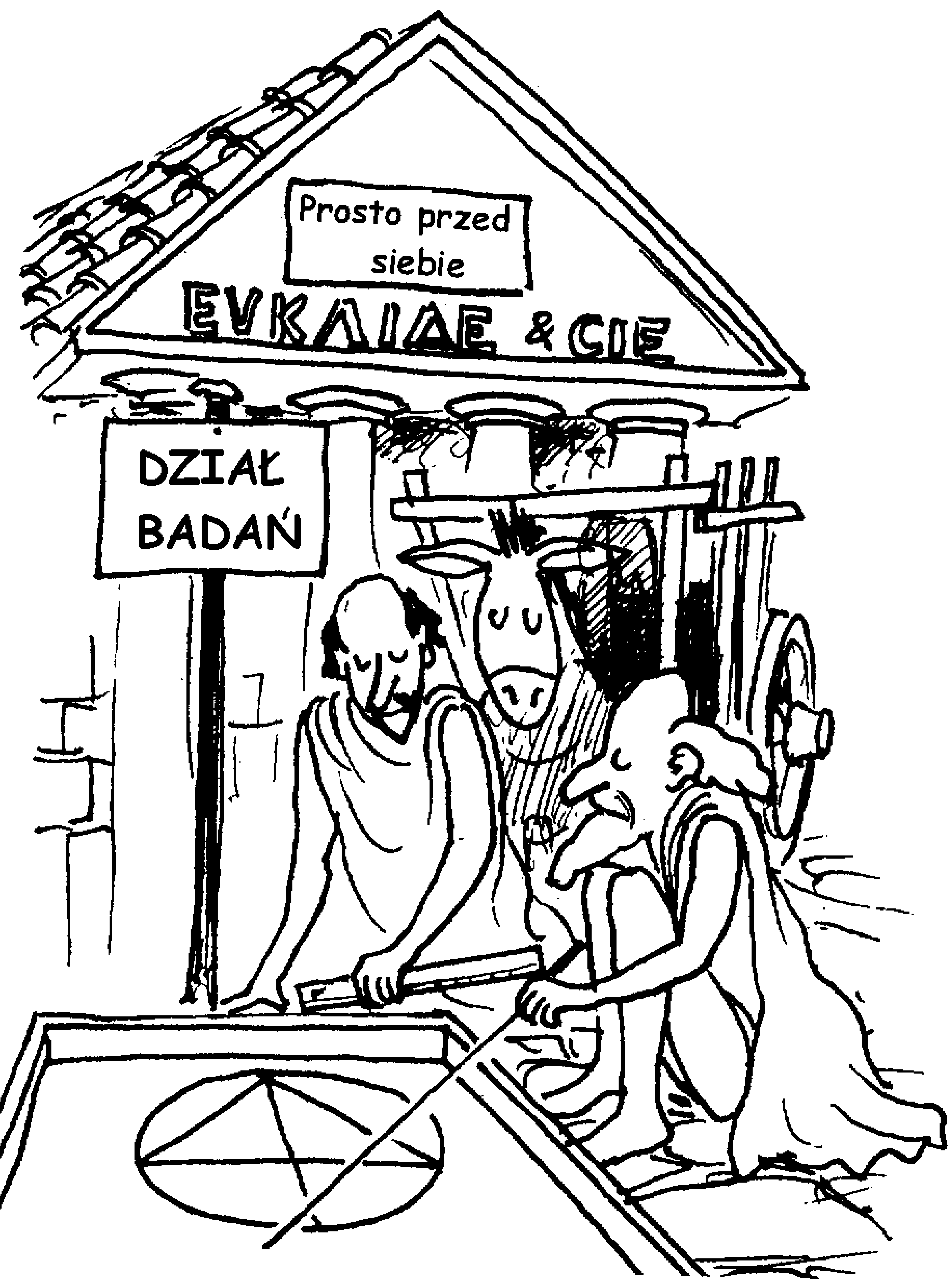
GEOMETRYKON

Jean-Pierre Petit

Przekład: Adam Majcherczyk



SAVOIR SANS FRONTIERES

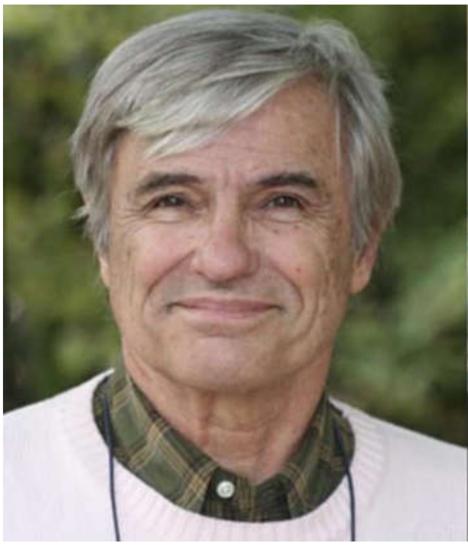
Villa Jean-Christophe, 206 Chemin de la Montagnère, 84120 FRANCJA

http://www.savoir-sans-frontieres.com

Jean-Pierre Petit, Prezes Stowarzyszenia
Były Dyrektor ds Badań w CHRS, astrofizyk, twórca naukowego gatunku literackiego: *komiksu naukowego*. W 2005 roku postanowił upublicznić 20 swoich dzieł, umożliwiając bezpłatny dostęp do elektronicznych wersji za pośrednictwem własnej strony internetowej.
Stworzył także Stowarzyszenie *Savoir Sans Frontières* (Wiedza bez granic), którego celem jest nieodpłatne szerzenie wiedzy, w tym wiedzy naukowej i technicznej.
Stowarzyszenie funkcjonuje dzięki hojności darczyńców. Wynagrodzenie tłumaczy w roku 2006 wynosi 150€ netto (koszty transferu bankowego pokrywa SSF).
Każdego dnia wzrasta liczba przeprowadzonych tłumaczeń (w 2005 r. komiksy zostały przetłumaczone na 18 różnych języków, w tym na litewski i rwandyjski).
Poniższy dokument .pdf może być legalnie kopiowany, powielany w całości bądź poszczególnych fragmentach, wykorzystywany w szkołach w celach naukowych, pod warunkiem że wykorzystaniu niniejszych materiałów nie towarzyszą cele zarobkowe.
Zachęcamy do umieszczania publikacji SSF w bibliotekach miejskich, szkolnych bądź uniwersyteckich w formie publikacji broszurowej bądź w formie elektronicznej.
Autor postanowił uzupełnić kolekcję albumów o przystępne komiksy dedykowane dzieciom od lat 12. Równocześnie odbywa się przygotowywanie komiksów w wersji „audio" dla analfabetów, a także osób pragnących nauczyć się nowego języka.
Stowarzyszenie chętnie nawiąże współpracę z nowymi tłumaczami, posiadającymi odpowiednie kompetencje, niezbędne do tłumaczenia tekstów para-naukowych.
Ponadto będziemy wdzięczni za wszelkie datki na rozwój Stowarzyszenia *Savoir Sans Frontières*.
W roku 2006 fundusze SSF przeznaczone są głównie na wynagrodzenia dla tłumaczy.

Wiedza bez granic

Stowarzyszenie o charakterze niezarobkowym założone w 2005 r. i zarządzane przez dwóch francuskich naukowców. Cel: rozpowszechnianie wiedzy naukowej za pomocą zespołu rysowanego za pomocą darmowych plików PDF do pobrania. W 2020 r. osiągnięto w ten sposób 565 tłumaczeń na 40 języków. Z ponad 500.000 pobranych plików.



Jean-Pierre Petit

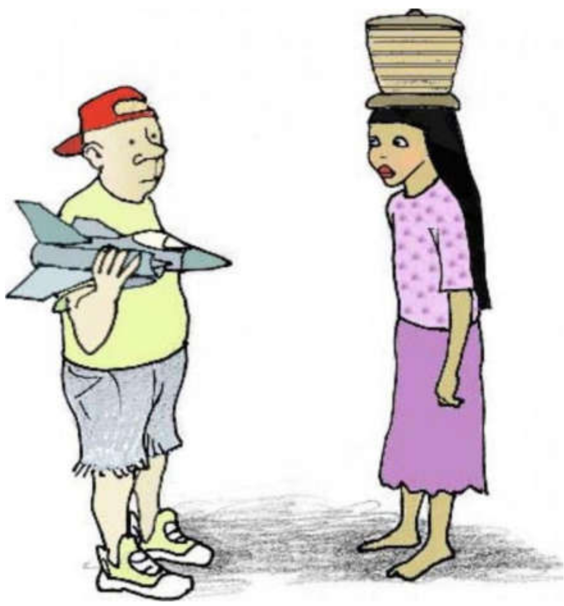
Gilles d'Agostini

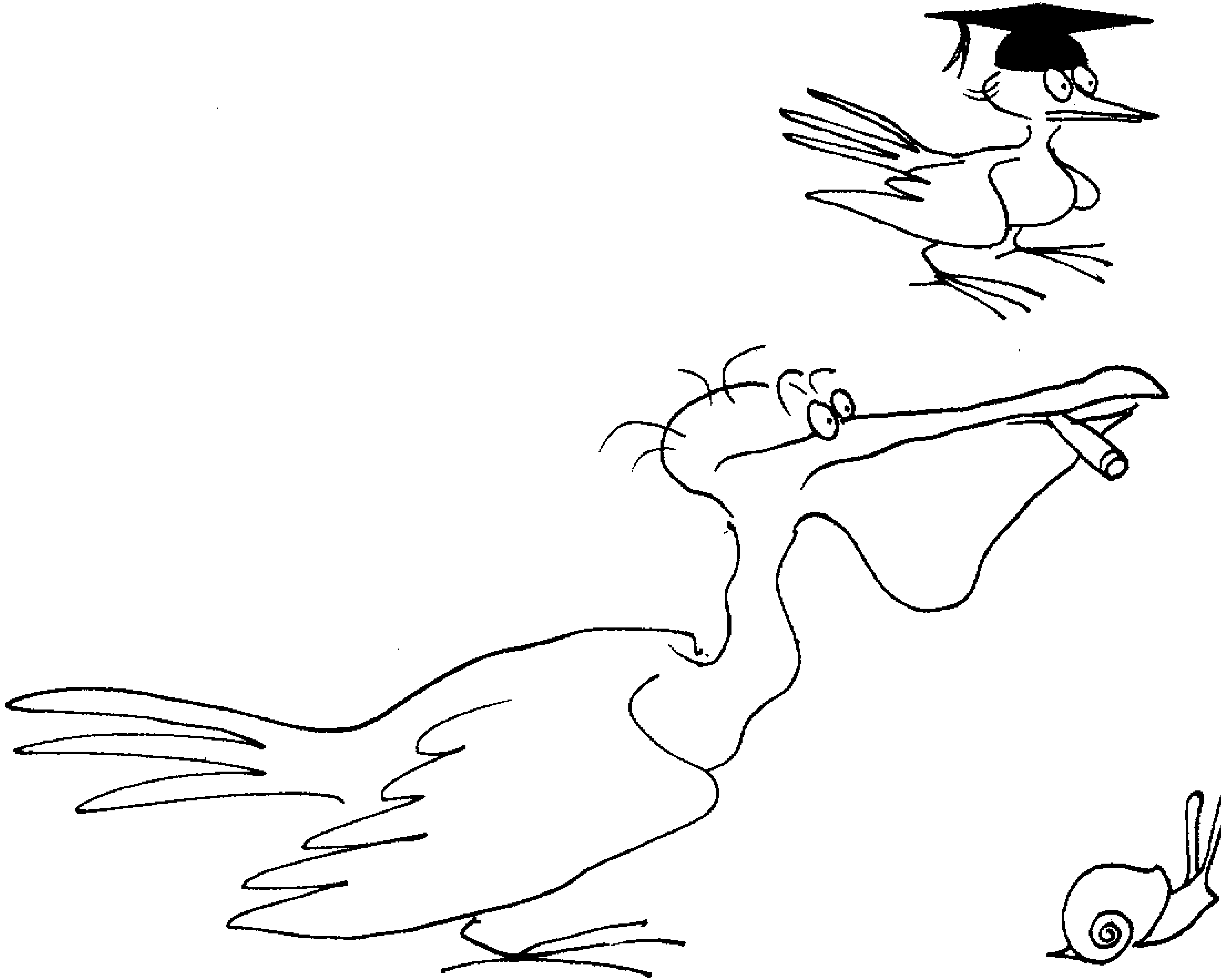
Stowarzyszenie jest całkowicie dobrowolne. Pieniądze przekazano w całości na rzecz tłumaczy.

Aby dokonać darowizny, użyj przycisku PayPal na stronie głównej:

http://www.savoir-sans-frontieres.com

PayPal
FAIRE UN DON





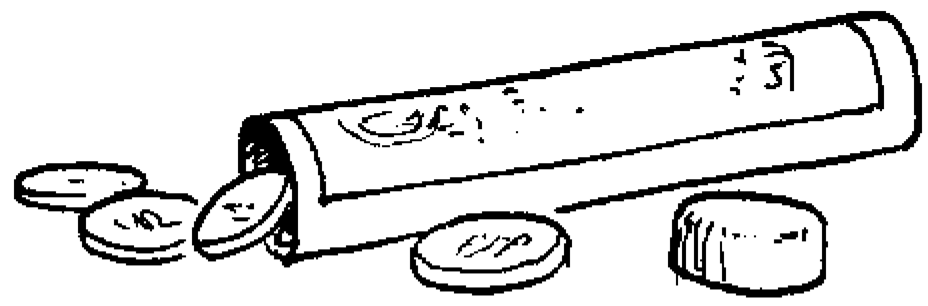

Czy jest jakiś
MATEMATYK
na sali?

OSTRZEŻENIE

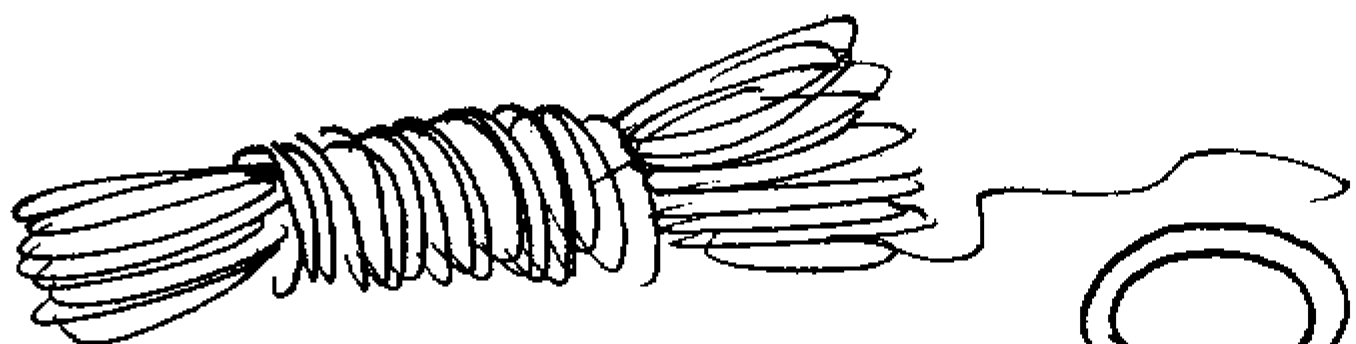
Niniejsze nie jest żadnym kursem ani wykładem. To po prostu opowieść o Anzelmie Lantarlu i o jego podróży w krainie geometrii.

Podczas lektury zalecane są:

* Przede wszystkim trochę aspiryny

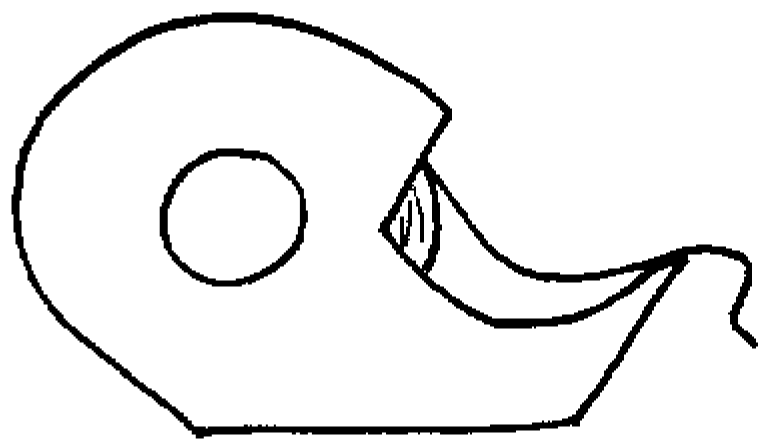


* Dużo linki

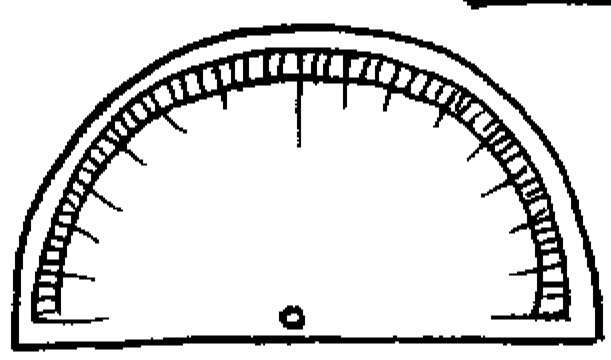


* Nożyczki

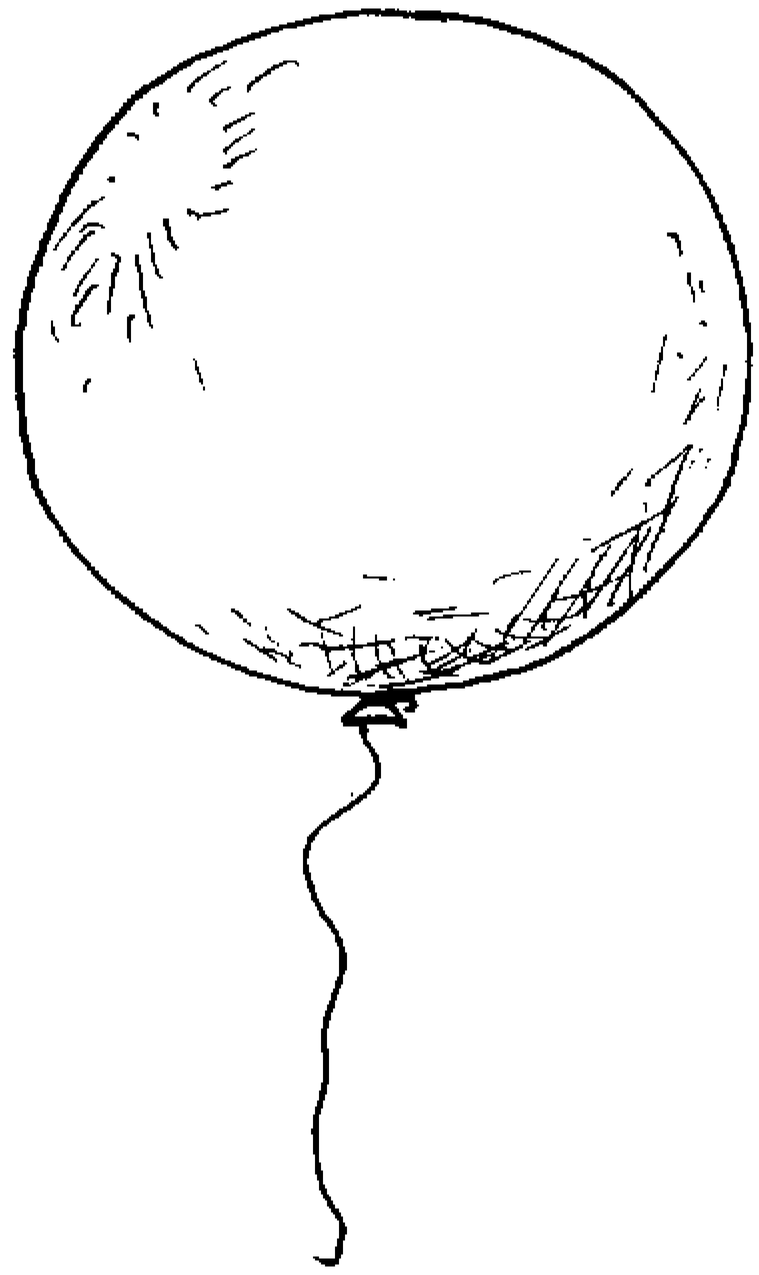
* Taśma klejąca



* Kątomierz



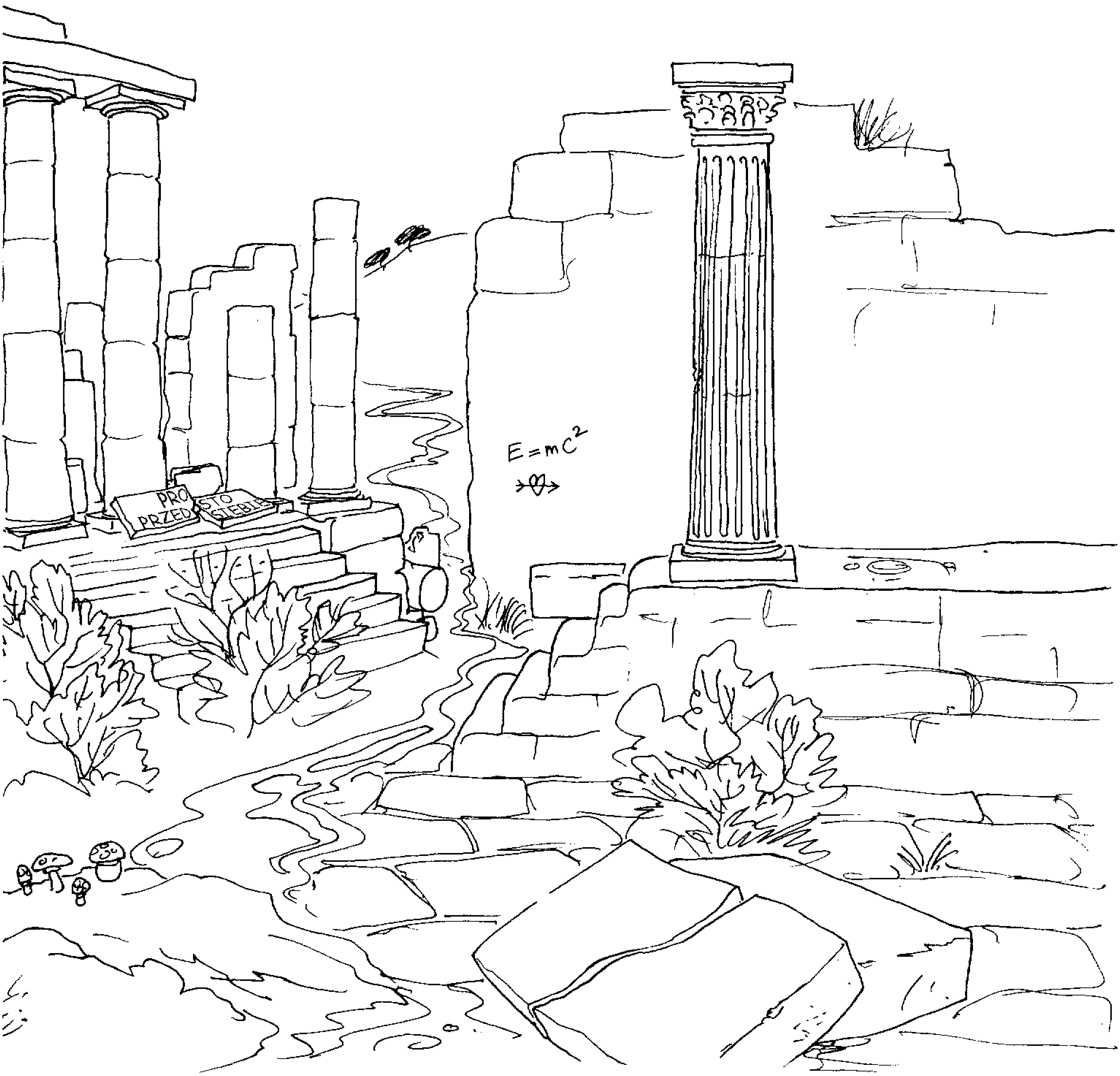
* I ładny okrągły balonik ...



Firma Euklides sp.zo.o. powstała w Aleksandrii w trzecim wieku p.n.e..
Biznes prosperował doskonale podczas dwóch tysięcy dwustu lat.
Produkty spółki były doceniane a klientela była zadowolona
i wierna firmie.

Jednak stopniowo gusta klientów zaczęły się zmieniać. Niektórzy z nich, niegdyś bezwarunkowo wierni marce, zaczęli się zastanawiać (w konsekwencji różnych doświadczeń) czy Euklides to zawsze prawda, cała prawda i tylko prawda ?

Opowiemy tutaj historię jednej z takich osób...

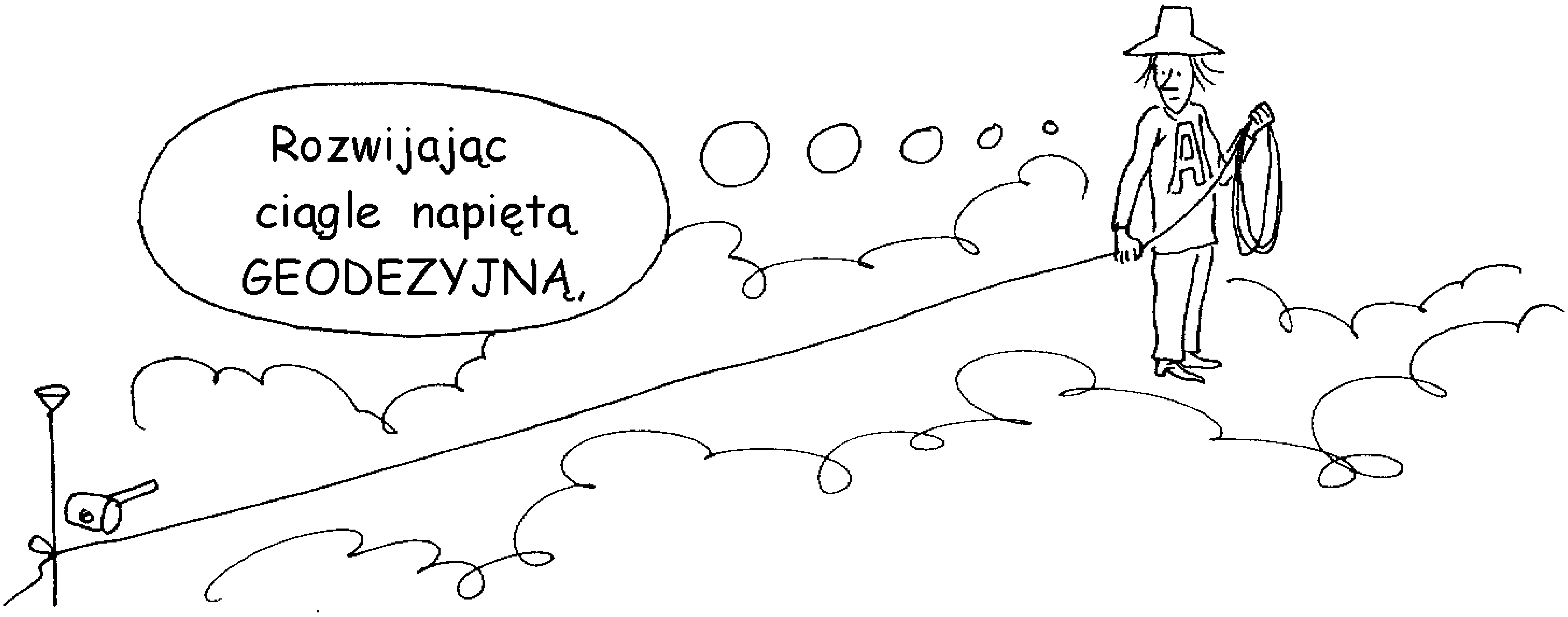


PROLOG :

Pewnego dnia Anzelm Lantarlu postanowił rozciągnąć linkę między dwoma tyczkami.

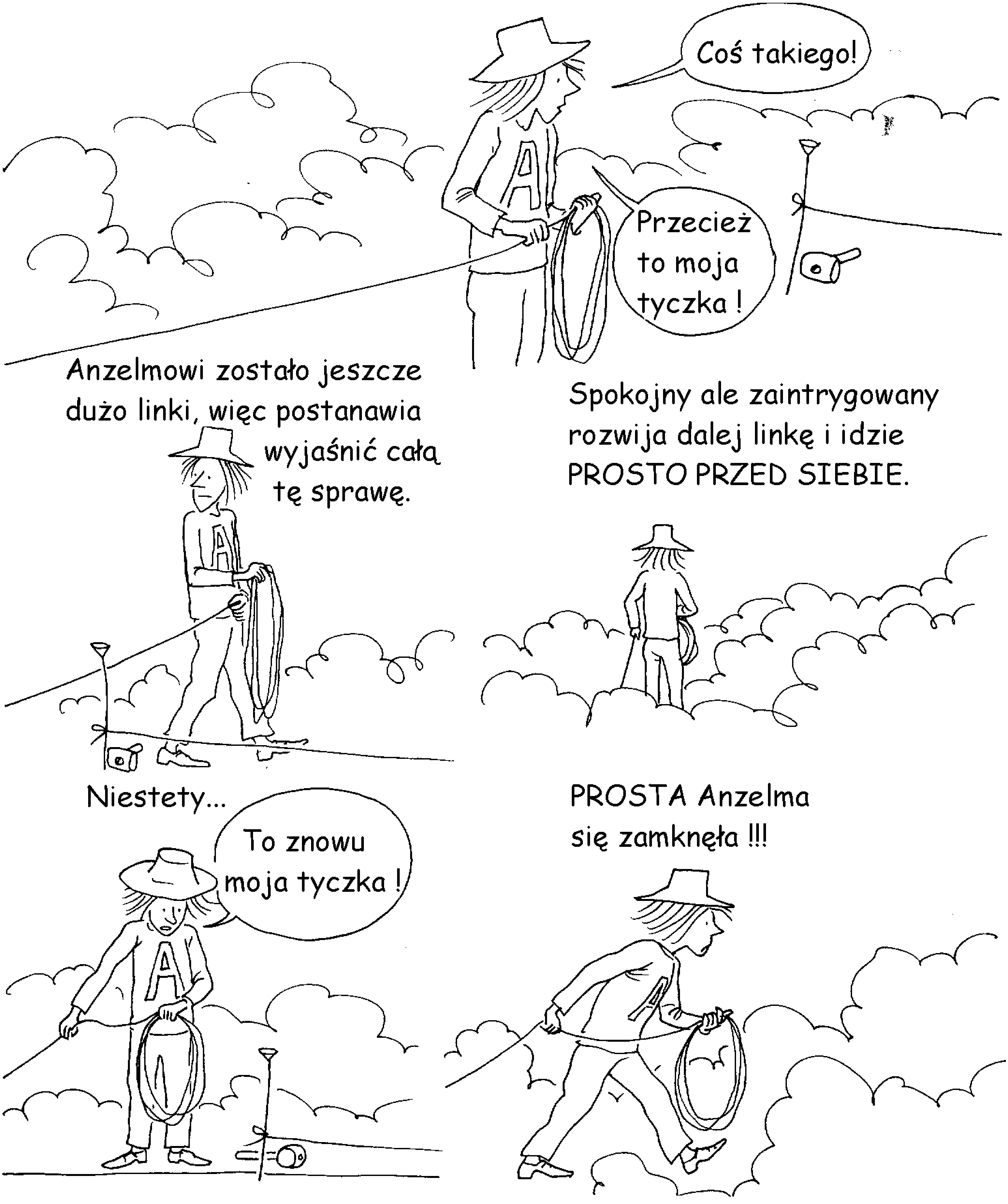
Używając trzech naciągniętych linek,
tzn. trzech GEODEZYJNYCH,
B
A
Anzelm zbudował TRÓJKĄT.
Za pomocą kątomierza, zmierzył kąty
na kazdym wierzchołku TRÓJKĄTA i je podsumował.
Według nieomylnego twierdzenia firmy Euklides sp. zo.o. ta suma musi wynosić 180°, tak... zgadza się.
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ Ευκλιδε

Kraina, w której znalazł się Anzelm była całkowicie pogrążona w obłokach i w gęstej mgle.



Anzelm szedł długo,
bardzo długo...
Czuł za sobą naciągniętą linkę i bez obawy maszerował we mgle, wyznaczał przecież idealną GEODEZYJNĄ...

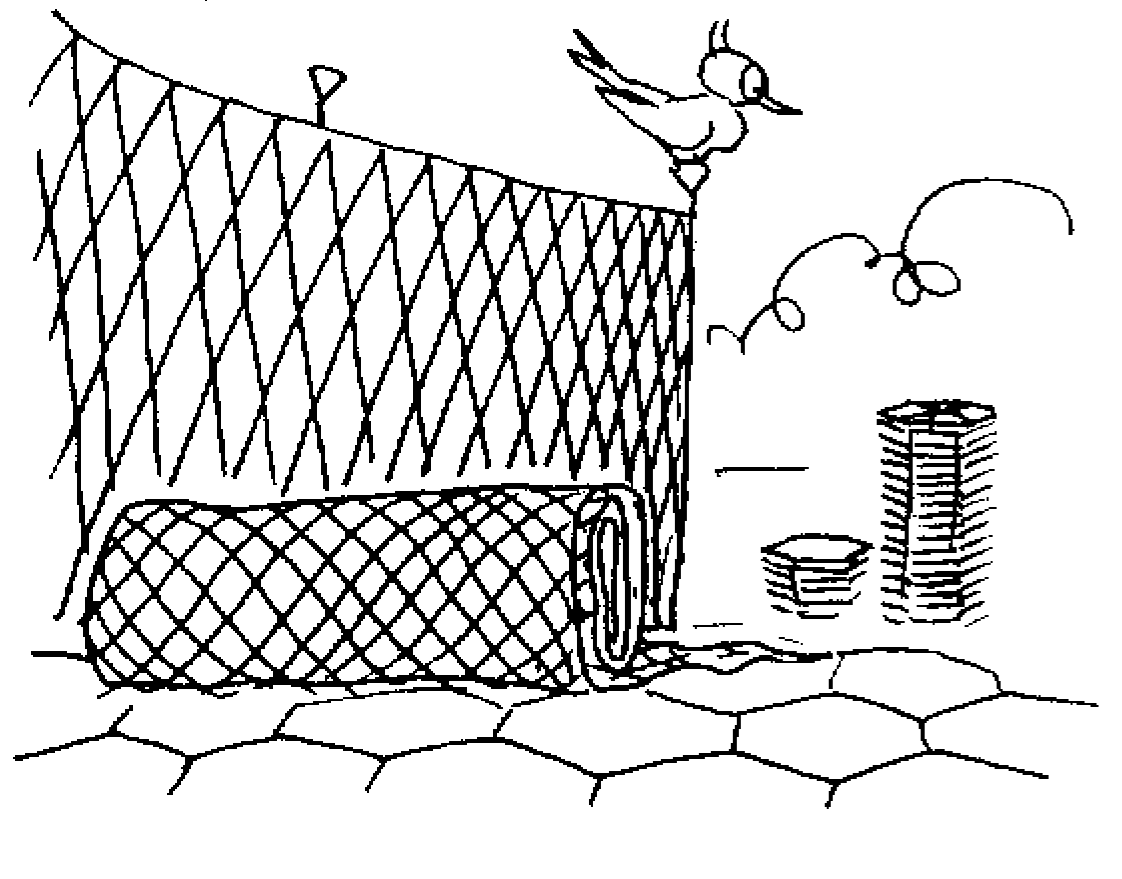
Jak powszechnie wiadomo, są takie dni, kiedy wszystko jest do bani :




? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Sprawdźmy to twierdzeniem od Euklidesa, wyznaczę trzy GEODEZYJNE o takiej samej długości. To mi da TRÓJKĄT o trzech kątach po 60° każdy, ich suma bedzie równa 180°. Tak, jak podali w instrukcji...
B
A
C
60
60
60
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$
A potem zobaczymy...
RATIO OMNIA VINCIT
A
A
B
Dobra, to mój drugi wierzchołek B, jeszcze tylko napnę dwie linki i znajdę trzeci...
Super ta nauka, co ?
B
A
O co tu chodzi ? Kąty są jednakowe, ale większe niż 60°.
Jakiś problem ?
C
A
A ich suma , oczywiście przekracza 180° !
EUCLIDES
EUCLIDES


Przecież przykładając PŁASKĄ linijkę, widać, że moje geodezyjne są PROSTYMI.
EUCLIDES
Halo, firma Euklides ? Mam tu małe problemy z waszym sprzętem.
Chwileczkę, łączę pana z działem technicznym...
Problemy z naszymi trójkątami ? Dziwne, a może spróbuje pan nasze koła ? Klienci są z nich bardzo zadowoleni.
...Koło, więc jest zbiorem punktów znajdujących się w odległości L od danego punktu centralnego.
I mówi pan : obwód 2ΠL, powierzchnia ΠL², dziękuję, zapisałem .
ℓ
...do usług.

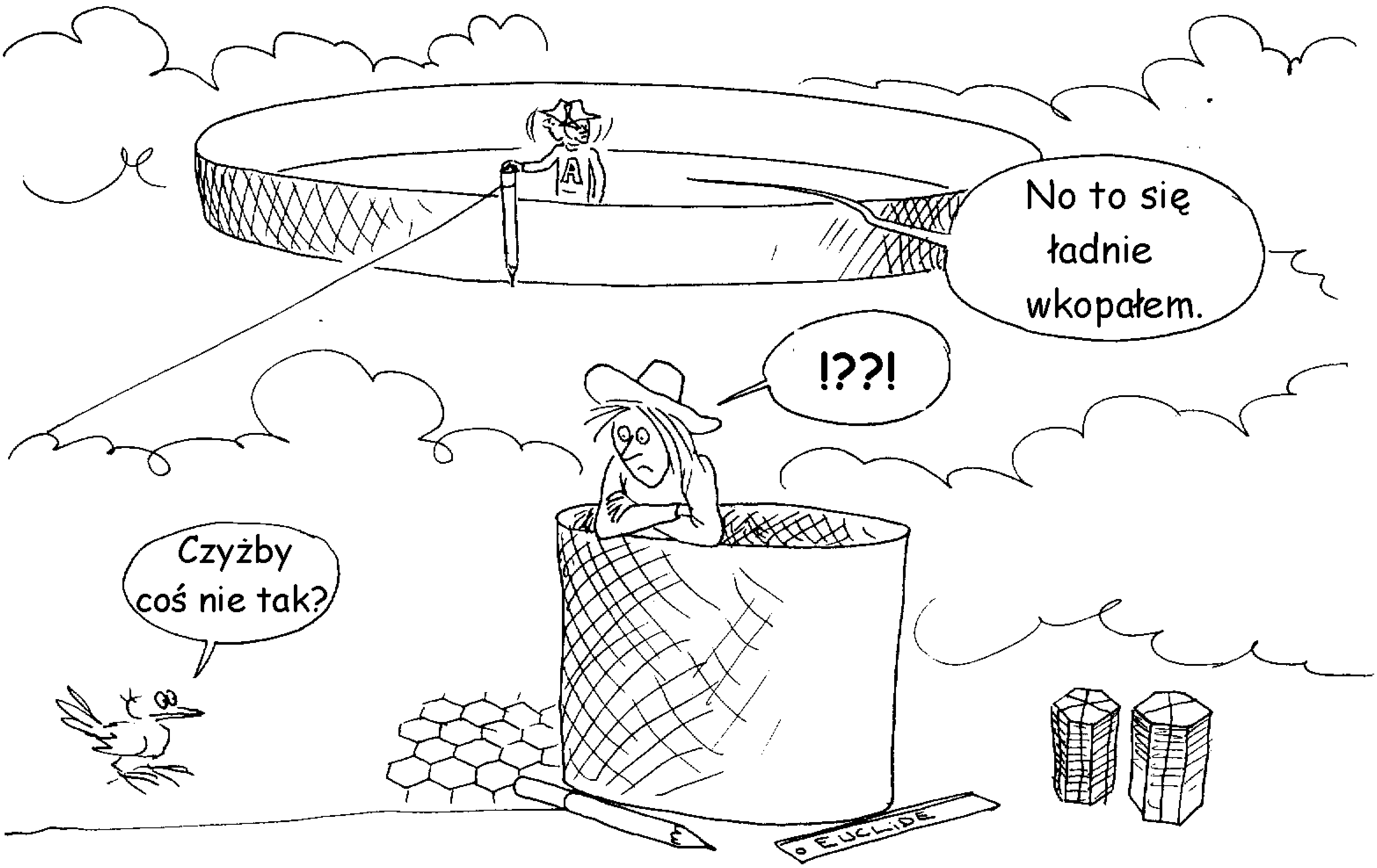

Do pomiaru pola polecamy płytki Euklidesa.
Do wyznaczenia obwodu ogrodzenie Euklidesa jest najlepszym materiałem dostępnym na rynku .
Zadowolenie klientów to nasza najlepsza reklama.
20 m²
EUCLIDES
GEOMETRIA
DLA KAŻDEGO
Pole ΠL²
R
No, dobrze się zaczyna, mam za dużo płytek !
Jak to się mówi : połączyć piękne z pożytecznym...
A teraz zmierzymy obwód za pomocą ich ogrodzenia.
Obwód 2ΠL
L



Anzelm próbował jeszcze dalszych pomiarów, zwiększając za każdym razem promień koła. I za każdym razem zostawało mu co raz więcej materiałów...


Ale cyrk, a teraz mi zostało dokładnie 36% ogrodzenia i 19% płytek a moje koło stało się...PROSTĄ.
Jawa to czy sen ?
...A linijka jest naprawdę PROSTA.
EUCLIDES
Anzelm zwiększa ponownie promień koła i tym razem...
EUCLIDES
Krzywizna mojego koła odwróciła się w drugą stronę.
A kiedy ZWIĘKSZAM promień jeszcze bardziej to obwód MALEJE, to jakieś szaleństwo !

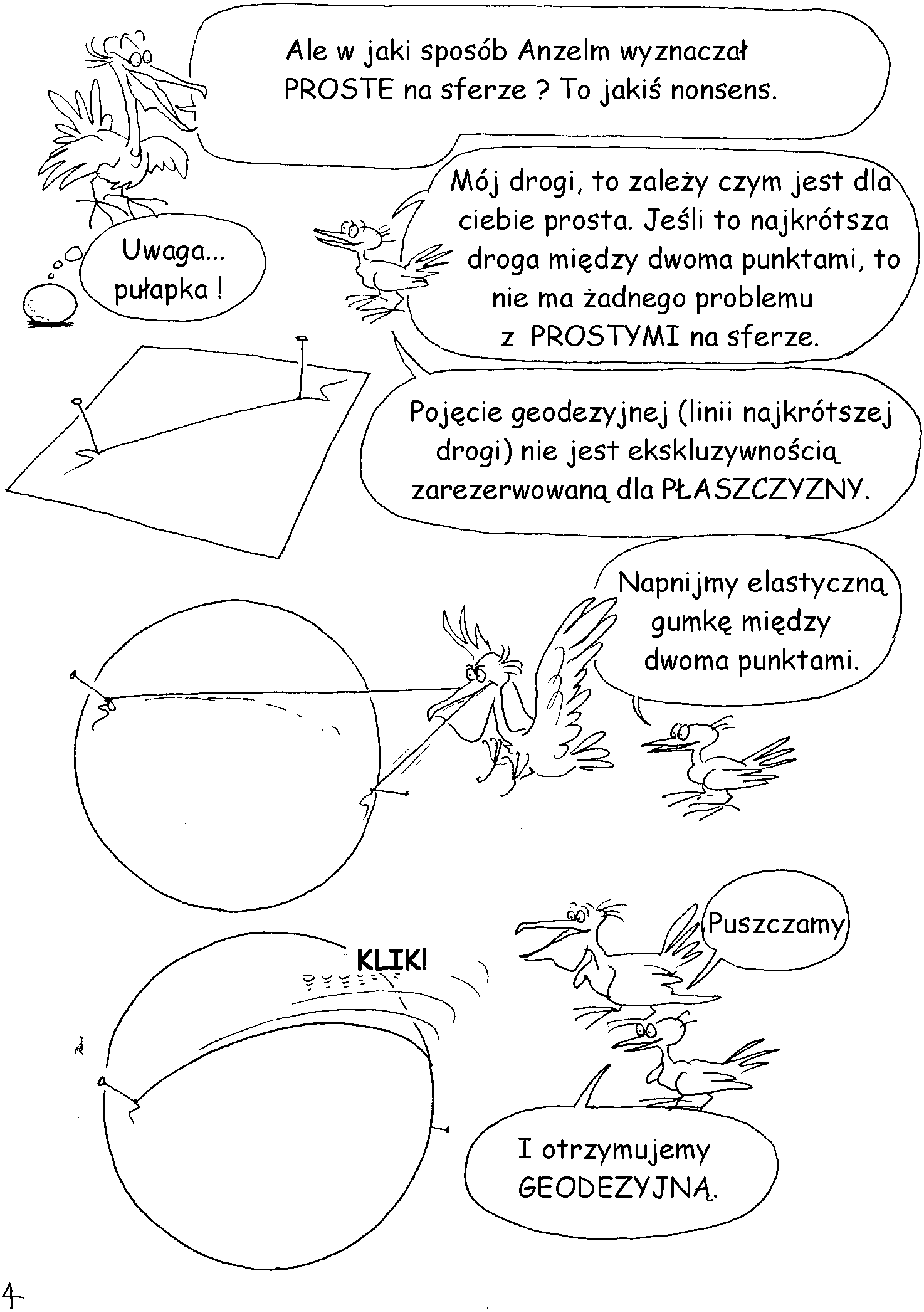
Po ostatniej próbie :



CO SIĘ STAŁO ?

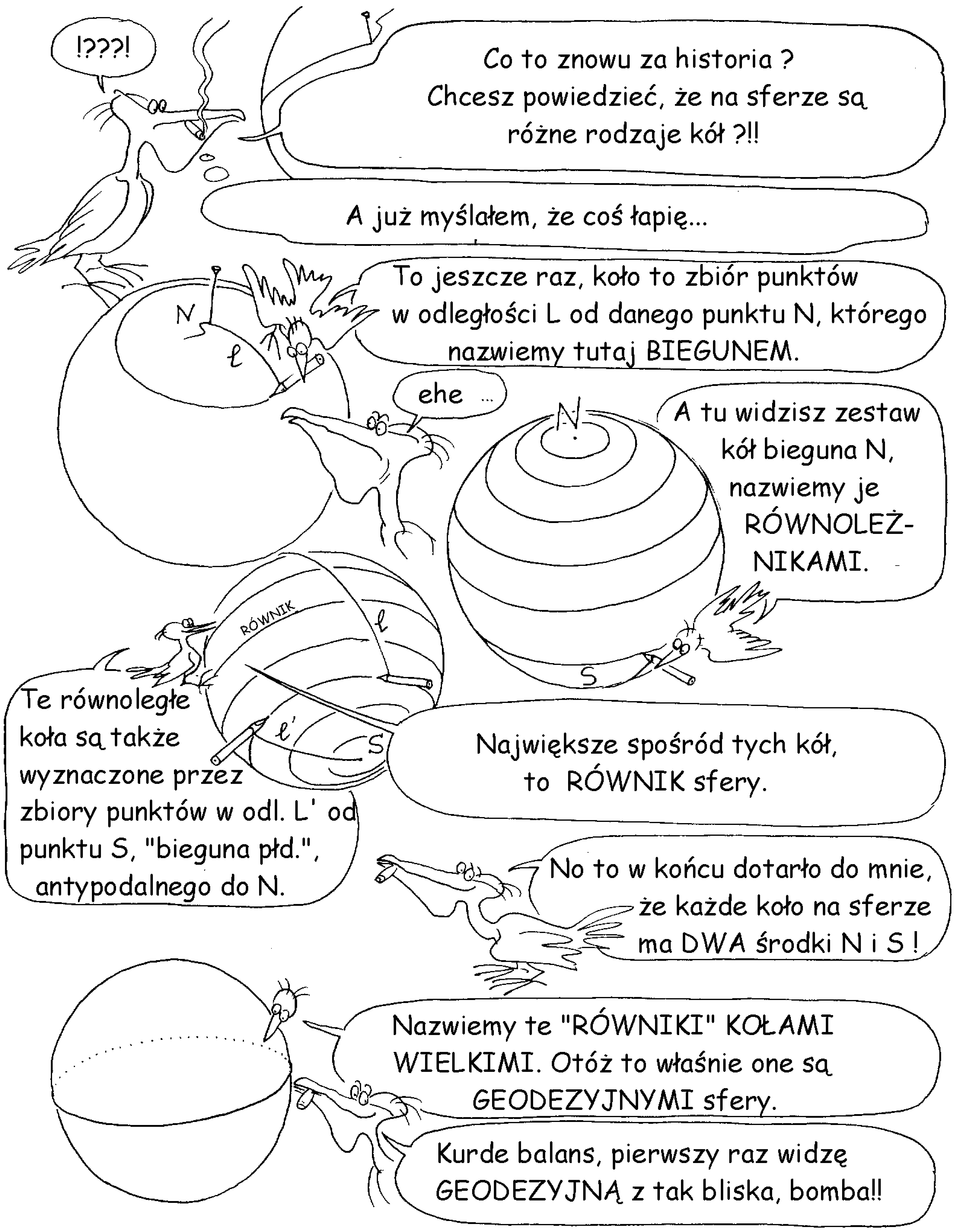
Aby to wyjaśnić, rozproszymy obłoki :

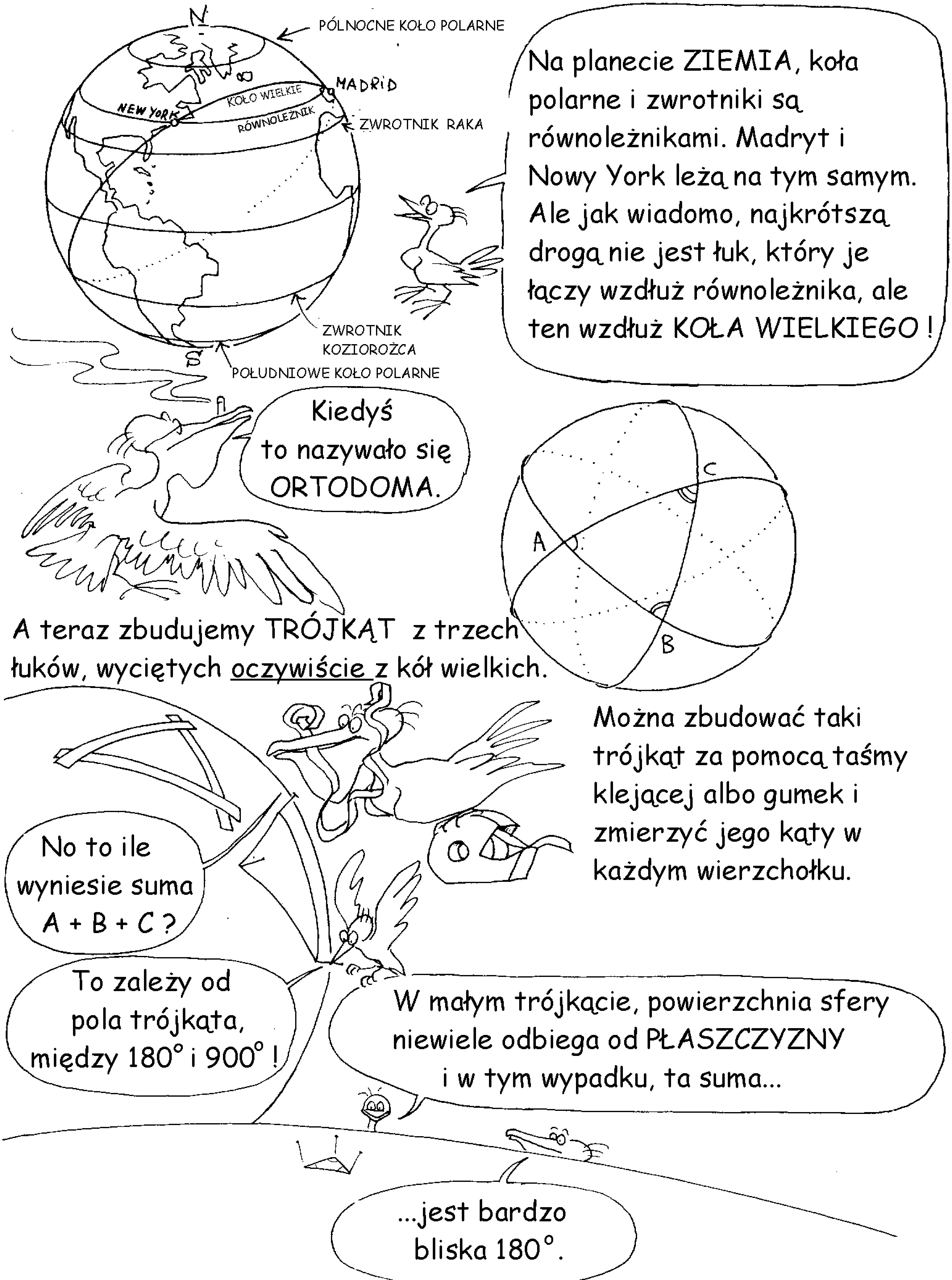
Anzelm nagle zrozumiał, że znajduje się na powierzchni kuli, na której stosował reguły GEOMETRII PŁASZCZYZNY.



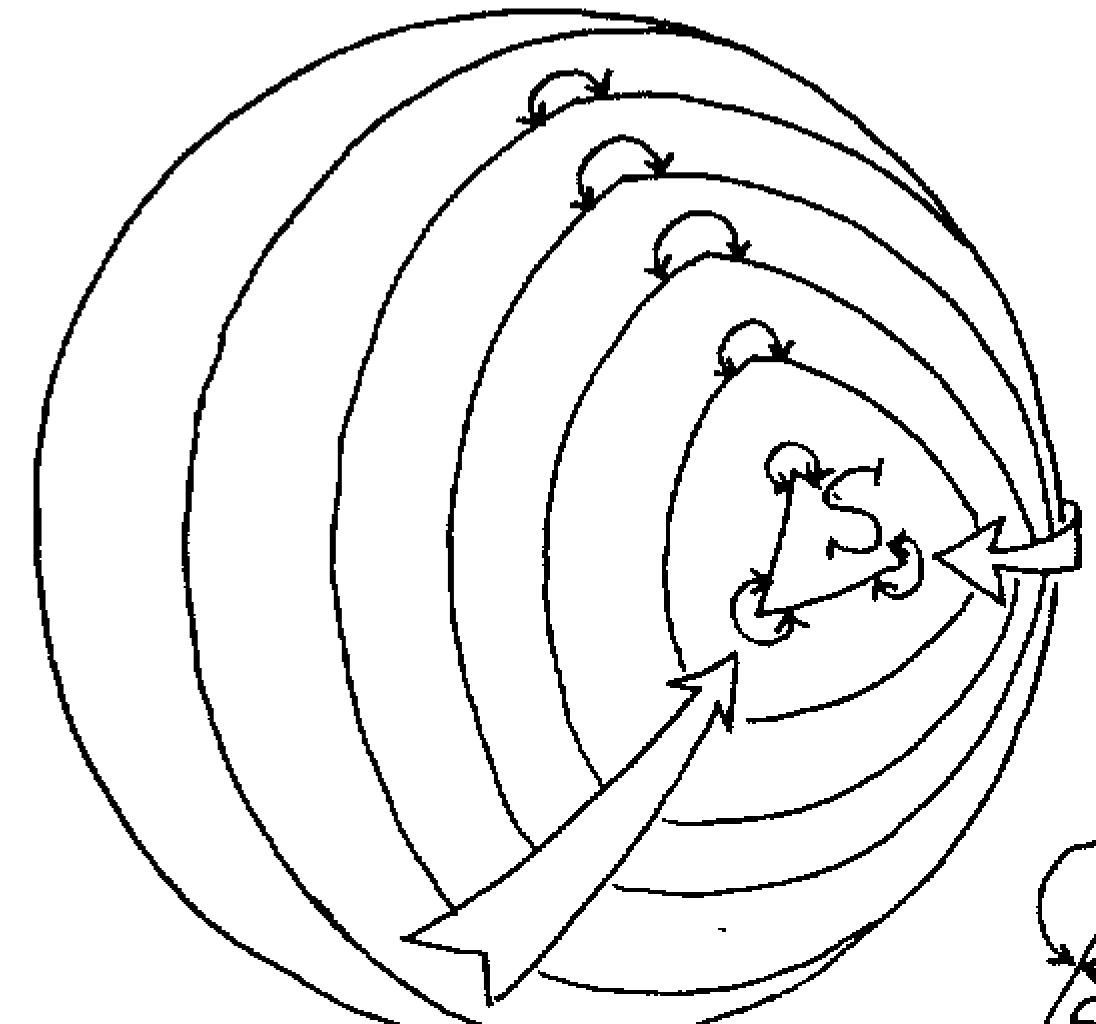
Ale w jaki sposób Anzelm wyznaczał PROSTE na sferze ? To jakiś nonsens.
Mój drogi, to zależy czym jest dla ciebie prosta. Jeśli to najkrótsza droga między dwoma punktami, to nie ma żadnego problemu z PROSTYMI na sferze.
Uwaga... pułapka !
Pojęcie geodezyjnej (linii najkrótszej drogi) nie jest ekskluzywnością zarezerwowaną dla PŁASZCZYZNY.
Napnijmy elastyczną gumkę między dwoma punktami.
Puszczamy
KLIK!
I otrzymujemy GEODEZYJNĄ.


Co ty mi tu chrzanisz, przecież to nie jest PROSTE, to coś.
To proszę, weź linijkę i sam sobie sprawdź.
Bo to jest linijka według ciebie ?
To jest LINIJKA do POWIERZCHNI, i na PŁASZCZYZNIE też działa doskonale, nie odchyla się ani w lewo, ani w prawo.
Taka spryciara...
Tak czy owak, kiedy Anzelm wyznacza swoją geodezyjną, to ona się ZAMYKA. Czy to znaczy, że geodezyjne na kuli to po prostu koła ?
Wszystkie linie najkrótszej drogi na sferze są częściami zamkniętych krzywych geodezyjnych, które faktycznie są kołami na tej sferze. Ale nie byle jakimi kołami !


!???!
Co to znowu za historia ? Chcesz powiedzieć, że na sferze są różne rodzaje kół ?!!
A już myślałem, że coś łapię...
To jeszcze raz, koło to zbiór punktów w odległości L od danego punktu N, którego nazwiemy tutaj BIEGUNEM.
N
ℓ
ehe ...
A tu widzisz zestaw kół bieguna N, nazwiemy je RÓWNOLEŻ-NIKAMI.
N
S
RÓWNIK
ℓ
ℓ'
S
Te równoległe koła są także wyznaczone przez zbiory punktów w odl. L' od punktu S, "bieguna płd.", antypodalnego do N.
Największe spośród tych kół, to RÓWNIK sfery.
No to w końcu dotarło do mnie, że każde koło na sferze ma DWA środki N i S !
Nazwiemy te "RÓWNIKI" KOŁAMI WIELKIMI. Otóż to właśnie one są GEODEZYJNYMI sfery.
Kurde balans, pierwszy raz widzę GEODEZYJNĄ z tak bliska, bomba!!

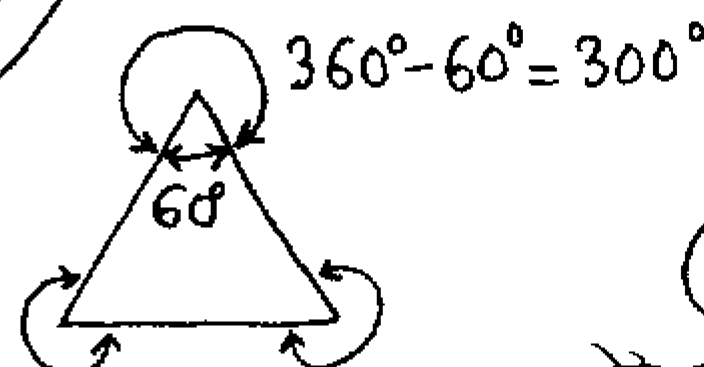

N
PÓLNOCNE KOŁO POLARNE
MADRID
KOŁO WIELKIE
NEW YORK
RÓWNOLEŻNIK
ZWROTNIK RAKA
ZWROTNIK KOZIOROŻCA
S
POŁUDNIOWE KOŁO POLARNE
Na planecie ZIEMIA, koła polarne i zwrotniki są równoleżnikami. Madryt i Nowy York leżą na tym samym. Ale jak wiadomo, najkrótszą drogą nie jest łuk, który je łączy wzdłuż równoleżnika, ale ten wzdłuż KOŁA WIELKIEGO !
Kiedyś to nazywało się ORTODOMA.
C
A
B
A teraz zbudujemy TRÓJKĄT z trzech łuków, wyciętych oczywiście z kół wielkich.
Można zbudować taki trójkąt za pomocą taśmy klejącej albo gumek i zmierzyć jego kąty w każdym wierzchołku.
No to ile wyniesie suma A + B + C ?
To zależy od pola trójkąta, między 180° i 900° !
W małym trójkącie, powierzchnia sfery niewiele odbiega od PŁASZCZYZNY i w tym wypadku, ta suma...
...jest bardzo bliska 180°.

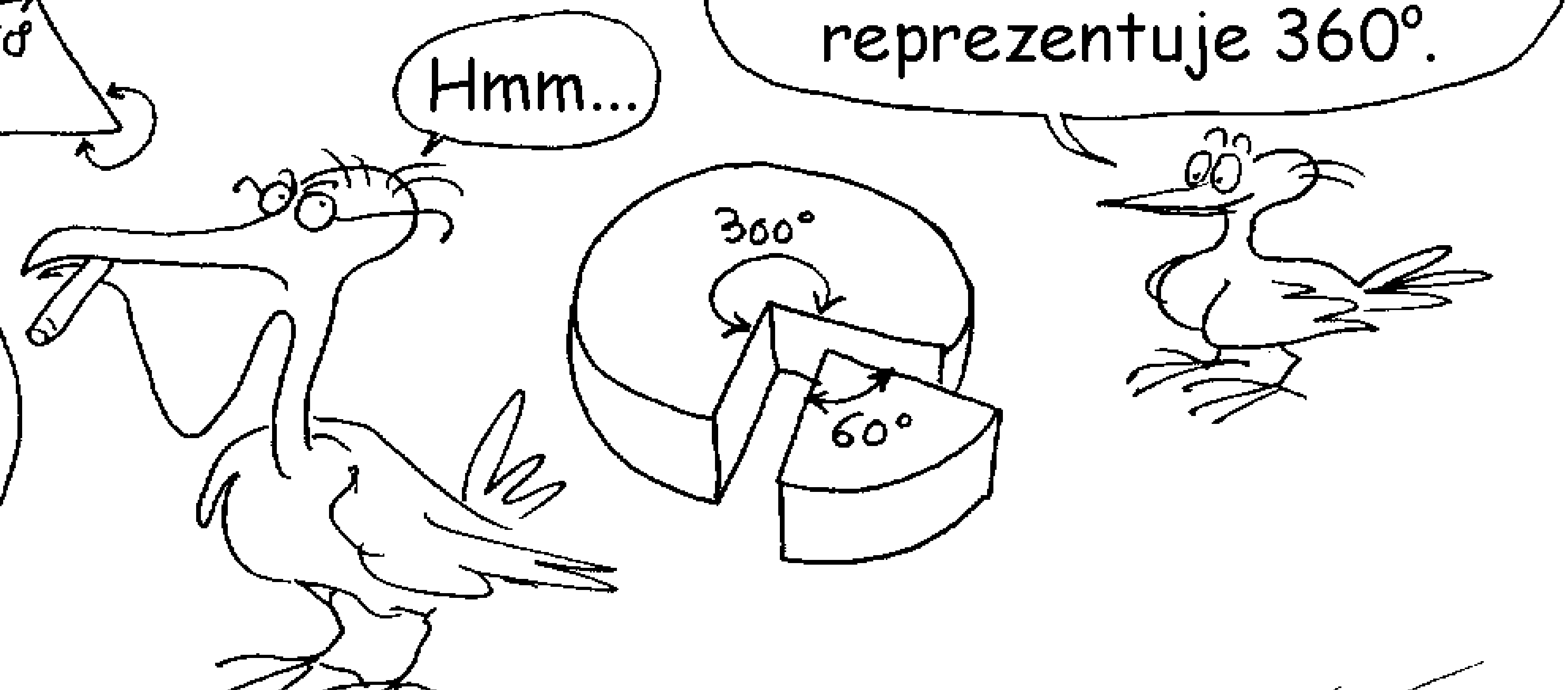

A
B
C
A taki oto trójkąt moglibyśmy zrobić za pomocą trzech kawałków gumowej tasiemki.
90°
90°
90°
Trójkąt, który byłby równoboczny i trójprostokątny
A także dość szczególny bo zajmuje jedną ósmą powierzchni sfery.
A suma kątów wynosi 270°.
??!!
I jeszcze wszystkiego nie widziałeś.
N
A teraz wyobraźmy sobie trójkąt z elastycznymi bokami, którego wierzchołki odsuwamy coraz dalej. Kąty będą rosnąć , tak jak ich suma.
180°!
A kiedy wierzchołki znajdą się na równiku, kąty trójkąta bedą kątami PŁASKIMI o wartości 180° a ich suma to 540°!!!



Jeśli będziemy kontynuować wędrówkę wierzchołków trójkąta na drugiej półkuli, to znajdzie się on przy punkcie S, na antypodach punktu N. Każdy z kątów będzie większy niż 180°! A dokładniej, każdy z nich będzie równy : 360°- 60°= 300°.

Suma : 300 x 3 = 900°



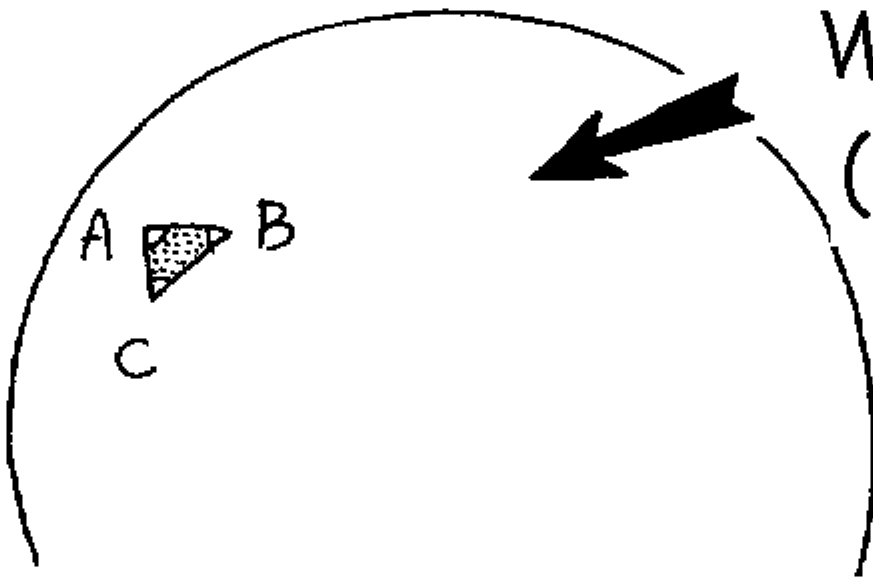


I w taki właśnie sposób, suma kątow trójkąta na sferze może wynosić od 180° do 900°!

Według twierdzenia Gauss'a suma kątów trójkąta na sferze, wynosi:

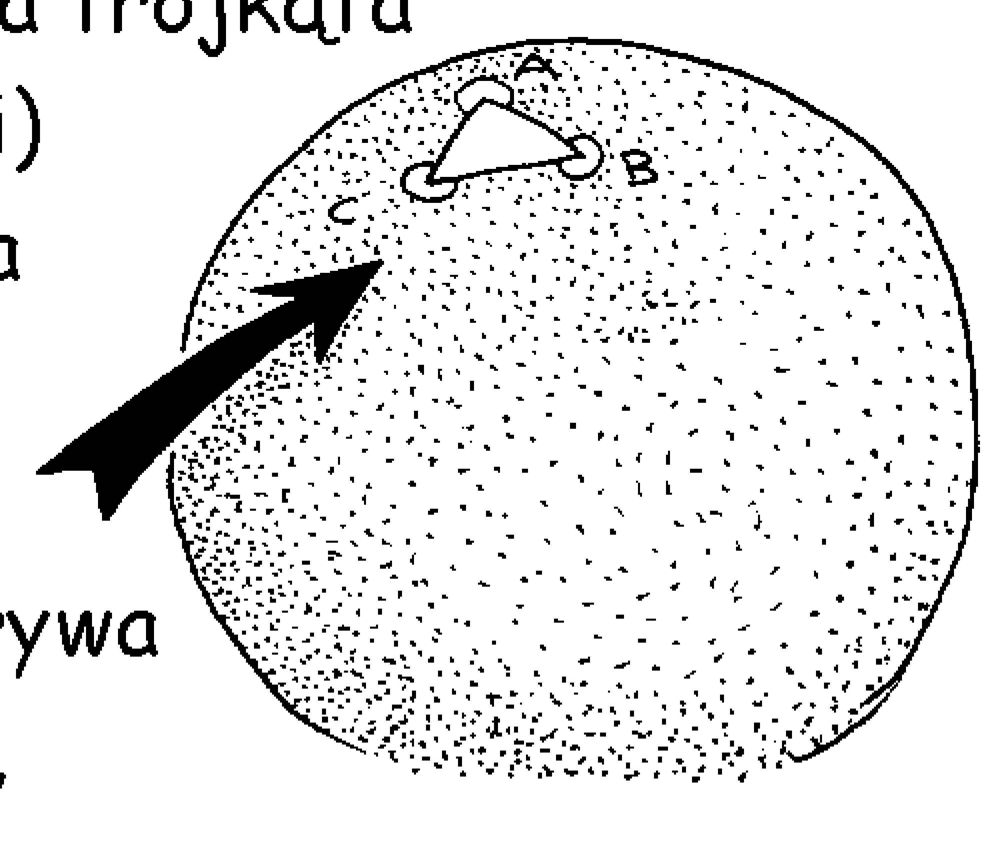
$$A+B+C = 180\left(1 + \frac{P}{3{,}1416\,R^2}\right) \text{ w stopniach}$$

Gdzie R jest promieniem kuli a P polem trójkąta.

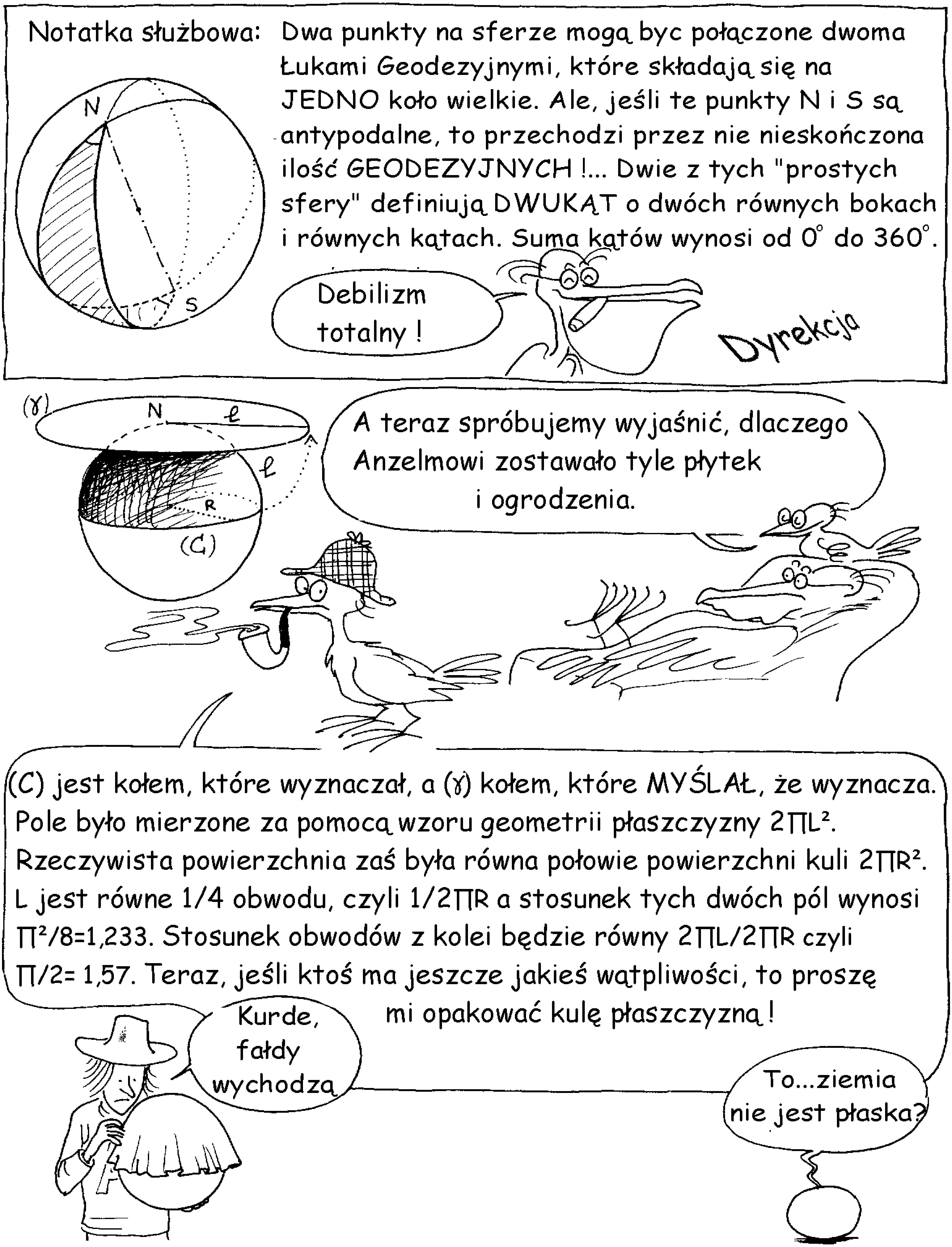


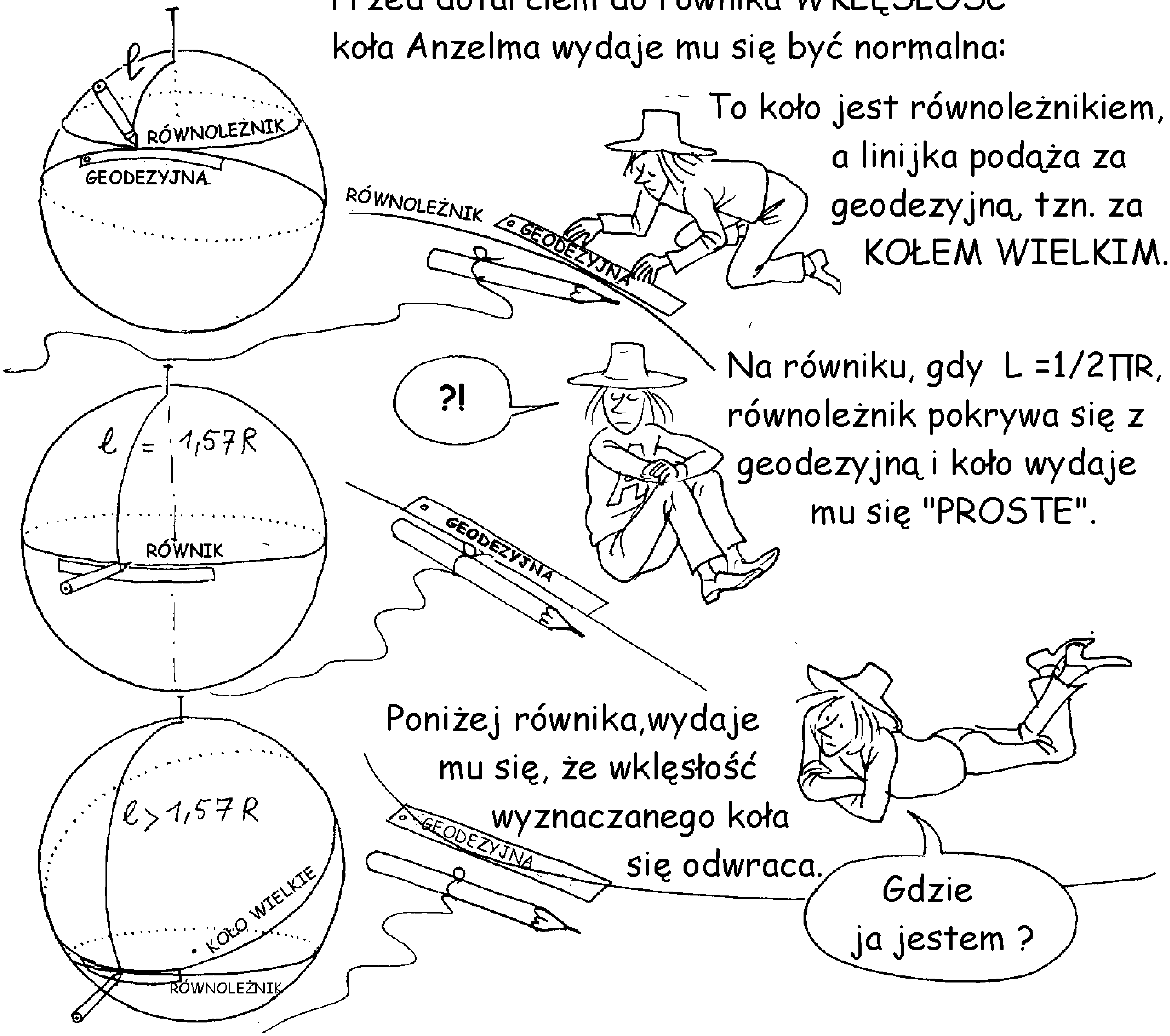
W przypadku małego pola trójkąta (w stosunku do pow. kuli) odnajdujemy Euklidesa

$A+B+C = 180°$

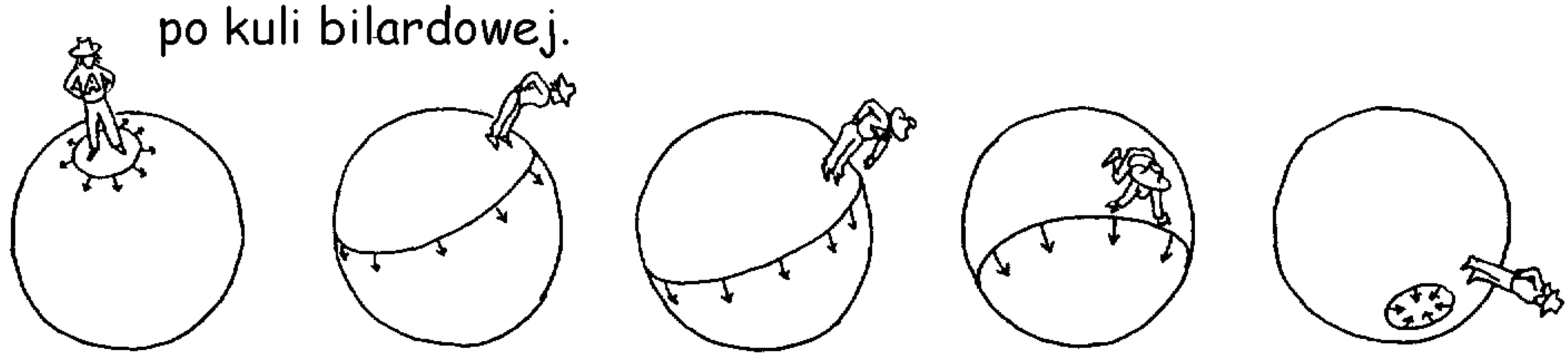


W przypadku odwrotnym, kiedy trójkąt pokrywa prawie całą powierzchnię kuli ($4 \times 3{,}1416 \times R^2$), zbliżamy się do 900°.

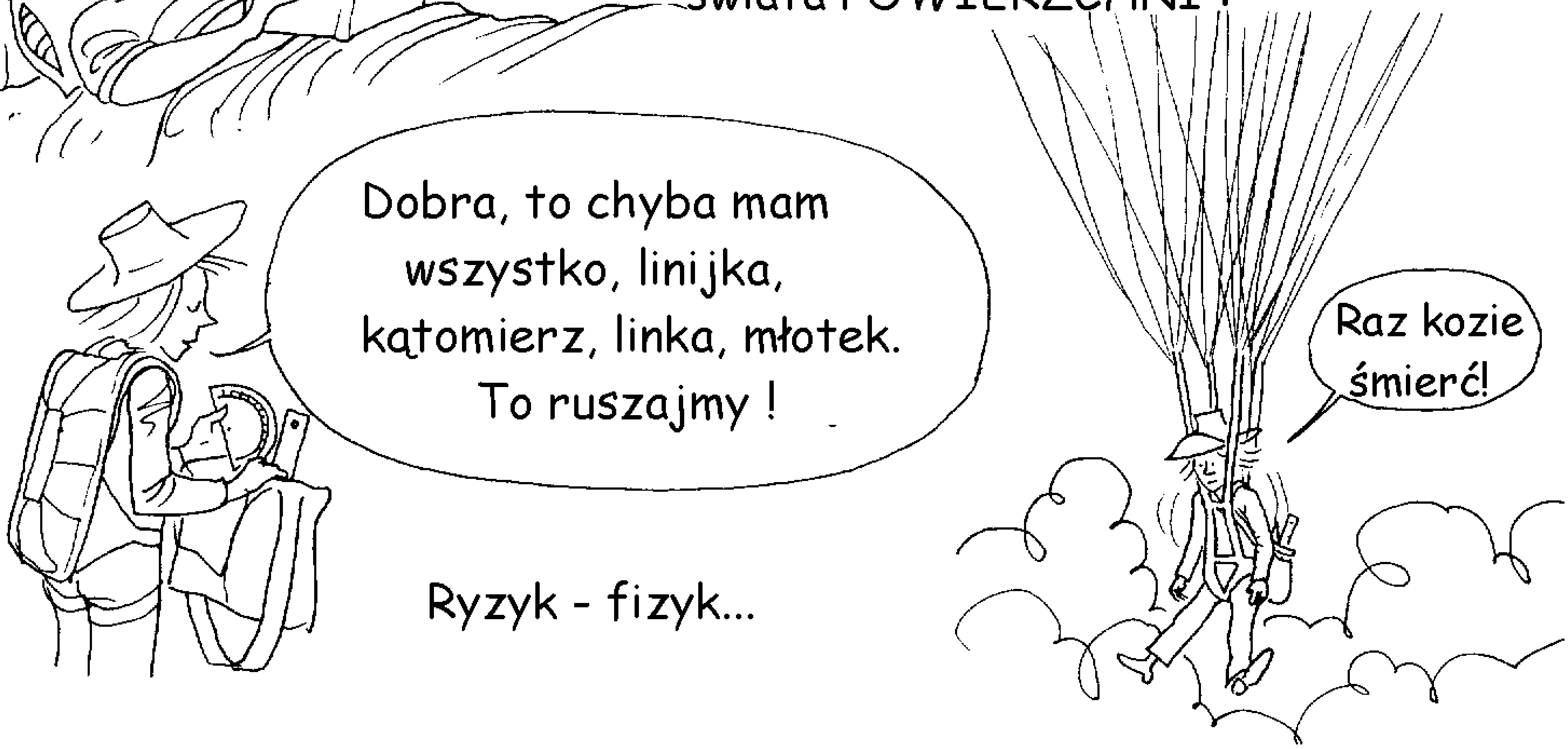

Notatka służbowa: Dwa punkty na sferze mogą byc połączone dwoma Łukami Geodezyjnymi, które składają się na JEDNO koło wielkie. Ale, jeśli te punkty N i S są antypodalne, to przechodzi przez nie nieskończona ilość GEODEZYJNYCH !... Dwie z tych "prostych sfery" definiują DWUKĄT o dwóch równych bokach i równych kątach. Suma kątów wynosi od 0° do 360°.
N
S
Debilizm totalny !
Dyrekcja
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
A teraz spróbujemy wyjaśnić, dlaczego Anzelmowi zostawało tyle płytek i ogrodzenia.
(C) jest kołem, które wyznaczał, a (γ) kołem, które MYŚLAŁ, że wyznacza. Pole było mierzone za pomocą wzoru geometrii płaszczyzny $2\pi L^2$. Rzeczywista powierzchnia zaś była równa połowie powierzchni kuli $2\pi R^2$. L jest równe 1/4 obwodu, czyli $1/2\pi R$ a stosunek tych dwóch pól wynosi $\pi^2/8=1{,}233$. Stosunek obwodów z kolei będzie równy $2\pi L/2\pi R$ czyli $\pi/2= 1{,}57$. Teraz, jeśli ktoś ma jeszcze jakieś wątpliwości, to proszę mi opakować kulę płaszczyzną !
Kurde, fałdy wychodzą
To...ziemia nie jest płaska?



Ta właściwość wyjaśnia w jaki sposób, możemy do woli, "wchodzić" lub " wychodzić" z koła bez przekraczania jego obwodu. Możemy sobie przedstawić to koło jako elastyczny pierścień przesuwany po kuli bilardowej.



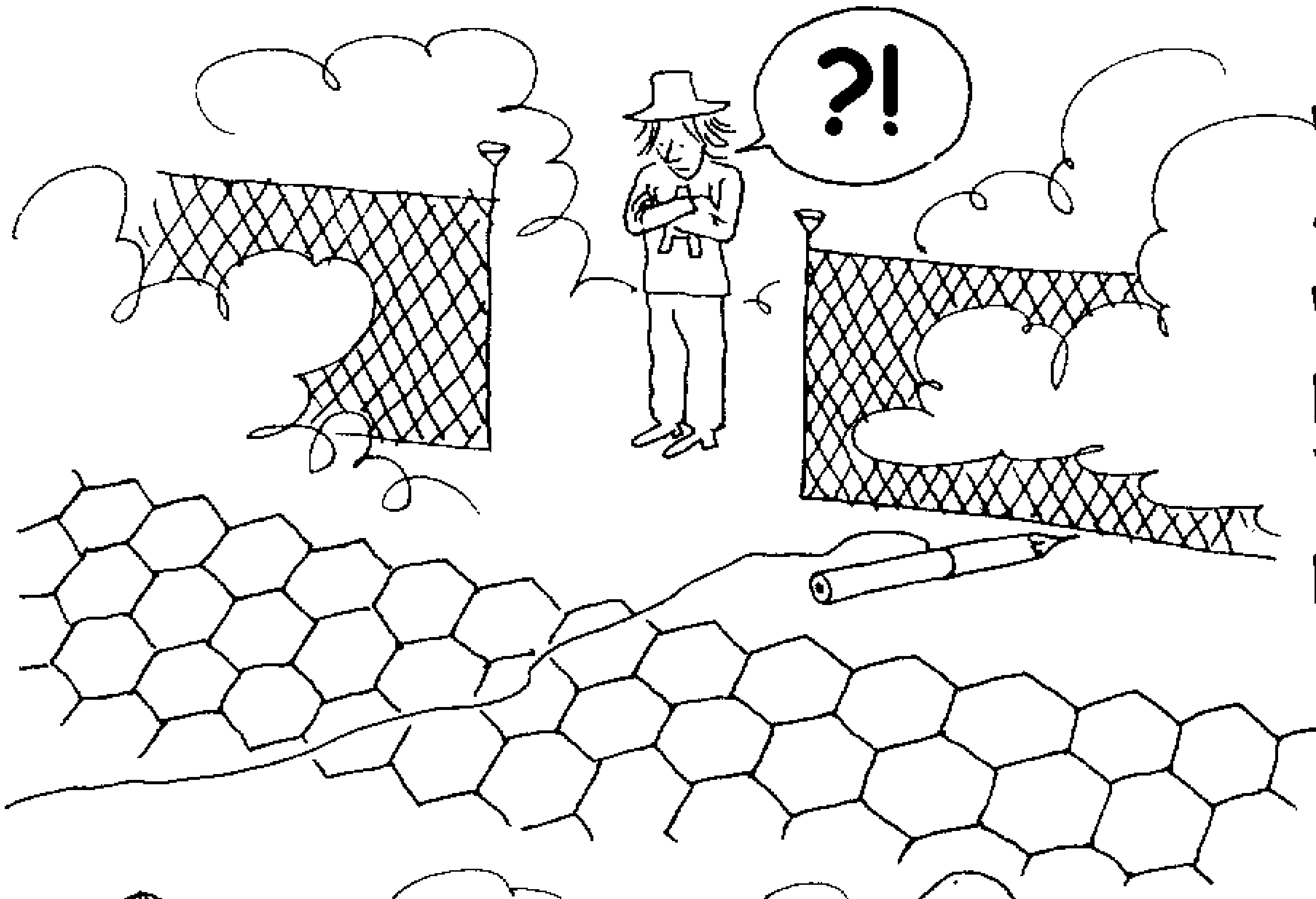
Przez pewien czas Anzelm zajął się studiowaniem takich właściwości, odkrytych przez matematyka Gauss'a (1777-1855).
Po czym postanowił udać się na eksplorację świata POWIERZCHNI :



Po wylądowaniu w nieznanym świecie, Anzelm zaczyna rozwijać nową GEODEZYJNĄ, ale tym razem :

A geodezyjna się nie zamyka...

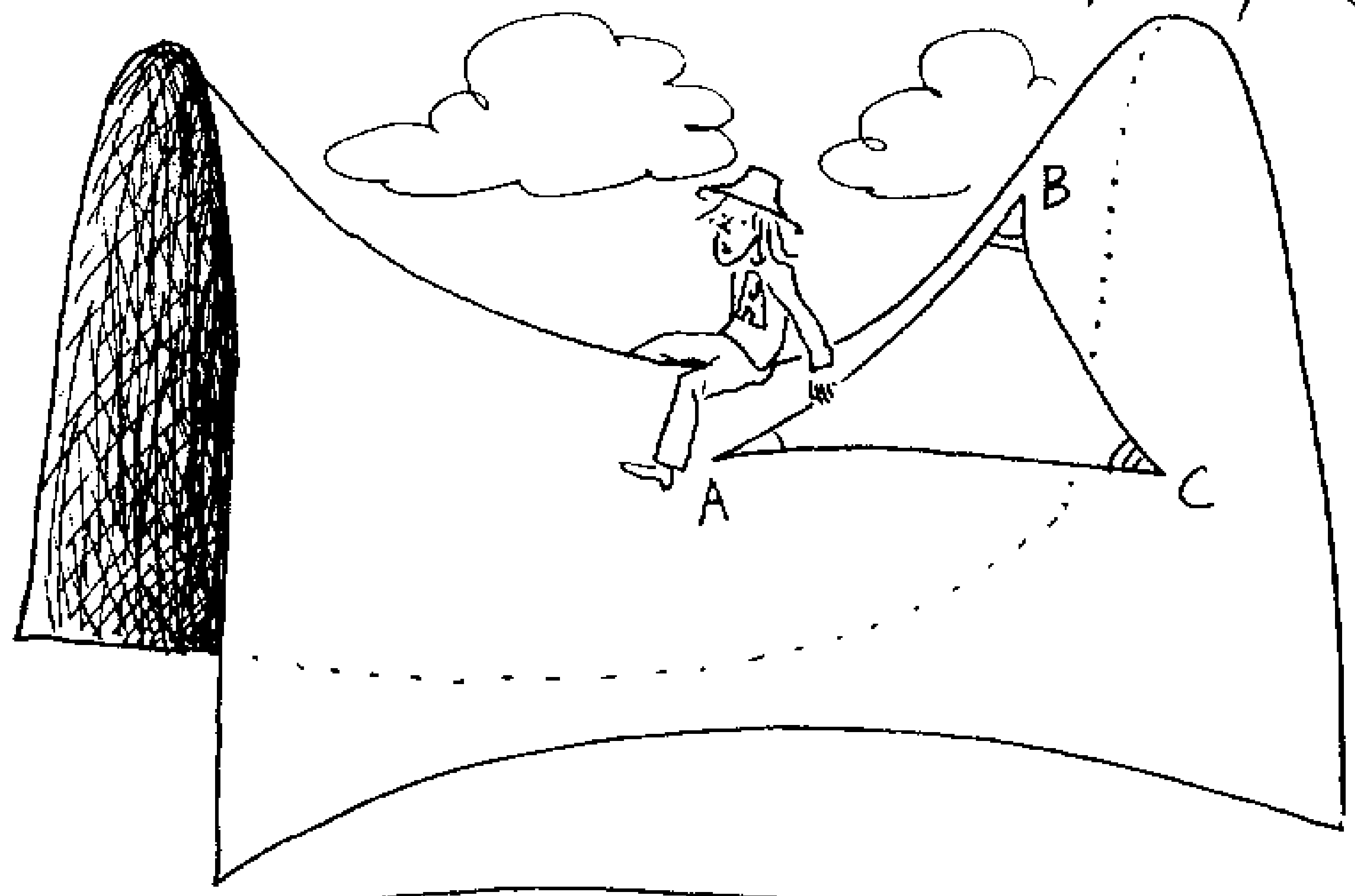
Anzelm zbudował trójkąt za pomocą trzech napiętych linek, ale suma kątów okazuje się tym razem mniejsza od 180°.

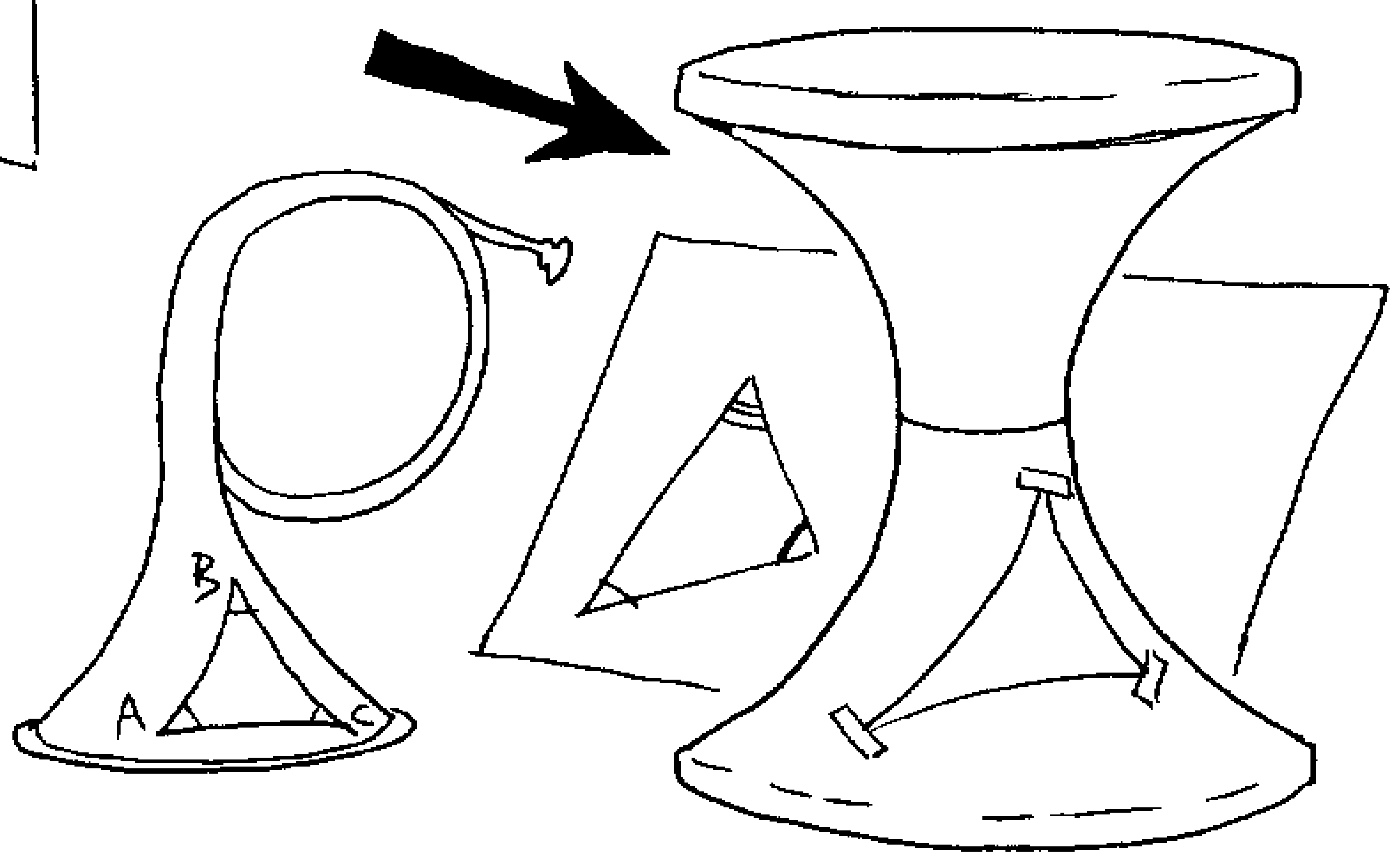


Koło to ciągle zbiór punktów w odległości L od danego punktu. Anzelm zauważą, że koło wyznaczone na tej nieznanej powierzchni, ma obwód WIĘKSZY niż $2\pi L$, a jego pole PRZEKRACZA πL^2.

Rozproszmy obłoki :

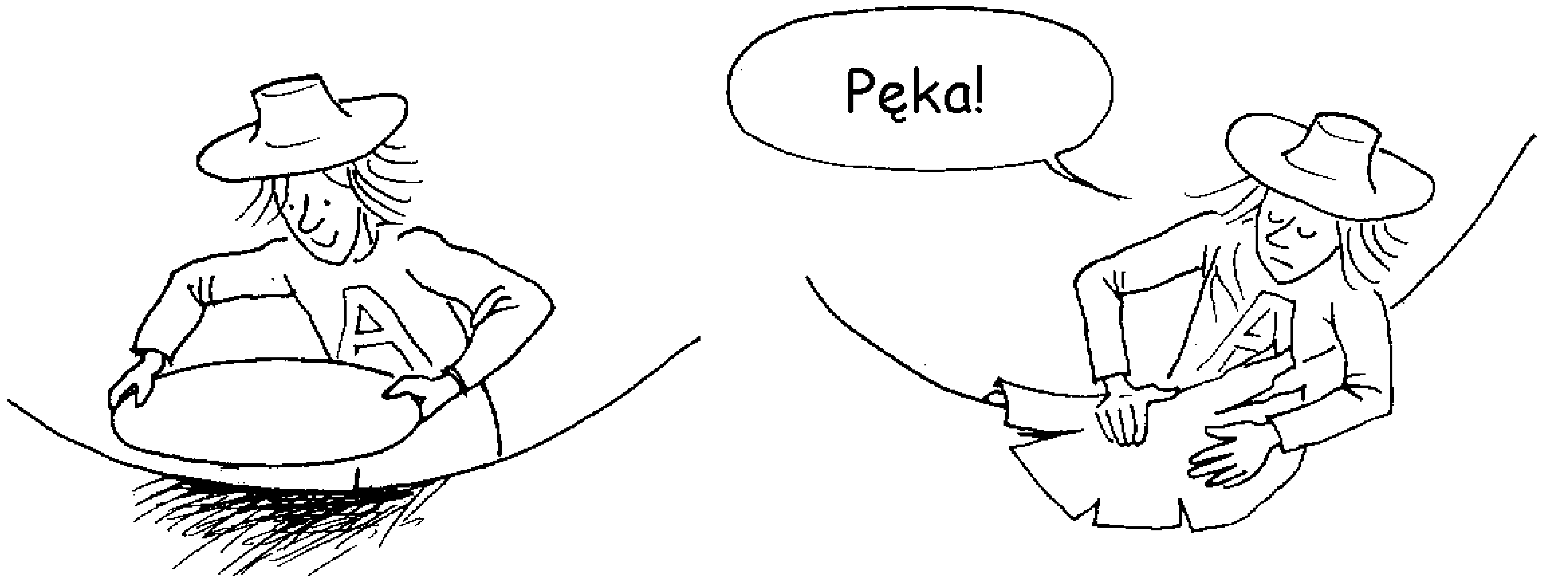
Powierzchnia, tym razem, przypomina formę przełęczy górskiej lub siodła jeździeckiego. Niektóre przedmioty także mają podobną krzywiznę: róg myśliwski czy taboret.





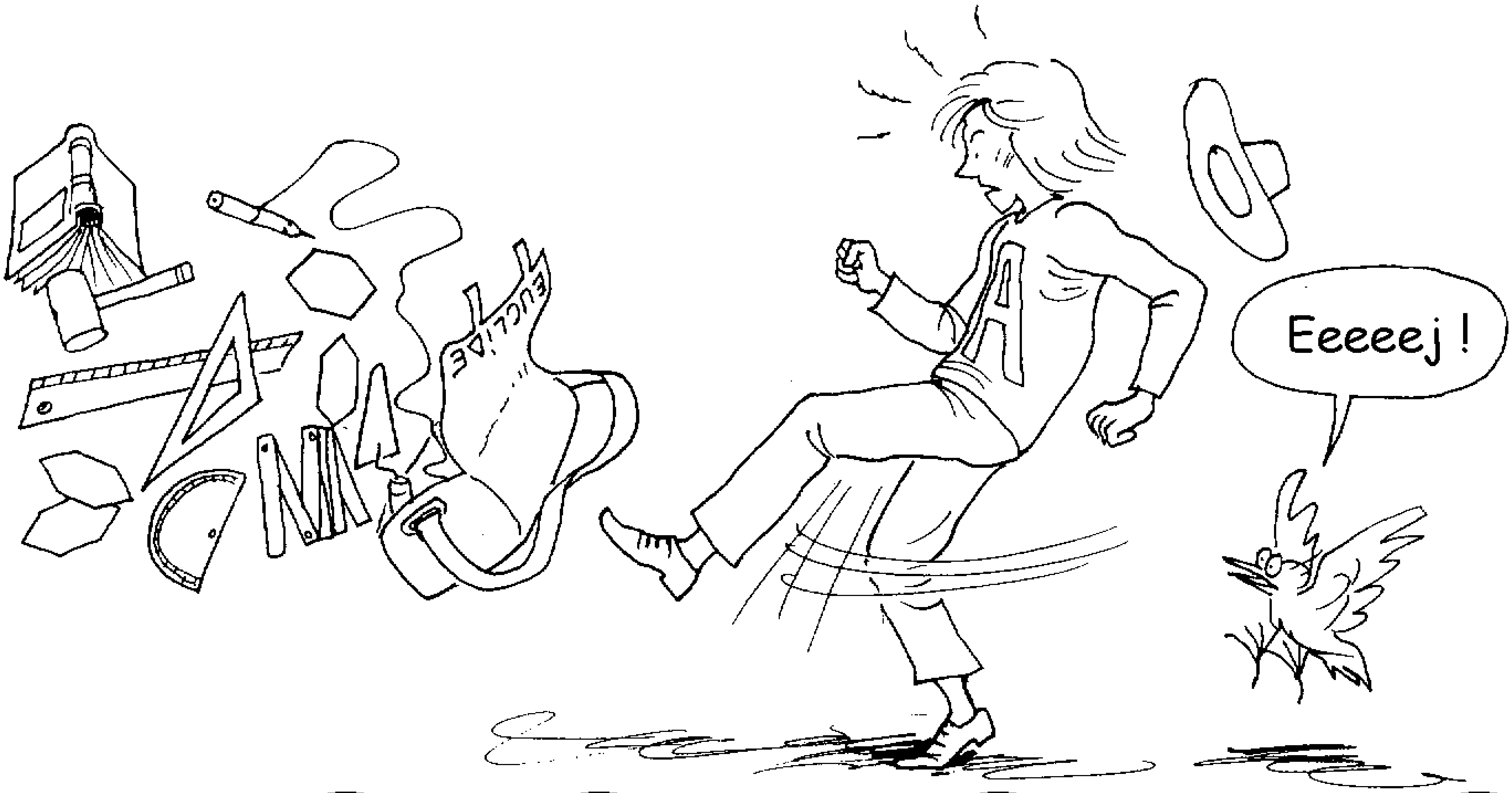
KRZYWIZNA

Powierzchnia zakrzywiona to powierzchnia, gdzie twierdzenia euklidesowe nie mają już zastosowania. Krzywizna może być DODATNIA lub UJEMNA. Na powierzchni o dodatniej krzywiźnie, suma kątów trójkąta przekracza 180°, a koło o promieniu L będzie miało pole mniejsze od πL^2 i obwód mniejszy od $2\pi L$.
I dokładnie na odwrót na powierzchni o krzywiźnie ujemnej.
Wcześniej, Anzelm próbował pokryć kulę, powierzchnię o dodatniej krzywiźnie, za pomocą płaskiego elementu. Spowodowało to powstanie fałd i zakładek. Pokrycie pow. o ujemnej krzywiźnie powierzchnią płaską również nie jest możliwe: płaski element ulega rozdarciu.
Taki test "opakowania" jest najprostszym sposobem na określenie typu krzywizny.



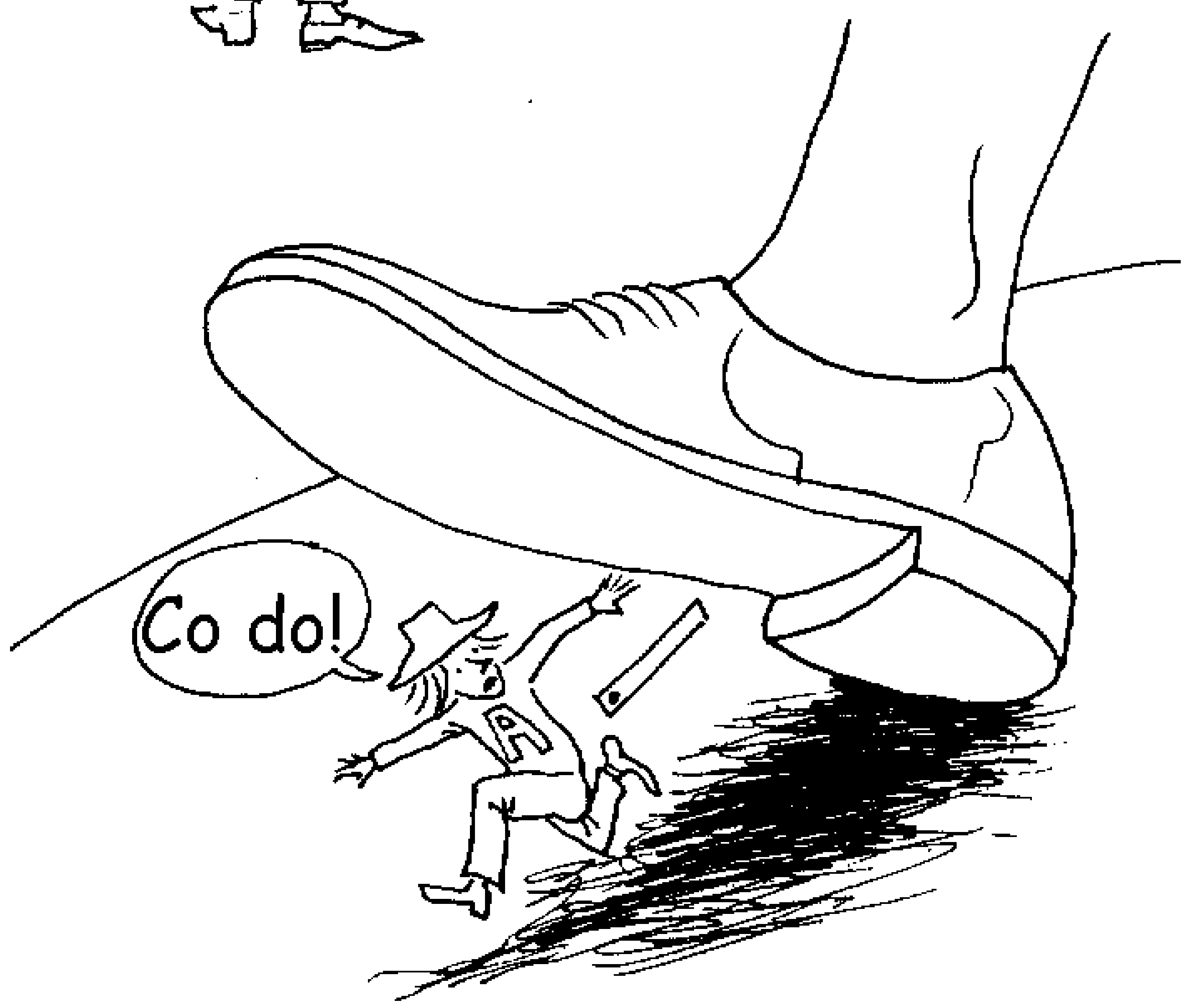
Jak widzieliśmy na poprzedniej stronie, powierzchnie mogą mieć regiony o krzywiźnie dodatniej albo ujemnej.

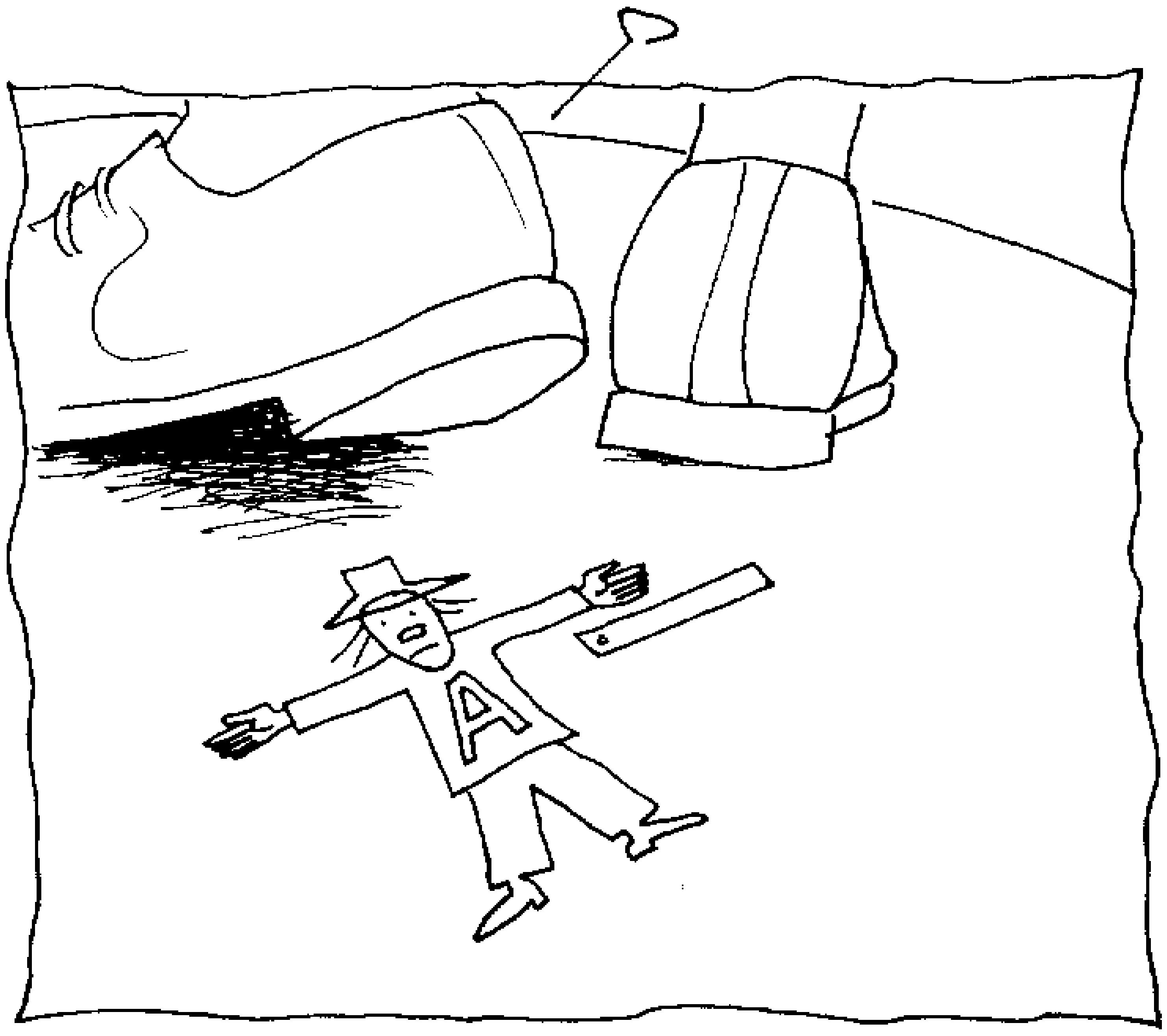

Test opakowania...
Obydwie powierzchnie dadzą się pokryć płaskim elementem !
Bez paniki, przykleję tutaj taśmą trzy gumki, tzn. trzy geodezyjne...
B
A
C
...jeszcze przeniosę geodezyjne na powierzchnię...
I rozwijam walec na PŁASKO.
!...
B
A
C
Według naszej definicji,
walec i stożek podporządkowują
się geometrii euklidesowej i są więc
POWIERZCHNIAMI PŁASKIMI !!!



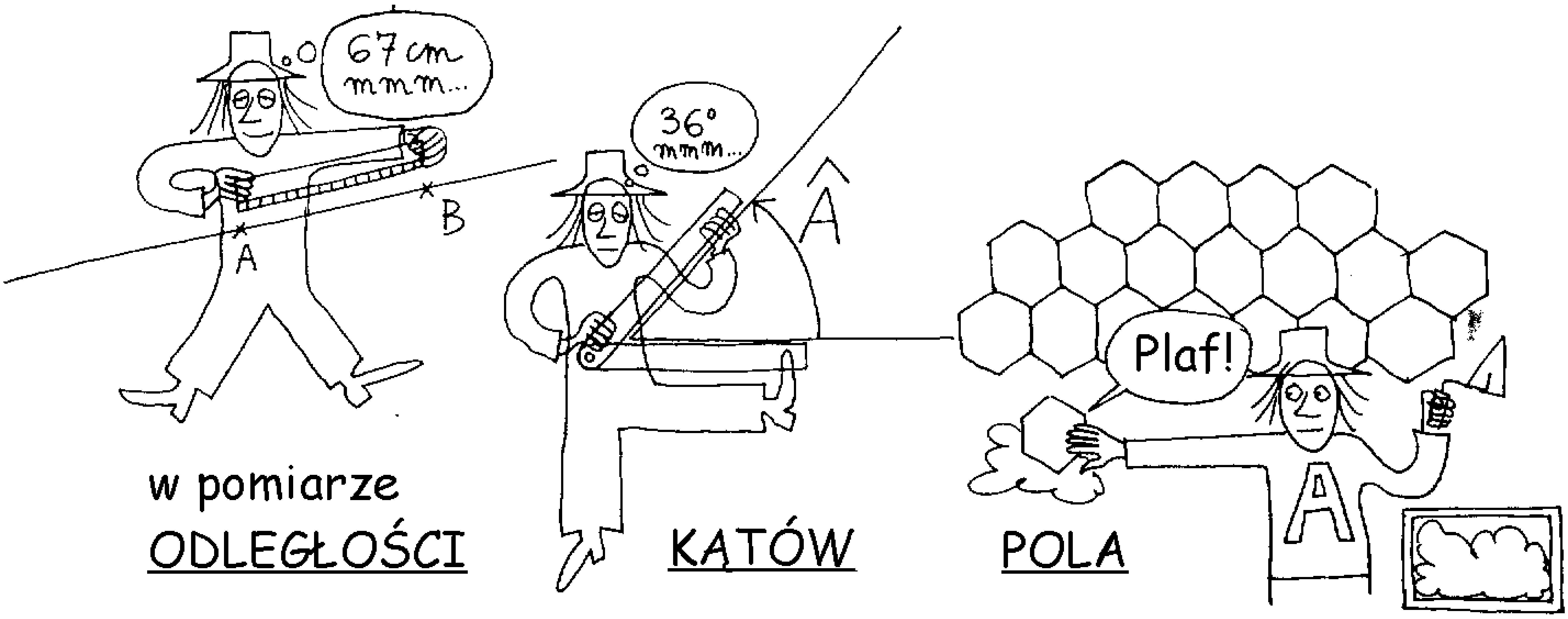
POJĘCIE PRZESTRZENI

Niedawno, obłoki i mgła nie pozwalały Anzelmowi na ogarnięcie otaczającej go PRZESTRZENI SFERYCZNEJ i na spostrzeżenie jej KRZYWIZNY. Jest jeszcze inny sposób, aby mu uniemożliwić WIDZENIE tej krzywizny: zmusić go do zanurzenia się w powierzchni, tak, aby był w niej całkowicie ZAWARTY.





Zauważmy, że ta nowa sytuacja wcale mu nie przeszkadza



w pomiarze
ODLEGŁOŚCI KĄTÓW POLA

Mimo tego, że Anzelm został uwięziony W powierzchni, to może cały czas stwierdzać krzywiznę, określać jej znak i nawet ją mierzyć, ale nie może jej ZOBACZYĆ.

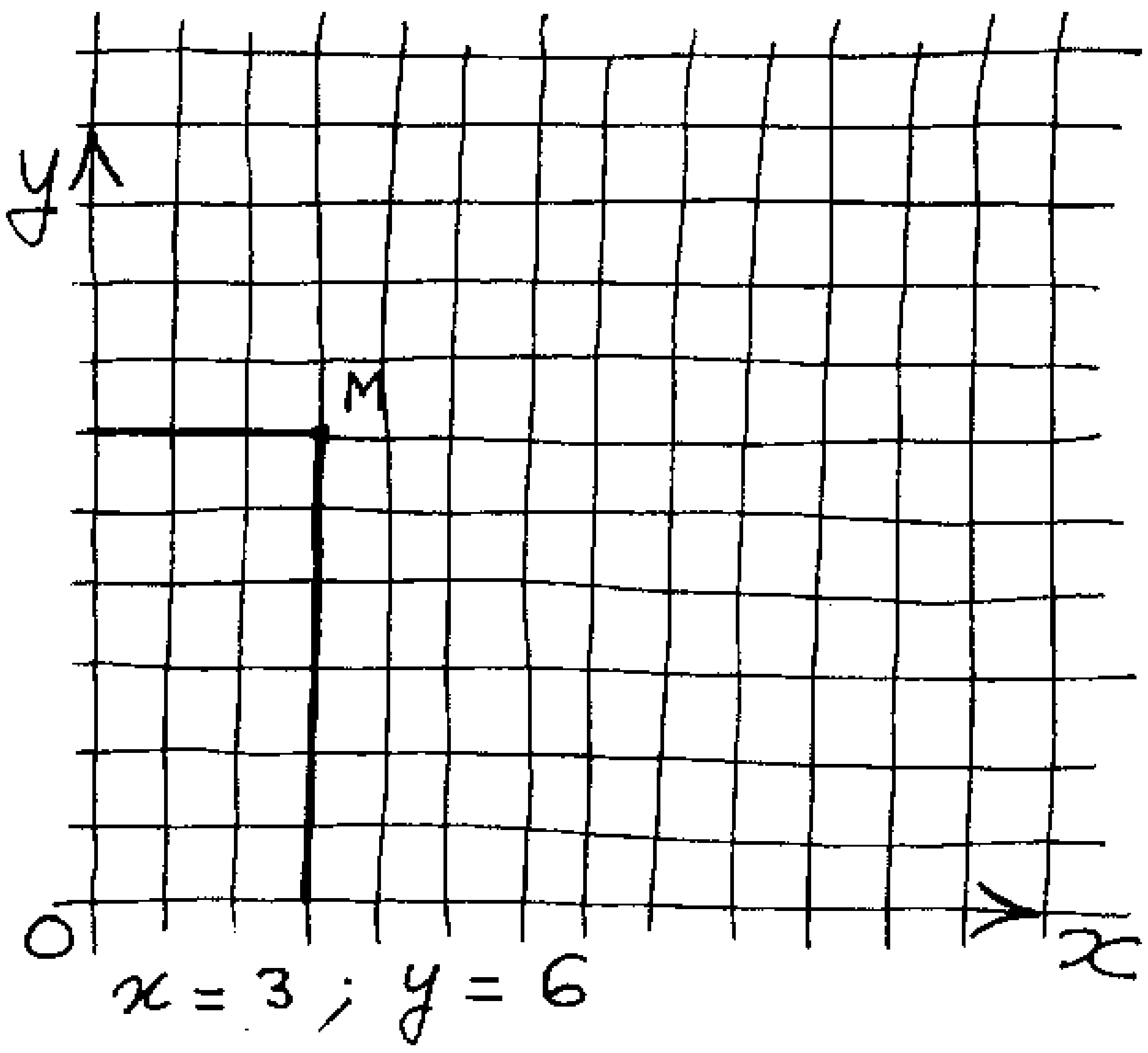
Jeśli suma kątów trójkąta jest większa od 180° to krzywizna jest dodatnia i Anzelm może obliczyć lokalny promień krzywizny posługując się wzorem: $A+B+C = 180\left(1 + \frac{P}{3{,}14R^2}\right)$ w stopniach, gdzie P jest polem trójkąta.

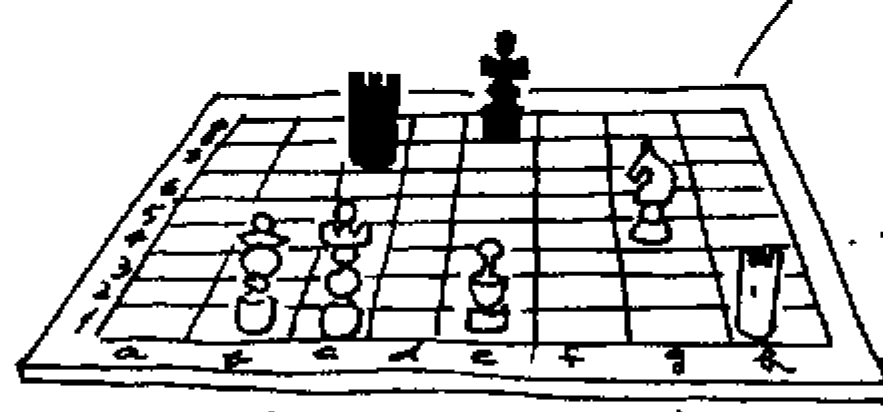
W przypadku krzywizny ujemnej, promień może być obliczony ze wzoru: $A+B+C = 180\left(1 - \frac{P}{3{,}14R^2}\right)$, ale tutaj nie ma on normalnego sensu fizycznego.

Zauważmy, że PŁASZCZYZNA może być uważana za powierzchnię o nieskończonym promieniu krzywizny i w tym przypadku odnajdujemy klasyczne twierdzenia euklidesowe.

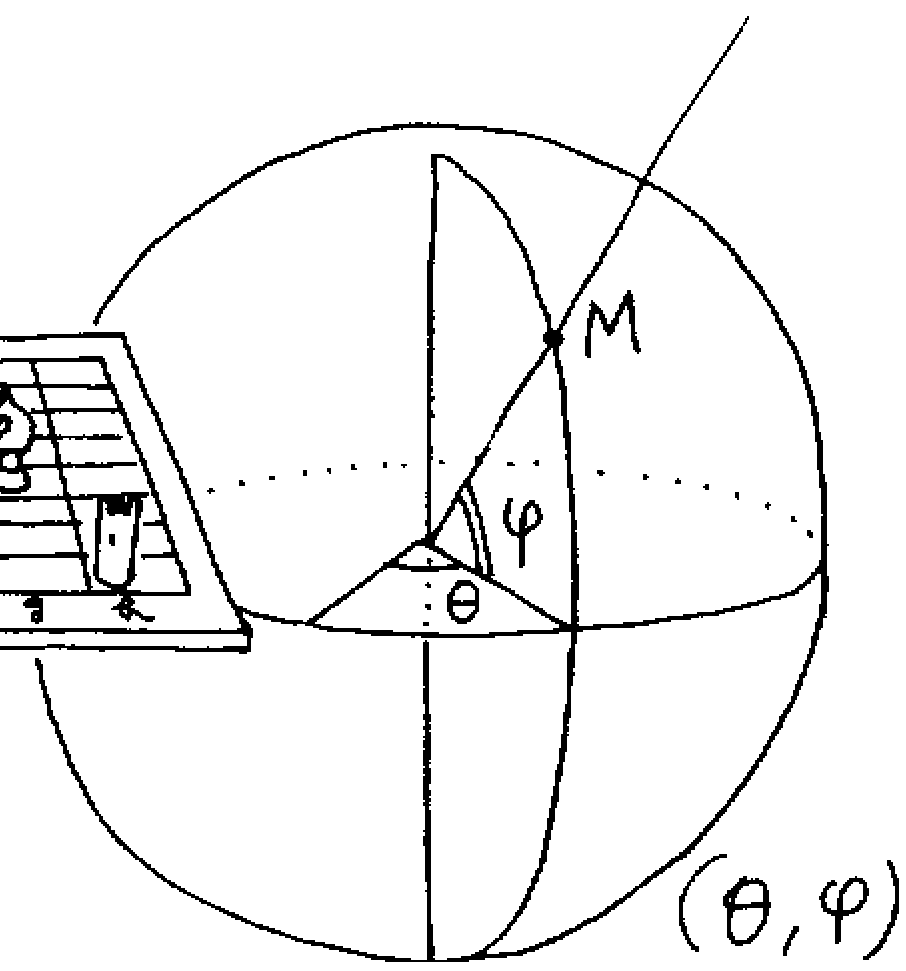
KONCEPCJA WYMIARU

Ilość wymiarów to po prostu ilość wartości, współrzędnych, które trzeba podać, aby zdefiniować PUNKT w jakiejkolwiek przestrzeni.
Powierzchnie są przestrzeniami o dwóch wymiarach. Wartości, które służą do oznaczania położenia to długości, liczby, kąty...



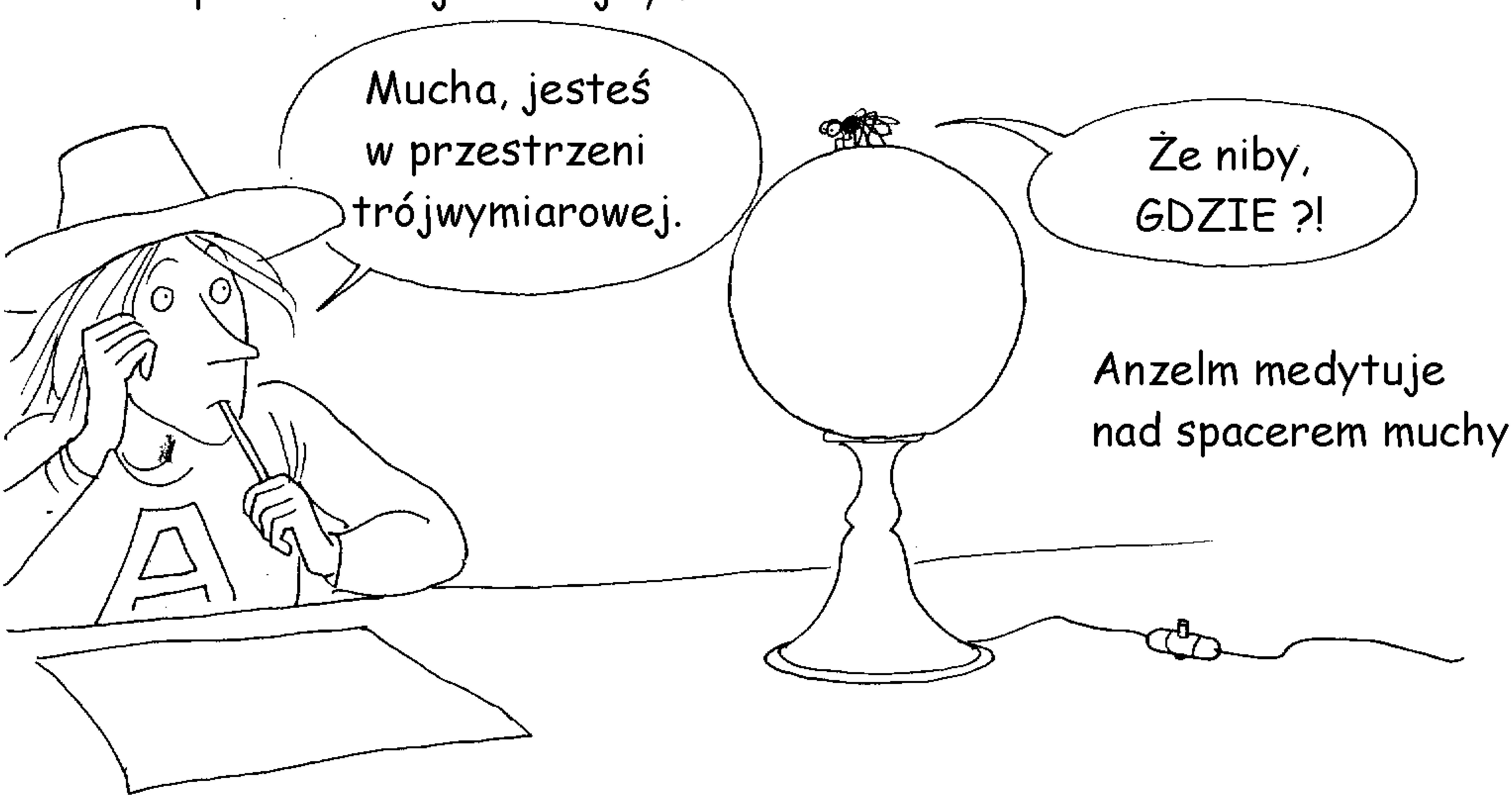


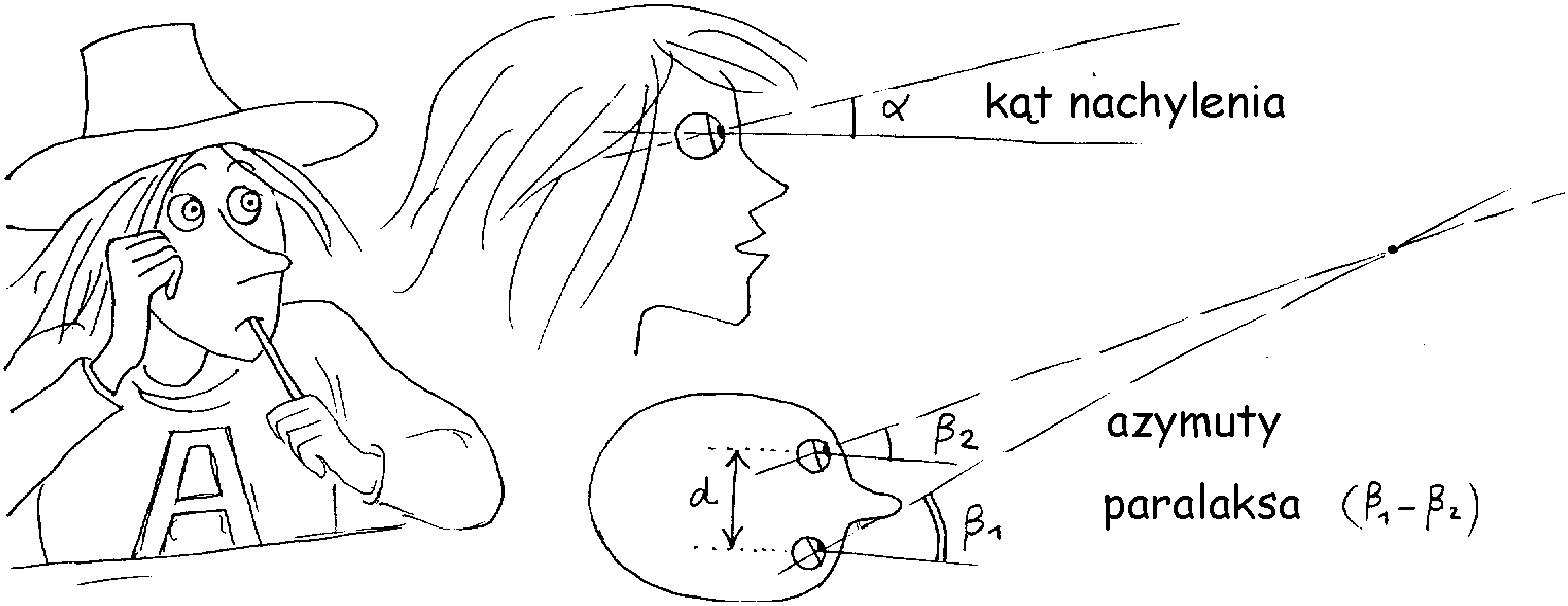
koń na g 4



długość, szerokość

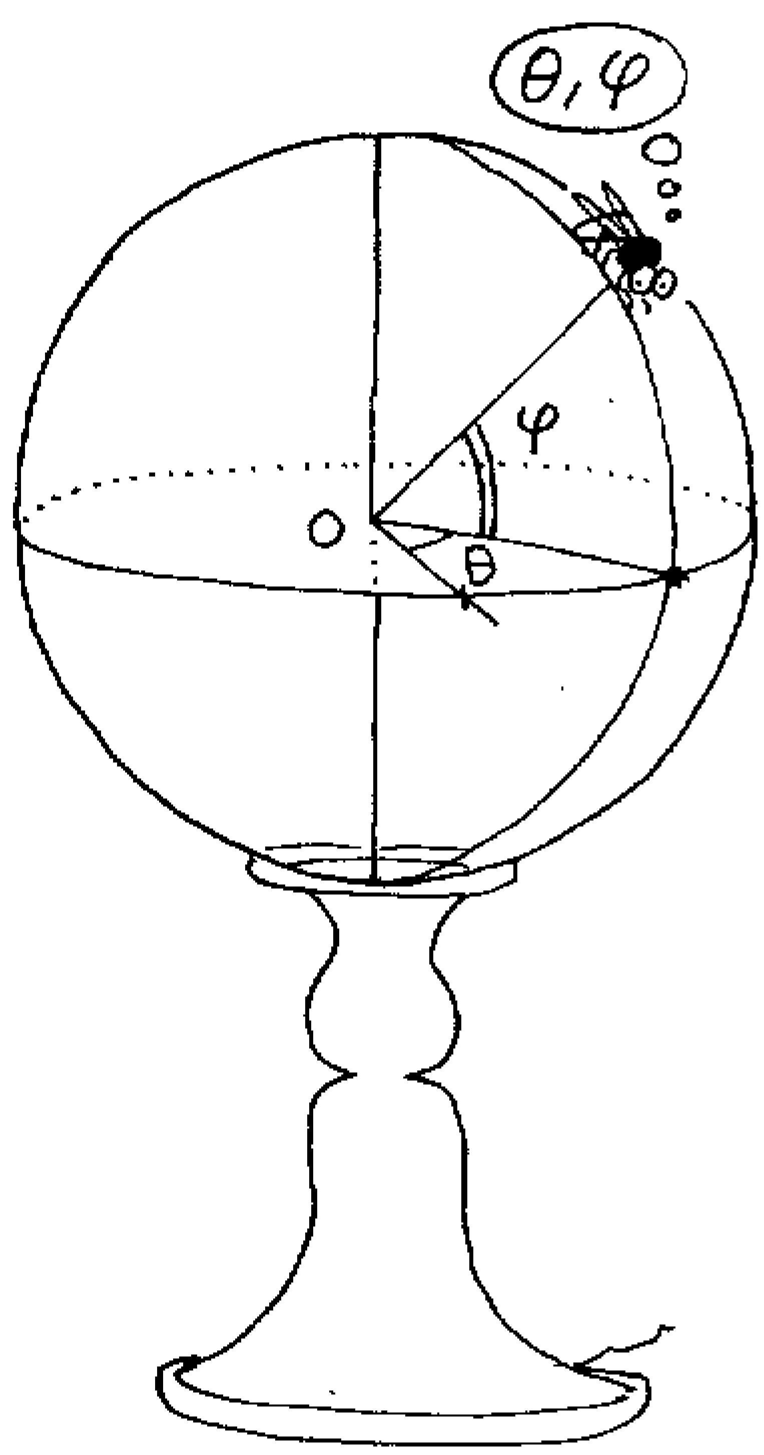
Jeśli nie uwzględnimy czasu, to mówimy, że nasza przestrzeń jest trójwymiarowa.





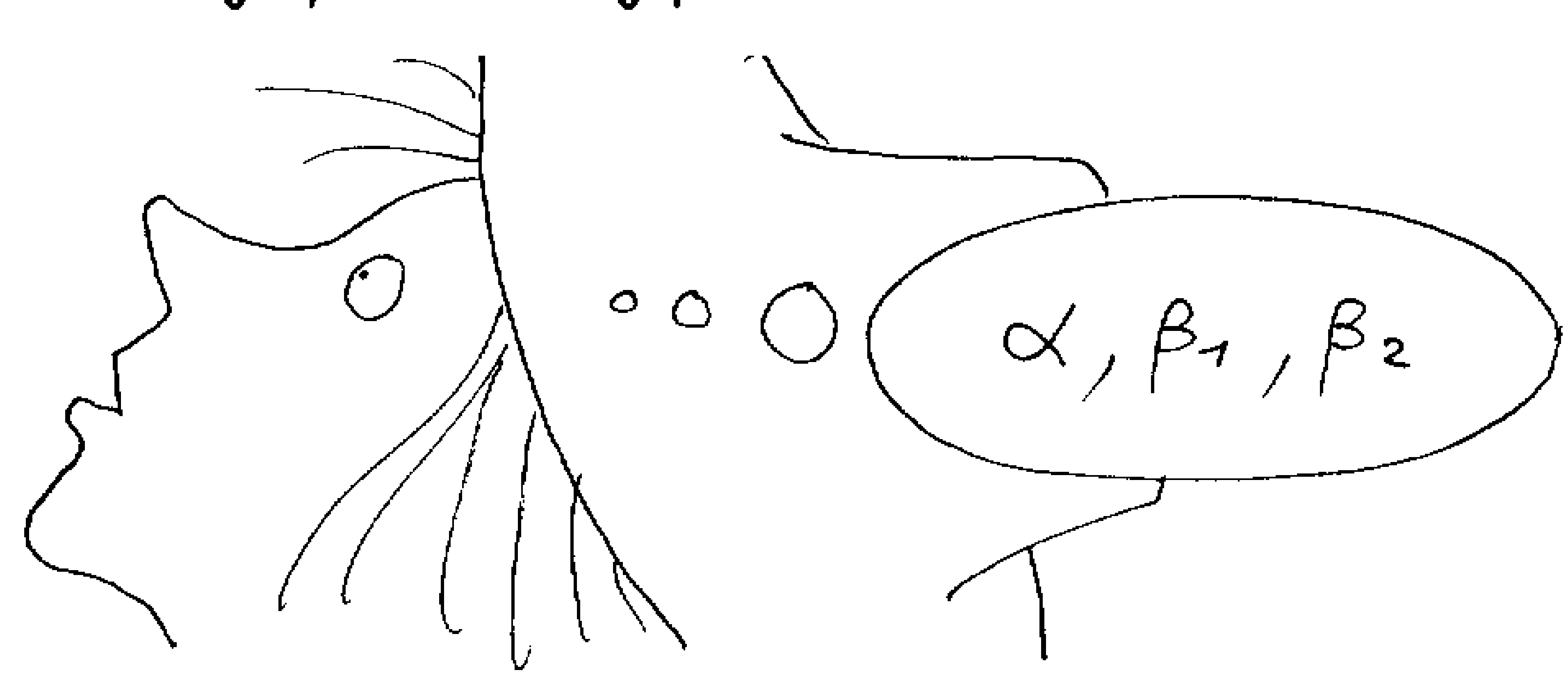
Anzelm ustala pozycję przedmiotów za pomocą swojej głowy. Pozycja punktu jest wyznaczana przez trzy KĄTY : kąt nachylenia i kąty azymutalne jego oczu : β_1 i β_2 . Różnicę kątową $(\beta_1 - \beta_2)$ nazywa się paralaksą. Mózg Anzelma dekoduje tę paralaksę i przekształca ją w odległość.

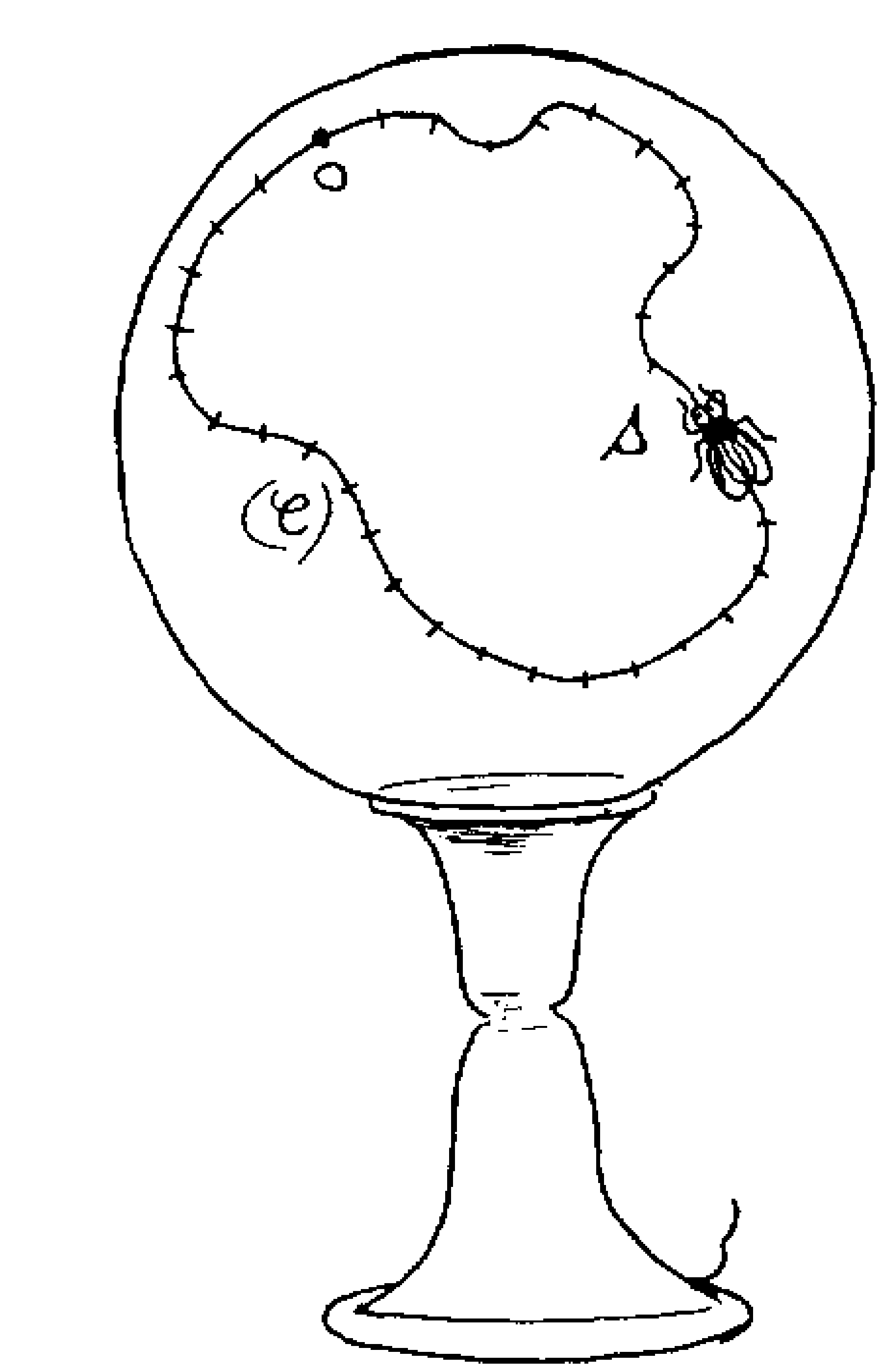
ZANURZENIE



Mucha porusza się po sferycznej powierzchni lampy, gdzie jej pozycja na tej dwuwymiarowej powierzchni może być określona za pomocą tylko dwóch kątów : θ, φ , długości i szerokości.

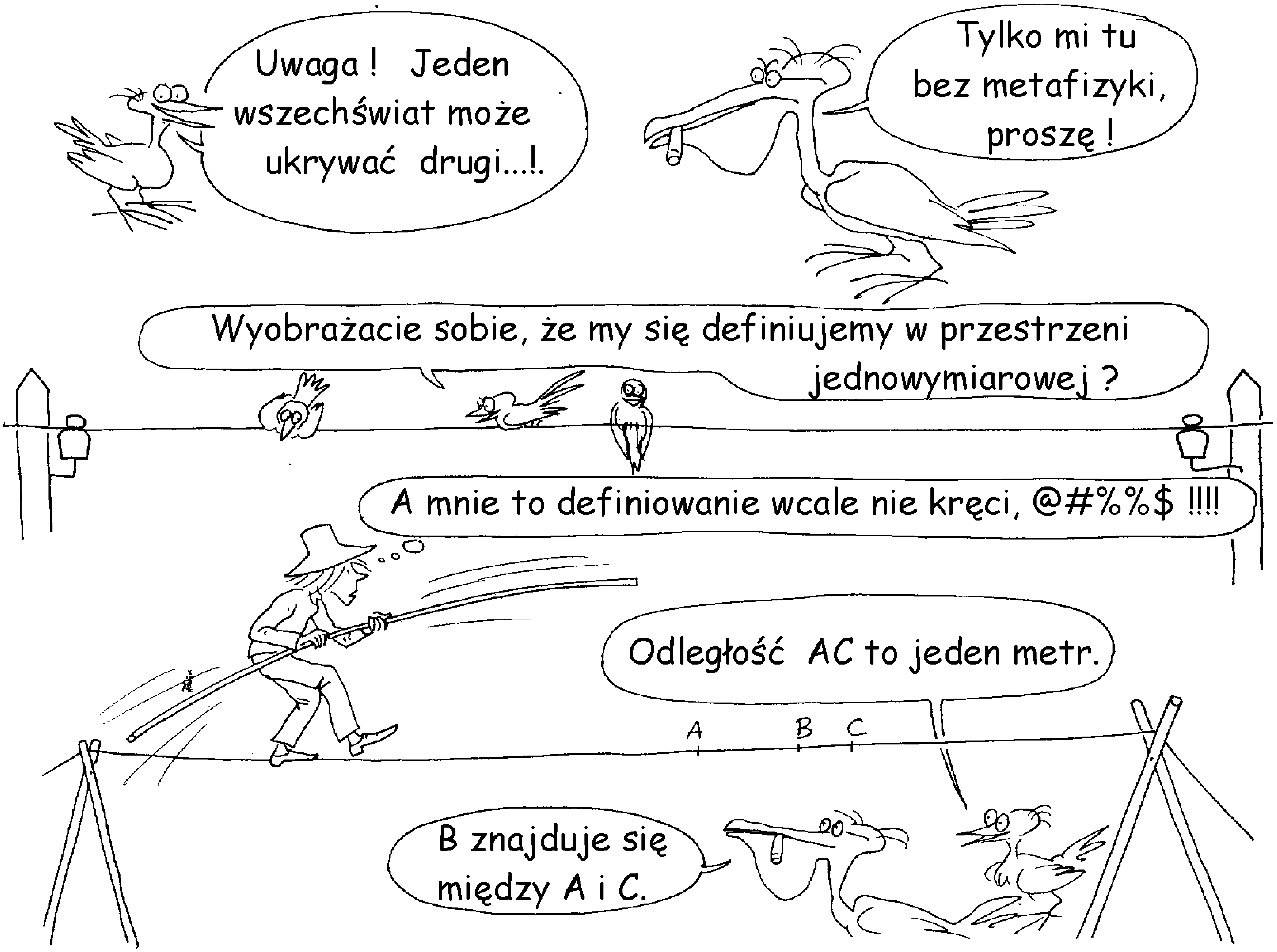
Można powiedzieć, że ta dwuwymiarowa powierzchnia jest ZANURZONA w naszej trójwymiarowej przestrzeni.

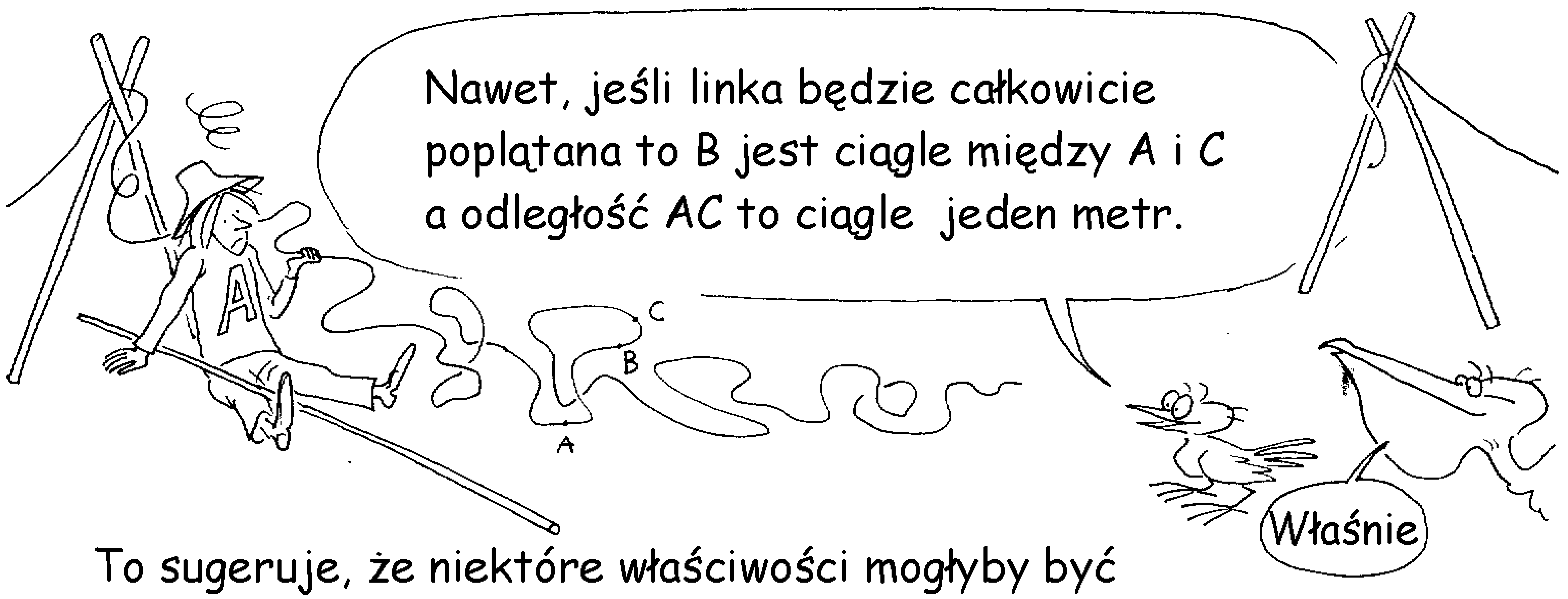




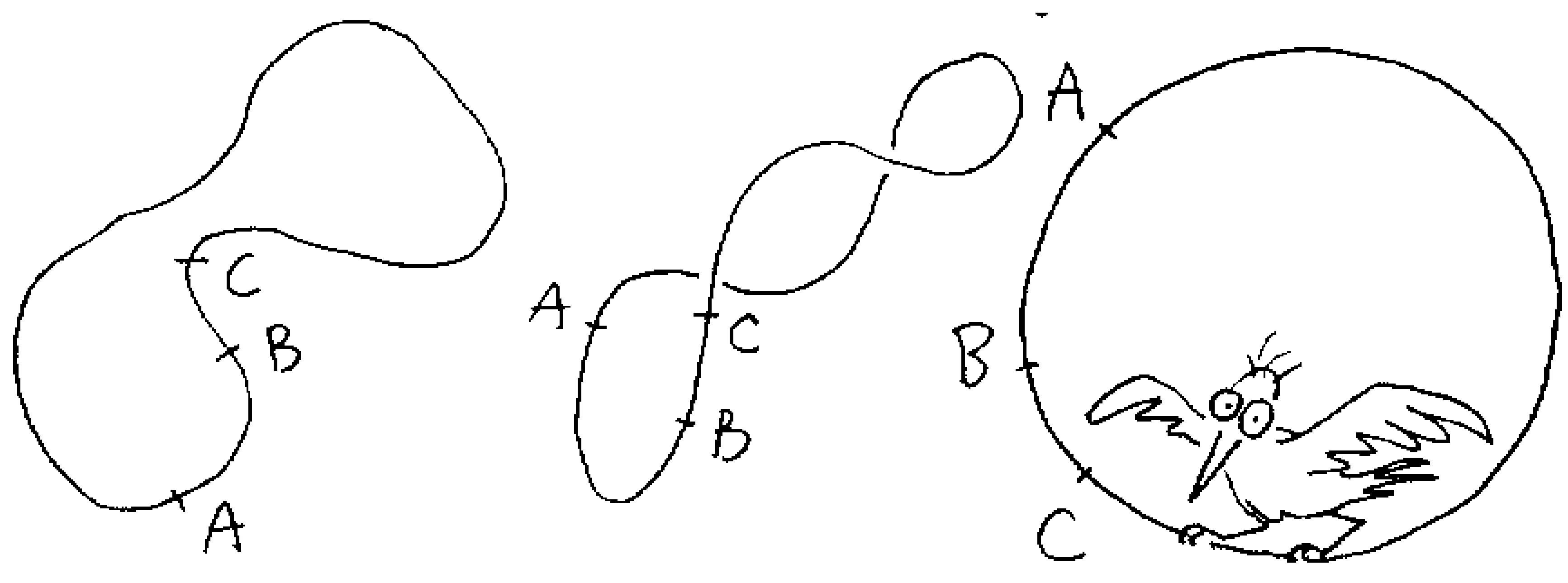
Załóżmy teraz, że mucha porusza się po krzywej, leżącej na tej sferze. Pozycja muchy może być określona tylko przez jedną współrzędną (odległość s od punktu początkowego). Krzywa reprezentuje tutaj przestrzeń jednowymiarową. Ta przestrzeń jest zanurzona w przestrzeni dwuwymiarowej-sferze, która z kolei jest zanurzona w przestrzeni trójwymiarowej.

Podobnie więc, nasza przestrzeń mogłaby być zanurzona w przestrzeni o większej ilości wymiarów i nie mielibyśmy o niej żadnego pojęcia...





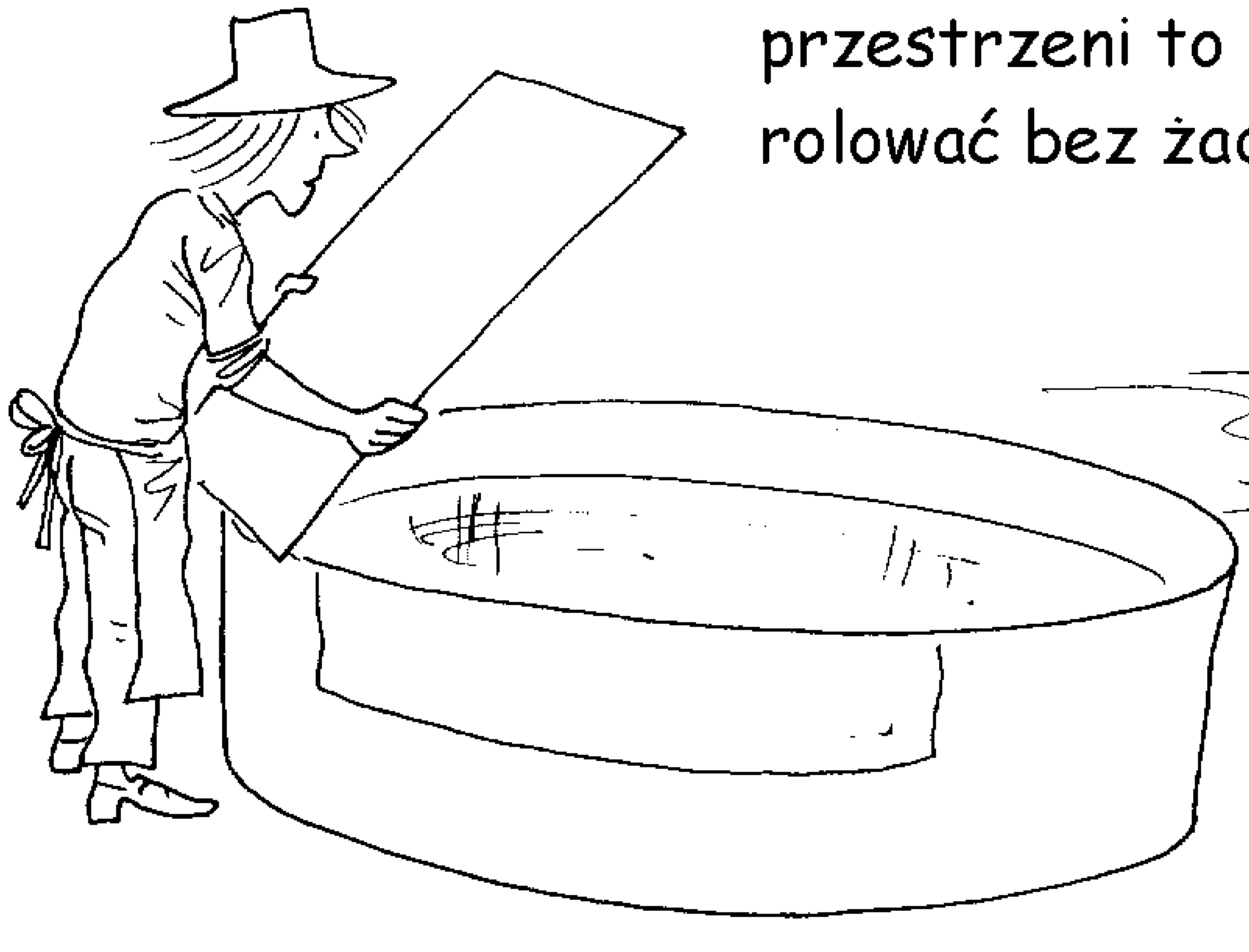
To sugeruje, że niektóre właściwości mogłyby być niezależne od sposobu zanurzenia.



Oto kilka różnych sposobów ZANURZENIA ZAMKNIĘTEJ KRZYWEJ w zwykłej przestrzeni. To ZAMKNIĘCIE jest właściwością niezależną od sposobu zanurzenia.

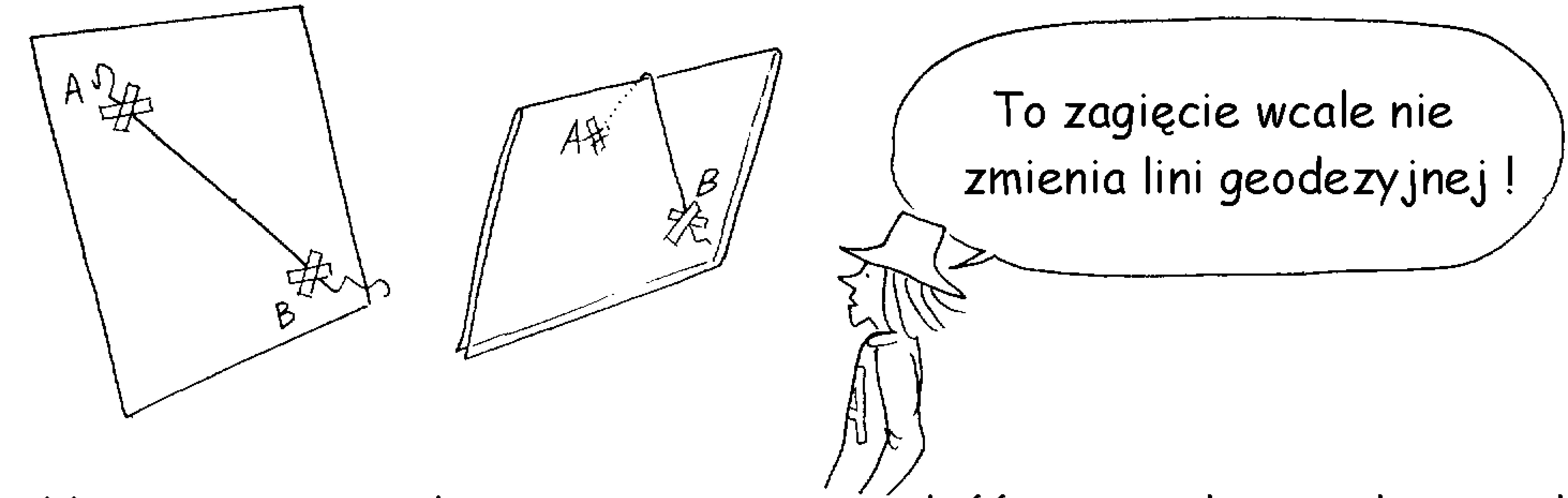
Należy tylko uważać, żeby nie skrócić ani nie wydłużyć linki i nie zmienić ODLEGŁOŚCI między punktami na lince.
A teraz zrobimy kilka prób ZANURZENIA POWIERZCHNI w normalnej trójwymiarowej przestrzeni.

Kiedy ZANURZAMY PŁASZCZYZNĘ w takiej przestrzeni to możemy ją przemieszczać i rolować bez żadnych zmian w jej GEOMETRII.

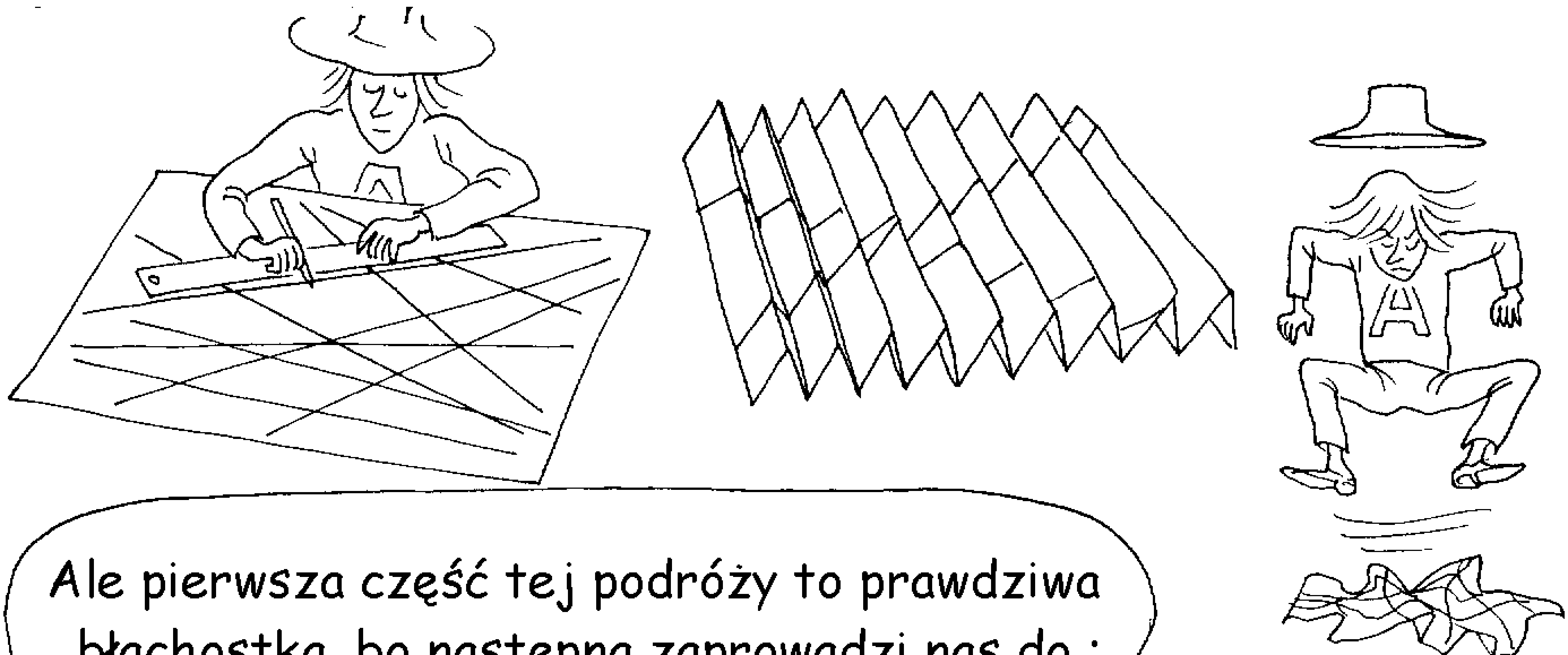


Widzieliśmy wcześniej, że przekształcenie płaszczyzny w walec nie zmienia jej geodezyjnych ani jej kątów.
Podobnie, arkusz falistej blachy zachowuje ciągle geometrię PŁASKĄ, EUKLIDESOWĄ.
Mieszkaniec takiej dwuwymiarowej przetrzeni nia miałby żadnej świadomości o translacjach, obrotach i falowaniach, ktore są tylko różnymi sposobami zanurzenia w przestrzeni trójwymiarowej.

Weźmy jakiś płaski arkusz i złóżmy go na pół :



Narysujmy, na arkuszu papieru, pewną ilość prostych - geodezyjnych, następnie, pomnijmy go. Widoczne linie, na zagiętym lub pomiętym papierze są ciągle jego geodezyjnymi.




Pan Lantarlu ?
Tak...
Reprezentuję firmę Euklides. Wiemy, że miał pan... pewne... ..eee... problemy z naszym materiałem.
EUCLIDE C^ie
Mam tutaj kilka nowości, króre tym razem powinny pana zadowolić
Doobra, pokaż pan
Przyszłość jest trójwymiarowa. Widzi pan, geometria dwuwymiarowa jest trochę... ...przestarzała
PŁYN KOSMICZNY
KOSMOTEST
Nasz najnowszy sprzęt do geodezyjnych...
... składa się ze sztywnych tyczek, które idealnie łączą się ze sobą.
Co panu nie pozwoli na jakiekolwiek zboczenie w jakimkolwiek kierunku, ale zagwarantuje poruszanie się wyłącznie PROSTO !


Tutaj farba do pomiaru pola, dokładnie 100 gramów na metr kwadratowy.
Sprytne...
Do pomiaru objętości, użyje pan tego gazu, licznik KOSMOTESTU pokaże bezpośrednio objętość.
I proszę pamiętać : powierzchnia sfery : $4\pi L^2$, a objętość : $4/3\pi L^3$.
Jasne
EUKLIDES
Co za życie!
Anzelm wylądował, tym razem, w przestrzeni 3-wymiarowej, gdzie będziemy mu towarzyszyć w dalszej eksploracji.

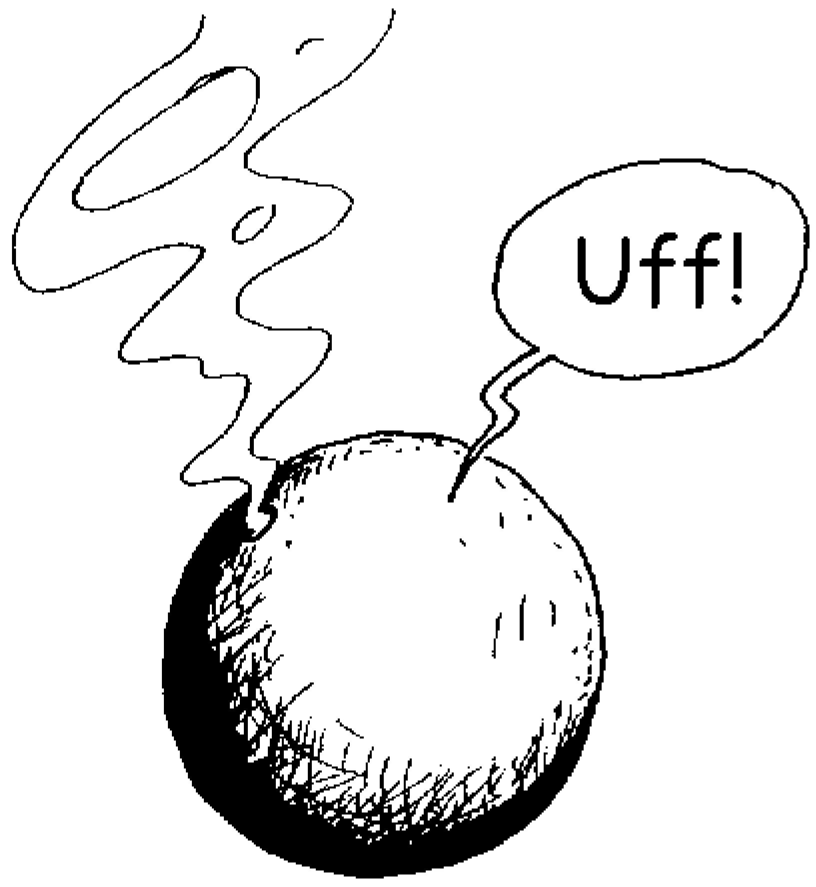

Świetny sprzęt,
a każdy element ma
dokładnie jeden metr.
Po jakimś czasie i po złożeniu
sporej ilości elementów...
Kurde, znowu się zaczyna!
Moja geodezyjna się
zamyka na sobie samej!
Zamknięta przestrzeń 3-wymiarowa ?
Szczyt
wszystkiego
Po posiłku na
przelatującej asteroidzie
Anzelm
postanawia
powrócić do metody
pomiaru kątów.
EUCLIDES
Tak jak wcześniej
użyję trzech
GEODEZYJNYCH
do konstrukcji
TRÓJKĄTA.


?!?
Geodezyjne są świetnie dopasowane ale suma moich trzech kątów przekracza 180° !!
Ok...
KOSMOTEST
FSCHHHHHHHH
No to nadmuchamy taką jedną i zmierzymy jej powierzchnię i objętość.
Sfera to zbiór punktów w odległości L od danego punktu N.
A powierzchnia mniejsza od 4πL².
No to już objętość jest mniejsza od 4/3πL³.
I znowu dałem się zrobić w balona.

Anzelm zwiększa jeszcze promień sfery...

Po dalszych próbach...

Jeszcze później...

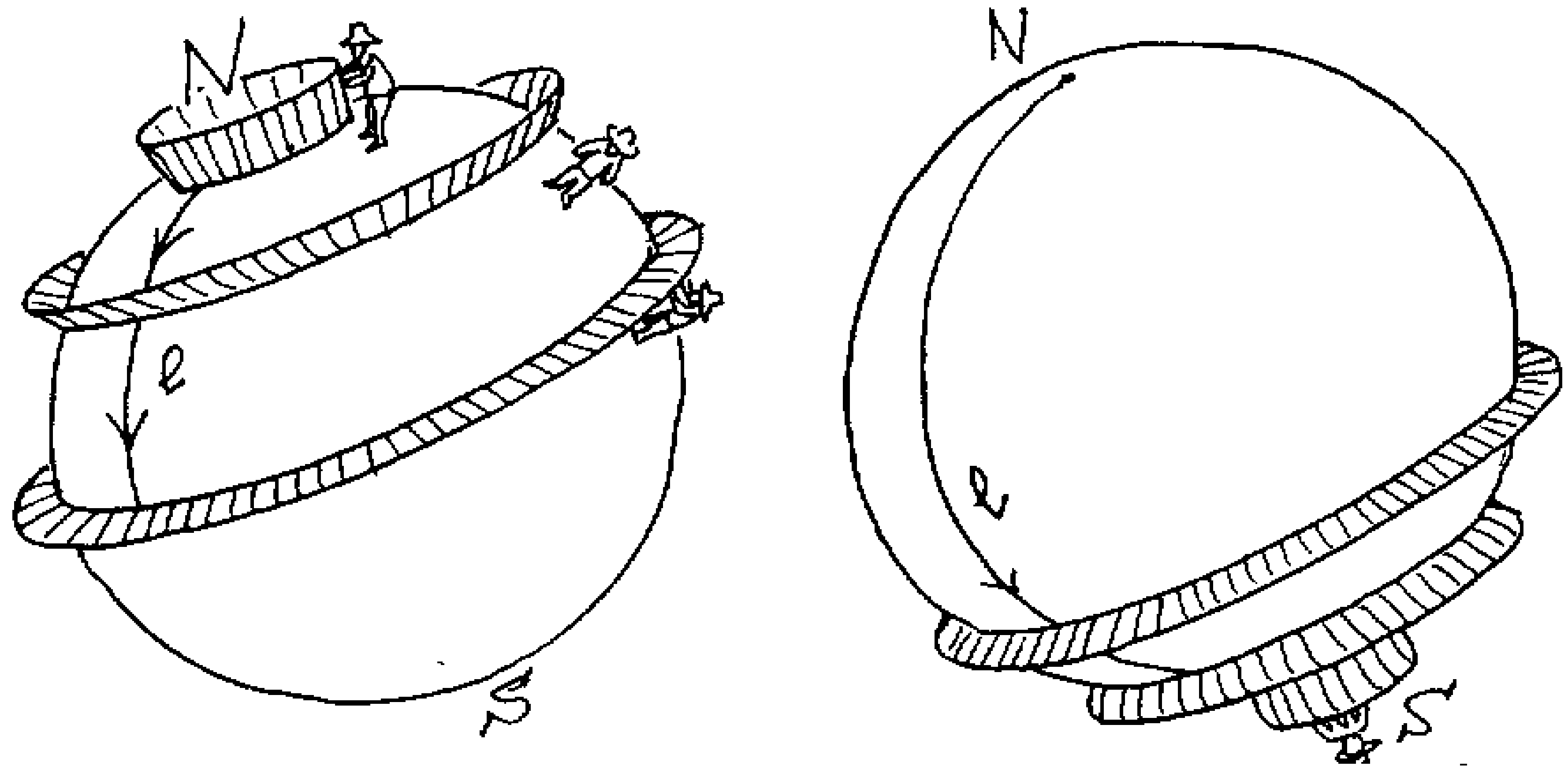


W taki oto sposób, Anzelm pompując balon w trójwymiarowej przestrzeni znalazł się w jego...WNĘTRZU !

A gdyby w porę nie zamknął dopływu gazu to zginął by w środku tak, jak wcześniej został uwięziony w ogrodzeniu (str. 13).

Mimo najlepszych chęci nie da się tutaj POKAZAĆ KRZYWIZNY tej trójwymiarowej przestrzeni. Jej geodezyjne zamykają się, a jej objętość to tylko SKOŃCZONA ilość metrów sześciennych. Podobnie jak zamknięta powierzchnia naszej planety mająca ograniczoną ilość km kwadratowych. Suma kątów trójkąta w tej przestrzeni jest większa niż 180° a żeby ZOBACZYĆ jej krzywiznę, należałoby po prostu postrzegać w 4-tym wymiarze.

Możemy zawsze stwierdzić, że nasz trójwymiarowy WSZECHŚWIAT jest hyperpowierzchnią zanurzoną w czterowymiarowej przestrzeni, która z kolei jest zawarta w przestrzeni o pięciu wymiarach, itd.. Ale w dzisiejszych czasach, opowiadanie takich rzeczy nie wydaje się taktowne .

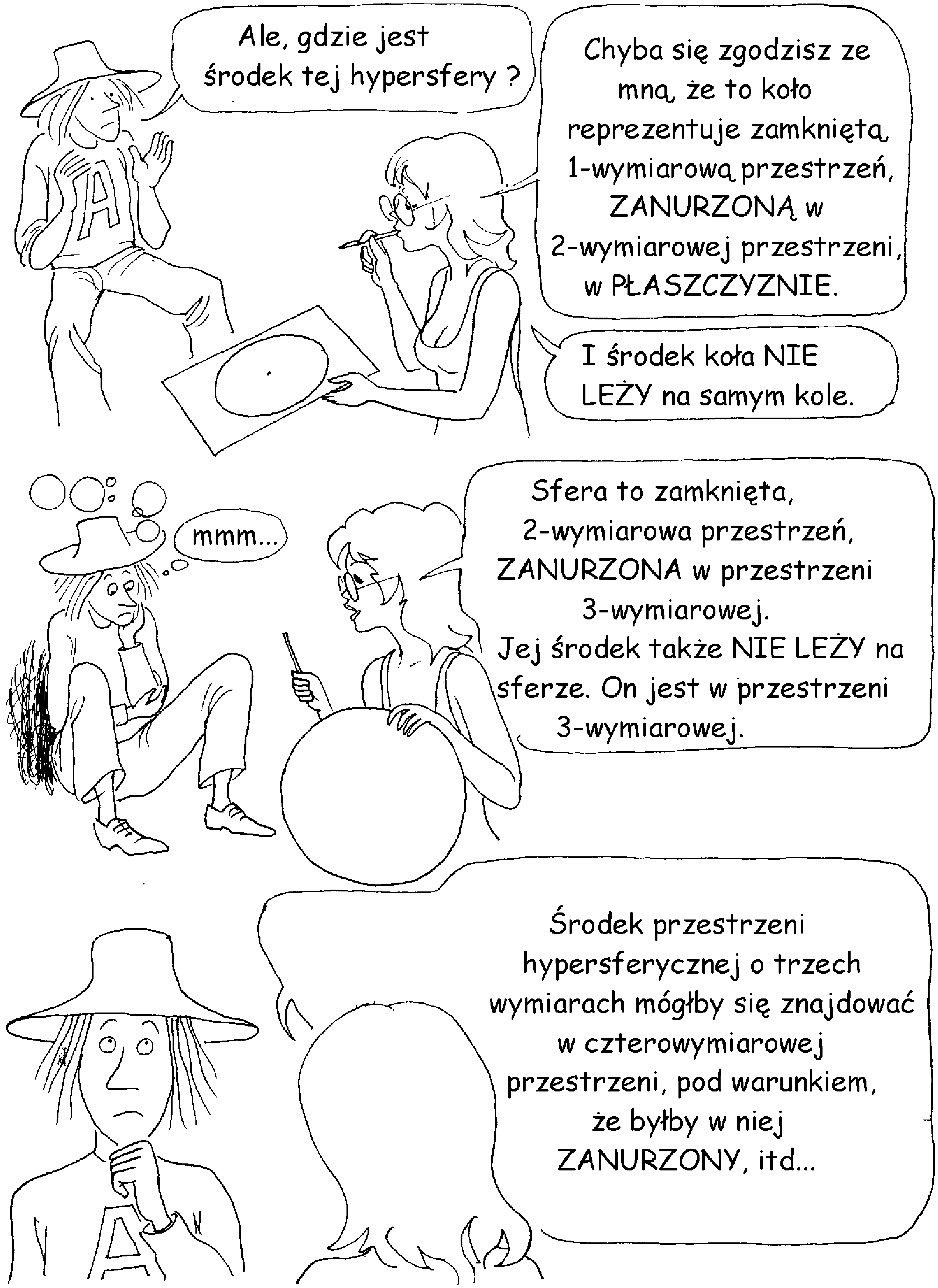


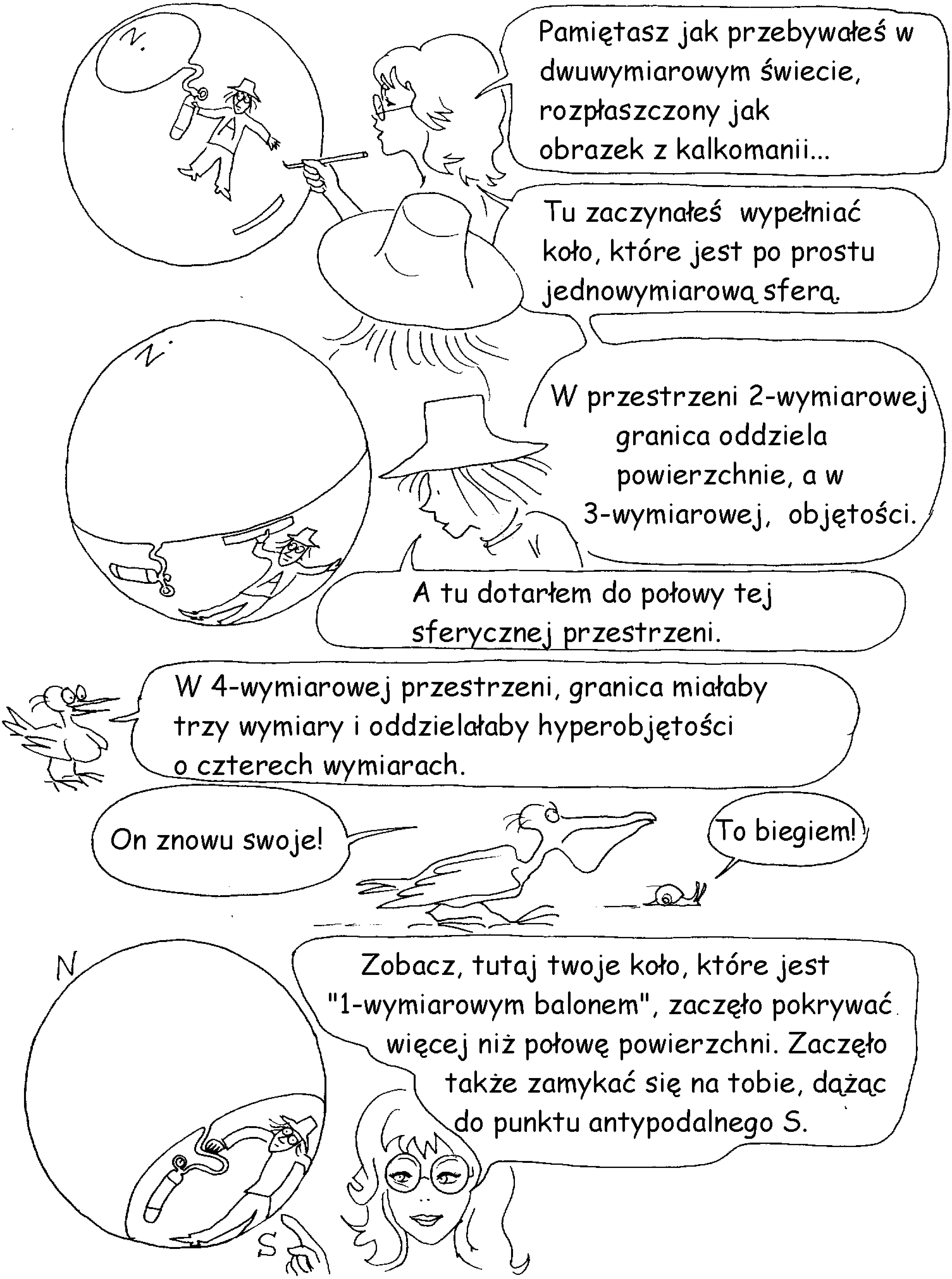
Powiększając promień L na sferze, Anzelm został otoczony przes swoje ogrodzenie w punkcie S. Punkt S znajduje sie na antypodach punktu N, który jest środkiem budowanego koła.

Tak samo dzieje się w 3-wymiarowej przestrzeni o dodatniej krzywiźnie. Na dwuwymiarowej sferze, Anzelm znajdzie się na RÓWNIKU kiedy zagrodzi połowę powierzchni. RÓWNIK istnieje także w 3-wymiarowej przestrzeni HYPERSFERYCZNEJ i Anzelm do niego dotrze w momencie gdy balon wypełni połowę przestrzeni. Na sferze, koło na równiku wydawało mu sie być PROSTĄ. Podobnie w przestrzeni hypersferycznej, "balon równikowy" będzie wydawał mu się być PŁASZCZYZNĄ. Po minięciu równika wklęsłość balonu odwraca się i Anzelm zbliża się do punktu S, antypodalnego do środka balonu, punktu N.

Każdy punkt na sferze ma swój punkt antypodalny. Tak samo jest także w 3-wymiarowej przestrzeni hypersferycznej, chociaż jest to trochę trudne do zrozumienia...

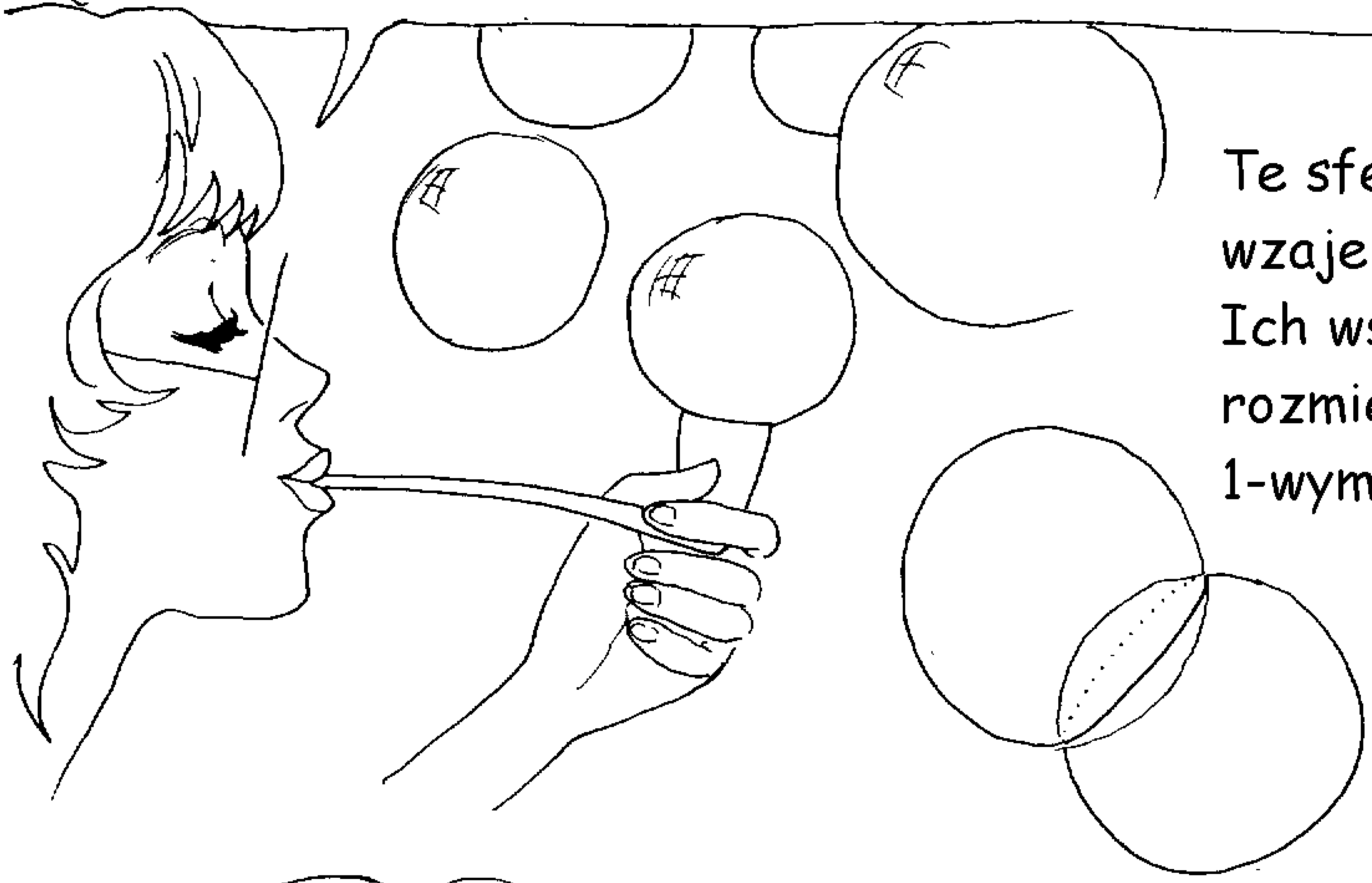

Jakieś zmartwienia ?
Powiedzmy, hmm...trochę mi się tu pomieszało...
Mam na imię Zosia, a krzywizny wszelkiego rodzaju to właśnie moja specjalność.
Eksploracja hypersferyczna zawsze zaskakuje na początku, potem stopniowo, przyzwyczajamy się... Najważniejsze to się nie załamywać.
Eheee...
Tak jakby mi się film urywał..


Ale, gdzie jest środek tej hypersfery ?
Chyba się zgodzisz ze mną, że to koło reprezentuje zamkniętą, 1-wymiarową przestrzeń, ZANURZONĄ w 2-wymiarowej przestrzeni, w PŁASZCZYZNIE.
I środek koła NIE LEŻY na samym kole.
mmm...
Sfera to zamknięta, 2-wymiarowa przestrzeń, ZANURZONA w przestrzeni 3-wymiarowej.
Jej środek także NIE LEŻY na sferze. On jest w przestrzeni 3-wymiarowej.
Środek przestrzeni hypersferycznej o trzech wymiarach mógłby się znajdować w czterowymiarowej przestrzeni, pod warunkiem, że byłby w niej ZANURZONY, itd...

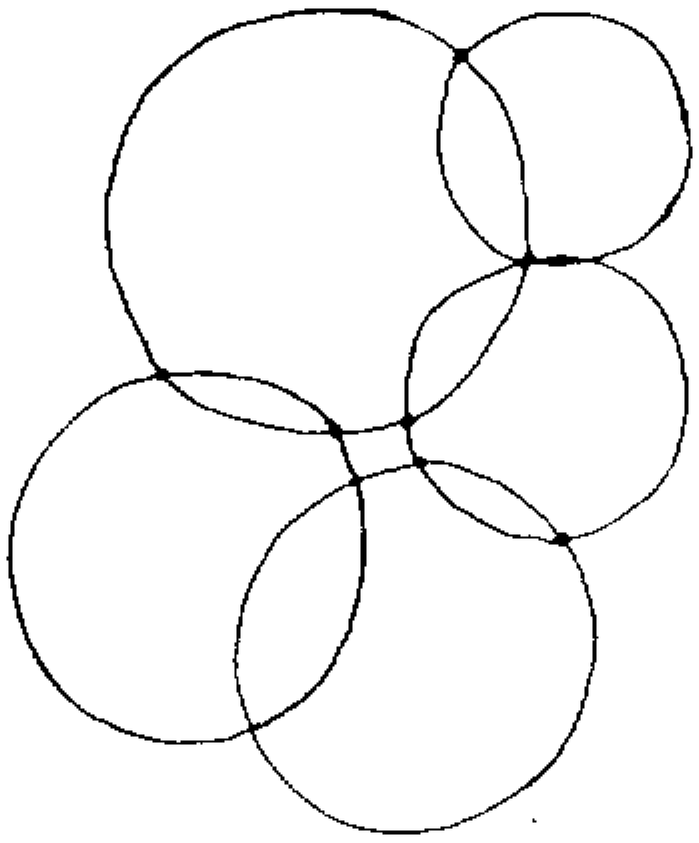

N.
Pamiętasz jak przebywałeś w dwuwymiarowym świecie, rozpłaszczony jak obrazek z kalkomanii...
Tu zaczynałeś wypełniać koło, które jest po prostu jednowymiarową sferą.
N.
W przestrzeni 2-wymiarowej granica oddziela powierzchnie, a w 3-wymiarowej, objętości.
A tu dotarłem do połowy tej sferycznej przestrzeni.
W 4-wymiarowej przestrzeni, granica miałaby trzy wymiary i oddzielałaby hyperobjętości o czterech wymiarach.
On znowu swoje!
To biegiem!
N
Zobacz, tutaj twoje koło, które jest "1-wymiarowym balonem", zaczęło pokrywać więcej niż połowę powierzchni. Zaczęło także zamykać się na tobie, dążąc do punktu antypodalnego S.
S


Podobnie, w zakrzywionej 3-wymiarowej przestrzeni, kiedy wypełniłem więcej niż połowę całkowitej objętości, balon zaczynał się zamykać nade mną i podążał do punktu antypodalnego.
To mam, rozumiem !
Bo sfera w tej przestrzeni, ma, oczywiście, dwa środki, które są punktami antypodalnymi.
?!!?
W sumie to nie jestem pewien, co dokładnie zrozumiałem, jeśli coś zrozumiałem...
Tylko, co?
Bo wiesz, Anzelm, kiedy mamy więcej niż trzy wymiary, **ROZUMIEĆ to znaczy EKSTRAPOLOWAĆ.**
Ekstrapoluję, ale sobie sprawy nie zdaję...
A rysunek to sobie sam zrobisz... ...w wyobraźni !

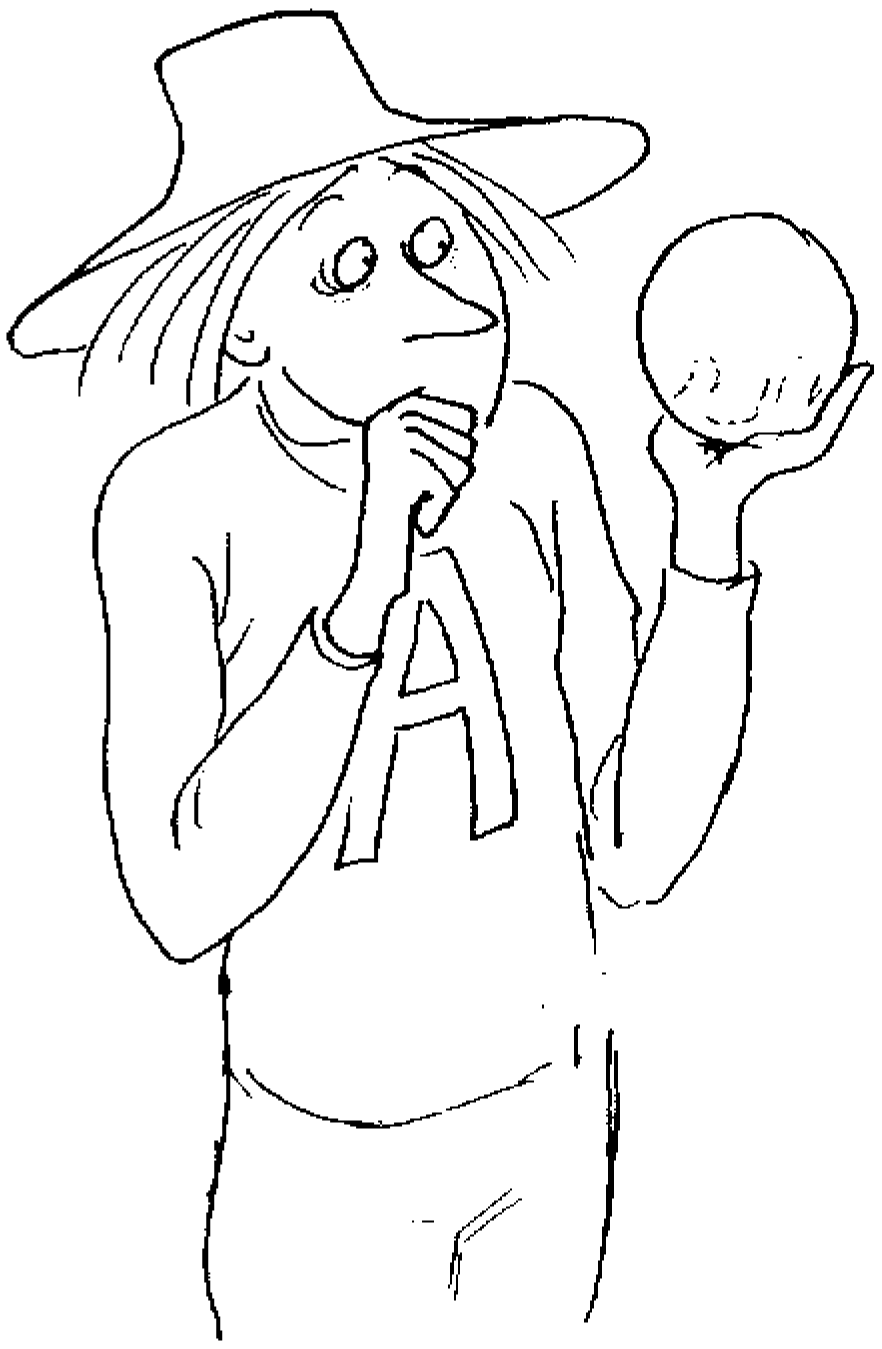
Umieszczę teraz, w 3-wymiarowej przestrzeni, 2-wymiarowe sfery, dużo małych, 2-wymiarowych wszechświatów...



Te sfery mogą się wzajemnie przenikać.
Ich wspólne punkty będą rozmieszczone wzdłuż 1-wymiarowych kół.



Podobnie, koła narysowane na kartce papieru (dwa wymiary), będą się przecinać w PUNKTACH.
(Mówimy, że PUNKT ma wymiar zero).



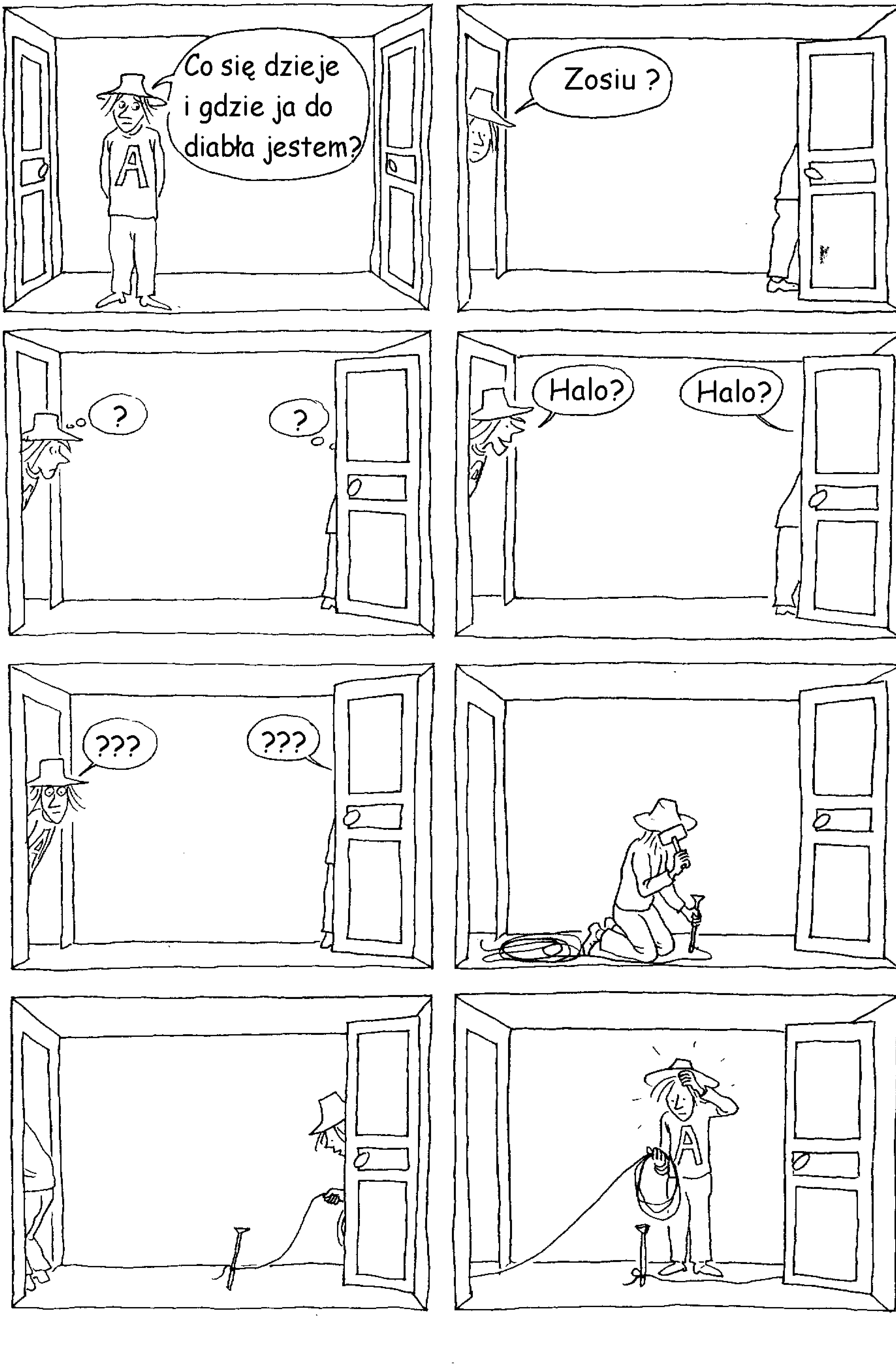
Moglibyśmy więc uważać, że sfera jest strefą przecięcia się dwóch 3-wymiarowych "baniek", zawartych w przestrzeni 4-wymiarowej.

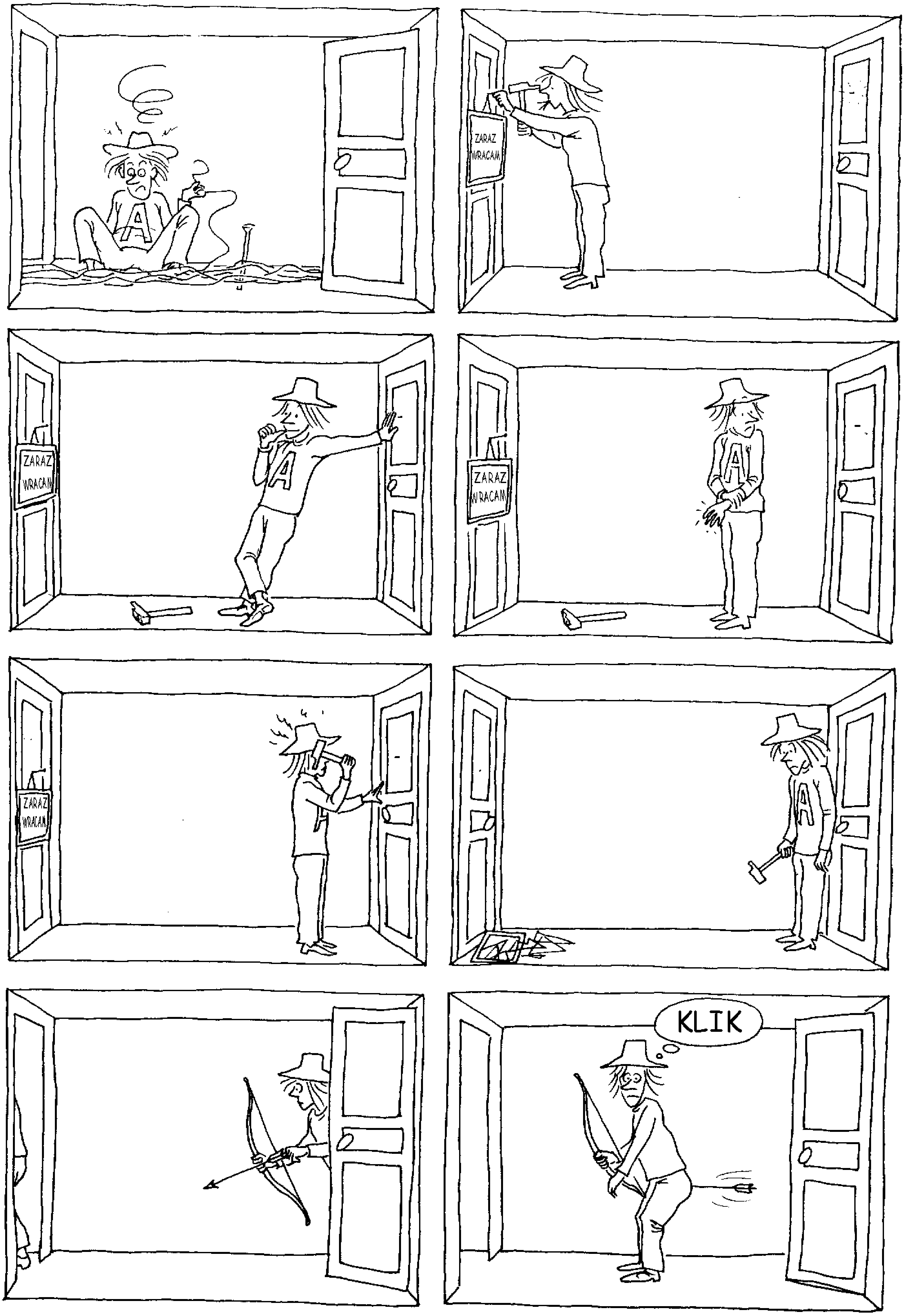
Kontynuujmy dalej: 3-wymiarowa, zakrzywiona przestrzeń hypersferyczna mogłaby być uważana za obszar przecięcia się dwóch 4-wymiarowych baniek mydlanych, znajdujących się w przestrzeni 5-wymiarowej.

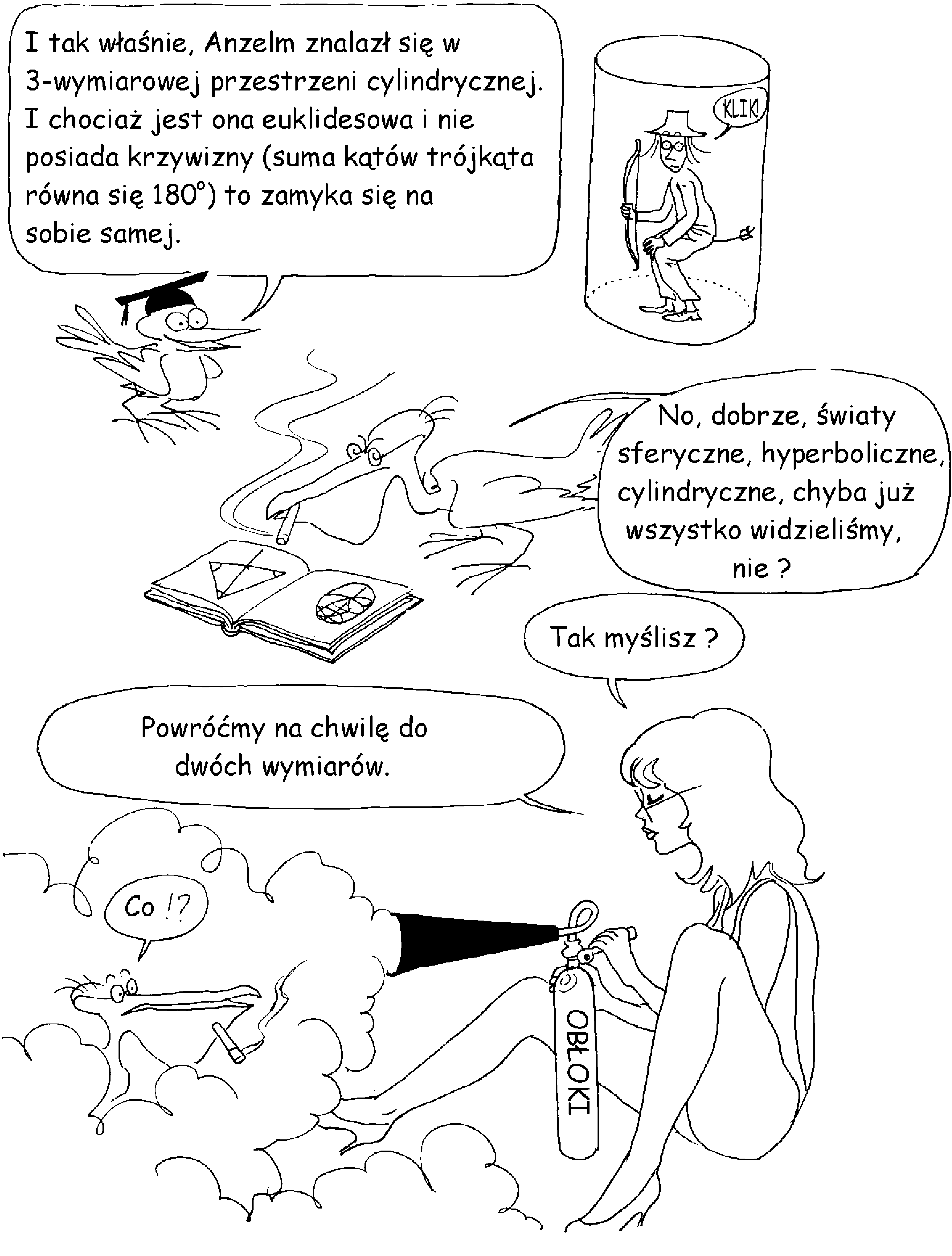

Po tym, jak Anzelmowi i Zosi minęły zawroty głowy wywołane ekstrapolacjami, rozpoczęli eksplorację nowych 3-wymiarowych światów.
Ach, ta dzisiejsza matematyka...
Zobacz, to jest 3-wymiarowa taśma klejąca do wyznaczania geodezyjnych. Klej jest na spodzie... ...oczywiście.
Nie wygląda na to, żeby geodezyjne się zamykały a według KOSMOTESTU wydmuchana objętośc gazu przekracza $4/3\pi L^3$. Powierzchnia jest większa od $4\pi L^2$ a suma kątów trójkąta, tym razem jest mniejsza od 180°.
Przypomnij sobie stronę 23, znowu jesteś w przestrzeni o UJEMNEJ krzywiźnie.


PODSUMOWANIE
Wiele rzeczy może się wydarzyć w przestrzeniach 3-wymiarowych. Tak samo jak na powierzchniach, króre są przestrzeniami 2-wymiarowymi. Więc, kiedy suma kątów TRÓJKĄTA przekracza 180°, mówimy, że krzywizna jest dodatnia. Jeśli zbudujemy sferę o promieniu L, to KOSMOTEST wykaże objętość mniejszą od $4/3\pi L^3$ a powierzchnia będzie mniejsza od $4\pi L^2$. Ta przestrzeń HYPERSFERYCZNA zamknie się na samej siebie. W przypadku odwrotnym, tzn. przestrzeni o krzywiźnie ujemnej, przestrzeń się nie zamyka i rozciąga się w nieskończoność.
Ale gdy suma kątów równa się 180°, to przestrzeń jest po prostu przestrzenią euklidesową.
I tylko tyle ?!

PRZESTRZEŃ MUSI BYĆ OTWARTA LUB ZAMKNIĘTA!


Co się dzieje i gdzie ja do diabła jestem?
Zosiu ?
?
?
Halo?
Halo?
???
???

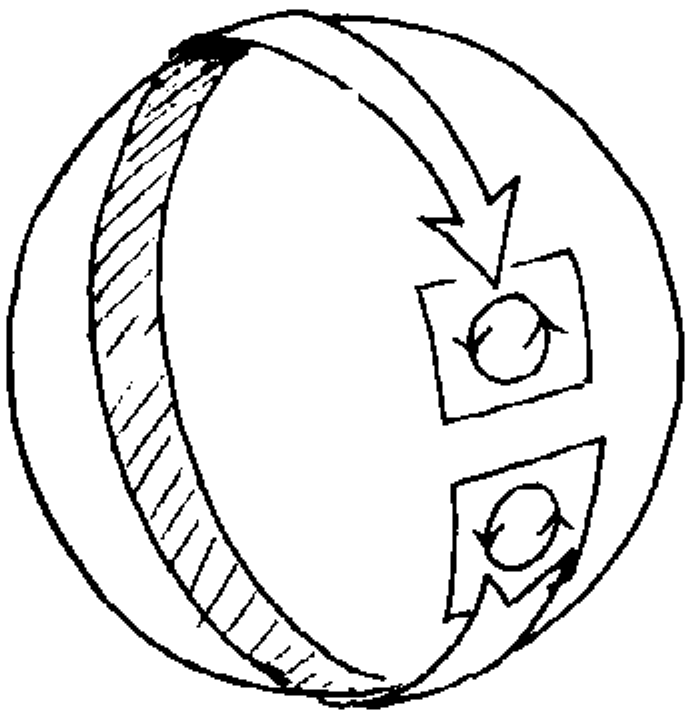

ZARAZ WRACAM
ZARAZ WRACAM
ZARAZ WRACAM
ZARAZ WRACAM
KLIK

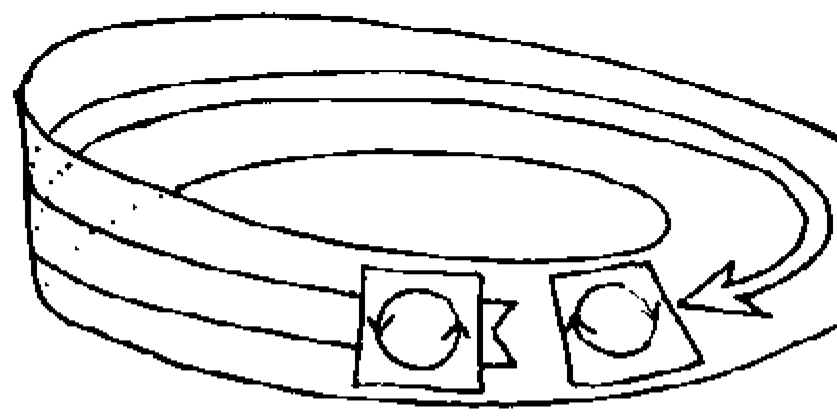

I tak właśnie, Anzelm znalazł się w 3-wymiarowej przestrzeni cylindrycznej. I chociaż jest ona euklidesowa i nie posiada krzywizny (suma kątów trójkąta równa się 180°) to zamyka się na sobie samej.
KLIK!
No, dobrze, światy sferyczne, hyperboliczne, cylindryczne, chyba już wszystko widzieliśmy, nie ?
Tak myślisz ?
Powróćmy na chwilę do dwóch wymiarów.
Co !?
OBŁOKI

WEWNĄTRZ NA ZEWNĄTRZ

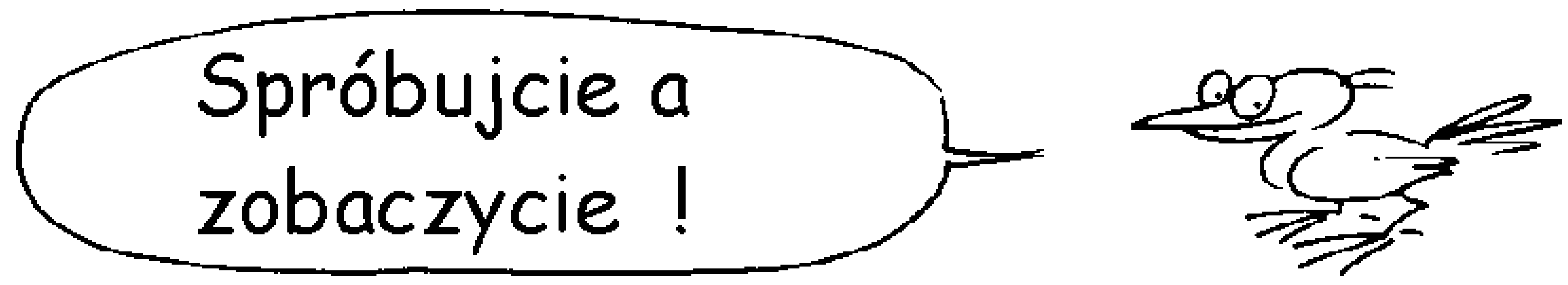

To się zamyka, tak, jak wcześniej
Suma kątów 180°. To coś euklidesowego, pewno znowu sztuczka z cylindrem!
Ale raczej nie...
!?!
Co do ?!
Już wyjaśniam : tym razem Anzelm znalazł się w 2-WYMIAROWEJ PRZESTRZENI NIEORIENTOWALNEJ. Najlepiej znany przykład takiej przestrzeni to wstęga Mobiusa (1830). Grekom nie udało się jej odkryć, chociaż myśleli prawie o wszystkim.
START
GEODEZYJNEJ
Zosiu, zabierz mnie stąd!

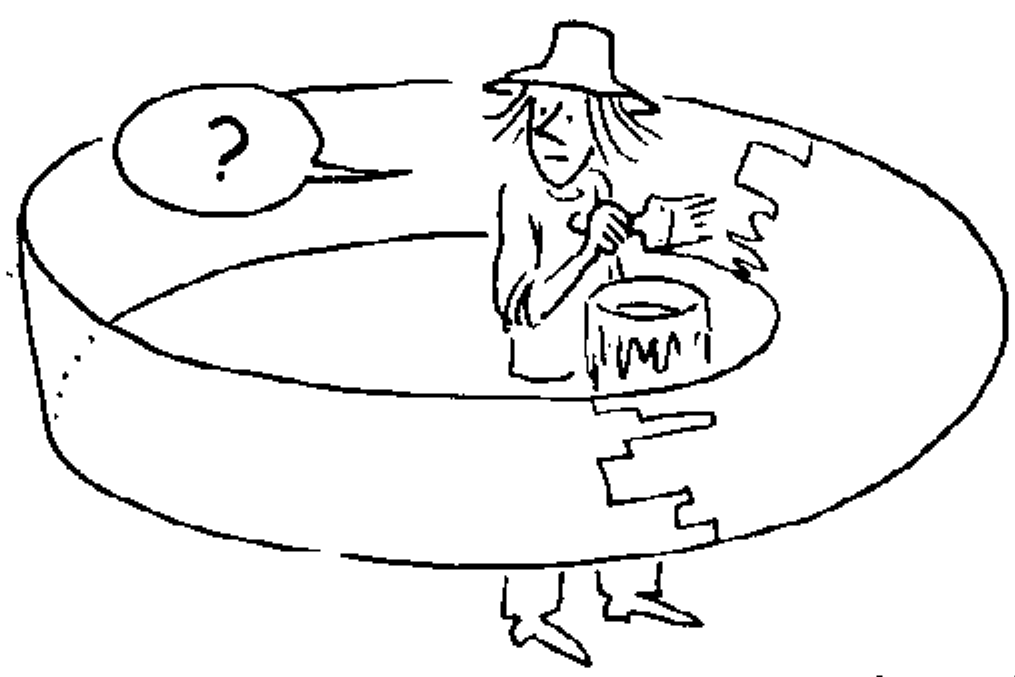
Narysujmy kółko i oznaczmy je arbitralnie strzałkami. Teraz wyobraźmy sobie, że jest to mała kalkomania, którą możemy dowolnie przesuwać po powierzchni. Jeśli to kółko powróci identyczne, to mówimy, że powierzchnia jest ORIENTOWALNA (np. sfera, walec, płaszczyzna, etc..). Ale jeśli przesuniemy kalkomanię po wstędze Mobiusa to będzie to wyglądało całkiem inaczej :





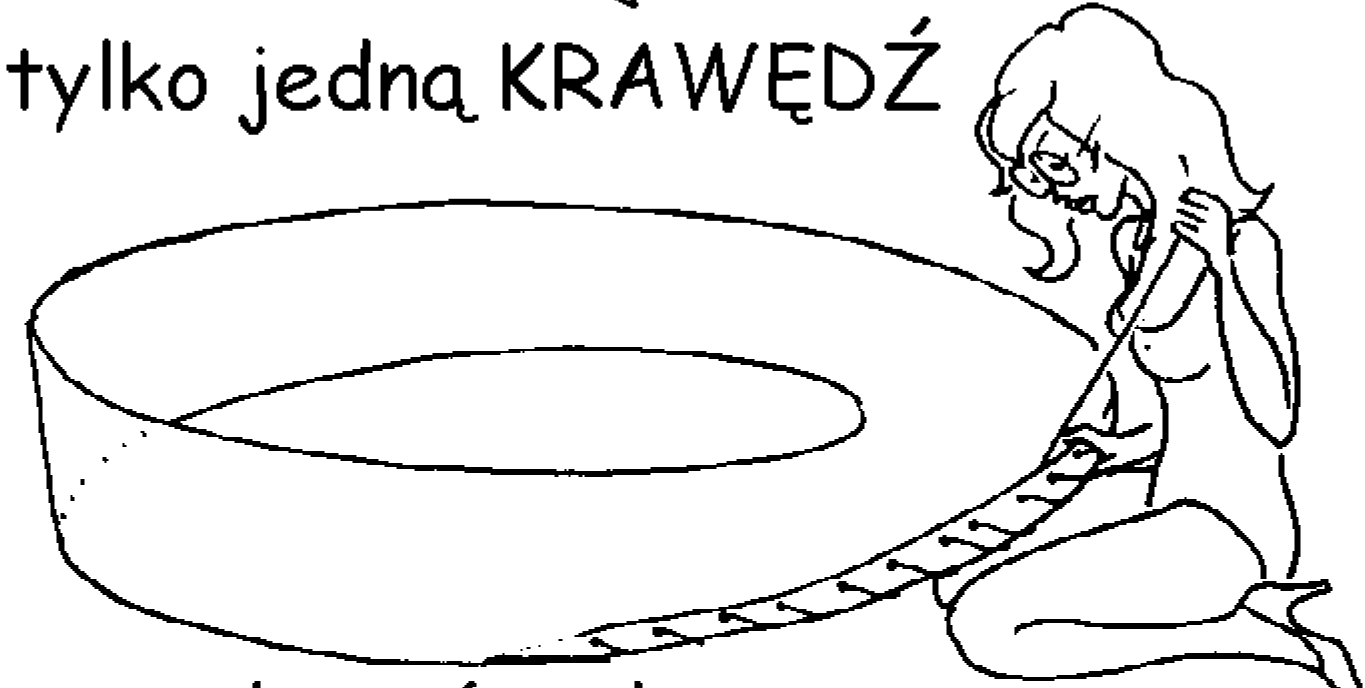
Za każdym okrążeniem tego 2-wymiarowego świata, kółko zmienia orientację.



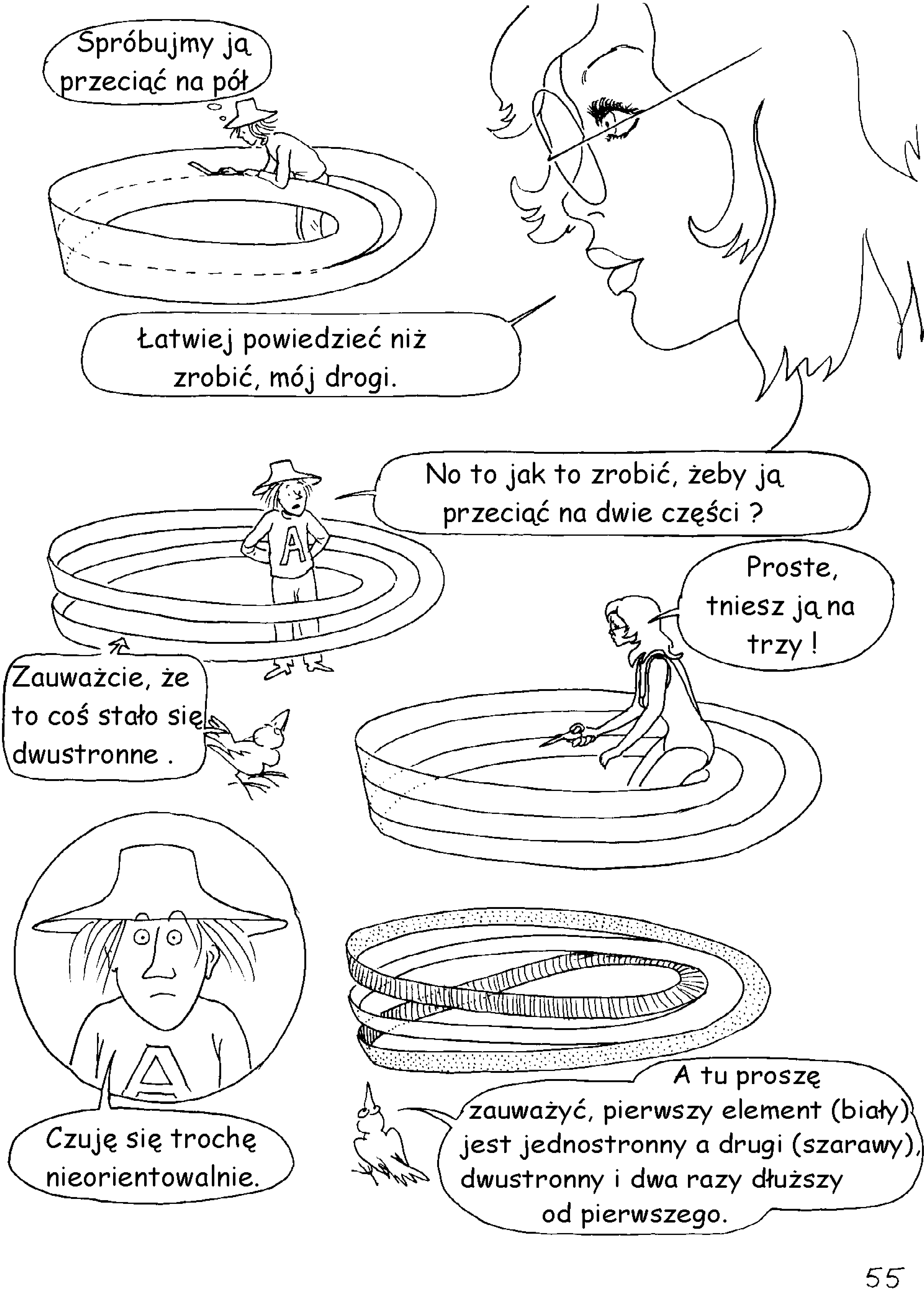


Wstęgi nie można pomalować na dwa różne kolory, ona ma tylko jeden bok, jest JEDNOSTRONNA.

Ma też tylko jedną KRAWĘDŹ



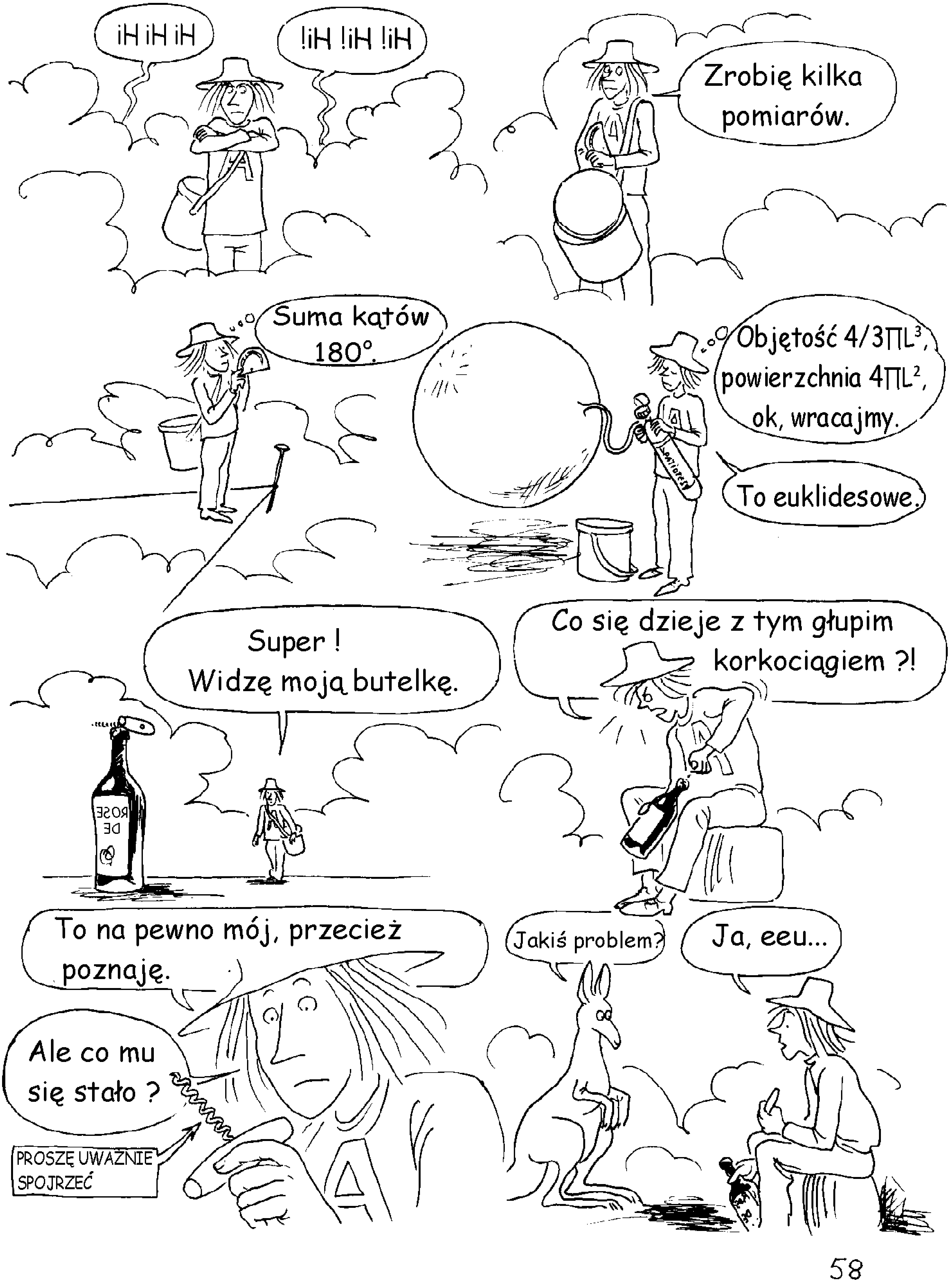
i można ją obszyć jednym ciągiem.


Spróbujmy ją przeciąć na pół
Łatwiej powiedzieć niż zrobić, mój drogi.
No to jak to zrobić, żeby ją przeciąć na dwie części ?
Proste, tniesz ją na trzy !
Zauważcie, że to coś stało się dwustronne .
Czuję się trochę nieorientowalnie.
A tu proszę zauważyć, pierwszy element (biały) jest jednostronny a drugi (szarawy), dwustronny i dwa razy dłuższy od pierwszego.

Po tej przechadzce po wstędze Mobiusa wracamy do 3-wymiarowych powierzchni euklidesowych (bez krzywizny).

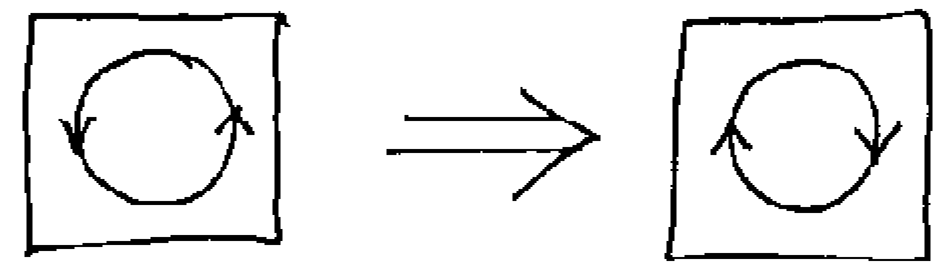
ORIENTACJA PRZESTRZENI:

Idźmy za Anzelmem w jego eksploracji nowego 3-wymiarowego świata euklidesowego.

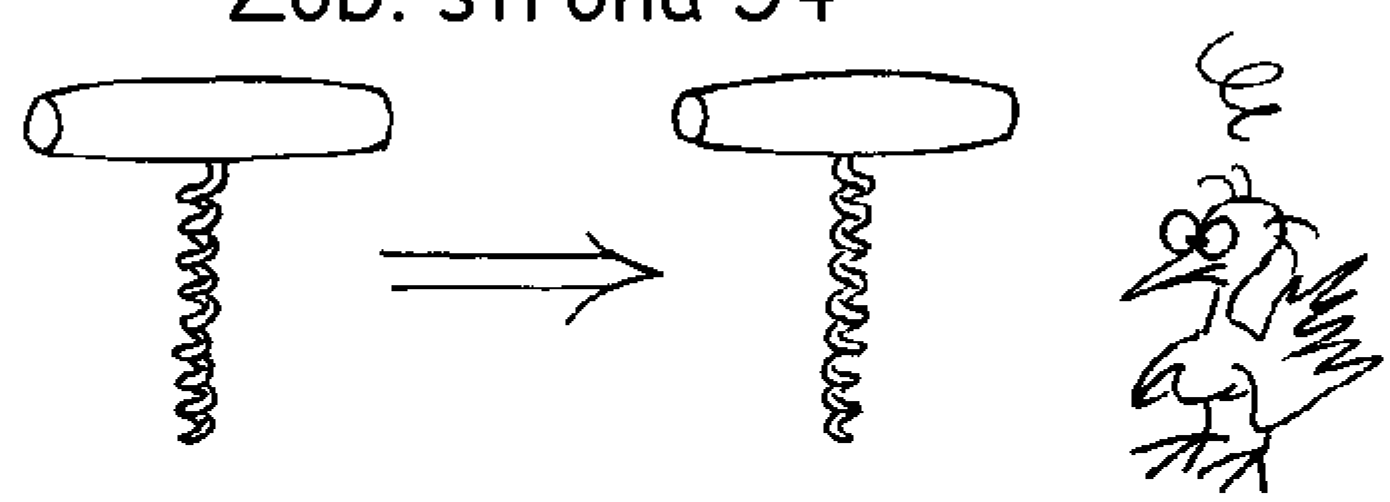

iH iH iH
!iH !iH !iH
Zrobię kilka pomiarów.
Suma kątów 180°.
Objętość 4/3ΠL³, powierzchnia 4ΠL², ok, wracajmy.
To euklidesowe.
Super ! Widzę moją butelkę.
Co się dzieje z tym głupim korkociągiem ?!
To na pewno mój, przecież poznaję.
Ale co mu się stało ?
PROSZĘ UWAŻNIE SPOJRZEĆ
Jakiś problem?
Ja, eeu...


No... średniej jakości rose de Provence, trudno
A korkociąg ma ?
a...owszem
Wszystkie rybki śpią w jeziorze...tiu rara
GLUP
GLUP
GLUP
Nie zauważyłeś niczego dziwnego ?
Nie naljepiej wyglądasz i tyle.
Zalecam wodosiarczyn parmezanu dwa razy dziennie...
Siema, koleś
KLOP
KLOP
KLOP
KLOP
Ktoś mi schrzanił korkociąg, jakiś kangur pijaczyna wyduldał moje wino, co to w ogóle ma być ?!!!
KURDE!
KLINK !
PROSIMY JESZCZE RAZ O UWAŻNE OGLĘDZINY KORKOCIĄGU

Wstęga Mobiusa (2-wymiarowa przestrzeń nieorientowalna) posiada więc, swój odpowiednik 3-wymiarowy. Na wstędze, kalkomania zmieniała orientację po "okrążeniu" tej przestrzeni.

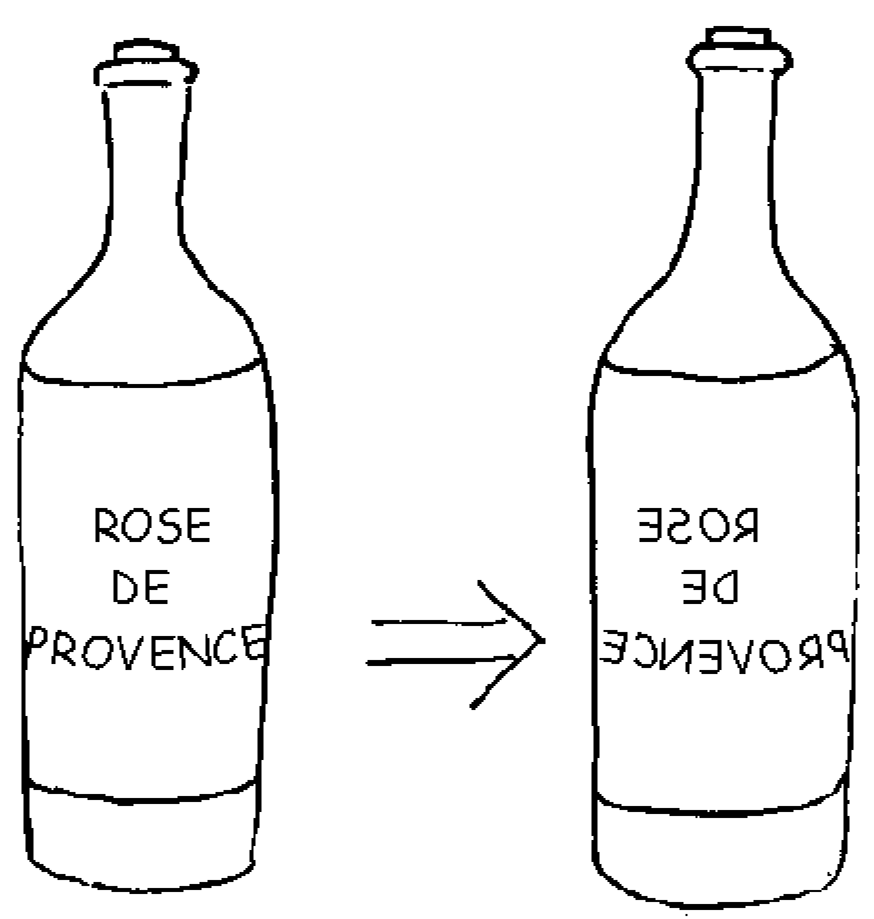


Zob. strona 54



Zauważmy, że te przedmioty są "odzwierciedlone". Korkociąg i nawet sam Anzelm, mogą być uważani za "3-wymiarowe kalkomanie". Za każdym "okrążeniem" przestrzeni, orientacja przedmiotu, odwraca się.

A ponieważ ciągle towarzyszymy Anzelmowi w jego eksploracji, to normalnym jest, że widzimy, tak jak on, "odzwierciedlenie" butelki i korkociąg skręcony w anormalnym kierunku. Drugie "okrążenie" tej przestrzeni pozwoliłoby nam zobaczyć pierwotną postać przedmiotów (pod warunkiem, że zostałyby na miejscu).



Anzelm i kangur (z gatunku antypodalnego) znajdują się w tym samym świecie ale różnią się pod tym względem, że to, co jest normalne i na miejscu dla kangura, jest odwrócone dla Anzelma i vice versa.

EPILOG:


Wszystko się wali. Nie ma już ani na prawo, ani na lewo, ani normalnego, ani odwróconego. Do czego to prowadzi ? Jaką drogą powinienem iść ?
Trzeba iść za geodezyjnymi, za geodezyjnymi twojego życia, Anzelmie.
A mnie nikt nie wmówi, że wszechświat jest tak zwariowany, to jest jakieś matematyczne delirium.
Nie, to jest komiks !
Ale po co się w ogóle tym przej-mować ? I tak jest przecież oczywiste, że przestrzeń JEST euklidesowa(*).
(*) Opinia wygłoszona w 1830 przez Ostrogradzkiego, profesora matematyki w Petersburgu, po przestudiowaniu prac Riemanna i Łobaczewskiego.


Załóżmy, że wszechświat nie jest taki na jaki wygląda. Wyobrażasz sobie, żeby tak uczyli w szkole ?
Matko boska!
A po za tym, to co naprawdę się liczy, to nasza rzeczywistość.
A codzienne życie w naszej przestrzeni toczy się niezależnie
Ale co się może za tym kryć ?
FIZYKA, przyjacielu..
Ja MUSZĘ to wyjaśnić !
To bierzmy się do roboty.
Halo, jest tu ktoś?


...jeśli średnia gęstość materii we wszechświecie jest mniejsza od 10^{-29} gr na cm^3...
?
...to wszechświat będzie miał krzywiznę ujemną i będzie się rozciągał w nieskończoność...
...ale jeśli ta gęstość jest większa niż 10^{-29} gr na cm^3...
!..
...to wszechświat będzie hypersferyczny i zamknięty...
A gdy gęstość będzie równa 10^{-29} gr na cm^3, to wszechświat będzie EUKLIDESOWY.
Bingo !
Pan profesor Einstein ?
Aa..haa...
KONIEC