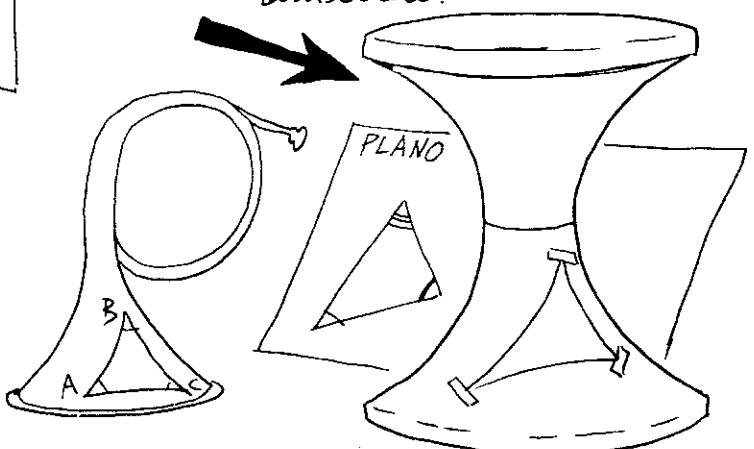
Agora, meu caro, é
que fui apanhado...



Uma circunferência sendo sempre o conjunto de pontos situados a uma mesma distância l dum ponto fixo, Anselmo constata que essa circunferência, traçada sobre essa nova superfície, tem um perímetro SUPERIOR a $2\pi l$, enquanto que a área do círculo respectivo EXCEDE πl^2 .

Dissipemos as nuvens:

A superfície representa, desta vez, a forma dum desfile deiro ou dum reba dum cavalo. Alguns objectos do vosso quotidiano podem igualmente servir: uma trompa de caça ou este tipo de tamborete:



Para ter o sentido oculto
da história, volte
a página.



CURVATURA:

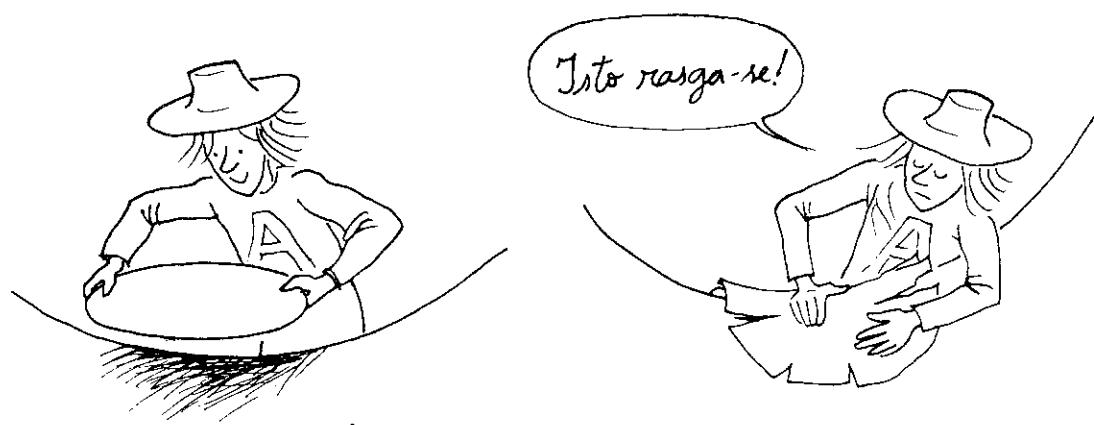
Uma superfície curva é uma superfície onde os teoremas euclidianos não funcionam. A curvatura pode ser positiva ou negativa.

Sobre uma superfície de CURVATURA POSITIVA, a soma dos ângulos dum triângulo é superior a 180° . Se se traçá uma circunferência de raio l , a área do círculo é inferior a πl^2 e o seu perímetro inferior a $2\pi l$.

Sobre uma superfície de CURVATURA NEGATIVA, a soma dos ângulos dum triângulo é inferior a 180° . Se se traçá uma circunferência de raio l , a área do círculo é superior a πl^2 e o seu perímetro superior a $2\pi l$.

Há momentos, Anselmo constata que ao tentar REVESTIR uma esfera, superfície de curvatura positiva, com um elemento plano, as fregas apareciam. O revestimento duma superfície de curvatura negativa com um plano é igualmente impossível: os rasgões acontecem.

Este teste da embalagem é o mais simples para determinar se a curvatura é positiva ou negativa.



Tudo rasga-se!

Como se pode verificar na página precedente, as superfícies podem apresentar zonas de curvatura positiva, e outras de curvatura negativa.

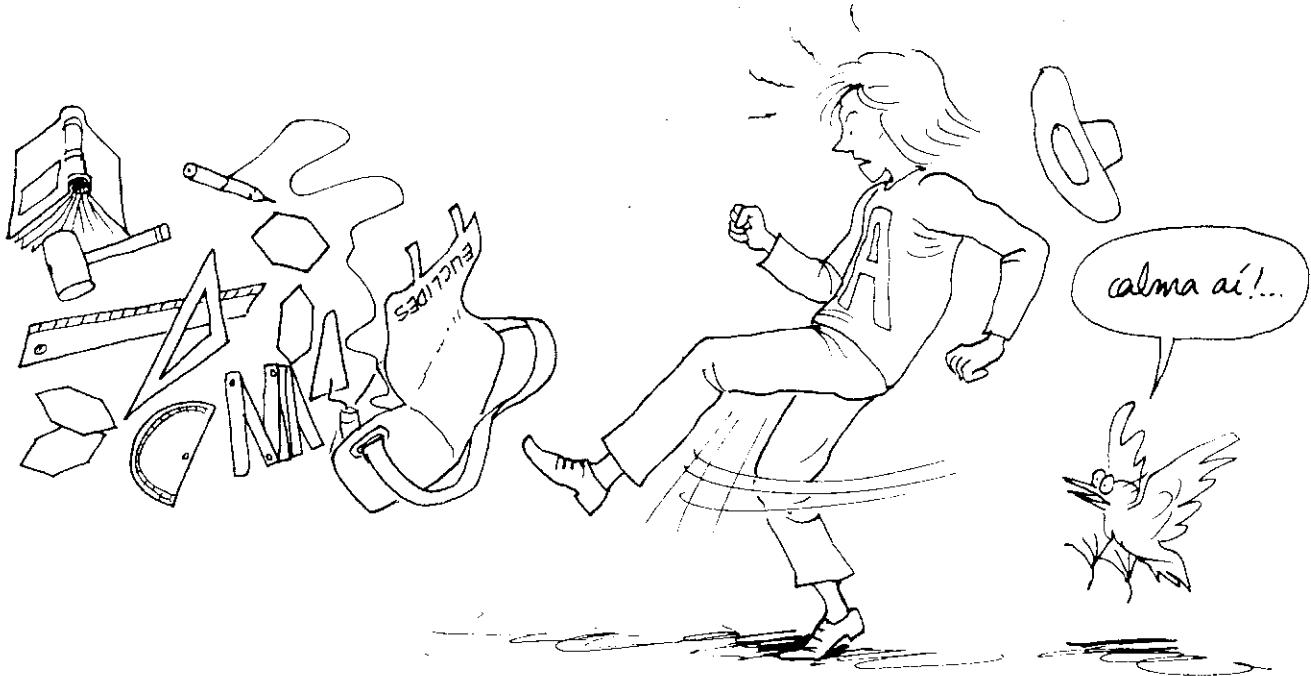
Um cilindro, um cone,
têm uma curvatura?





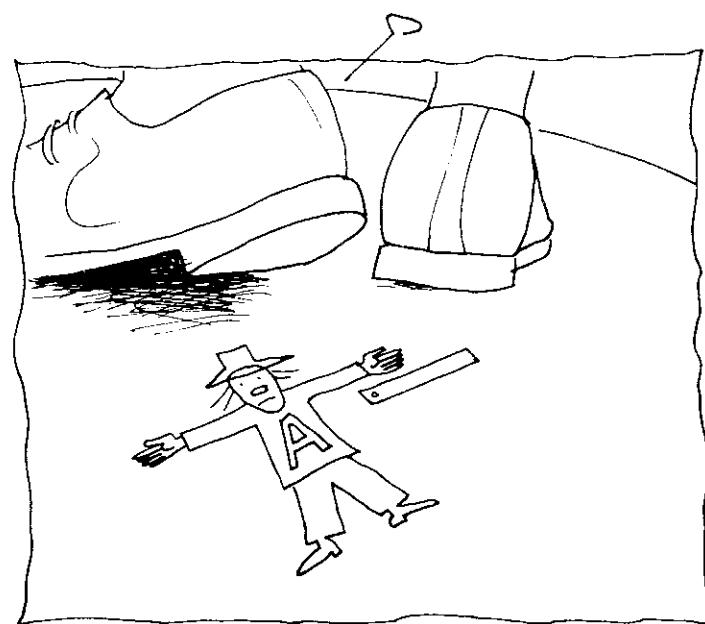
... Agora marco as
minhas geodésicas SOBRE
a superfície ...

Segundo a nossa definição,
os cilindros e os cones obe-
decem à geometria EUCLIDIANA,
são SUPERFÍCIES PLANAS !!!

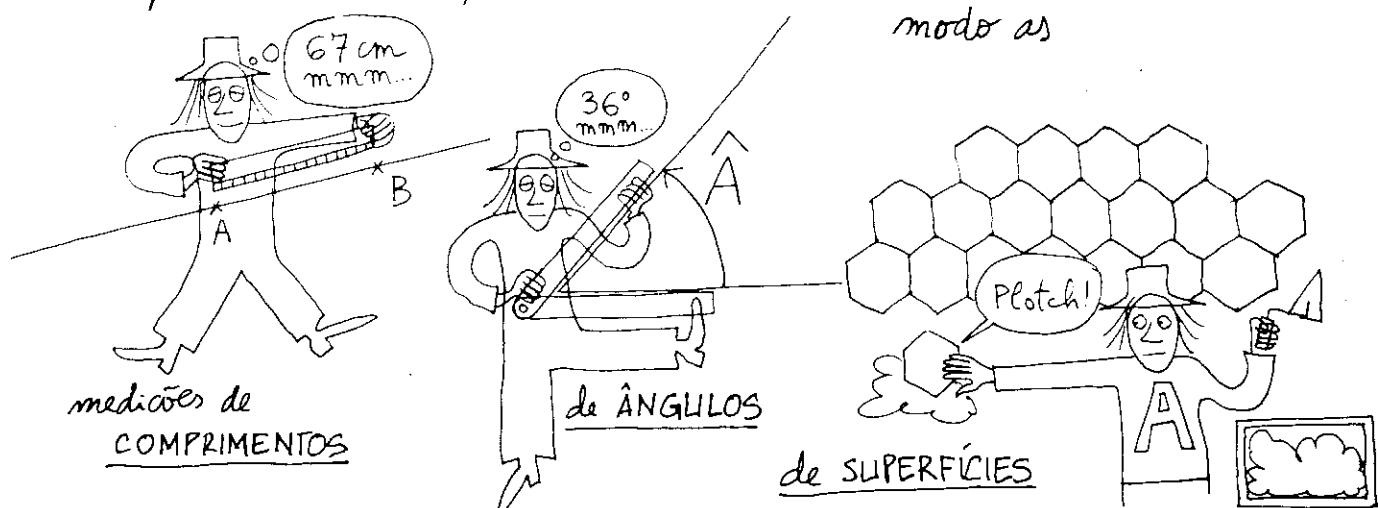


A NOÇÃO DE ESPAÇO:

Há momentos, as nuvens impediam Anselmo de ver mais longe do que a ponta do seu nariz... ou quase. Se não tivesse sido assim teria podido aperceber-se da CURVATURA do seu ESPAÇO ESFÉRICO. Há uma outra maneira de impedir Anselmo de VER essa curvatura: é a de o fazer habitar a superfície, de modo a que ela lhe fique a PERTENCER.



Apercebemo-nos de que esta nova situação não impede de nenhuma modo as



Embora estando confinado à superfície, Anselmo teria podido facilmente constatar a curvatura e o seu sinal (Positivo ou negativo), e até mesmo medi-la, sem por isso ser capaz de a VER. Se a soma dos ângulos dum triângulo perfazem 180° , então essa superfície é PLANA. Se essa soma excede os 180° , a curvatura é positiva e Anselmo pode calcular o raio de curvatura R local com a ajuda da fórmula : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 + \frac{A}{3,14 R^2}\right)$ graus onde A é a área do triângulo.

Se essa soma é inferior a 180° , pode-se determinar um raio de curvatura R , dado por : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 - \frac{A}{3,14 R^2}\right)$ graus mas não tem mais o sentido físico habitual.

Apercebemo-nos de que um PLANO pode ser assimilado a uma superfície tendo um raio de curvatura R infinito.

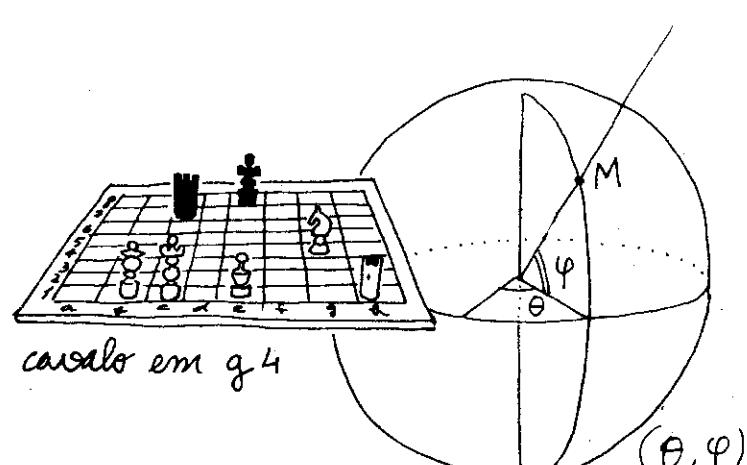
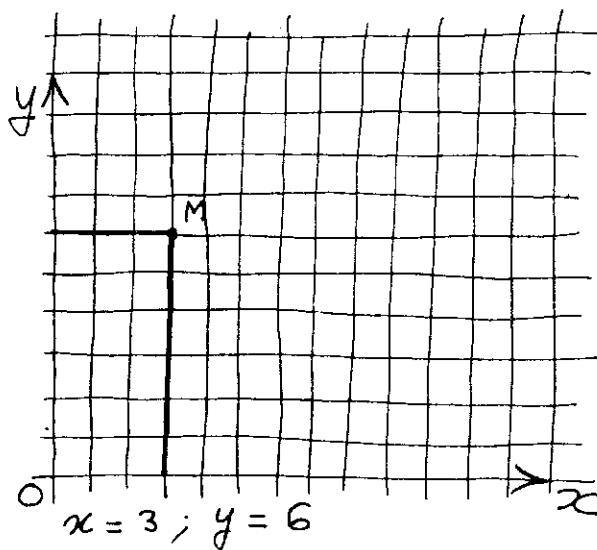
Encontrarmos então todos os teoremas de Euclides.



O CONCEITO DE DIMENSÃO

O número de dimensões é simplesmente o número de quantidades, de coordenadas, que é necessário conhecer, num espaço qualquer, para determinar um PONTO.

As SUPERFÍCIES são representações de espaços a duas dimensões. As quantidades que servem para referenciar podem ser comprimentos, números, ângulos ...

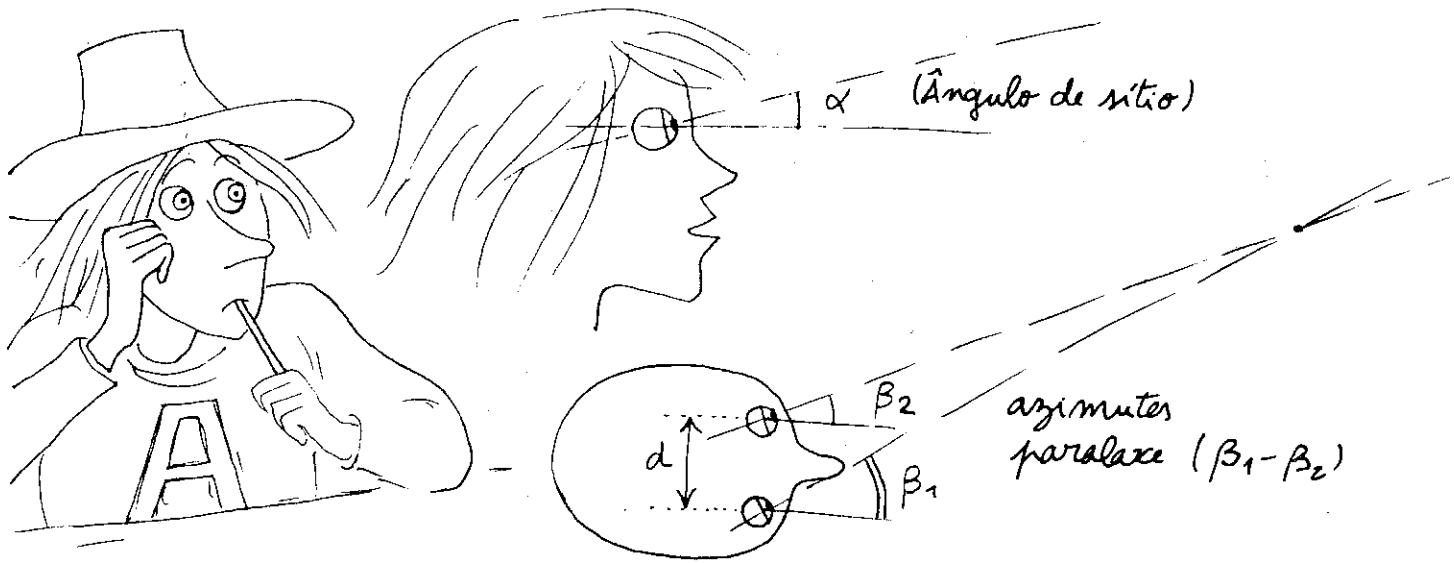


Longitude, latitude.

É costume dizer-se que o nosso espaço, exceptuando o tempo, tem três dimensões.



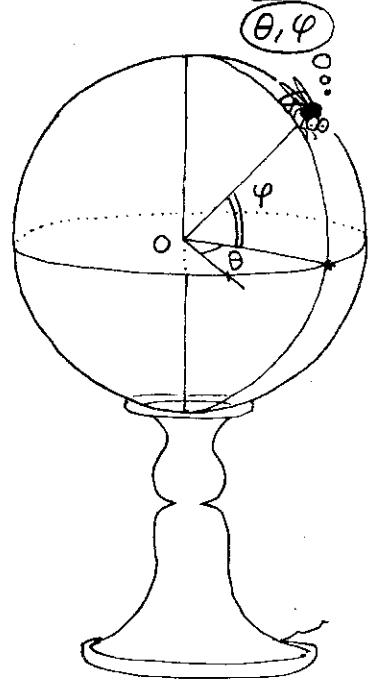
Anselmo observa a mosca.



Anselmo descobre os objectos em relação ao seu corpo, à sua caixa craneana. A posição dum objecto pontual é conhecida com a ajuda de três ÂNGULOS: o ângulo de sítio e os azimutes de seus dois olhos: β_1 e β_2 . A diferença angular $\beta_1 - \beta_2$ chama-se paralaxe.

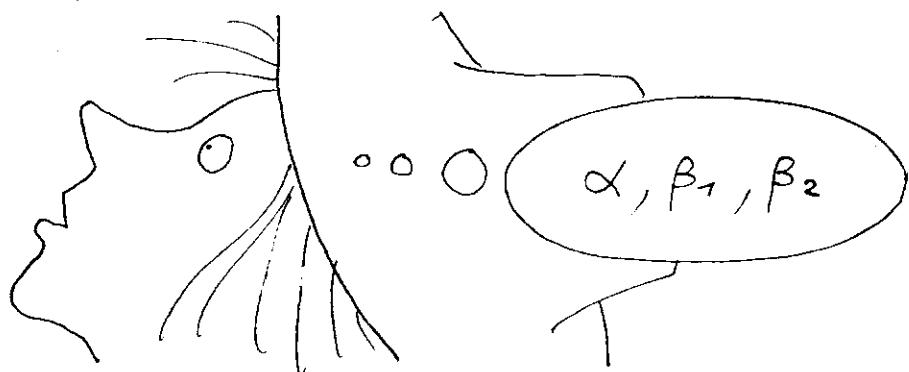
No cérebro de Anselmo efectua-se uma descodificação que transforma essa paralaxe em distância.

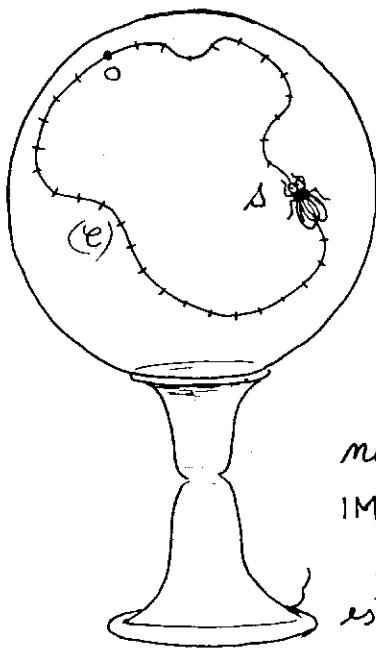
A IMERSÃO:



Mas a mosca progride igualmente sobre o globo esférico do condeiro onde a sua posição, nesse espaço bidimensional, pode ser assinalada com a ajuda de dois ângulos θ e φ (longitude e latitude).

Diremos que este espaço a duas dimensões está MERGULHADO no nosso espaço a três dimensões.



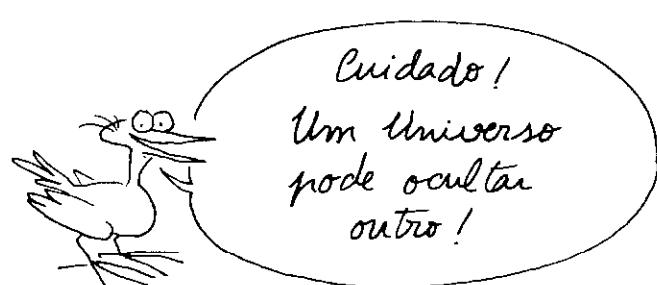


Suponhamos que a mosca segue uma curva (e) traçada sobre a esfera. Poder-se-á assinalar a sua posição com a ajuda dumha única coordenada (a sua distância s tem um ponto de origem, calculado algebricamente)

Uma curva é uma imagem dum espaço a UMA dimensão.

Esse espaço unidimensional está mergulhado num espaço bidimensional (esfera), ele próprio IMERSO num espaço tridimensional.

Assim o espaço em que nos deslocamos poderia estar mergulhado num espaço de dimensão superior sem que tivéssemos consciência disso.



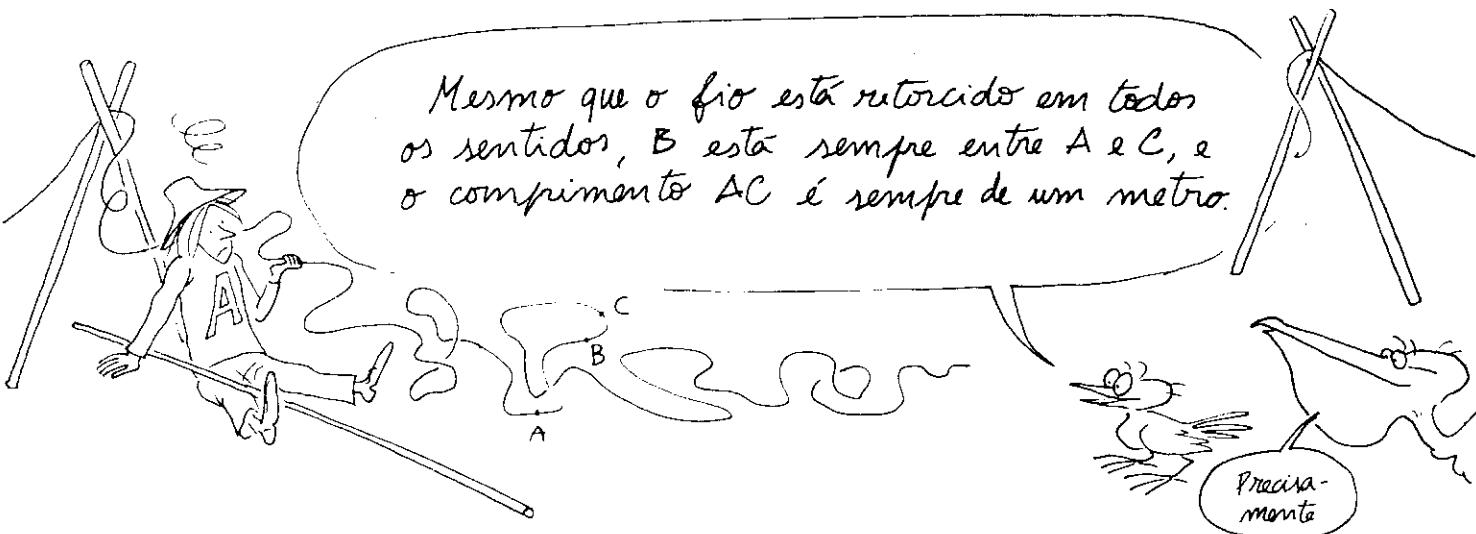
Fique a saber, meu caro, que nós nos definimos num espaço a uma dimensão

Ena, já! Não gosto nada dos espaços unidimensionais!

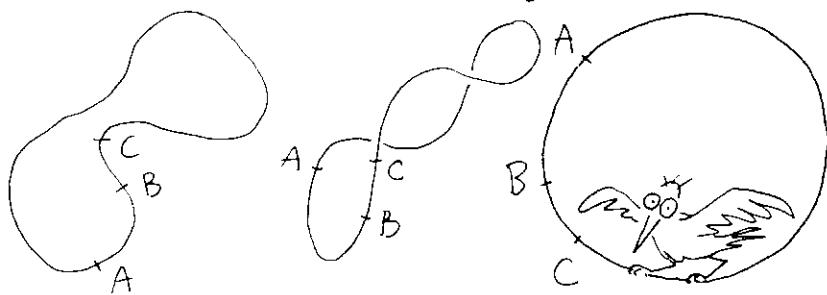
a distância AC é de um metro

A B C

B está entre A e C



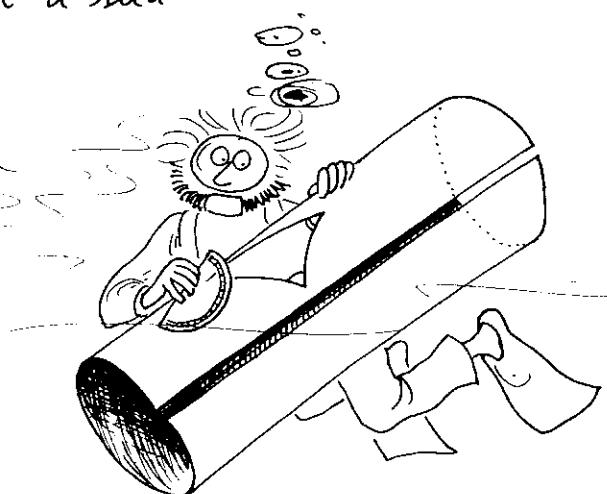
Isto sugere que certas propriedades podem ser independentes da maneira como se efectua a imersão.



Eis aqui diferentes maneiras de MERGULHAR uma CURVA FECHADA no espaço ordinário. Este FECHO é uma propriedade independente da imersão.

Mas nós não queremos esticar ou encolher o fio, a fim de não alterar os COMPRIMENTOS entre pontos sucessivos. Vamos agora MERGULHAR SUPERFÍCIES no espaço ordinário a três dimensões.

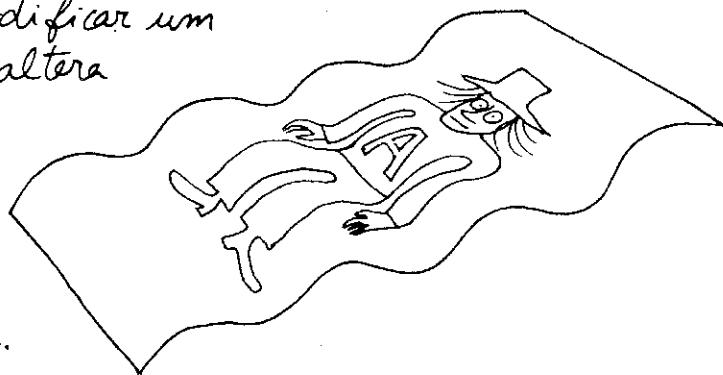
Se MERGULHARMOS um PLANO no espaço ordinário a três dimensões, poderemos deslocá-lo, fazê-lo girar, sem alterar a sua GEOMETRIA.



Verificámos que o facto de modificar um plano para um cilindro não altera nem as geodésicas, nem os ângulos.

Dentro desta óptica, uma chapa ondulada tem sempre uma geometria PLANA, EUCLIDIANA.

Um habitante dum tal espaço bidimensional, euclidiano, não teria nenhuma consciência das translações, rotações ou ondulações, que não seriam mais do que variações do modo de mergulhar no espaço tridimensional.



Similarmente, o nosso espaço tridimensional poderia ser ele próprio mergulhado num espaço tendo um número superior de dimensões, sem que nos apercebêssemos disso. Com efeito, um tal mergulho não afectaria as geodésicas do nosso espaço, nem a nossa percepção, baseada na luz, a qual segue as geodésicas do espaço.

Poder-se-ia assim admitir, entre dois pontos, um trajecto mais curto que o trajecto seguido pela luz.

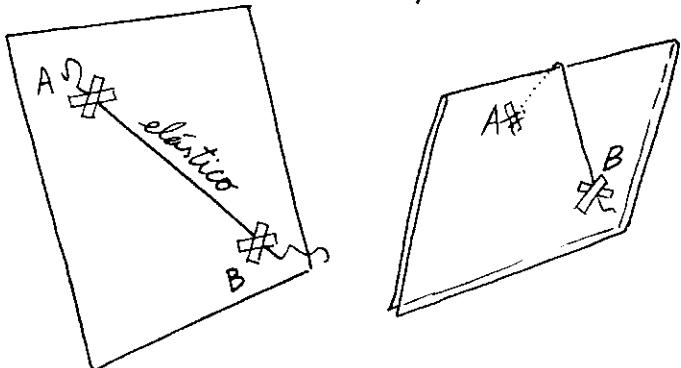
Bem o percebo!
Está a tentar arrastar-me
para a ficção-científica.

E você, o que pensa?

O que é que estás
a fazer?

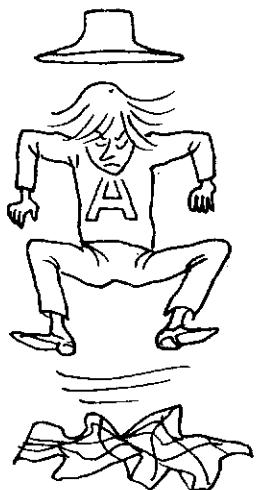
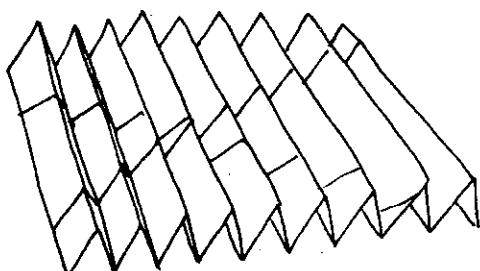
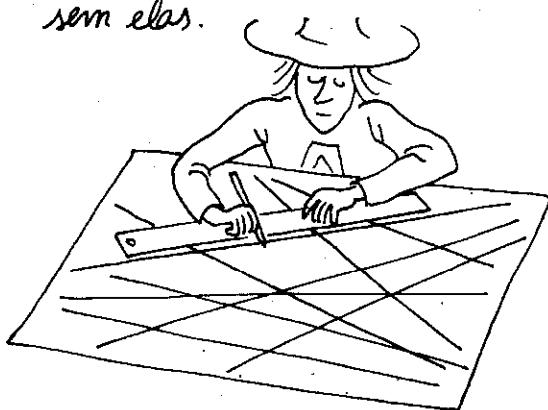
Exploro o fundo da minha cara

Tomemos um elemento plano e dobramo-lo:



A dobragem não muda absolutamente nada o traçado da minha geodésica!

Sobre uma folha de papel, com a ajuda duma régua, trace todo um conjunto de rectas, de geodésicas, e depois amarrote a folha. Terá sempre debaixo dos olhos as geodésicas da superfície, com dobras ou sem elas.



Mas esta primeira parte da viagem não é mais do que uma gota de água no oceano, pois que a próxima etapa passa pelos:





Para medição das superfícies,
esta tinta. Cem gramas por
metro quadrado, exactamente.

Para a medição dos volumes, encha
isto de gás. Você lerá directa-
mente o valor no debímetro
do ESPACOTESTE

engenho

E não se esqueça: área da
esfera: $4\pi l^2$, volume: $\frac{4}{3}\pi l^3$

entendido

Anselmo aterrrou, desta vez,
num espaço tridimensional
e nós vamos segui-lo na
sua exploração.

que
trabalho!

Material do bom
E estas varas têm
exactamente um
metro

Mas, após ter colocado uma boa
quantidade de varas...

Lá recomeça isto
novamente!

A minha
geodésica fecha-se
sobre si própria!

Um espaço tridimensional fechado?

é o fim
de tudo

decidiu voltar
ao método da
medição dos
ângulos

Anselmo, que
tinha parado sobre
um asteroide para comer
uma bicha,

Como há
momentos, vou
utilizar três
GEODÉSICAS para
construir um
TRIÂNGULO





Anselmo aumenta novamente o raio & da esfera



Outra vez...



Um pouco mais tarde:





Assim, enchendo um balão monstruoso num espaço a três dimensões, Anselmo acabou por se encontrar ... DENTRO dele!

Se ele não tivesse fechado a garrafa a tempo, teria morrido esmagado, como acabara por se encontrar aprisionado pela sua cerca, página 13.

Com a melhor vontade do mundo, agora não se pode mais VISUALIZAR a CURVATURA deste espaço tridimensional. As suas geodésicas fecham-se e o seu volume não representa mais que um número FINITO de metros cúbicos, assim como a superfície do nosso planeta, superfície fechada, não oferece mais que um número FINITO de metros quadrados.

A soma dos ângulos dum triângulo, neste espaço a três dimensões, é superior a 180° . Para "VER" a sua curvatura, seria preciso a capacidade de ver a quatro dimensões.

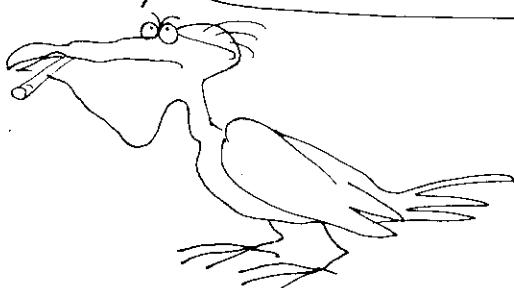


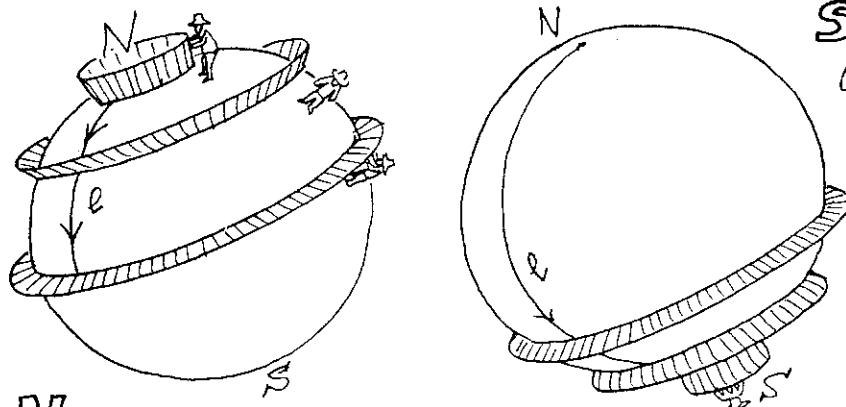
Podemos sempre dizer que o nosso UNIVERSO a três dimensões é uma HIPERSUPERFÍCIE, mergulhada num espaço a quatro dimensões, ele próprio talvez hipersuperfície mergulhada num espaço a cinco dimensões, etc... Mas, nos nossos dias, não é de bom tom dizer talas coisas.

Com ideias destas,
onde se vai parar?
Pergunto-lhe eu.

O resto é ... metafísica!

O que
existe é o que
eu PERCEBO!



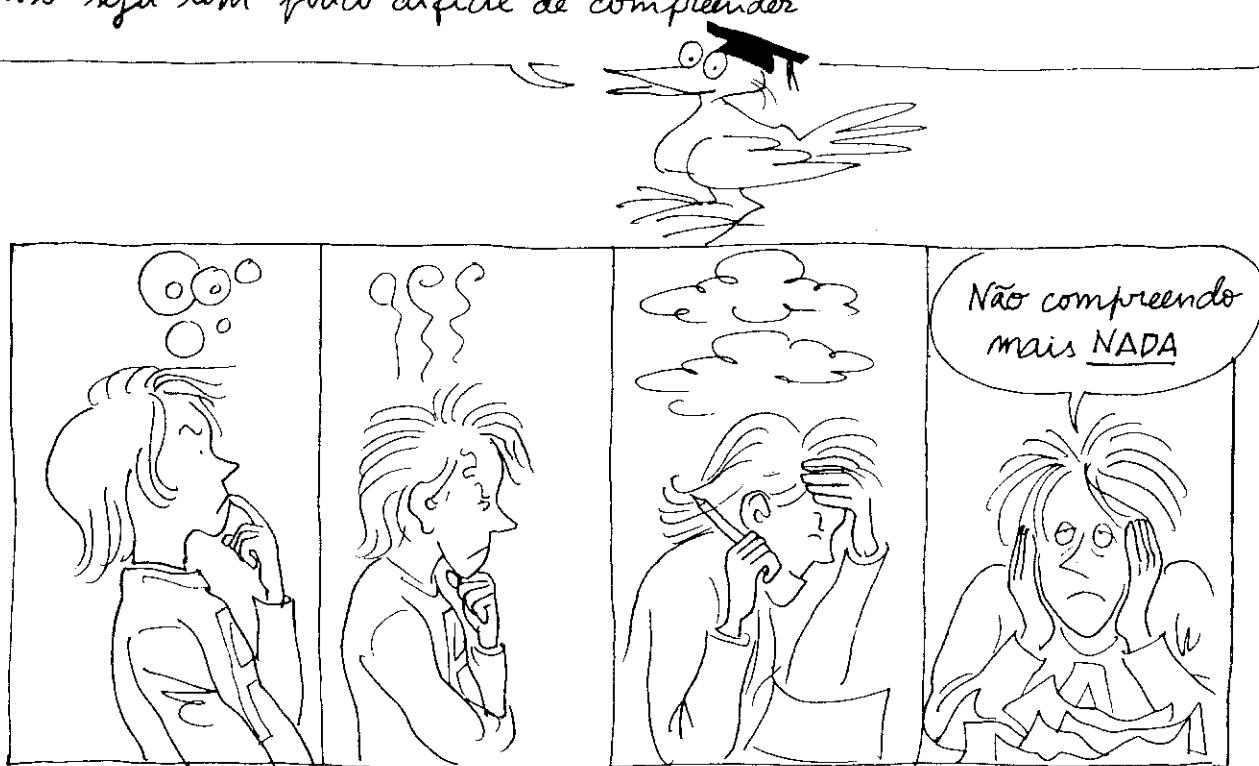


Sobre a sua esfera, aumentando o raio ℓ do seu domínio, Anselmo acaba por se encontrar nos antípodas S do ponto N, centro do seu círculo, e asfixiado pela sua própria cerca.

No espaço tridimensional de curvatura positiva, a mesma coisa: Neste espaço bidimensional que é a esfera, Anselmo encontra o EQUADOR quando ele cercara a metade da superfície disponível. O EQUADOR do espaço tridimensional HIPERESFÉRICO também existe. Anselmo chega lá logo que o seu balão ocupa a metade do volume disponível. Sobre a esfera, o círculo equador surgia-lhe como uma RETA. Do mesmo modo, no espaço hiperesférico, o "balão equador" terá para ele o aspecto dum PLANO.

Para lá do equador a CONCAVIDADE do balão inverte-se e ele vem automaticamente centrar-se sobre o ponto antípoda S do ponto N, centro do balão.

Sobre uma esfera, todo o ponto possui um antípoda. O mesmo acontece com um espaço hiperesférico a três dimensões ainda que isso seja um pouco difícil de compreender





Quer dizer... tudo se mistura um pouco
na minha cabeça.



Perdi um pouco o fio à...



Mas, o CENTRO desta hiper-esfera, onde está?



Se eu desenhar uma circunferência sobre um PLANO, não duvidaremos que é uma representação dum espaço a uma dimensão, fechado, mergulhado num espaço a duas dimensões: o PLANO

E o centro da circunferência NÃO ESTÁ sobre a circunferência



MMM...

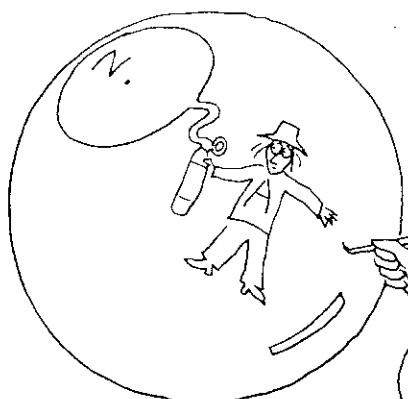


Uma esfera representa um espaço fechado a DUAIS dimensões, MERGULHADO num espaço a três. O centro desta esfera NÃO ESTÁ mais sobre a esfera. Ele está no espaço a três dimensões.



O centro dum espaço hiperesférico a três dimensões poderia situar-se num espaço a quatro, supondo que ele aí fosse MERGULHADO. E assim sucessivamente...

Assim o centro dum espaço hiperesférico a quatro dimensões estaria num espaço a cinco, etc...



Olha, cá estás tu outra vez,
no teu mundo a duas dimen-
sões, passado por cima, como
uma pequena decalcomania



E tu começas a encher o teu
círculo, que não é mais que
uma esfera a uma dimensão



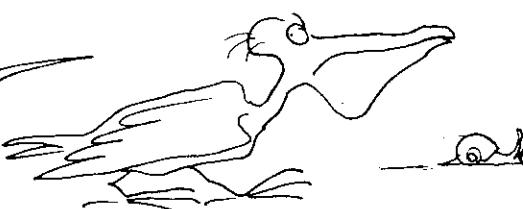
Num espaço a duas
dimensões, uma fronteira
delimita uma área.
Enquanto que, num espaço
a três dimensões, delimita
um volume.

Ali, é quando chego à metade deste
espaço esférico.

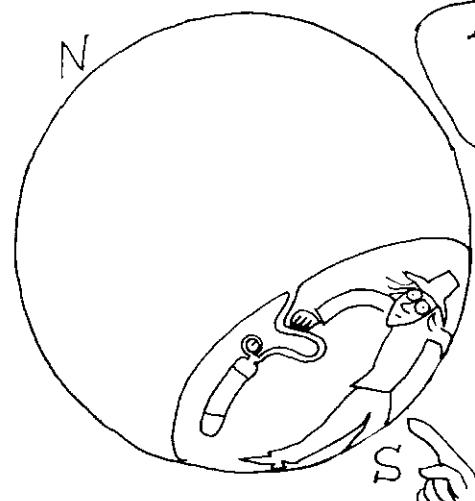


Num espaço a 4 dimensões, uma fronteira teria
três dimensões, e delimitaria um hipervolume
a quatro dimensões.

Lá está ele
outra vez!



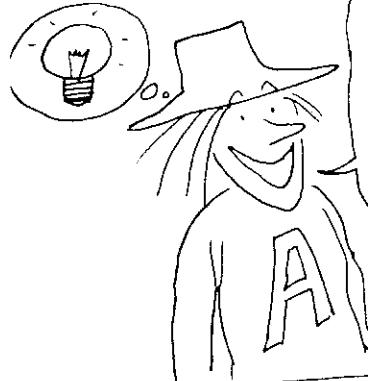
Vamos
embora!



Vê, aqui, o teu círculo, que é um "balão a
uma dimensão", começa a ter mais da
metade do espaço disponível.

Começa a fechar-se sobre ti, conver-
gindo para o ponto antípoda S.





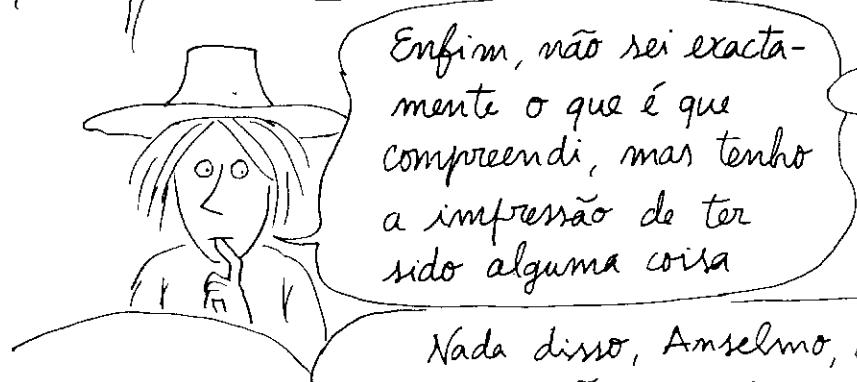
O mesmo acontece, no meu espaço curvo a três dimensões, logo que eu injecto mais da metade do volume total, o balão fecha-se sobre mim, convergindo para o ponto antípoda



Compreendi!



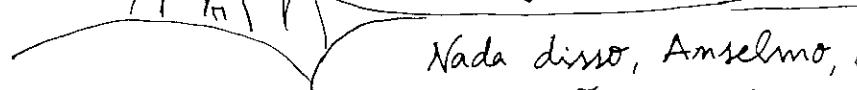
Porque a esfera, neste espaço tridimensional curvo, tem evidentemente dois centros que não são antípodas.



Enfim, não sei exactamente o que é que comprehendi, mas tenho a impressão de ter sido alguma coisa



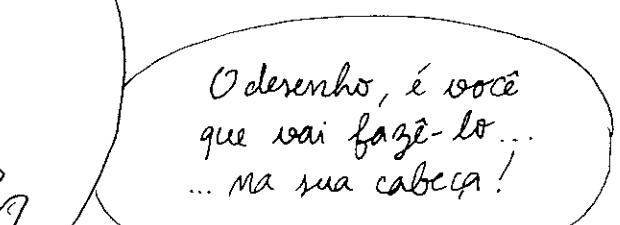
Que angústia!



Nada disso, Anselmo, quando há mais de três dimensões, **COMPREENDER É EXTRAPOLAR**

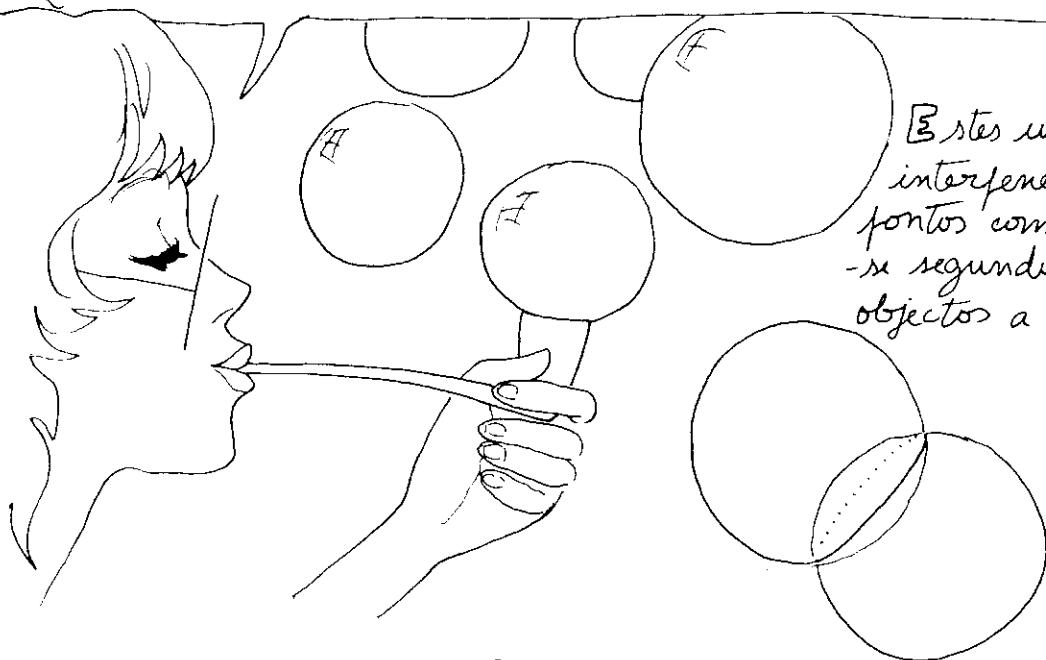


Extrapolo sem o saber

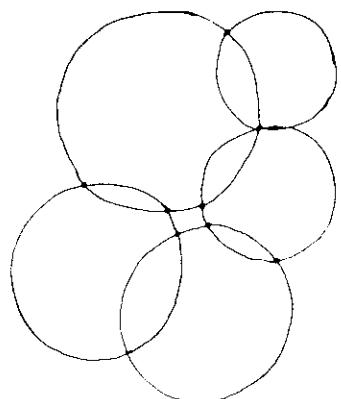


O desenho, é você que vai fazê-lo... na sua cabeça!

Agora, tomo um espaço a três dimensões onde coloco esferas a duas dimensões, um bando de pequeninos universos bidimensionais.



Estes universos podem interpenetrar-se. Os seus pontos comuns refartem-se segundo circunferências, objectos a uma dimensão.



Do mesmo modo, circunferências, objectos a uma dimensão, colocadas sobre uma folha de papel (2 dimensões) cortam-se segundo PONTOS. (É costume dizer-se que o PONTO tem dimensão zero.)



Uma esfera poderá então ser considerada como a intersecção de duas "bolas" tridimensionais, evoluindo num espaço a quatro.

E assim sucessivamente: um espaço tridimensional curvo, hiperférico, poderá ele próprio ser considerado como a intersecção de duas bolas de sabão a quatro dimensões, evoluindo num espaço a cinco.

Anselmo e Sofia, após terem conhecido as vertigens da extração, continuam a exploração de novos mundos tridimensionais.

a matemática já não é o que era dantes

Ora vê, isto é um rolo de fita-gomada tridimensional, para as geodésicas. A parte colante está na extremidade... evidentemente.

Olha lá, neste espaço, as geodésicas não parecem fechar-se. E entre tanto encho o balão do ESPAGOTESTE, o volume debitado é superior a $\frac{4}{3}\pi l^3$, enquanto que a área é superior a $4\pi l^2$. Quanto à soma dos ângulos dum triângulo, ela é desta vez inferior a 180° .

Lembra-te da página 23, tu estás novamente num espaço de curvatura NEGATIVA.

RESUMO:



Nos espaços a três dimensões, tu sabes que podem acontecer muitas coisas. É como nas superfícies, que são espaços a duas dimensões. Assim, se a soma dos ângulos dum TRIÂNGULO, num espaço a três dimensões, é superior a 180° nós diremos que a curvatura é positiva. Formando ai uma esfera de raio l , encontraráis pelo ESPAÇOTESTE um volume inferior a $\frac{4}{3}\pi l^3$ e uma área inferior a $4\pi l^2$. Este espaço, dito HIPERESFÉRICO, fechar-se-á sobre si próprio.

Se a soma dos ângulos dum triângulo, num espaço tridimensional, é inferior a 180° , então a curvatura será negativa. O volume dumha esfera de raio l será superior a $\frac{4}{3}\pi l^3$ e a sua área superior a $4\pi l^2$. Este espaço terá uma extensão infinita.



Mas se a soma dos ângulos perfaz 180° , então o espaço é estupidamente euclidiano.

tanta coisa para chegar ai!...

É NECESSÁRIO QUE UM ESPAÇO SEJA ABERTO OU FECHADO!...

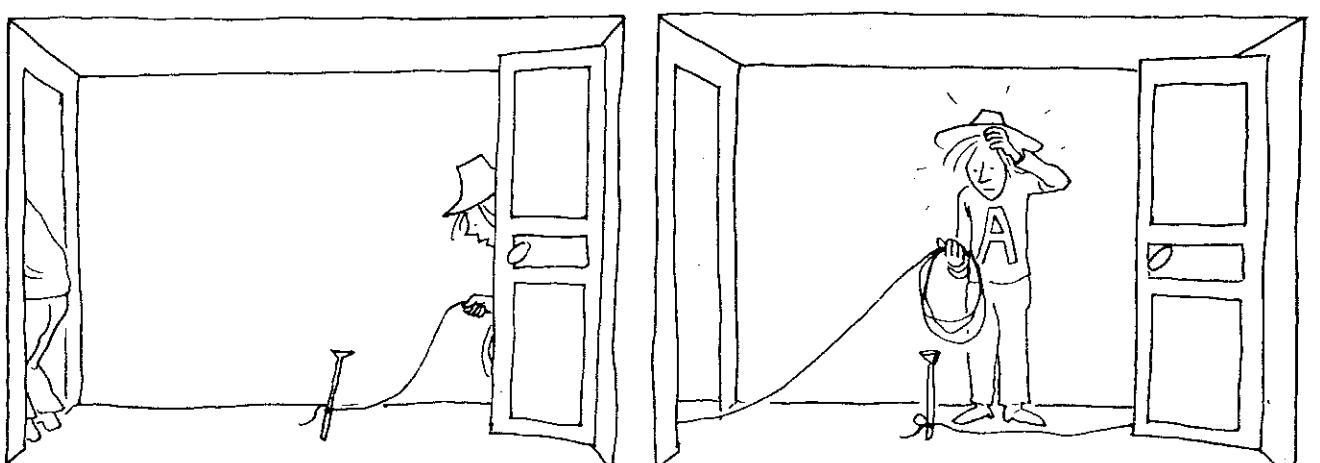
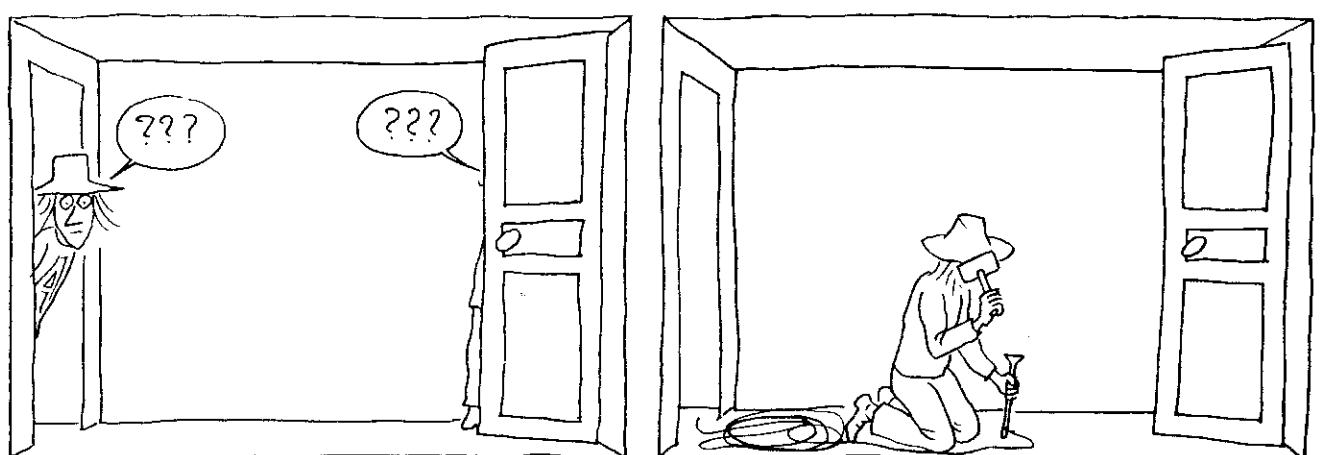
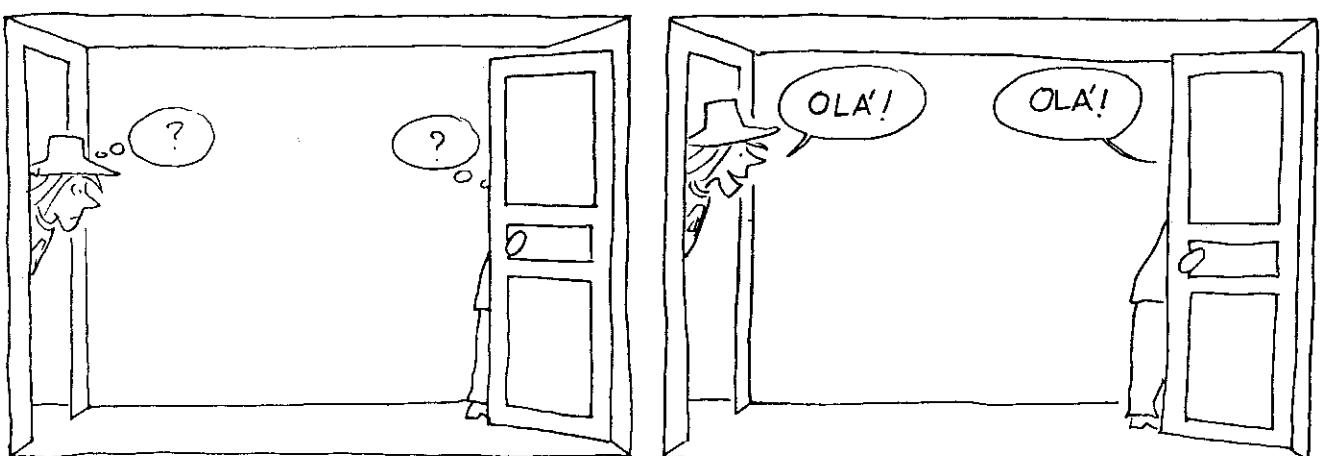
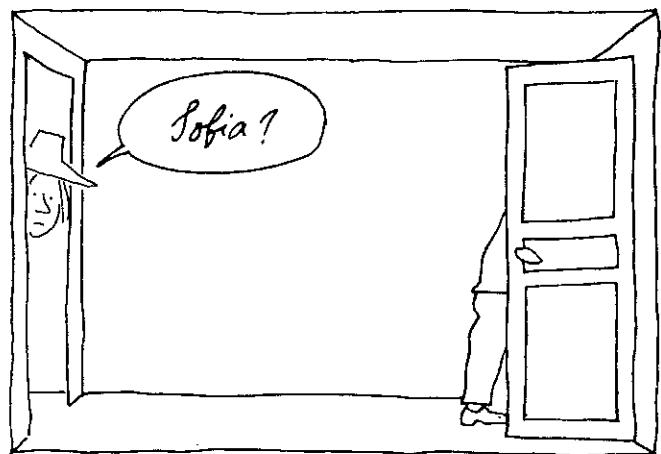
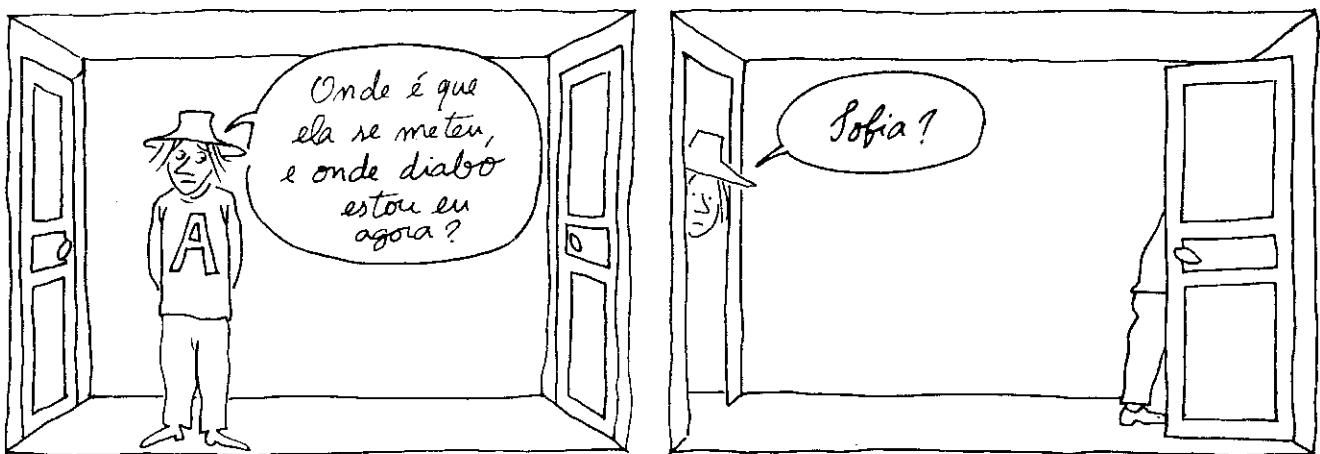
Creio que comprehendi tudo agora: Quando o espaço tem uma curvatura positiva, fecha-se sobre si próprio

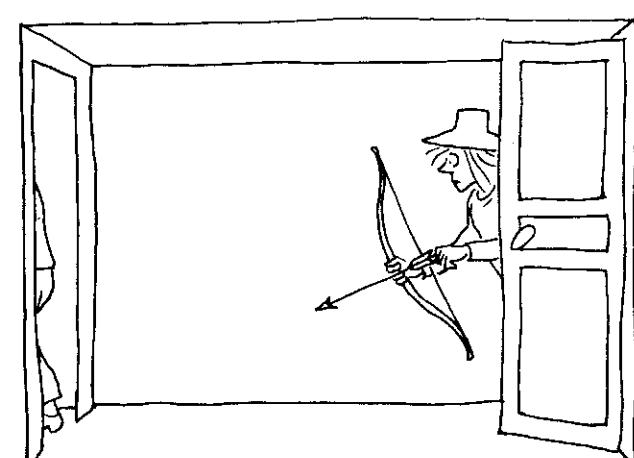
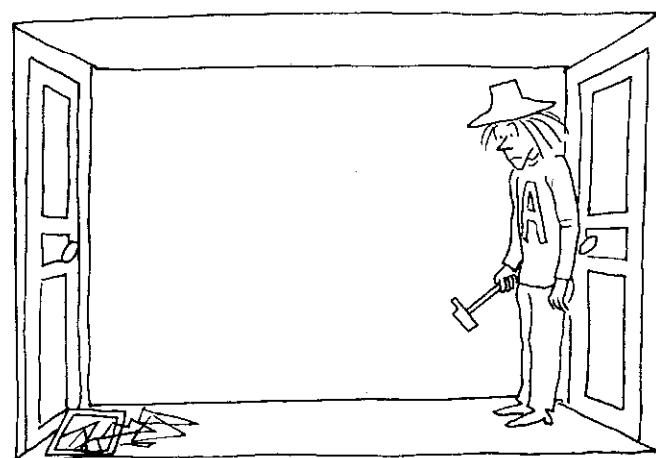
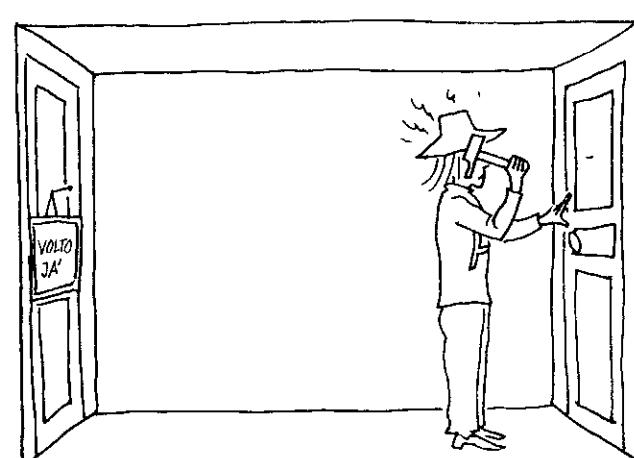
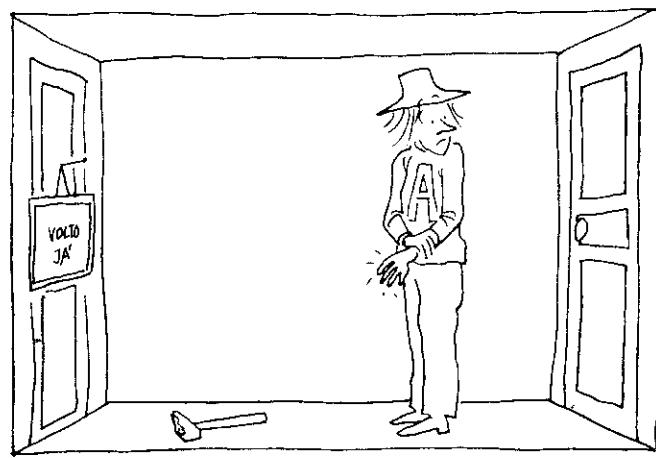
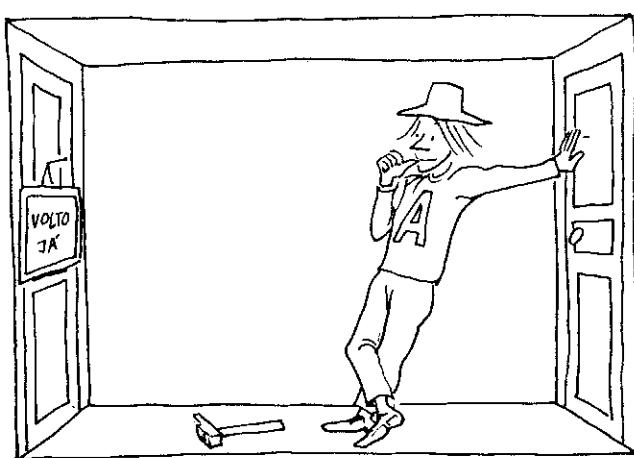
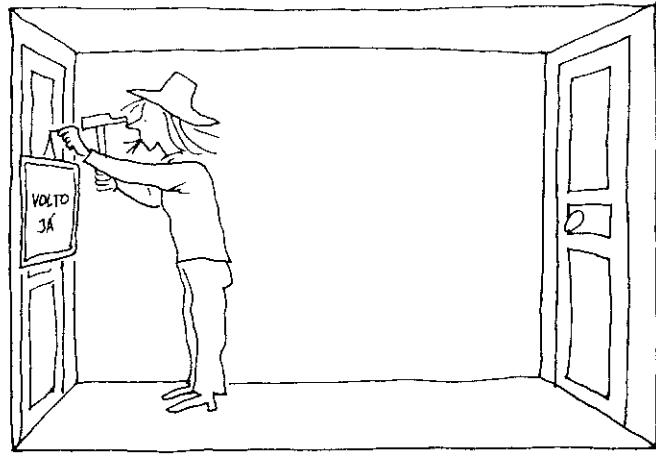
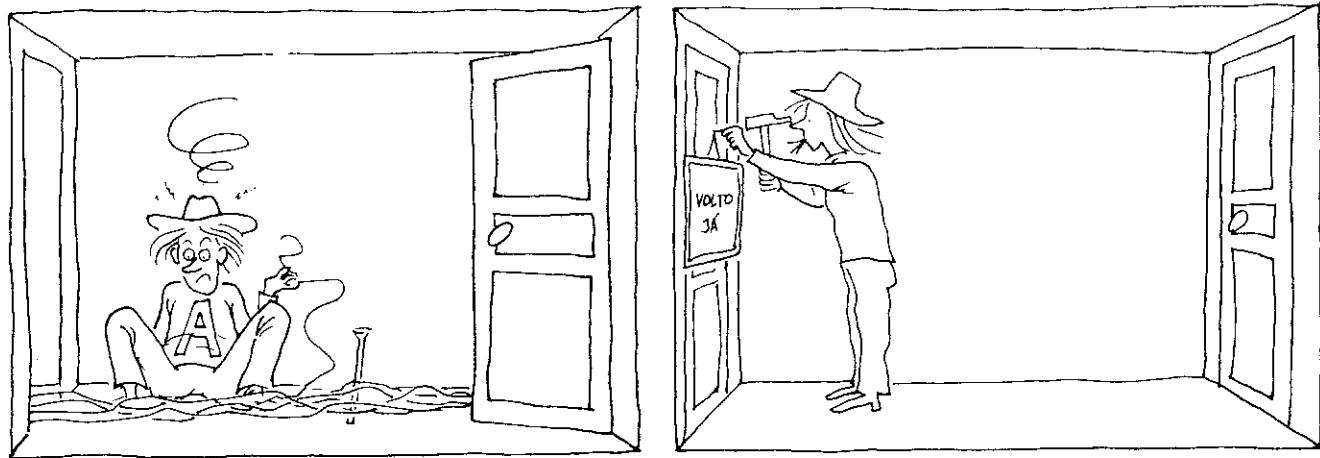
Quando a curvatura é negativa, ou o espaço é euclidiano, o espaço não se fecha, é INFINITO



NÃO, o mundo da geometria é mais rico do que tu possas pensar,
Anselmo!

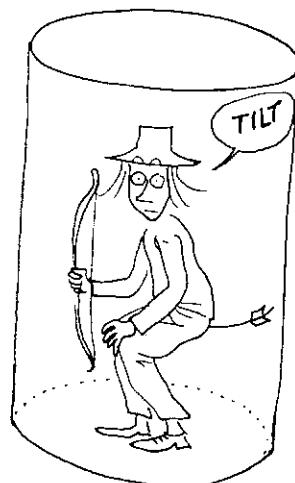




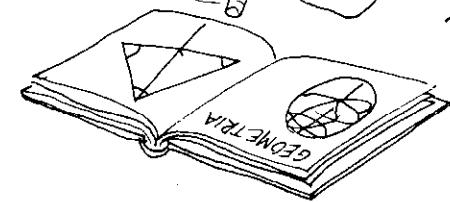


Ah, sim, Anselmo tinha sido projectado num espaço cilíndrico a três dimensões.

Ainda que euclidiano, sem curvatura, (a soma dos ângulos dum triângulo aí é igual a 180°) esse mundo fecha-se sobre si próprio.

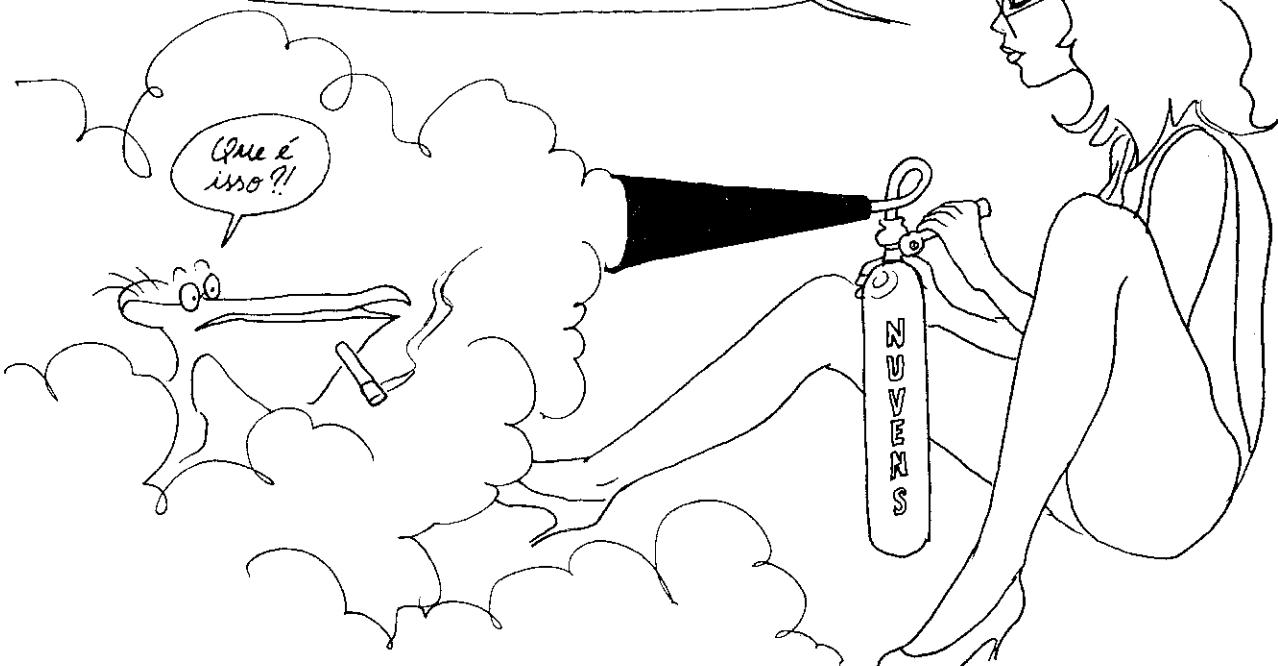


Bem, admitamos...
Mundos esféricos,
hiperbólicos,
cilíndricos. Deixa a
volta toda, não?



Você acredita?

Fazemos um pequeno giro
no bidimensional



NUVENS

DE PERNAS PARA O AR:

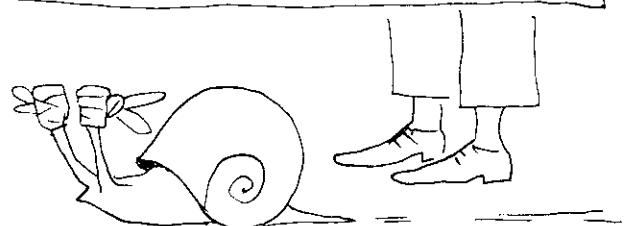
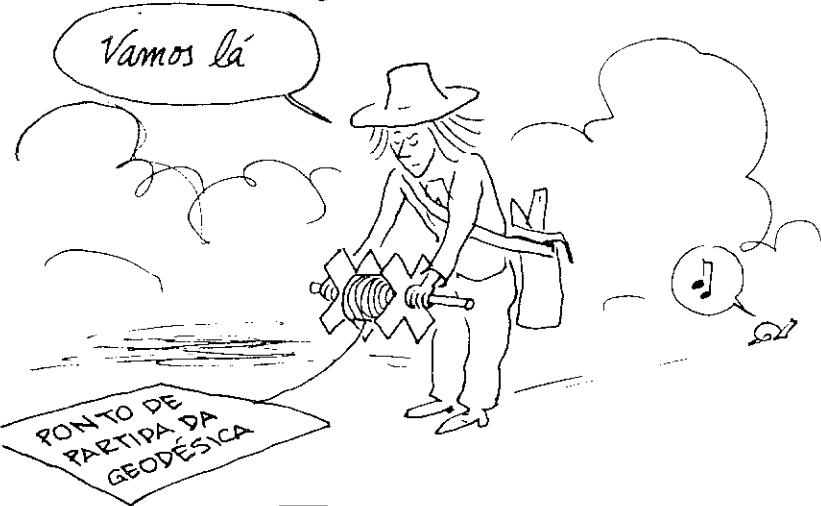


Caro Anselmo,

Eis aqui um caracol domesticado. Vendendo-lhe os olhos, farás com que ele não ande nem para a direita, nem para a esquerda. E assim ele traçará uma perfeita GEODÉSICA.

Até muito breve

Sofia

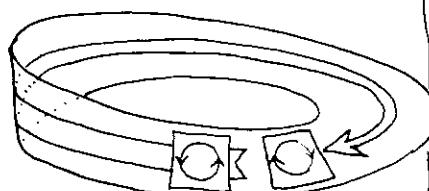
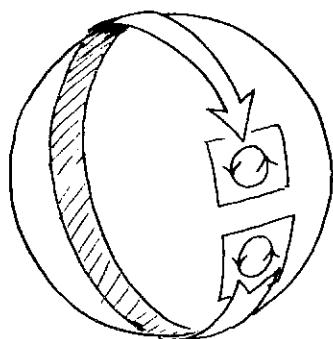


De facto, andar sempre em frente ou seguir o mais curto caminho entre dois pontos, é idêntico



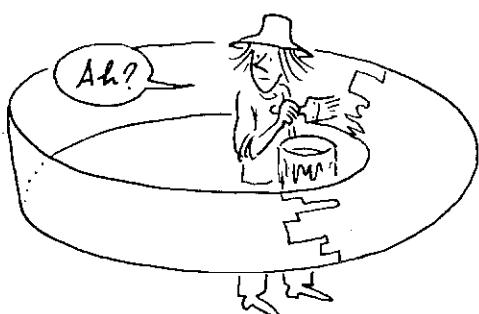


Tracemos uma circunferência sobre uma superfície e orientemo-la arbitrariamente. Imaginemos que se trata de uma pequena decalcomania que podemos fazer deslizar à vontade sobre uma superfície. Se a circunferência se mantiver idêntica a si própria, diremos que essa superfície é ORIENTÁVEL (é o caso da esfera, do cilindro, do plano, etc...). Mas se esta decalcomania desliza sobre uma fita de Möbius, passa-se tudo doutro modo:



De cada vez que dá a volta a este universo a duas dimensões, a circunferência muda de orientação

Experimentai e verás!



Correlativamente, não se pode pintar uma banda de Möbius de duas cores diferentes: ela não tem senão um lado, é UNILATERAL.

Não tem senão um BORDO:



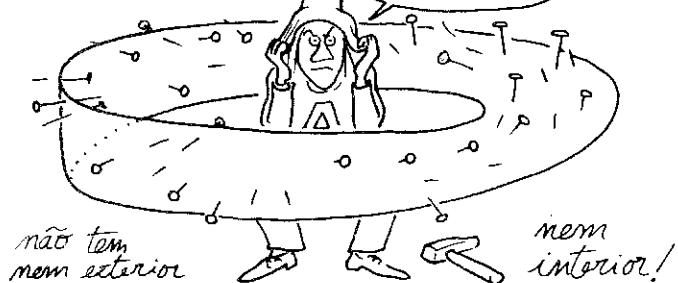
Anselmo decidiu espetar pregos para marcar o interior e o exterior.

Pode-se embainhá-la numa só vez!



A operação malogrhou-se porque esta banda...

HMMM!!!



não tem nem exterior

nem interior!

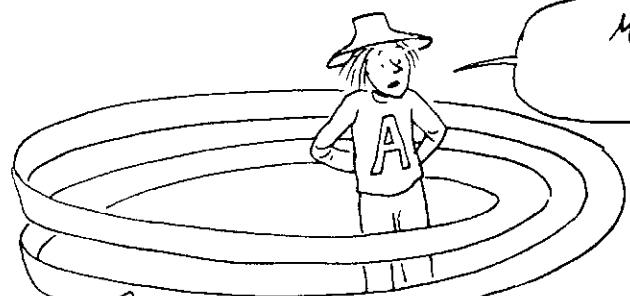
Experimentemos cortá-la em duas



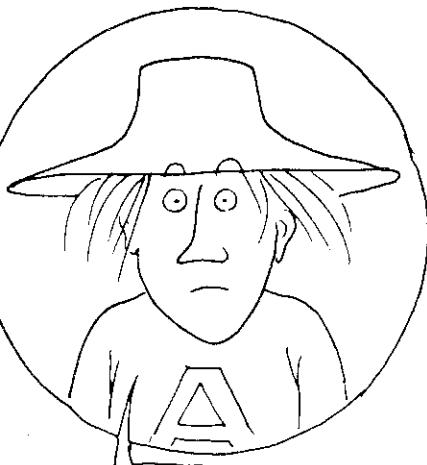
Anselmo, meu caro, isso é mais fácil de dizer do que de fazer.



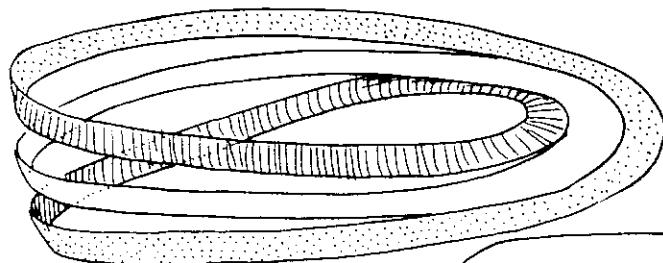
Mas o que é necessário fazer para a cortar em duas?



É muito simples, cortá-a em três!



Sinto-me completamente desorientado



Repare que há agora uma fila unilateral (branca) e uma bilateral (cinagenta) com o dobro do comprimento.

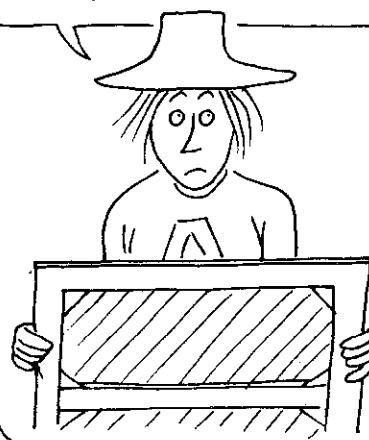
Depois deste passeio sobre a banda de Möbius, voltemos aos espaços euclidianos (sem curvatura) a três dimensões:

A orientação do espaço:



Quando me vejo ao espelho, a minha mão esquerda torna-se a minha mão direita, mas porque razão é que a minha cabeça não se troca com os meus fés?

De resto como ter a certeza que eu é que sou o verdadeiro?



A DIREITA?
É a contrária
da ESQUERDA, e vice-versa

É uma questão de bom senso



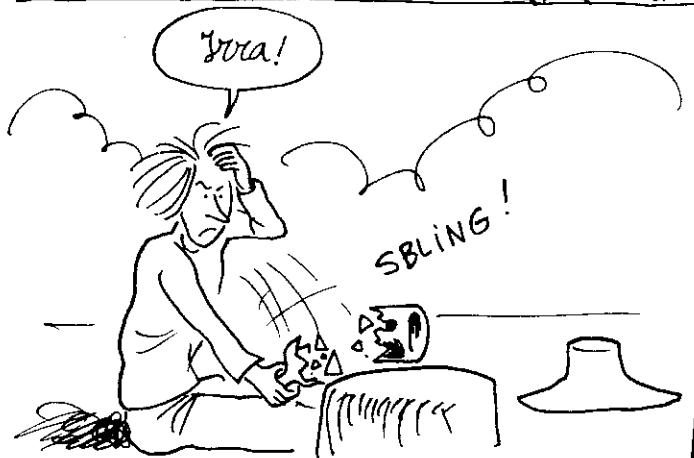
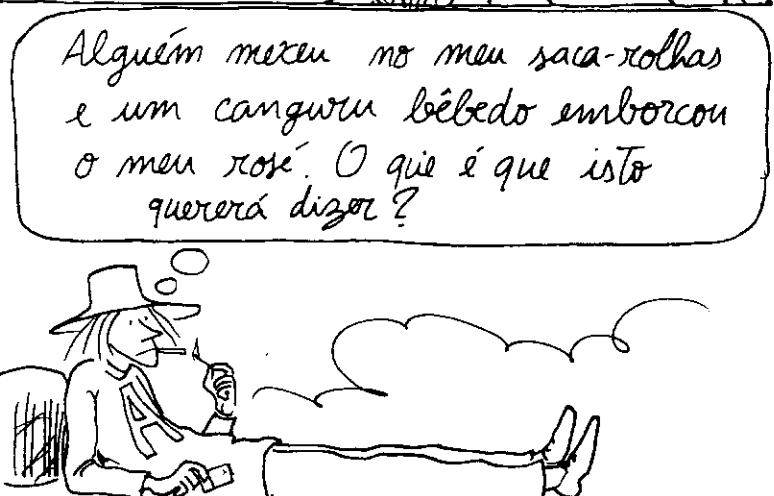
Esta, está lá, como é que se pode estar seguro de que a sua concha se enrola no bom sentido?

Que brincadeira, se ela não fosse como é, seria ao contrário!

Acompanhemos Anselmo na sua exploração dum novo mundo tridimensional euclidiano (sem curvatura).





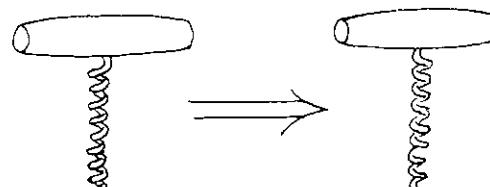




A banda de Möbius (espaço não orientável a duas dimensões) tem portanto um equivalente tridimensional. Sobre a banda de Möbius, logo que a circunferência decalcomania dava a "volta" a este espaço euclidiano, a sua orientação mudava:



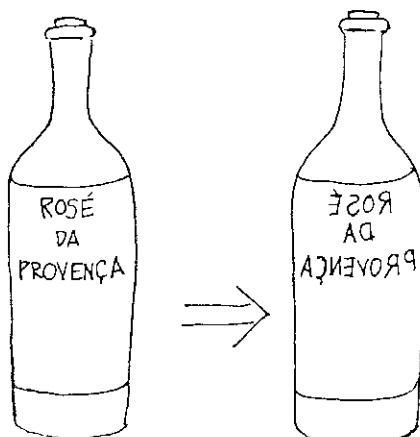
Ver página 54



Verificarse-á que estes objectos estão como "ao espelho".

O saca-rolhas, ou o próprio Anselmo, podem ser considerados como "decalcomanias a três dimensões". De cada vez que um objecto dá a "volta" a este espaço tridimensional, a sua orientação inverte-se. Como nós acompanhamos Anselmo no seu período circum-espacial, é normal que reencontrarmos, com ele, a garrafa "ao espelho" e o saca-rolhas apafusando num sentido não habitual.

Uma segunda "volta" a este universo dar-nos-ia a ~~segunda~~ visão inicial das coisas (com a condição de deixarmos os objectos no seu lugar).



Anselmo e o canguro (da espécie dos antípodas) habitam o mesmo espaço, mas diferem neste sentido: o que é "o direito para o canguro" é "o avesso para Anselmo", e vice-versa.

EPÍLOGO:



Anda tudo ao contrário. Não há mais nem direita, nem esquerda, nem avesso nem direito. Aonde é que isto levirá? E qual o caminho?

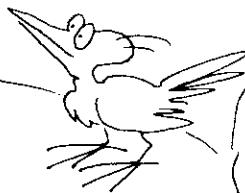
É preciso seguir as geodésicas, Anselmo, as geodésicas da tua vida.



Jamais alguém me fará acreditar que o Universo seja uma coisa tão retorcida.
Isso são delírios de matemático.



Isto é banda desenhada!



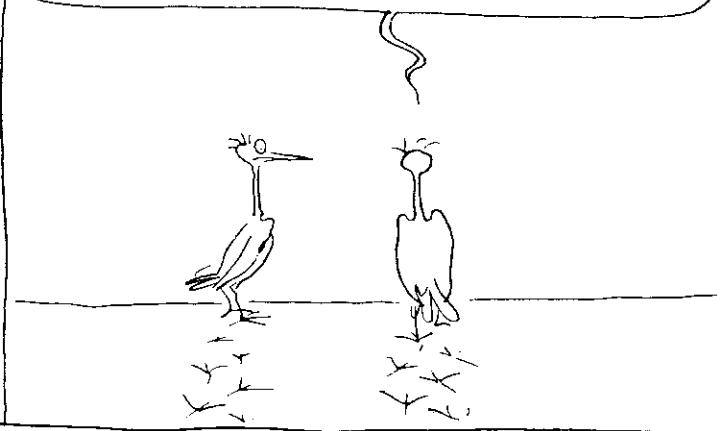
Porque preocupar-se com tudo isto? É evidente que o espaço é euclidiano (*)



(*) A formação feita em 1830 por Ostrogradsky, professor titular da cadeira de matemáticas em Petrógrado, após leitura dos trabalhos de Riemann e Lobatchevsky.

Admitamos que o Universo é total-
mente diferente do que é, já imaginou
tudo aquilo que tem sido ensinado
nas escolas?!?

E depois, o que interessa, na
realidade, é a vida. E, para
a vida de todos os dias, você
estará de acordo comigo que...



A�ante para
o CONCRETO

Está aqui
alguém?



