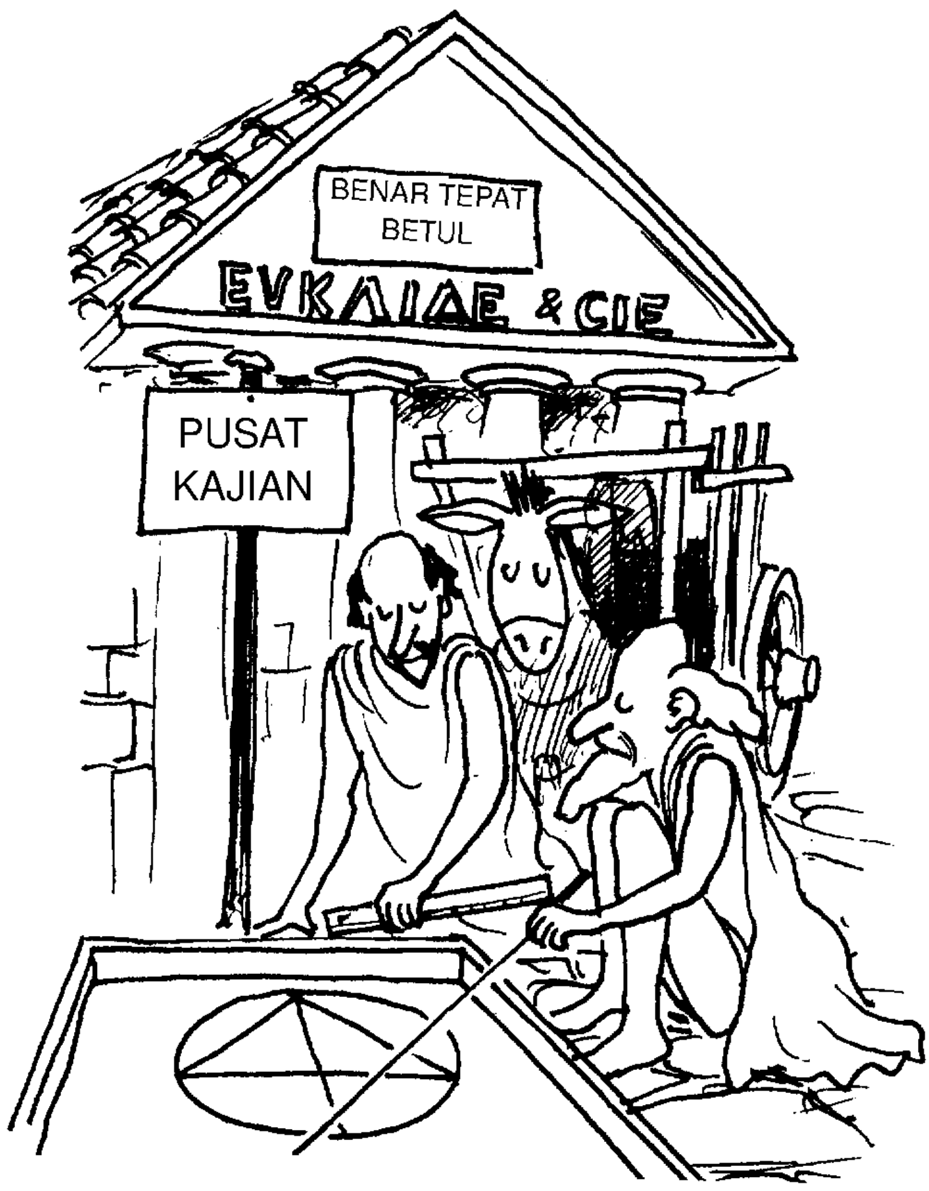
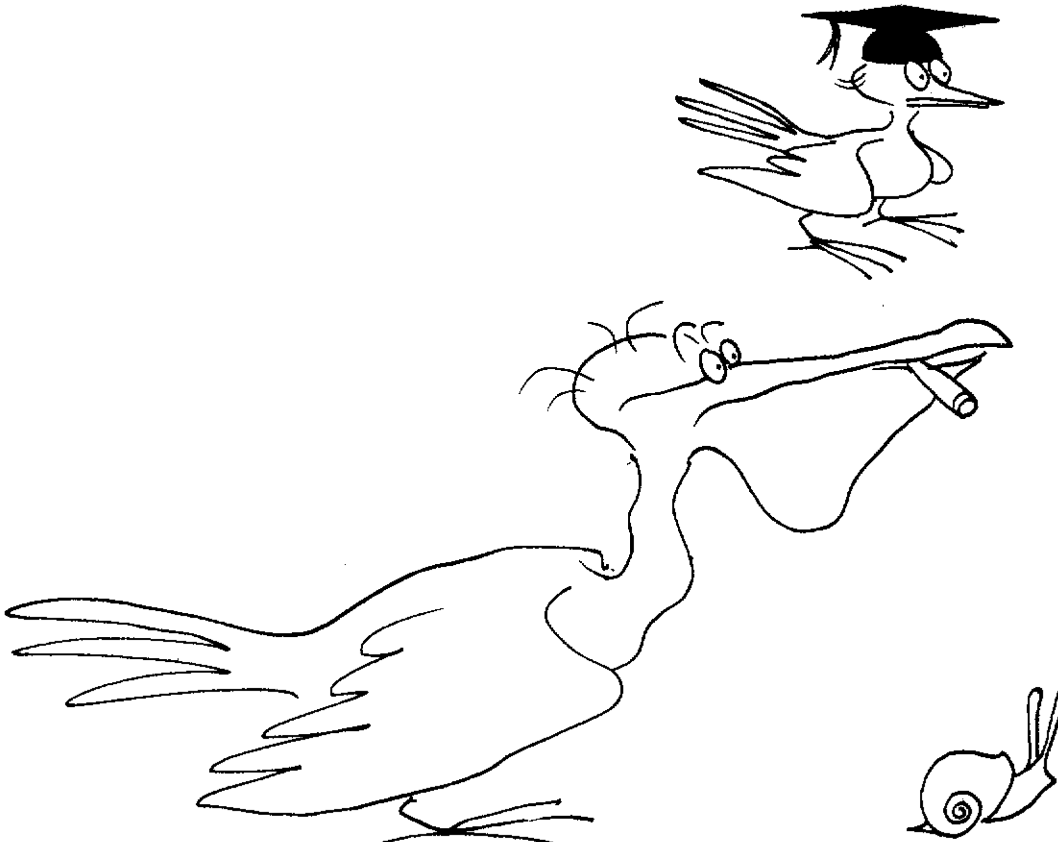
HIKAYAT KEMBARA AWANG UJANG

GEOMETRIKON

Karya: Jean-Pierre Petit
Terjemah: Liumx






Ada ahli
matematik?

NOTA

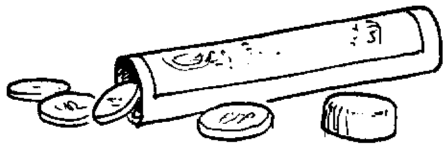
BERIKUT BUKANLAH SATU KURSUS.

TETAPI CUMA SALAH SATU CERITERA SANG ANIL UJANG

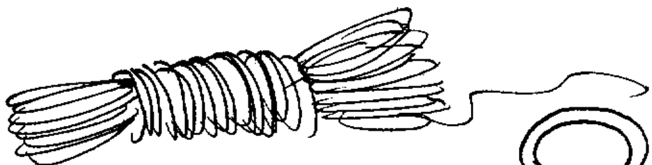
KHUSUSNYA DALAM ALAM GEOMETRI.

DINASIHAT DICACA DENGAN:

* ASPIRIN

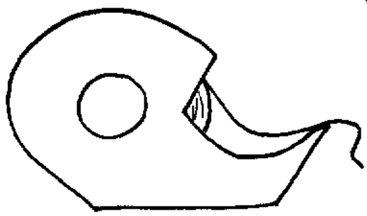


* TALI

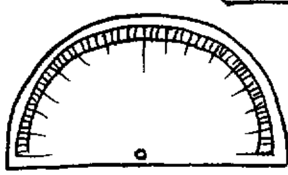


* GUNTING

* PELEKAT

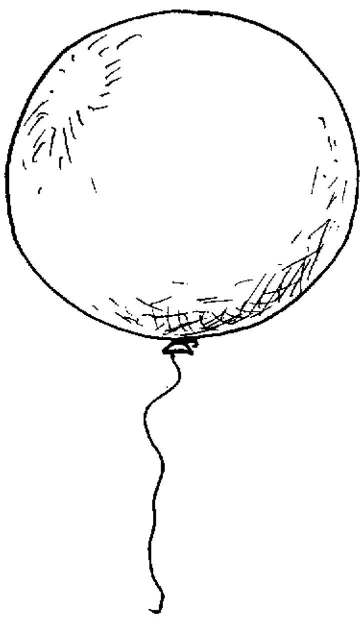


* JANGKA SUDUT



* DAN SEBIJI BELON BULAT

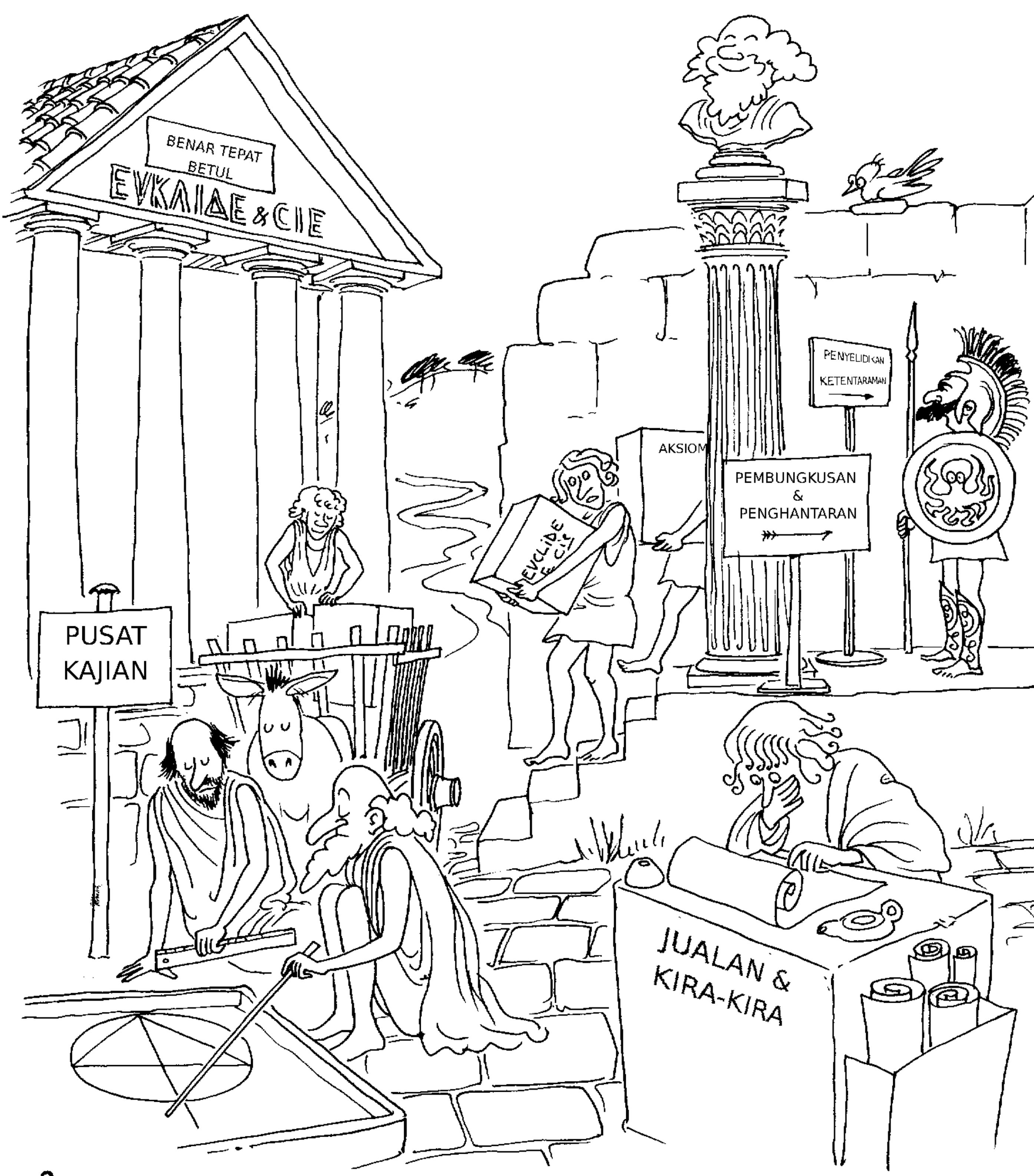
  YANG COMEL...



SYARIKAT EUKLIDES & RAKAN-RAKAN DIASASKAN DI ISKANDARIAH

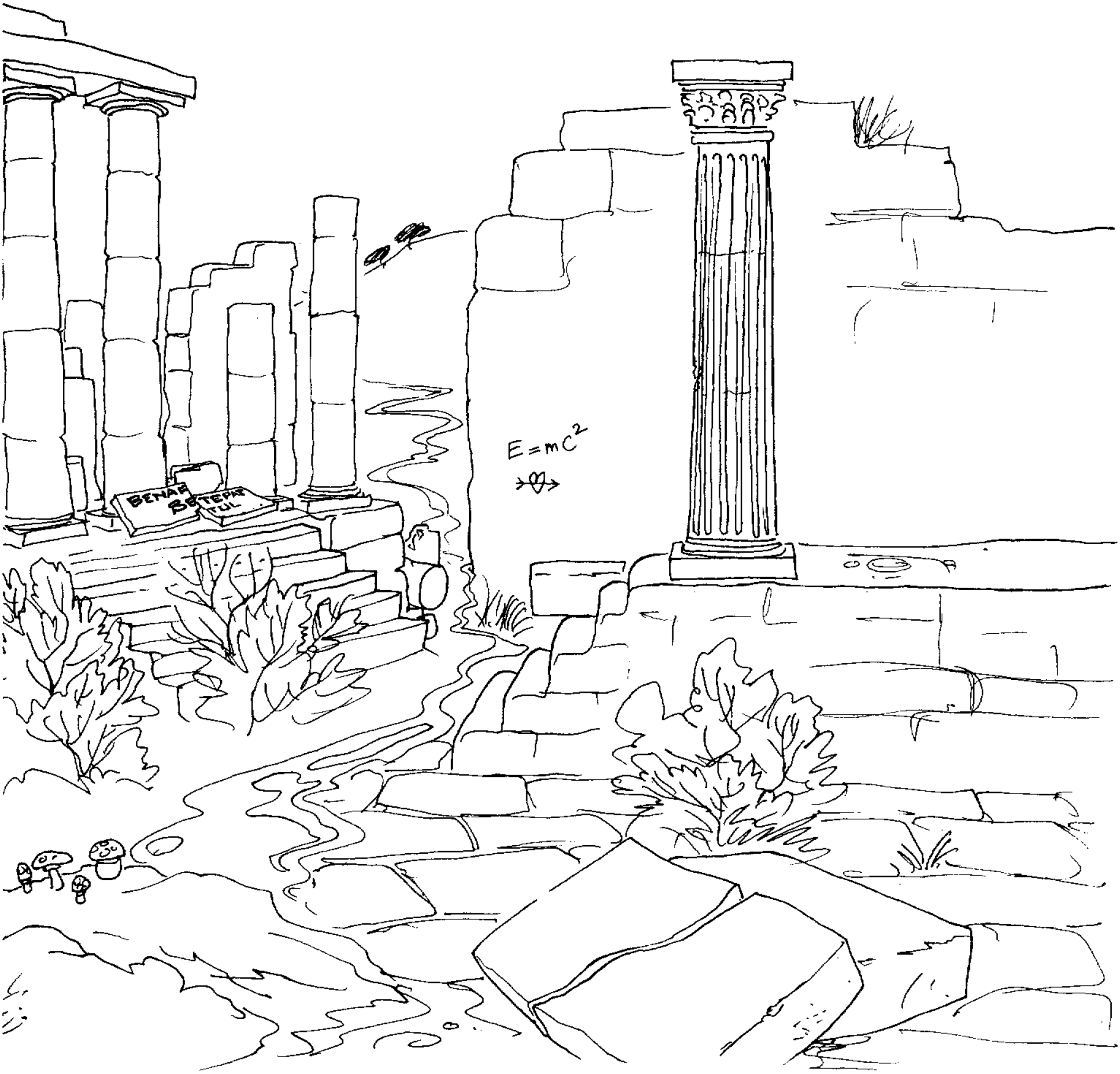
TIGA ABAD S.M. URUSAN SANGAT LAKU UNTUK DUA RIBU DUA

RATUS TAHUN. PRODUKNYA BERJAYA, PELANGGANNYA BERPUASHATI.

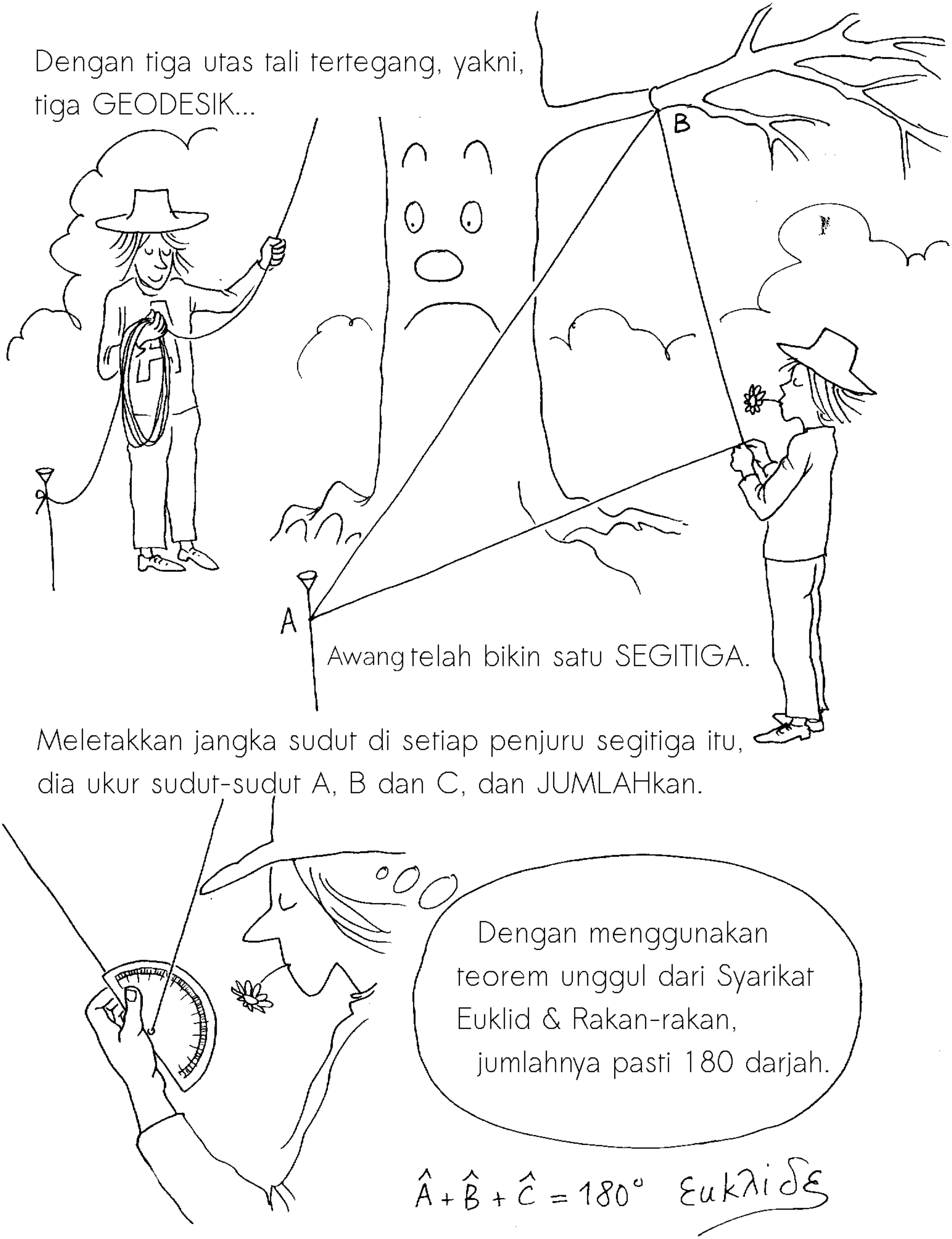


NAUM DEMIKIAN, SEDIKIT DEMI SEDIKIT, CITARASA PELANGGAN BERUBAH. SEBAHAGIANNYA YANG TIDAK PERNAH PERTIKAIKAN JENAMA ITU, SELEPAS PENGALAMAN ANEH, MULA BERTANYA "ADAKAH EUKLID BENAR SELALU, TEPAT HINGGA AKHIRAT DAN BETUL SAMPAI KIAMAT?"

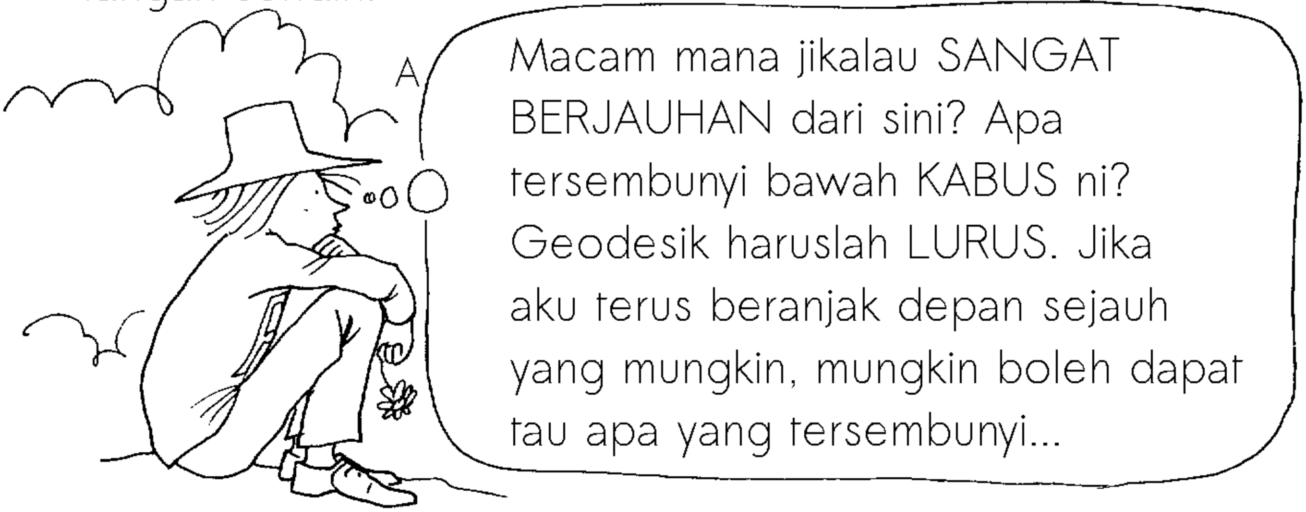
KITA BERKENALAN DENGAN AL-KISAH SALAH SEORANG DARIPADANYA...

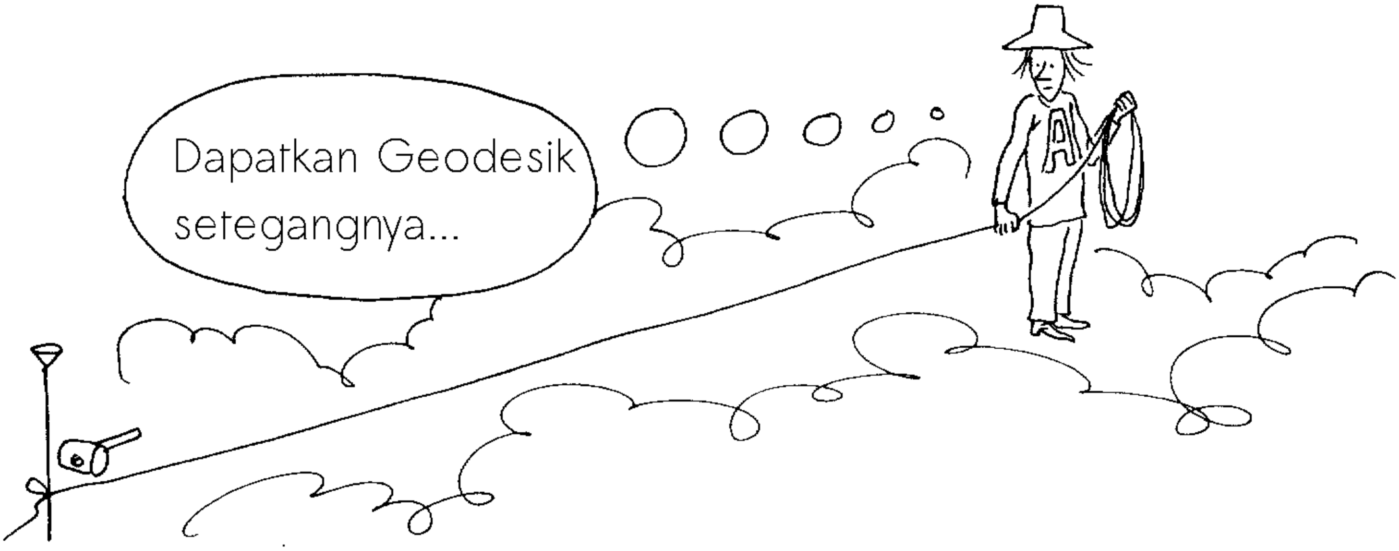


PRAKATA: Pada suatu hari, Awang Ujang hendak menegangkan seutas tali di antara dua tiang...


Dengan tiga utas tali tertegang, yakni, tiga GEODESIK...
B
A
Awang telah bikin satu SEGITIGA.
Meletakkan jangka sudut di setiap penjuru segitiga itu, dia ukur sudut-sudut A, B dan C, dan JUMLAHkan.
Dengan menggunakan teorem unggul dari Syarikat Euklid & Rakan-rakan, jumlahnya pasti 180 darjah.
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ Ευκλιδε

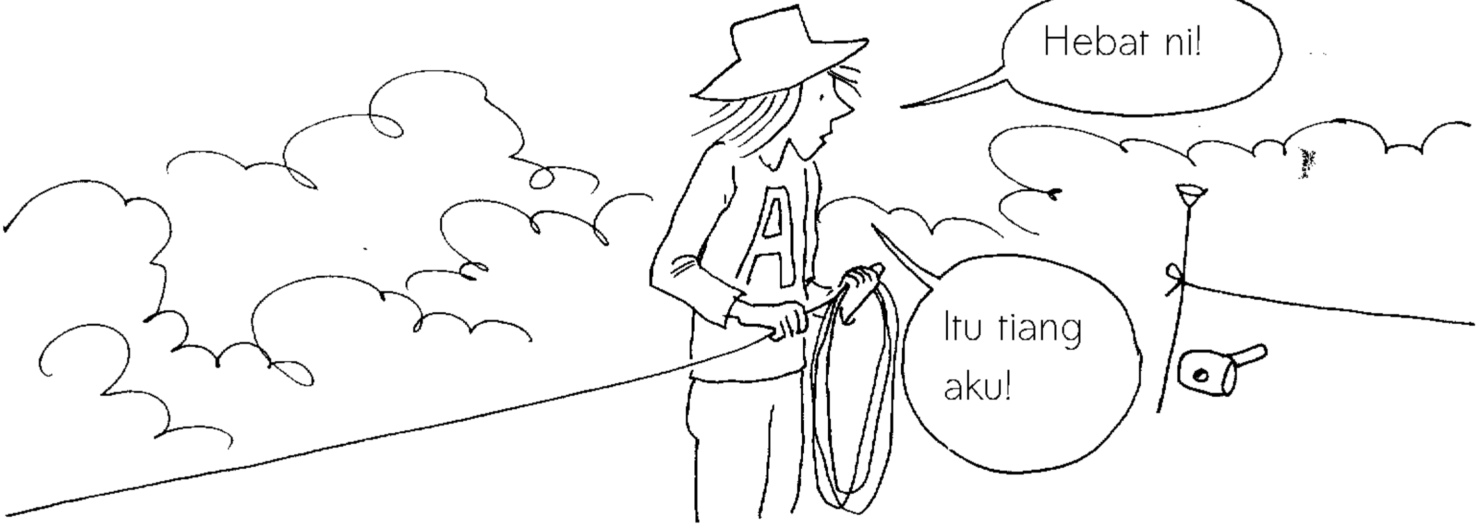
DUNIA Awang dikepul awan tebal. Hinggalah tak nampak tangan sendiri.





Awang berganjak untuk tempoh yang tersangat panjang.
Di belakangnya, tali ditarik setegang-tegangnya sehingga dia tak perlu risau akan kabus tebal menutupi jalannya.
Dia sedang mengikuti satu GEODESIK yang sempurna...

Tetapi - seperti yang mungkin anda perasan - ada harinya di mana nampaknya tiada apa-apa yang betul.



Awang dengan banyak lagi benangnya, berhasrat untuk menjernihkan segala kekeruhan sekaligus.

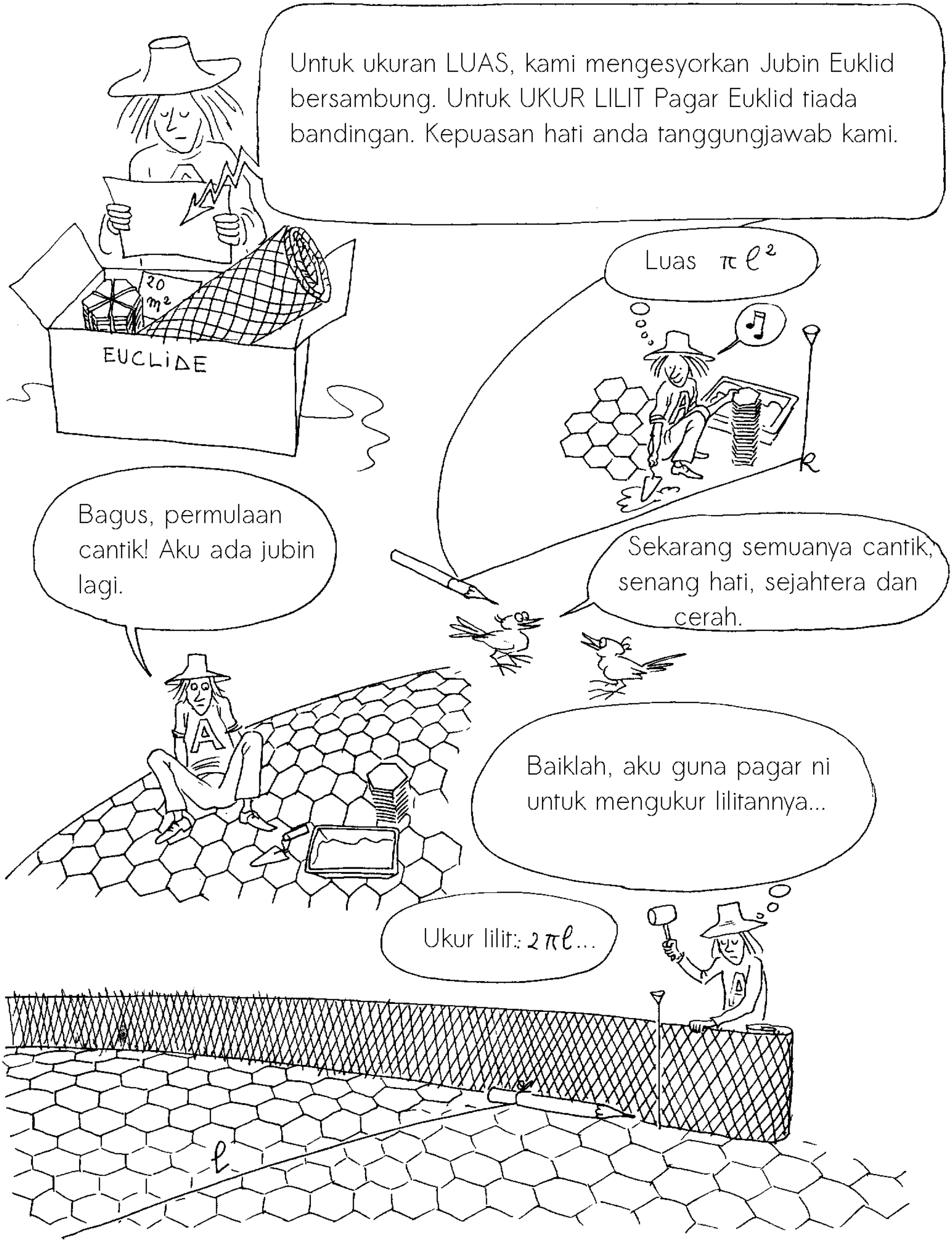
Deangan penuh semangat, Awang terus ke depan berdebaran guna benang.

Sedihnya...

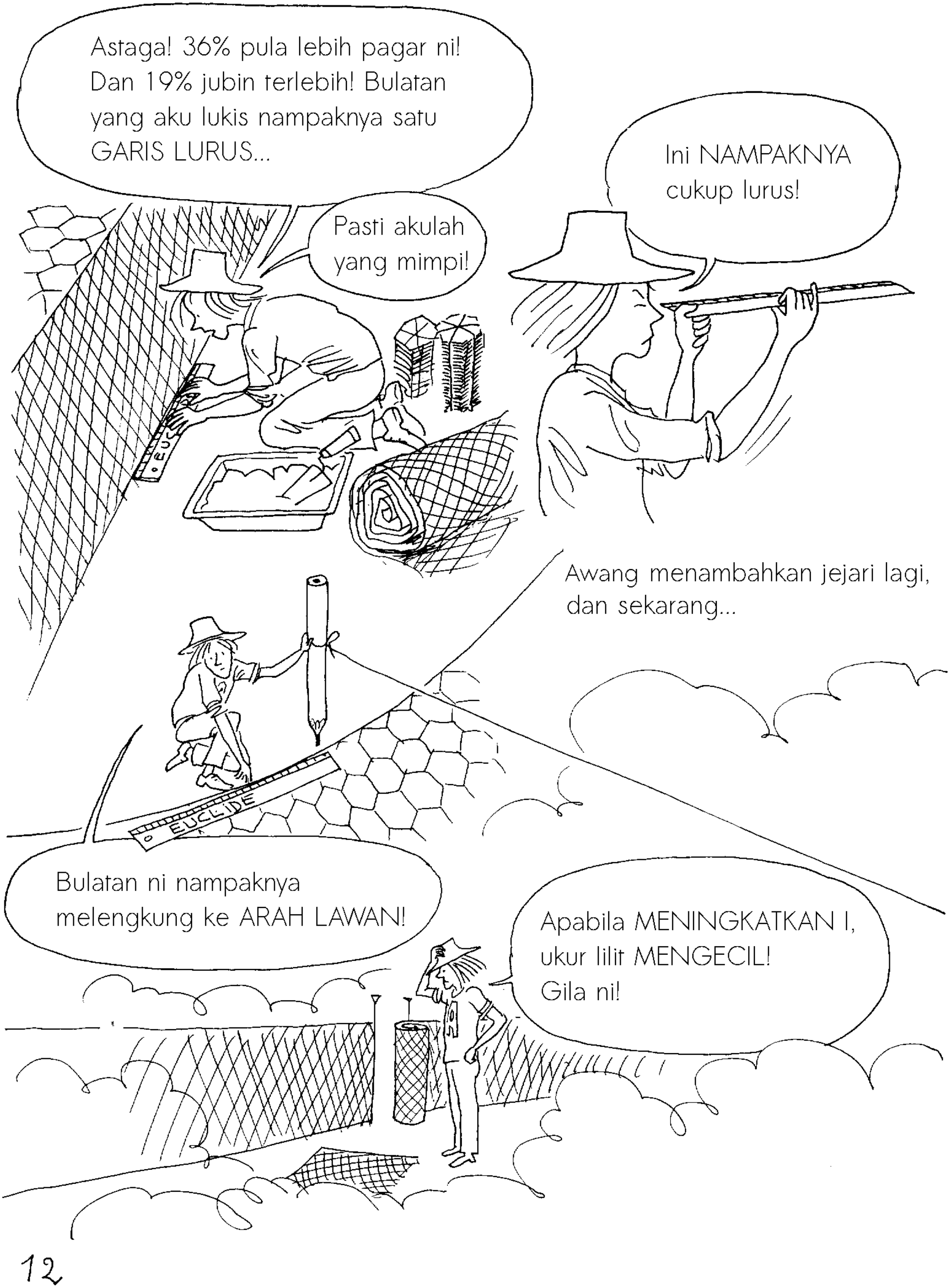
...GARIS LURUS Awang menutupi!


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Cuba tinjau apa yang geng Eukid tu katakan tentang ni. Aku lukis tiga geodesik yang sama panjang untuk membentuk satu SEGITIGA. Jadi sudut-sudut sepatutnya 60 darjah, dengan jumlah 180. Semacam cetakan risalah ni.
B 60 60 60 C A
Â+B̂+Ĉ = 180°
Kita taulah nanti.
RATIO OMNIA VINCIT
A
A
B
Sini tegakan kedua B. Tarik lagi dua tali untuk mendapatkan yang ketiga.
B
Sains hebat, kan?
Alamak! Sudut-sudut SAMA besar, namun lebih besar dari 60 darjah.
Langgar batu ke?
C
A
Suara hati kata ini lagi besar jumlahnya daripada 180!!
EUCLIDE
EUCLIDE

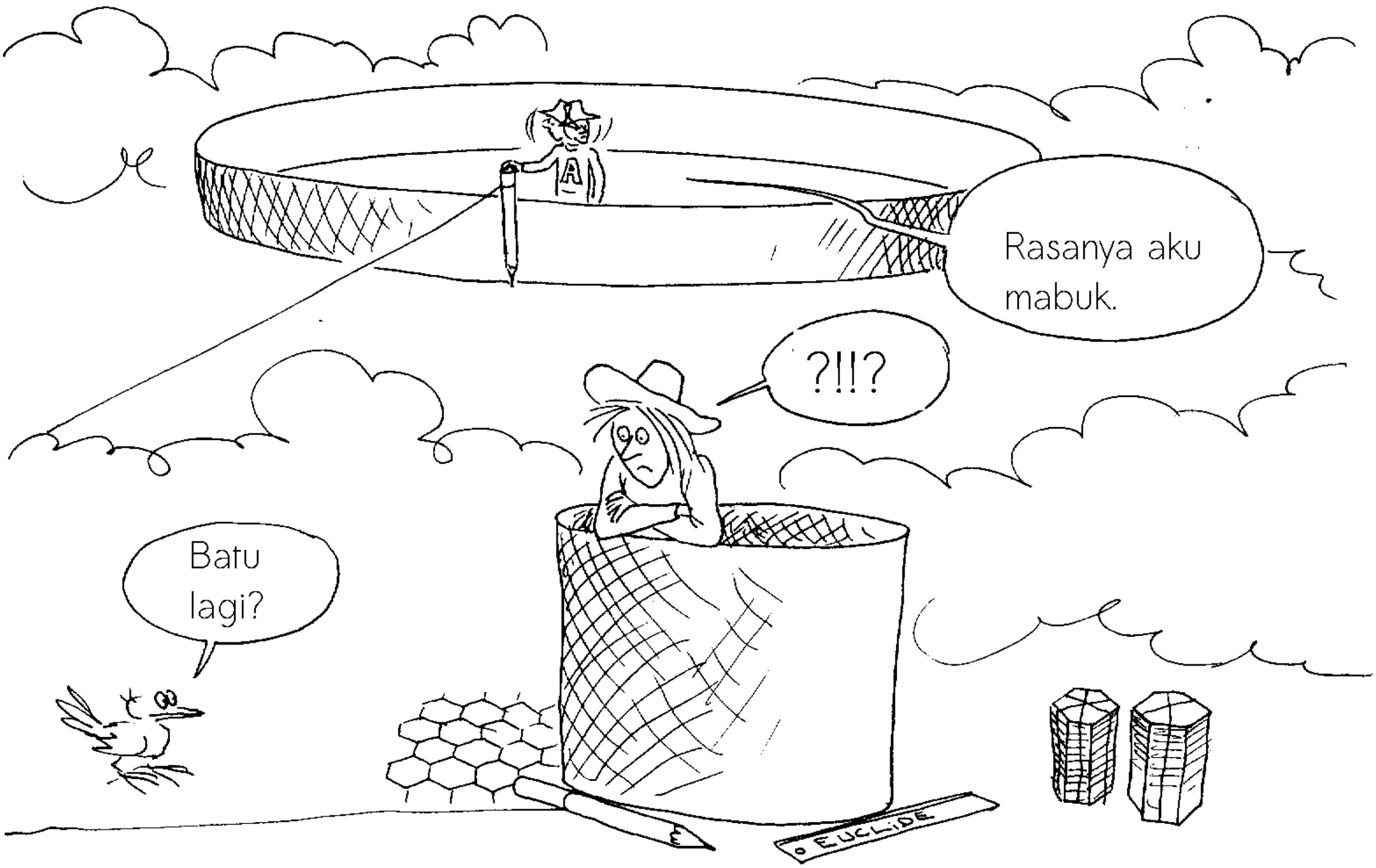
Dan aku pasti meletak pembaris MENDATAR mutlak, iaitu tali-tali benar-benar LURUS.
EUCLIDE
Halo? Euklid & Rakan-rakan? Saya ada masalah dengan produk anda.
Sekejap ya... Saya sambungkan jabatan teknikal.
Masalah denagn segitiga? Saya hairan. Mungkin anda boleh cuba guna bulatan kami? Ramai pelanggan puas hati dengan tu.
...Oklah. BULATAN adalah satu set titik-titik yang berada sejarak ℓ dari satu titik tetap.
UKUR LILIT $2\pi \ell$ dan LUAS $\pi \ell^2$. OK!
ℓ
Turuti nasihat anda.


Untuk ukuran LUAS, kami mengesyorkan Jubin Euklid bersambung. Untuk UKUR LILIT Pagar Euklid tiada bandingan. Kepuasan hati anda tanggungjawab kami.
20 m²
EUCLIDE
Luas $\pi \ell^2$
Bagus, permulaan cantik! Aku ada jubin lagi.
Sekarang semuanya cantik, senang hati, sejahtera dan cerah.
Baiklah, aku guna pagar ni untuk mengukur lilitannya...
Ukur lilit: $2\pi\ell$...
ℓ


Dan pagar juga ada baki lagi!!
Halo, Euklid & Rakan-rakan? YA, AKU LAGI! Nak adu tentang pagar DAN jubin engkau! πl^2 dan $2\pi l$ tak laku langsung! Apa macam?
Tolong jangan jerit macam tu, tuan. Saya setiausaha. Sambungkan tuan kepada jabatan teknikal kami.
Tidak! Tidak!! Jubin diatur sempurna! Tiada yang tak kena dengan jejari aku, dan pagar pun bersambungan dengan bulatan!
Tuan, percayalah saya, ini kali pertama ini berlaku. Cuba lagi, jangan marah. Tuan tau Teorem kami TERJAMIN.
Anil pun cuba lagi, setiap kali menambah jejari l untuk bulatannya.
Dan ralat pun semakin bertambah teruk, dan teruk lagi...


Astaga! 36% pula lebih pagar ni! Dan 19% jubin terlebih! Bulatan yang aku lukis nampaknya satu GARIS LURUS...
Pasti akulah yang mimpi!
Ini NAMPAKNYA cukup lurus!
EUCLIDE
Awang menambahkan jejari lagi, dan sekarang...
EUCLIDE
Bulatan ni nampaknya melengkung ke ARAH LAWAN!
Apabila MENINGKATKAN l, ukur lilit MENGECIL! Gila ni!

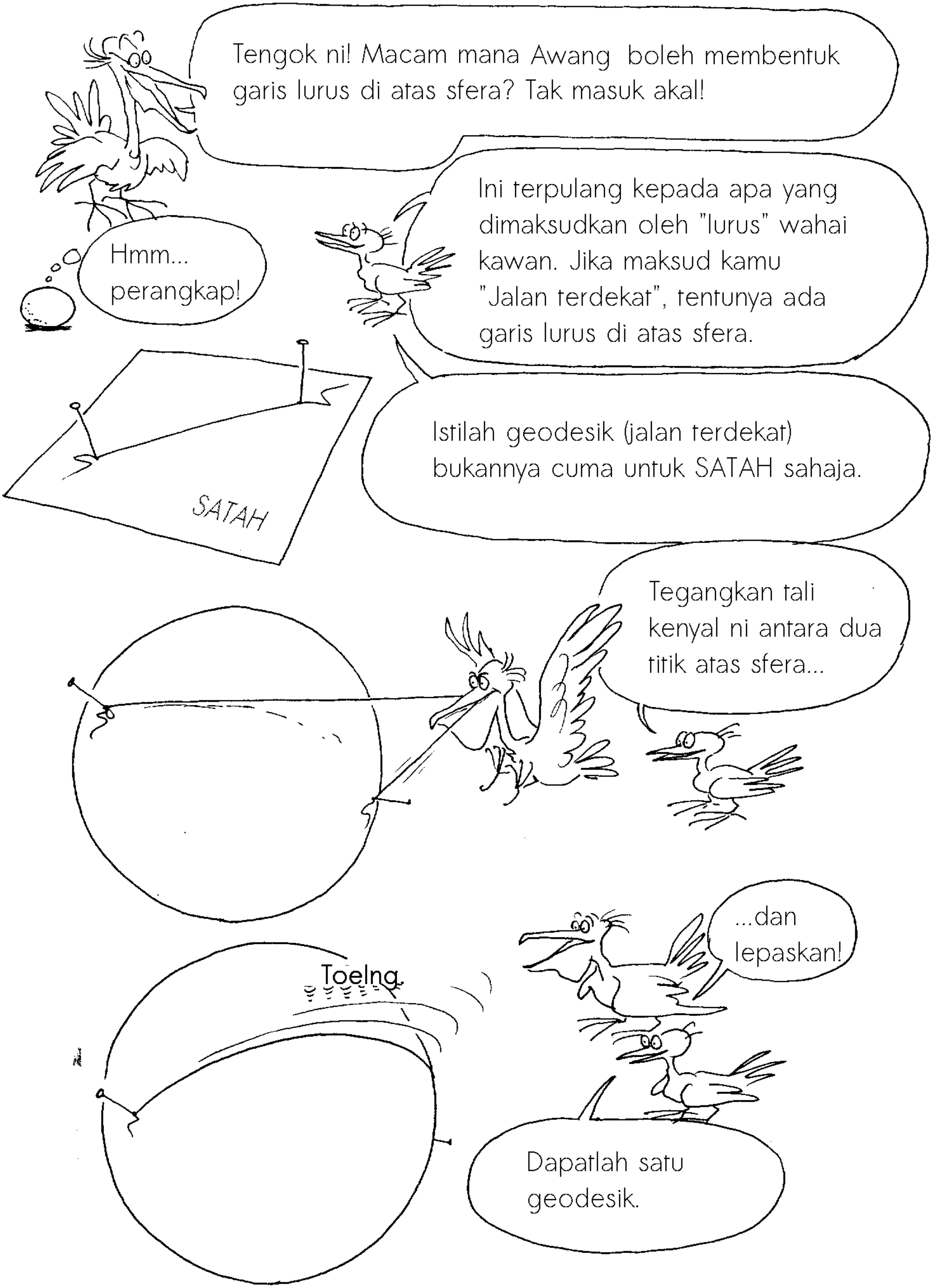
Selepas lagi banyak jubin:



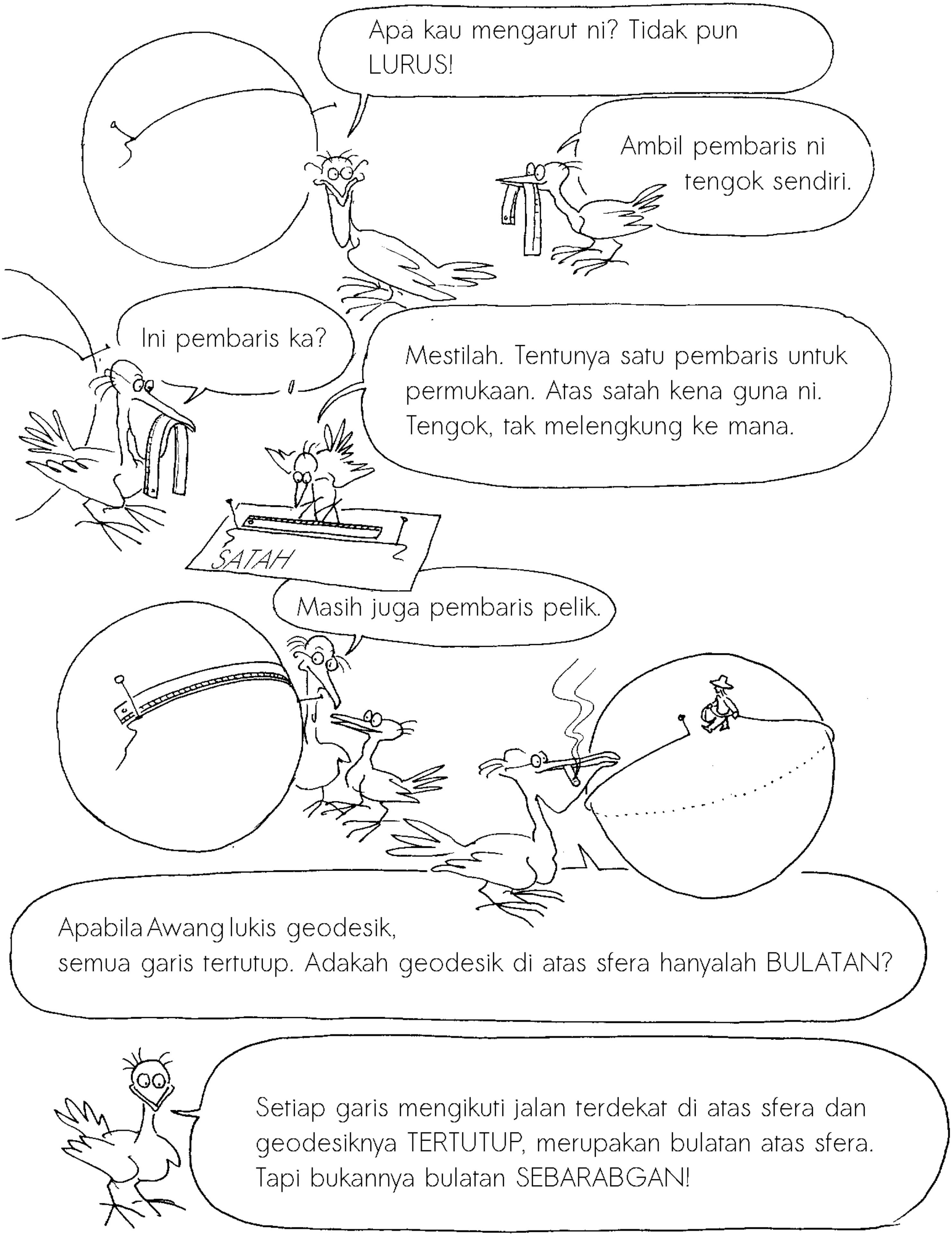
APA TERJADI?

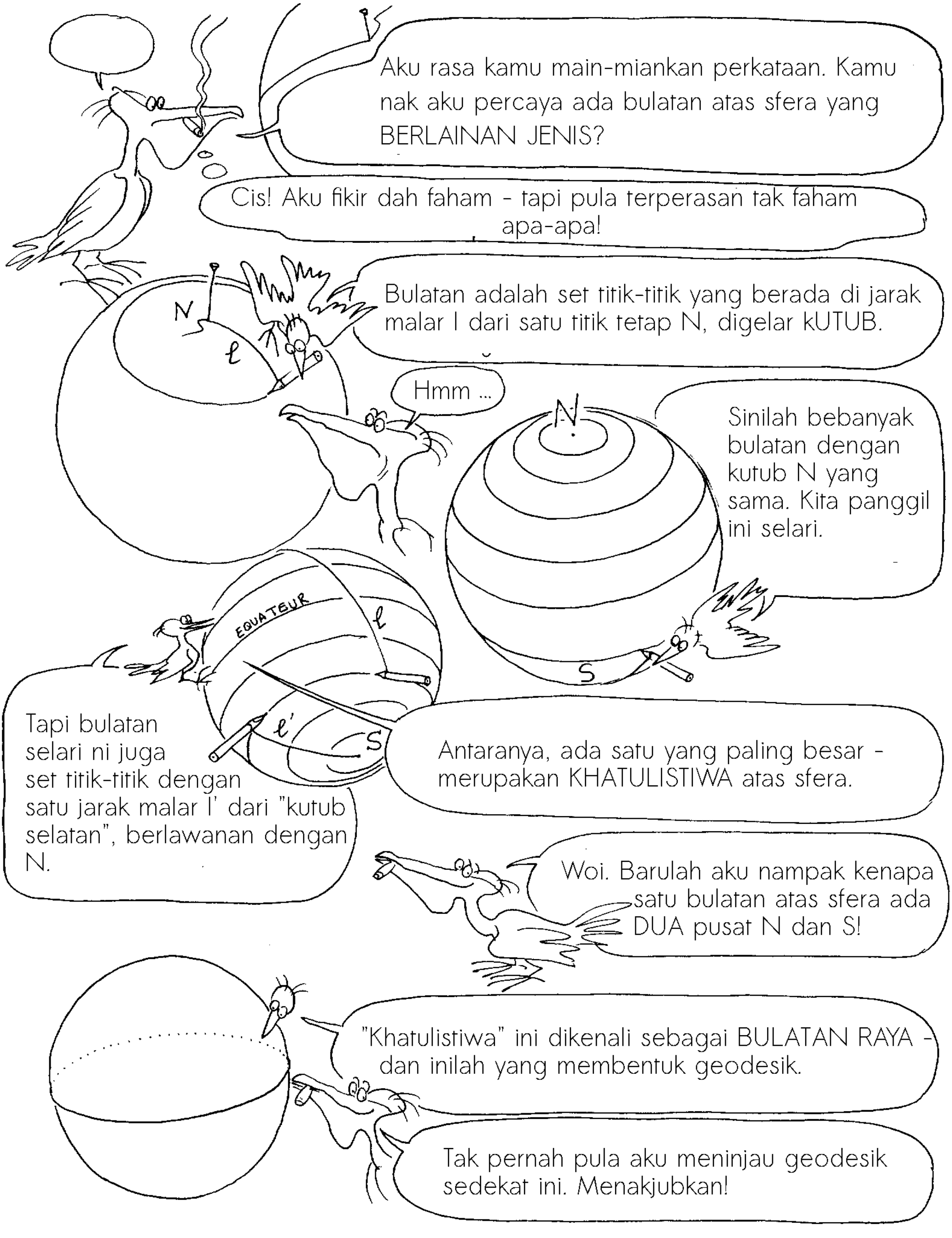
Demi pencerahan, mari kita tiupkan kabus...

Tetiba Awang sedar bahawa dia telah menggunakan peraturan GEOMETRI SATAH apabila berfungsi di atas permukaan SFERA.

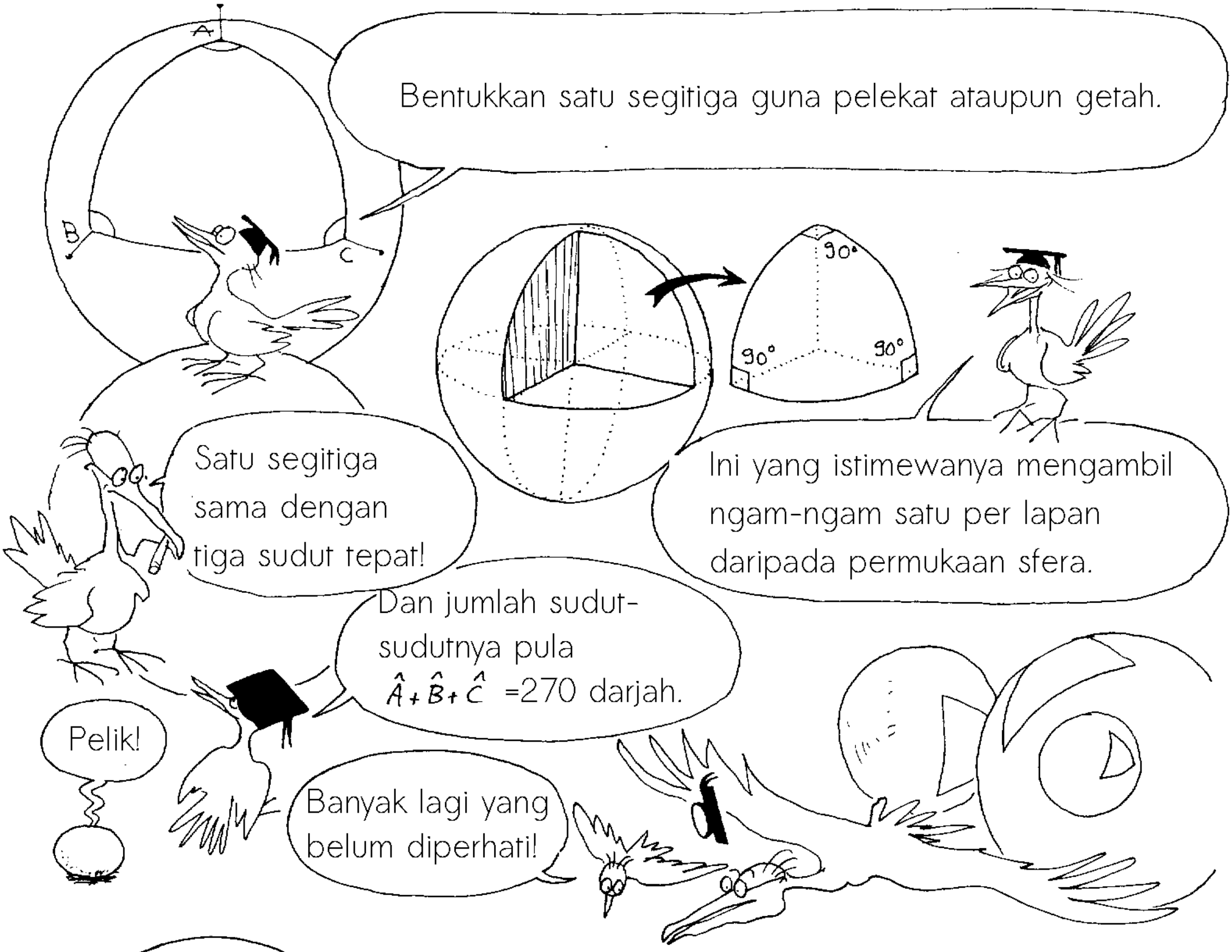


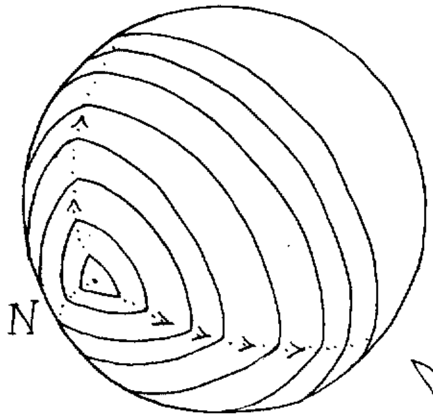
Tengok ni! Macam mana Awang boleh membentuk garis lurus di atas sfera? Tak masuk akal!
Ini terpulang kepada apa yang dimaksudkan oleh "lurus" wahai kawan. Jika maksud kamu "Jalan terdekat", tentunya ada garis lurus di atas sfera.
Hmm... perangkap!
Istilah geodesik (jalan terdekat) bukannya cuma untuk SATAH sahaja.
SATAH
Tegangkan tali kenyal ni antara dua titik atas sfera...
...dan lepaskan!
Toelng.
Dapatlah satu geodesik.


Apa kau mengarut ni? Tidak pun LURUS!
Ambil pembaris ni tengok sendiri.
Ini pembaris ka?
Mestilah. Tentunya satu pembaris untuk permukaan. Atas satah kena guna ni. Tengok, tak melengkung ke mana.
SATAH
Masih juga pembaris pelik.
Apabila Awang lukis geodesik, semua garis tertutup. Adakah geodesik di atas sfera hanyalah BULATAN?
Setiap garis mengikuti jalan terdekat di atas sfera dan geodesiknya TERTUTUP, merupakan bulatan atas sfera. Tapi bukannya bulatan SEBARABGAN!


Aku rasa kamu main-miankan perkataan. Kamu nak aku percaya ada bulatan atas sfera yang BERLAINAN JENIS?
Cis! Aku fikir dah faham - tapi pula terperasan tak faham apa-apa!
Bulatan adalah set titik-titik yang berada di jarak malar l dari satu titik tetap N, digelar kUTUB.
N
ℓ
Hmm ...
N
Sinilah bebanyak bulatan dengan kutub N yang sama. Kita panggil ini selari.
S
EQUATEUR
ℓ
ℓ'
S
Tapi bulatan selari ni juga set titik-titik dengan satu jarak malar l' dari "kutub selatan", berlawanan dengan N.
Antaranya, ada satu yang paling besar - merupakan KHATULISTIWA atas sfera.
Woi. Barulah aku nampak kenapa satu bulatan atas sfera ada DUA pusat N dan S!
"Khatulistiwa" ini dikenali sebagai BULATAN RAYA - dan inilah yang membentuk geodesik.
Tak pernah pula aku meninjau geodesik sedekat ini. Menakjubkan!

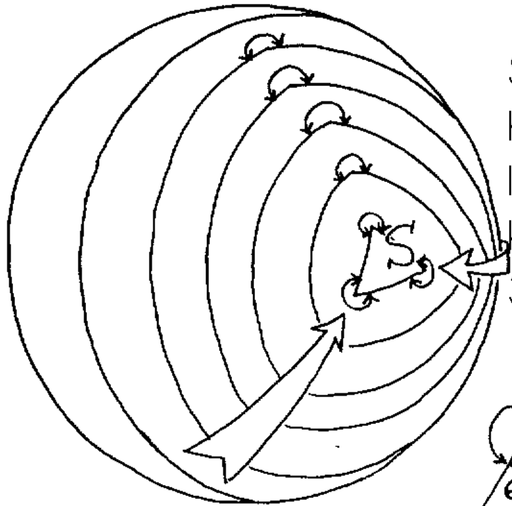

N
BULATAN ARTIK
MADRID
NEW YORK
BULATAN BESAR
SELARI
GARISAN SARTAN
KHATULISTIWA
GARISAN JADI
S
BULATAN ANTARTIKA
Bulatan Artik dan Antartika, garisan Sartan dan Jadi adalah selari atas bumi. Madrid dan New York berada di garis selari. Namun adalah pengetahuan umum bahawa jarak terdekat antaranya bukanlah garis selari ini tetapi ikut lengkungan BULATAN BESAR.
Dahulukala ini dinamakan ORTHODROMI.
A
B
C
Untuk mewakili segitiga sedemikian boleh guna pita atau gelung getah. Sudut boleh diukur dengan meletakkan jangka sudut pada setiap satunya.
Jadi, berapa jumlah sudut-sudut $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$?
Itu terpulang pada segitiga, namun ianya di antara 180 & 900!
Pada jarak yang dekat, sfera adalah seakan-akan mendatar. Maka dalam kes ini, jumlah sudut-sudut...
...sangat dekat dengan 180 darjah.



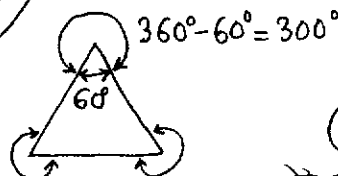


Bayangkan satu segitiga, diperbuat daripada getah, yang mana beranjak atas sfera. Sudut-sudutnya menjadi semakin besar, begitu juga jumlahnya.

Tiba satu peringkat tiga garis semuanya berada di atas satu bulatan besar. Khatulistiwa sfera itu. Sudut A, B dan C semuanya garis lurus iaitu 180 darjah. Jumlahnya sekarang 540 darjah!!



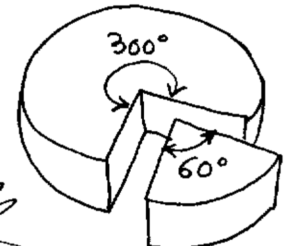
Sementara segitiga terus mengembara ke arah hemisfera selatan, garis-garisnya mengumpul ke titik S lawan arah N. Mendefinisikan sudut seperti tersebut, kita telah melampaui 180 darjah! Lebih tepat lagi 360darjah - 60darjah =300darjah.



Jumlah: $300 \times 3 = 900°$

Pulak.

Satu bulatan penuh mempunyai 360 darjah.

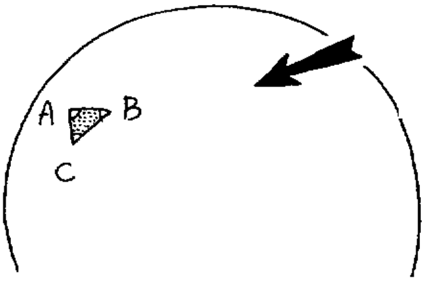


Maka, di atas sfera, jumlah sudut boleh jadi dalam lingkungan 180 darjah dan 900 darjah!

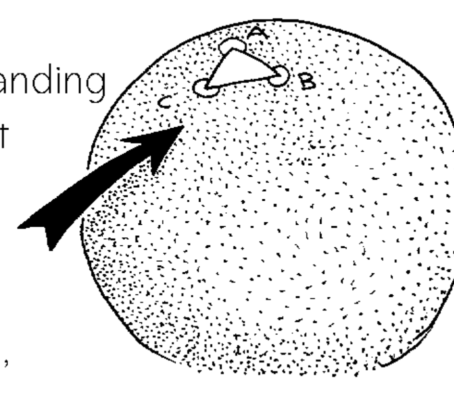
Hakikatnya, mengikut teorem yang dibuktikan oleh GAUSS, jumlah sudut adalah:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3.1416\, R^2}\right) \text{ darjah,}$$

di mana R merupakan jejari bulatan, dan A LUAS segitiga itu.

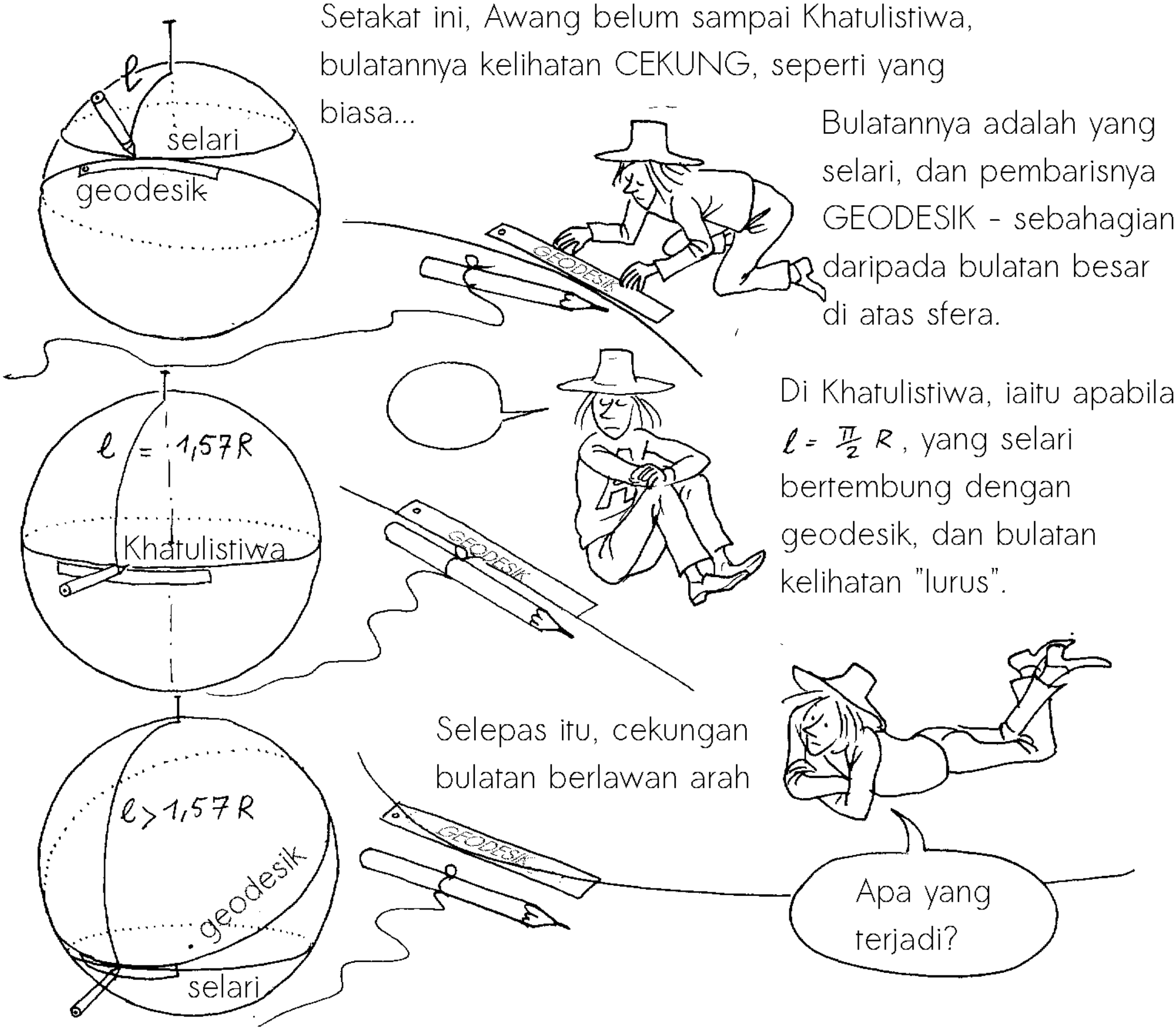


Apabila luas kecil berbanding dengan sfera, kita dapat semula rumusan Euklid ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$)

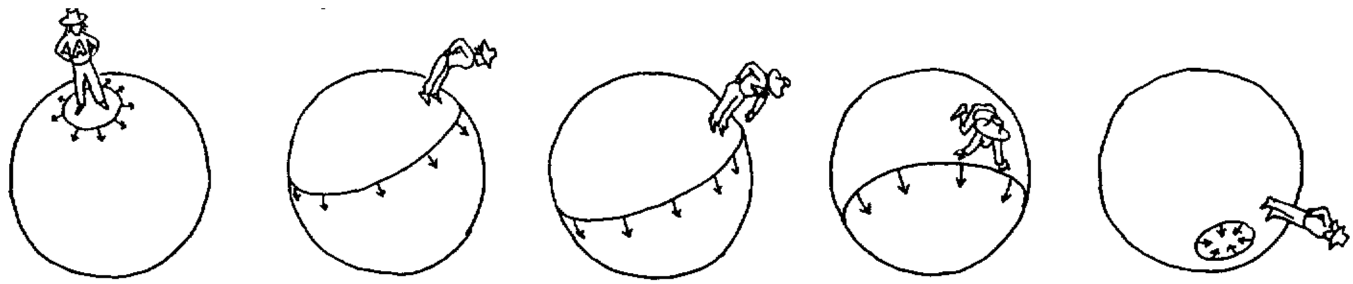


Namun, luas segitiga jika seakan-akan luas sfera, $4 \times 3.1416 \times R^2$, kita dapat 900 darjah.

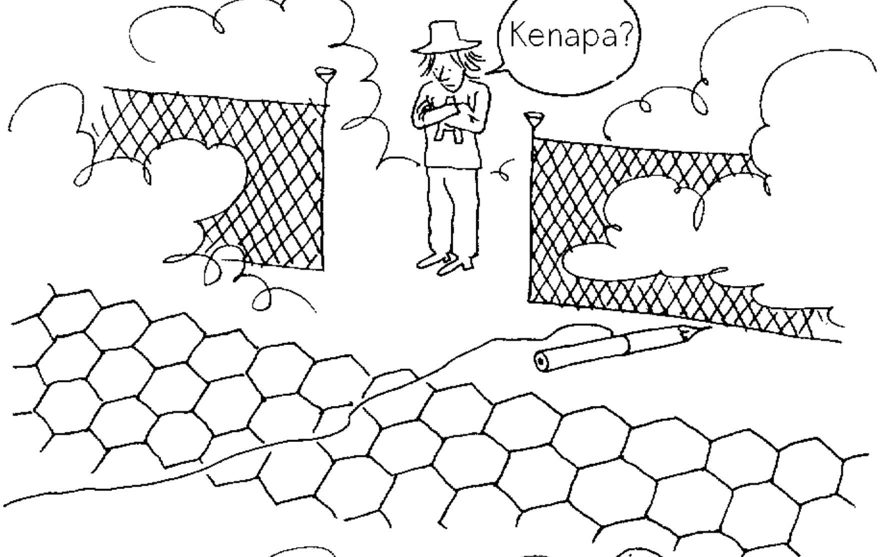

MEMO:
N
S
Dua titik atas sfera boleh disambungkan oleh dua lengkungan Geodesik, untuk membentuk SATU Bulatan Besar. Namun jika titik-titik N dan S adalah BERTENTANG KUTUB, akan jadi Bulatan Besar yang bilangannya TIDAK TERHINGGA melalui kedua-duanya! Dua garisan sedemikian atas sfera membentuk satu DWISUDUT, dengan saiz yang sama di setiap verteks. Jumlah sudut boleh jadi... SEBARANGAN!!
Memang Gila!
BOS
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Mari kita tinjau sekarang kenapa Awang ada terlebih jubin dan terlebih pagar tadi...
(C) merupakan bulatan yang dia terlukis, dan (γ) bulatan yang dia ANGGAP terlukis. Untuk kiraan luas, dia guna formula geometri satah: $\pi \ell^2$ (π=3.14159...). Luas sebenar adalah separuh luas sfera, $2\pi R^2$. ℓ adalah sesuku ukurlilit sfera, $\frac{1}{2}\pi R$. Maka nisbah antara dua keluasan adalah $\frac{\pi^2}{8}$ = 1.233. Nisbah antara ukurlilit adalah $\frac{2\pi \ell}{2\pi R} = \frac{\pi}{2}$ = 1.57. Jika anda masih kurang yakin, cuba balut cakera itu ke atas sfera!
Oops, ada lipatan!
Cakera, cakera apatu?



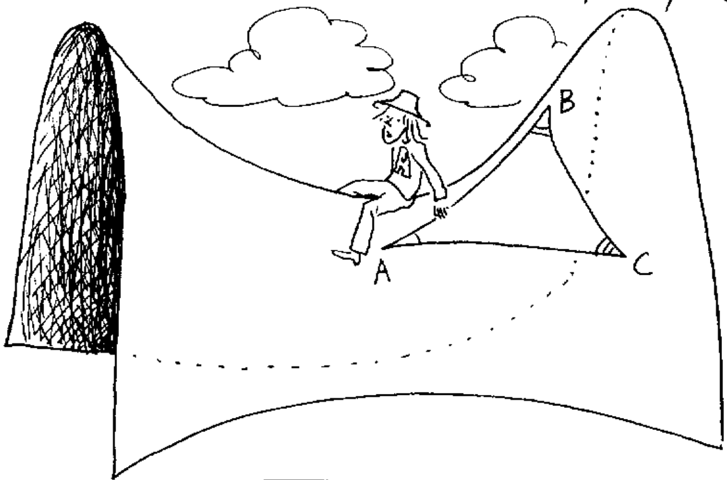
Ini menjelaskan bagaimana kamu boleh "masuk" atau "keluar" dari satu bulatan di atas sfera tanpa menyeberanginya. Bayangkan bulatan diperbuat daripada gelung getah yang mengelunsur atas sebiji bola.




Geometri sfera
GAUSS
Untuk memahami idea-idea begini yang terbongkar oleh ilmuwan Gauss (1777-1855) memakan seketika masa Awang. Dia berhasrat untuk menghadam pula geometri permukaan selepasnya.
Baiklah, aku sudah bersedia: pembaris, jangka sudut, bebenang dan tukul. Berganjak!
Ilmu!
Kekadang mengejar ilmu kena harungi risiko...
Sesampainya Awang ke alam baru, dia memaparkan geodesik lagi - Namun kali ini...
Huh! Aku tak ke MANA pun kali ini!
Geodesik itu tidak menutup!
Baiklah, cuba pula cara LAIN.
Menggunakan tiga benang regang, Awang membina satu segitiga - Tetapi kali ini jumlah sudut-sudutnya KURANG dari 180 darjah!

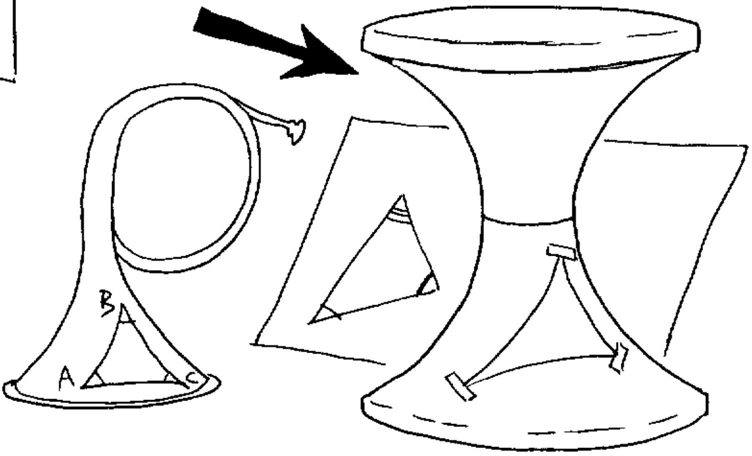


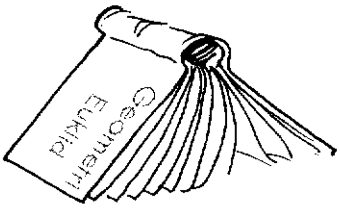
Selalunya, bulatan ditakrifkan sebagai jarak tetap dari satu titik terpilih, namun Awang mendapati bulatan yang dilukis atas permukaan baru ini mempunyai ukurlilit yang lebih BESAR dari , dan luas LEBIH dari .



MENGHILANGKAN

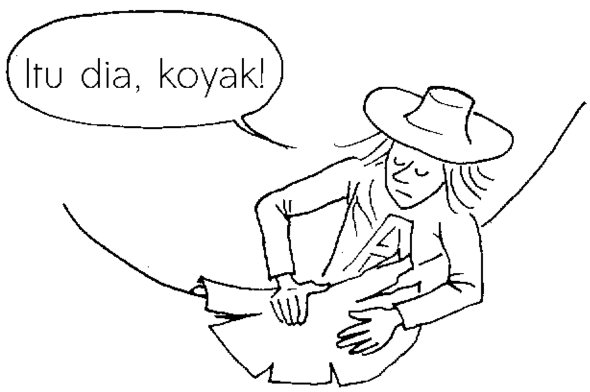
Permukaan ini sekarang sama seperti bentuk lurah bukit, atau PELANA atas kuda. Banyak objek harian juga begitu - trompet, bangku begini, atau...



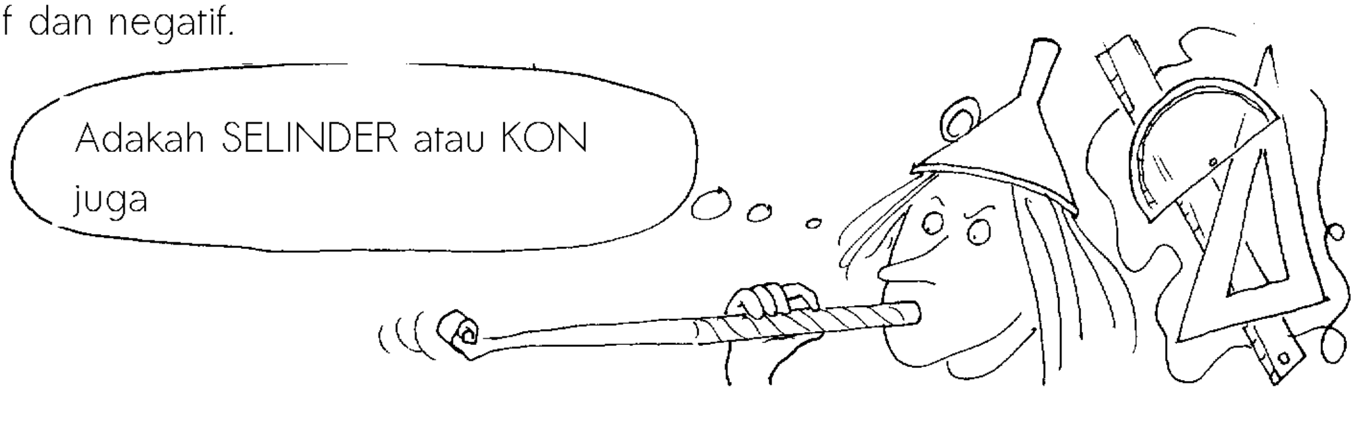


LENGKUNGAN:

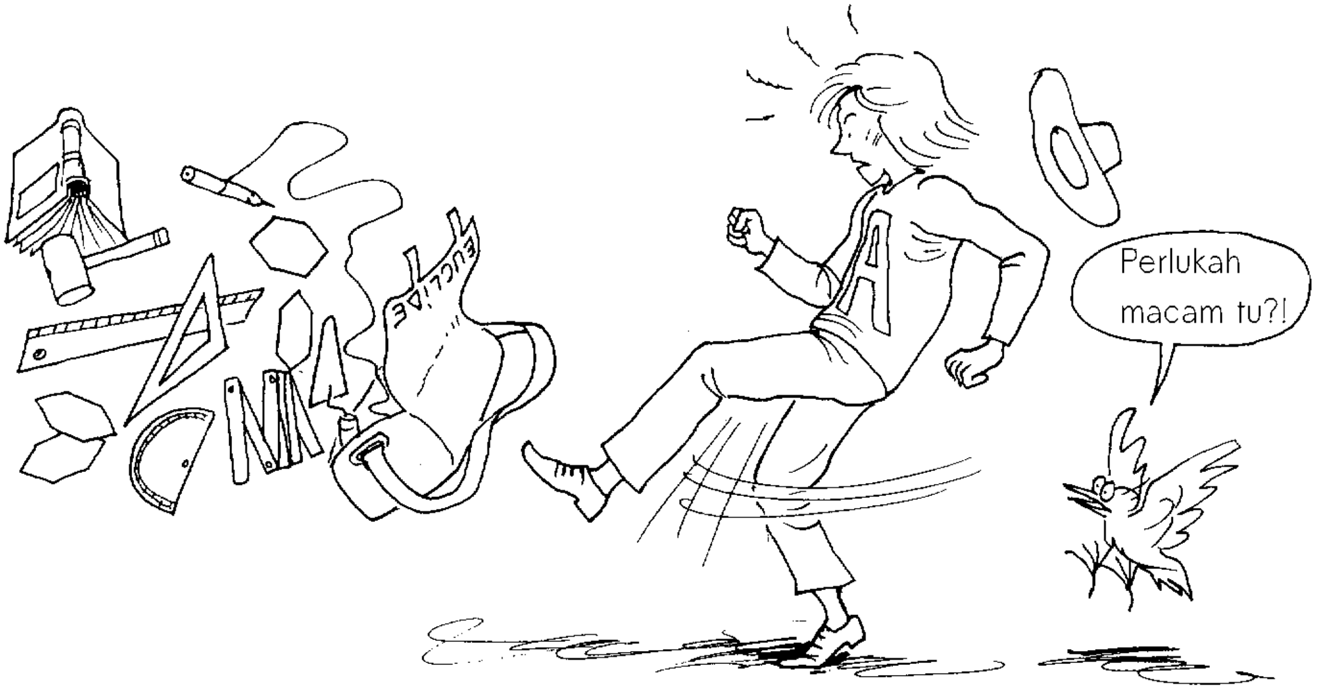
Sesuatu permukaan LENGKUNGAN merupakan salah satu daripada yang tidak mematuhi teorem Euklid. Lengkungan boleh jadi positif atau negatif.
Atas LENGKUNGAN POSITIF, jumlah sudut sesuatu segitiga lebih besar dari 180 darjah. Jika anda melukis satu bulatan dengan jejari ℓ, luasnya lebih dari $\pi\ell^2$ dan ukurlilitnya lebih dari $2\pi\ell$.
Atas LENGKUNGAN NEGATIF, jumlah sudut sesuatu segitiga kurang besar dari 180 darjah. Jika anda melukis satu bulatan dengan jejari ℓ, luasnya kurang dari $\pi\ell^2$ dan ukurlilitnys kurang dari $2\pi\ell$.
Sebelum ini, Awang mendapati bahawa apabila membalut satu satah atas lengkungan positif, kedut-kedut terbentuk. Adalah mustahil untuk membalut satah pada lengkungan negatif, ianya terkoyak.
Sifat membalut ini adalah ujian termudah untuk mementukan lengkungan itu positif atau negatif.



Seperti mukasurat terdahulu, terdapat permukaan yang ada bahagian lengkungan positif dan negatif.

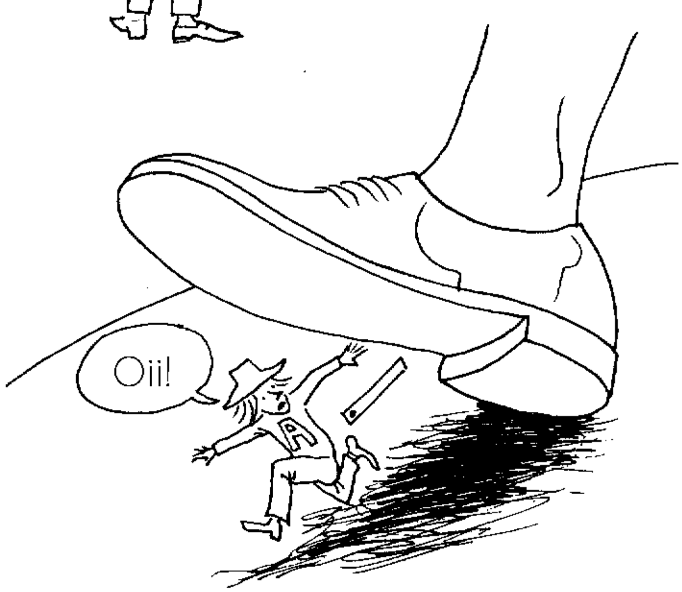


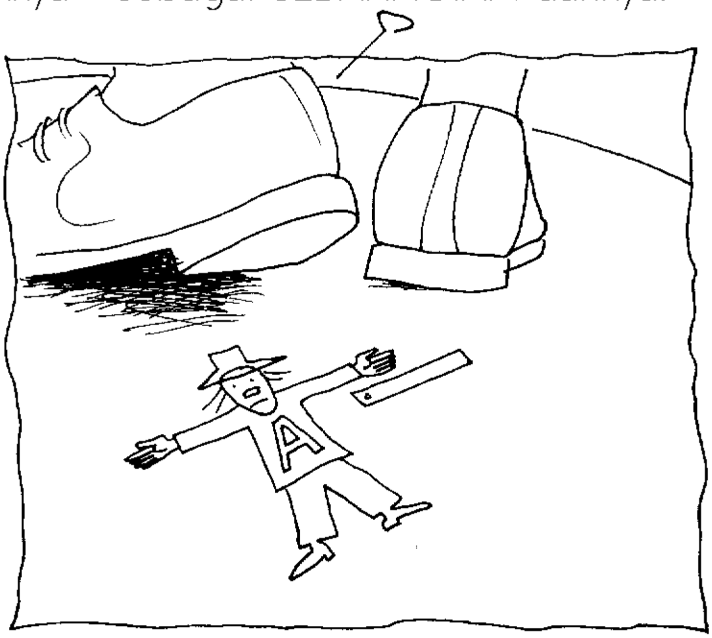

Ujian membalut...
Hmm, boleh membalut satah atas selinder atau kon-lah.
Jangan panik. Aku akan lekatkan tiga gelung elastik - geodesik - atas selinder, menggunakan tep pelekat.
B
A
C
...dan sekarang tandakan geodesik atas permukaan...
...paparkan selinder itu RATA...
!...
B
A
C
Menurut takrif kita, selinder dan kon mematuhi geometri Euklid dan adalah PERMUKAAN RATA!!!



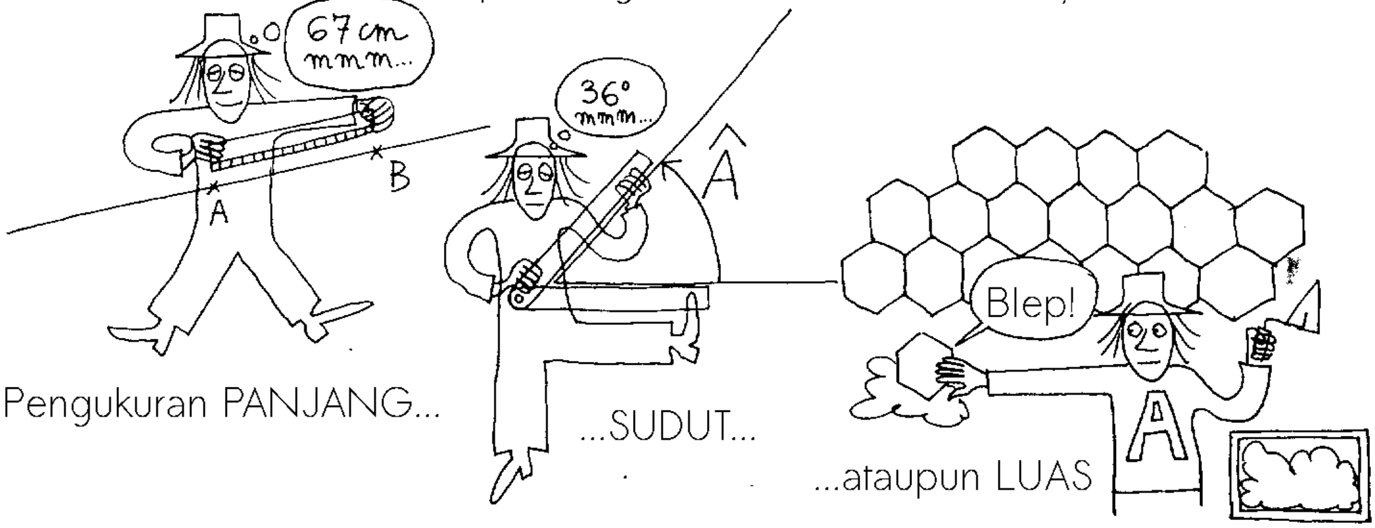
Pengertian RUANG:

Terdahulu, awan menyelubungi penglihatan Awang daripada keadaan yang sampai ke hidungnya - atau lebih kurang sana. Jikalau bukan, dia akan terlihat lengkungan RUANG SFERA yang dia berada di ATAS. Ada satu cara lain untuk menhalang Awang dari MELIHAT lengkungan permukaan: buatkan supaya dia hidup di DALAMnya - sebagai SEBAHAGIAN darinya.





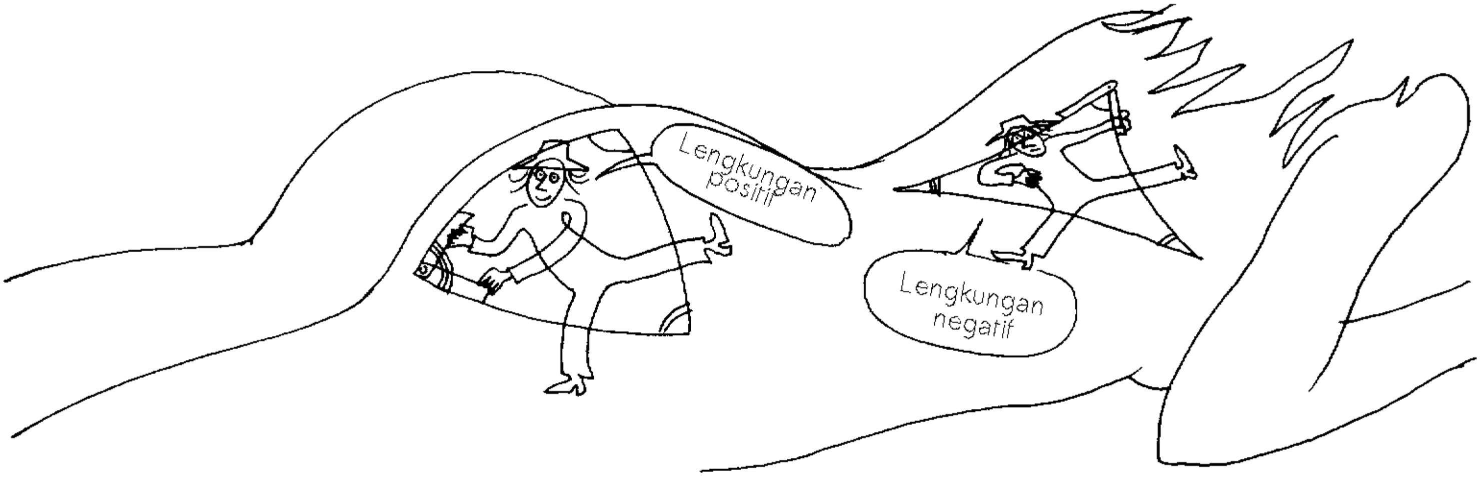
Perhatikan bahawa titik pandangan baru ini tiada kesannya ke atas:



Namun begitu, walaupun terbelenggu dalam permukaan sahaja, Awang masih boleh buat anggapan lengkungannya dan buat keputusan samada ianya positif atau negatif, dan mengukurnya, tanpa MELIHATnya. Jika jumlah sudut segitiga adalah 180 darjah, maka permukaan adalah satu SATAH. Jika jumlah melebihi 180 darjah, maka lengkungan positif, dan Awang boleh mengira JEJARI TEMPATAN LENGKUNGAN R dengan formula $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3.1416\, R^2}\right)$ darjah, di mana A merupakan luas segitiga itu.

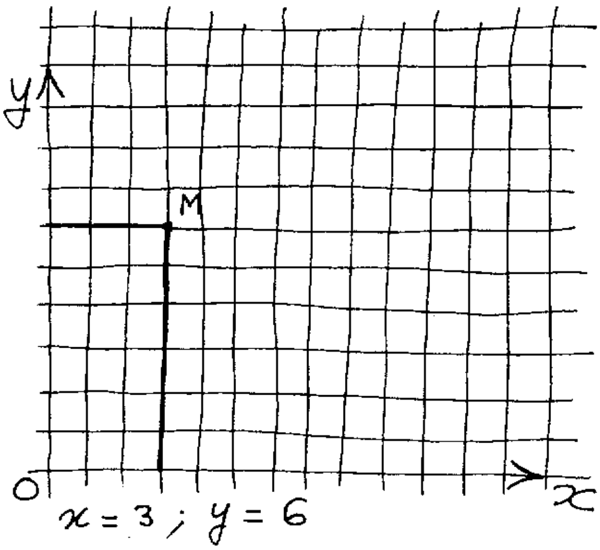
Jika jumlah sudut kurang daripada 180 darjah, kita boleh mentakrifkan jejari lengkungan R dengan $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1 - \frac{A}{3.1416\, R^2}\right)$, tetapi ianya tidak lagi mempunyai MAKNA FIZIKAL BIASA.

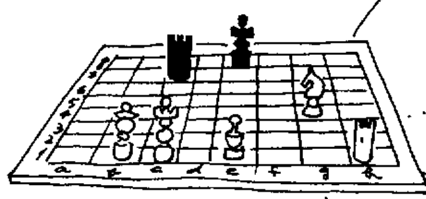
Perhatikan bahawa kita boleh merangkumi SATAH sebagai permukaan di mana lengkungan R adalah TIDAK TERHINGGA. Dengan demikian, kita boleh memulihkan Teorem Euklid umum.



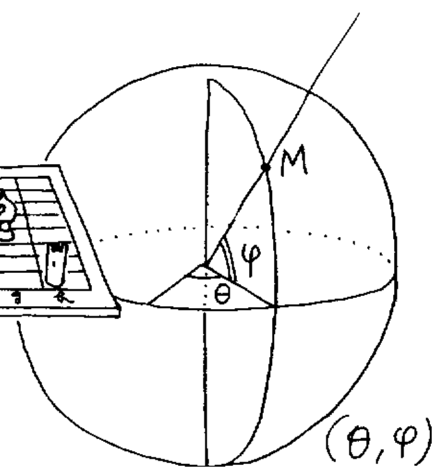
KONSEP DIMENSI:

Bilangan dimensi adalah kuantiti nombor atau KOORDINAT yang harus diberi untuk mentakrifkan kedudukan sesuatu titik di dalam ruang yang terpilih. PERMUKAAN adalah ruang dua dimensi di mana kuantiti yang digunakan untuk pengukuran boleh jadi panjang, nombor, sudut...

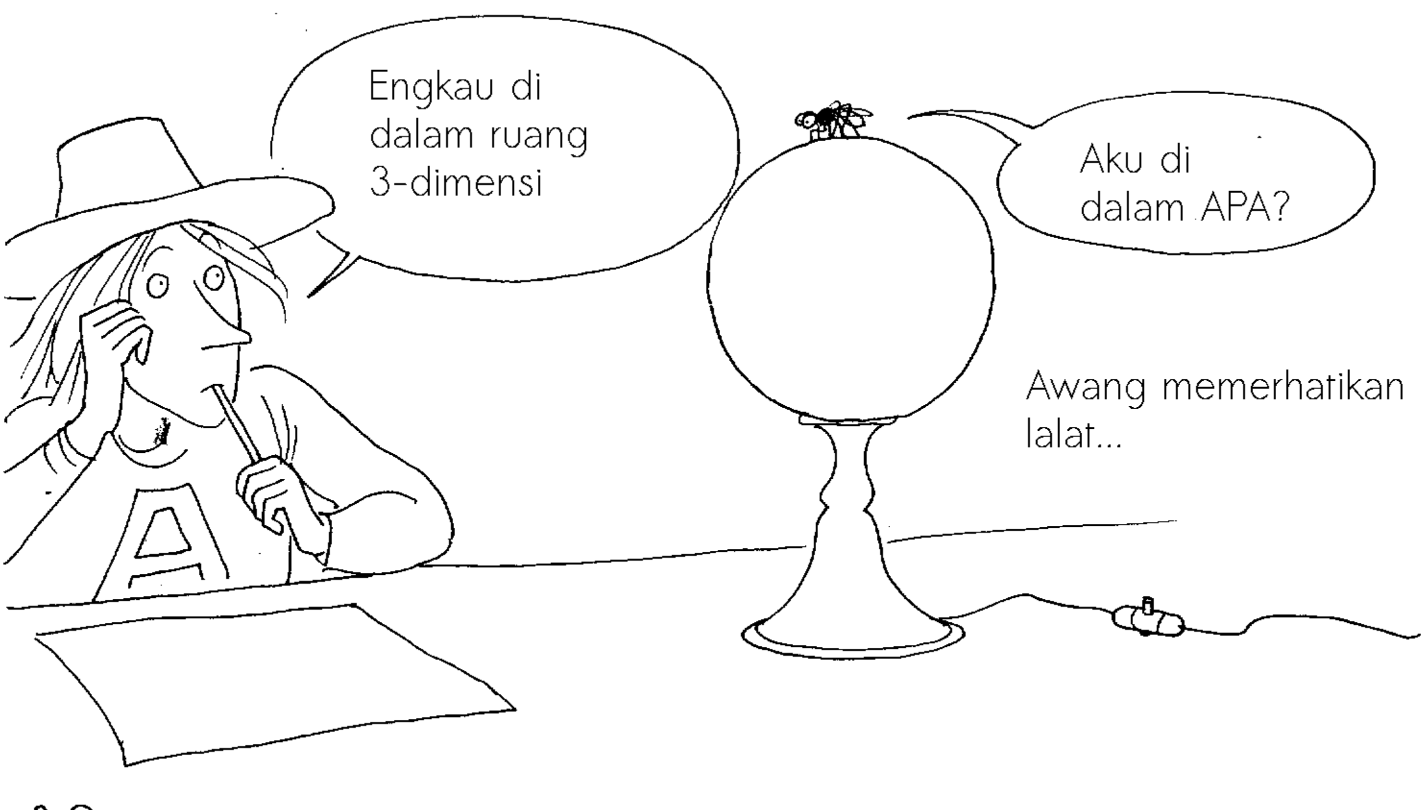


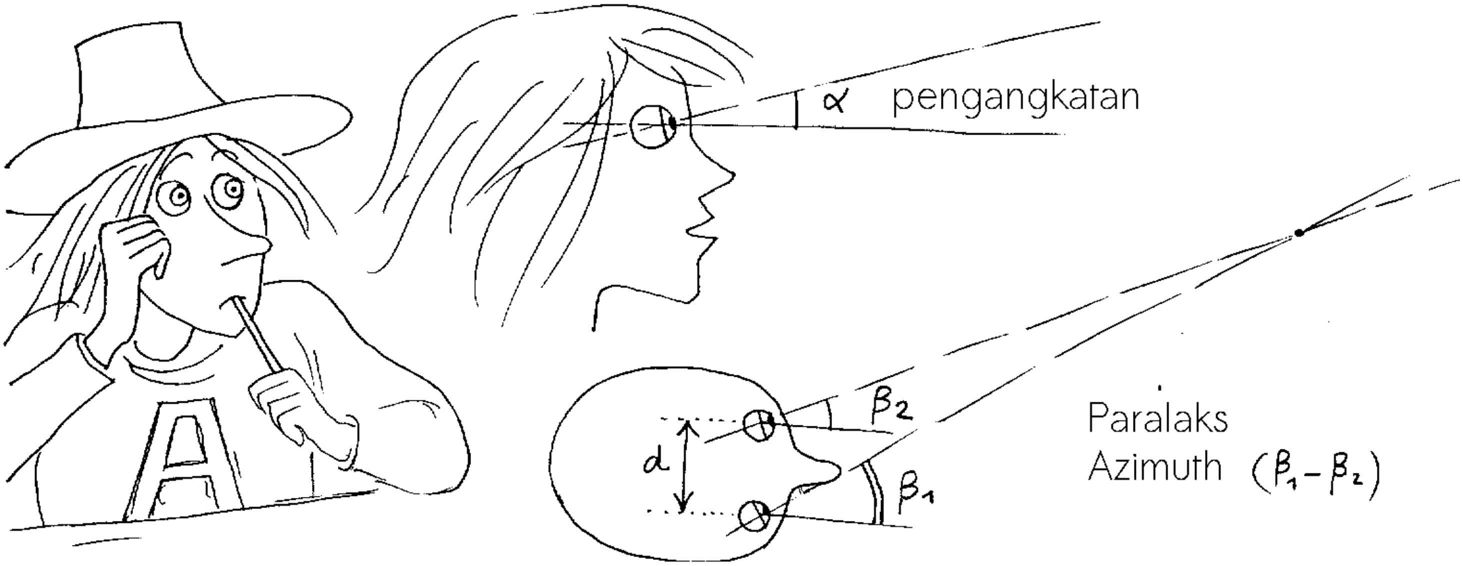


Kuda ke g 4

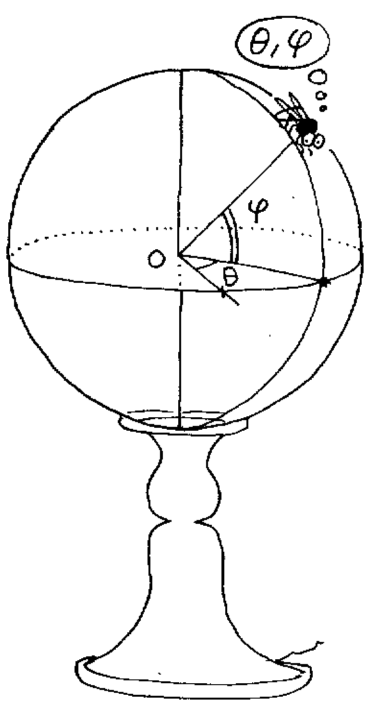


Longitud,



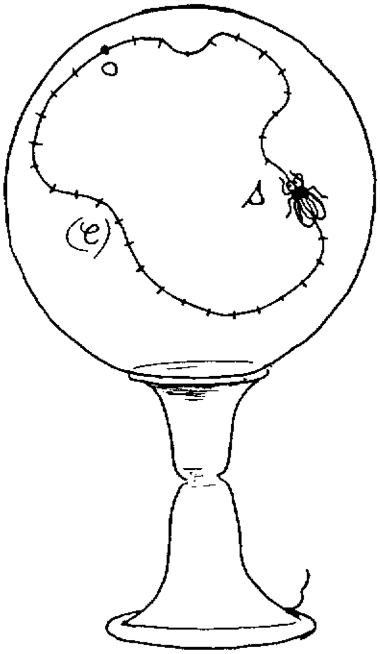


Awang boleh mendapatkan kedudukan barang-barang dengan tengkoraknya...
Kedudukan sesuatu titik boleh ditentukan dengan tiga sudut: pengangkatan α , penyimpangan Azimth β_1 & β_2 kedua-dua matanya.
Beza sudut $\beta_1 - \beta_2$ dipanggil PARALAKS.
Otak Awang boleh tafsir paralaks ini dan agak jaraknya.



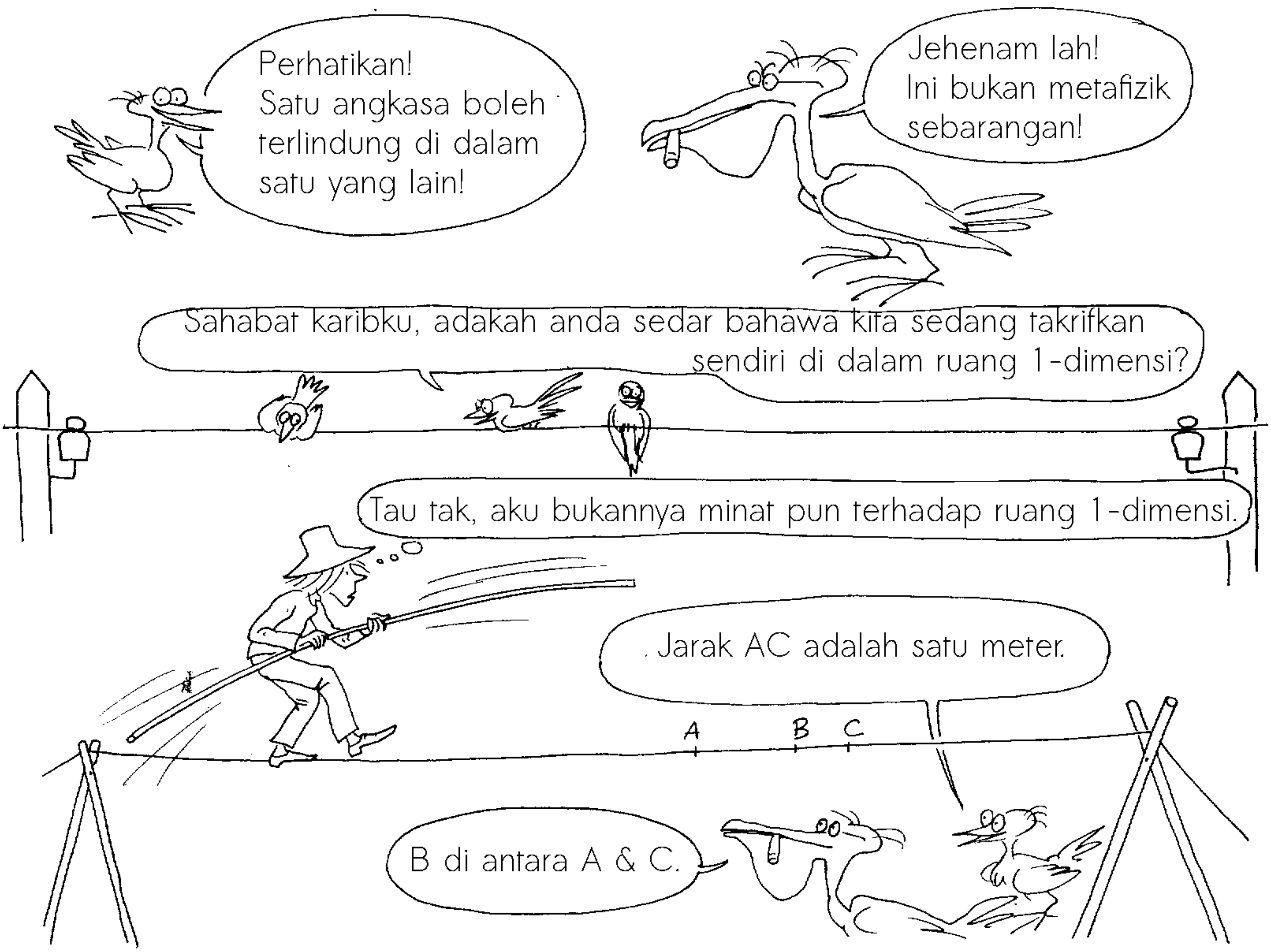
Namun lalat anggap dirinya bergerak atas bayang lampu sfera, di mana kedudukannya, di dalam ruang 2-dimensi ini, boleh ditunjukkan dengan hanya dua sudut θ dan φ (longitud & latitud).

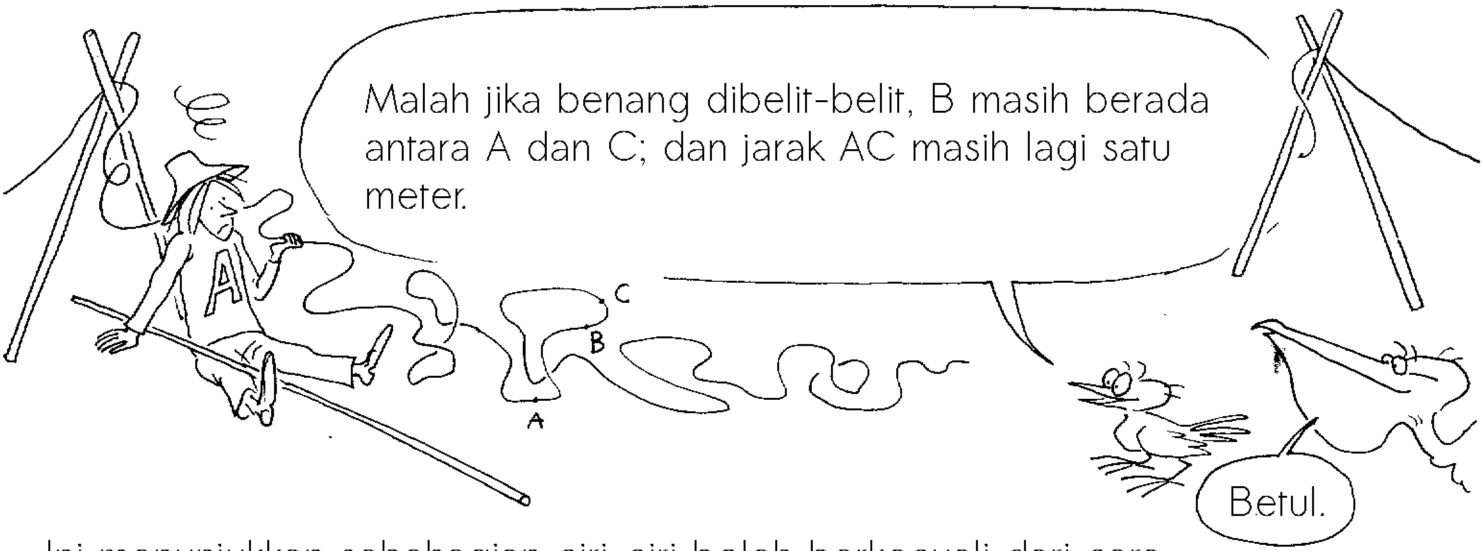
Kita megatakan bahawa ruang 2-dimensi ini RENDAM (atau BENAM) di dalam ruang 3-dimensi biasa.



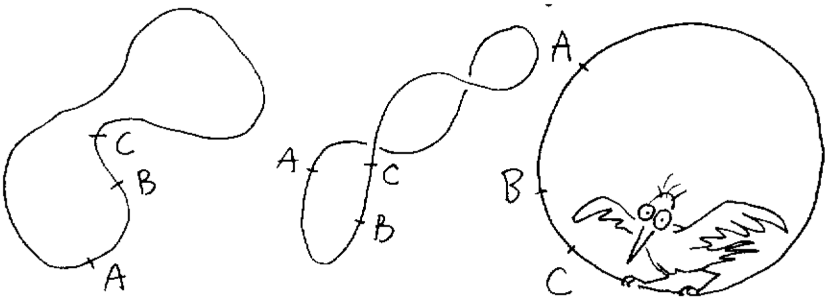
Anggapkan lalat itu mengikuti satu lengkungan (𝒞) di atas sfera. Kita boleh mewakili kedudukannya sekarang dengan hanya SATU koordinat - jarak dari titik permulaan (dengan mengambil jarak terbalik sebagai negatif). Satu lengkungan adalah gambaran pada ruang 1-dimensi.

Ruang 1-dimensi ini terendam di dalam ruang 2-dimensi (sfera) yang ianya pula terendam di dalam ruang 3-dimensi. Jadi, ruang kita sendiri BOLEH terendam di dalam satu yang lebih tinggi dimensinya, yang mana kita tidak sedar akannya.





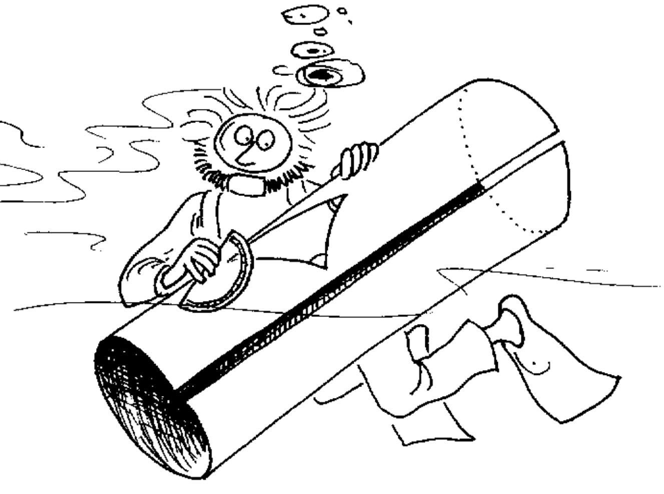
Ini menunjukkan sebahagian ciri-ciri boleh berkecuali dari cara di mana ruang itu rendam.



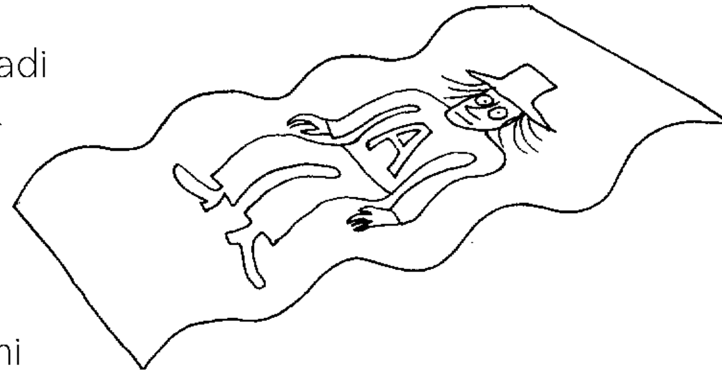
Di sini cara-cara merendam LENGKUNGAN TERTUTUP di dalam ruang biasa. Fakta bahawa ianya tertutup tidak tergantung pada cara ianya terendam.

Tetapi kita harus berwas-was untuk tidak meregang atau memampat benang tersebut, supaya tidak menukar JARAK antara titik-titik itu. Cuba pula merendam PERMUKAAN di dalam ruang biasa.

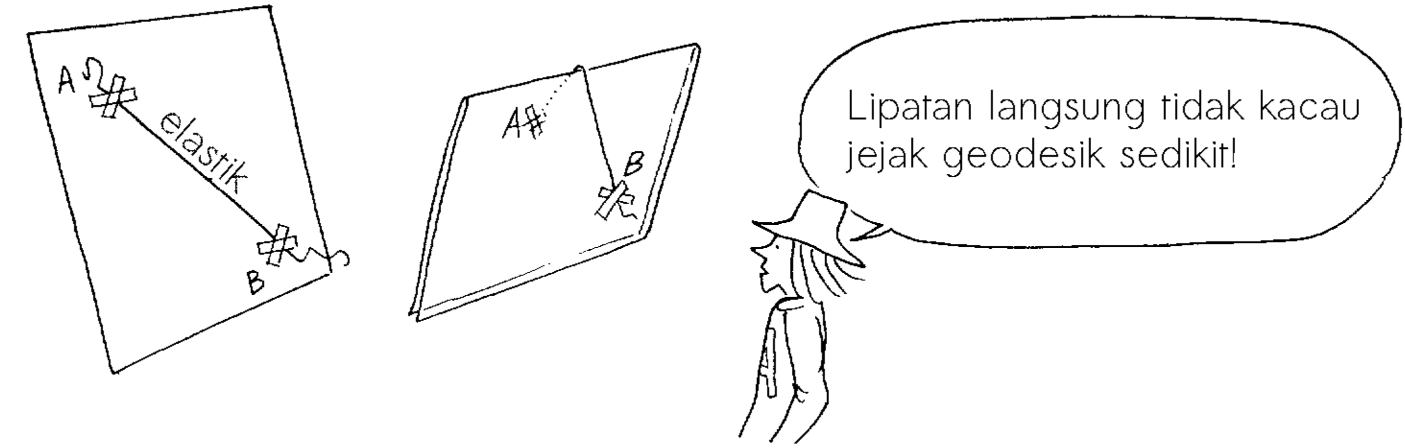
Jika kita merendam satu SATAH di dalam ruang 3-dimensi biasa, kita boleh membengkokkannya tanpa kacau GEOMETRI TABII.



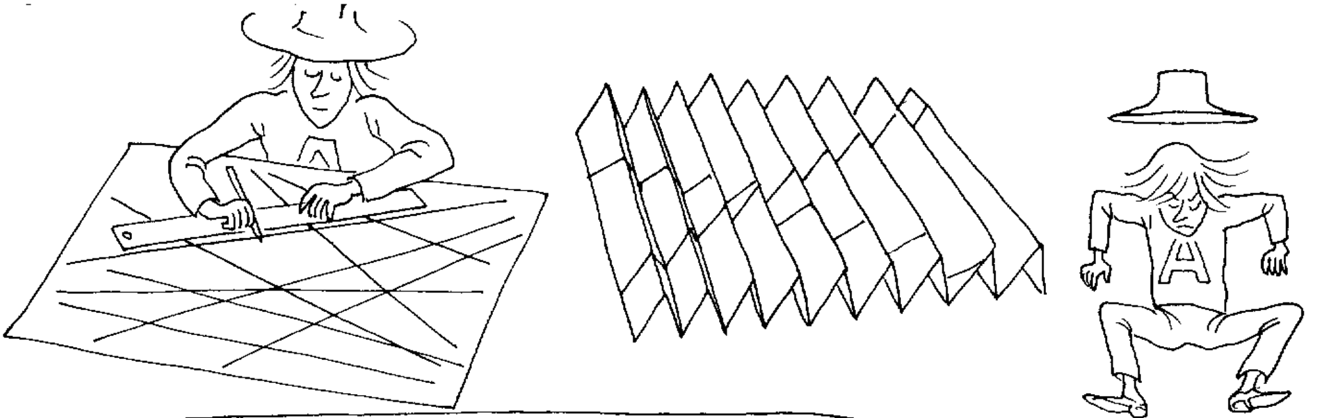
Kita telah melihat menggelung satah jadi
selinder tidak berkesan atas geodesik
atau sudut.
Dari pandangan ini sesuatu helaian
berkedut-kedut selalu mempunyai
satu geometri SATAH EUKLID.
Penduduk di ruang dua-dimensi begini
tidak akan menyedari selok-belok
juga naik turun permukaan, di mana itu hanya ciri-ciri pemboleh-ubah
permukaan terendam di dalam ruang tiga-dimensi.

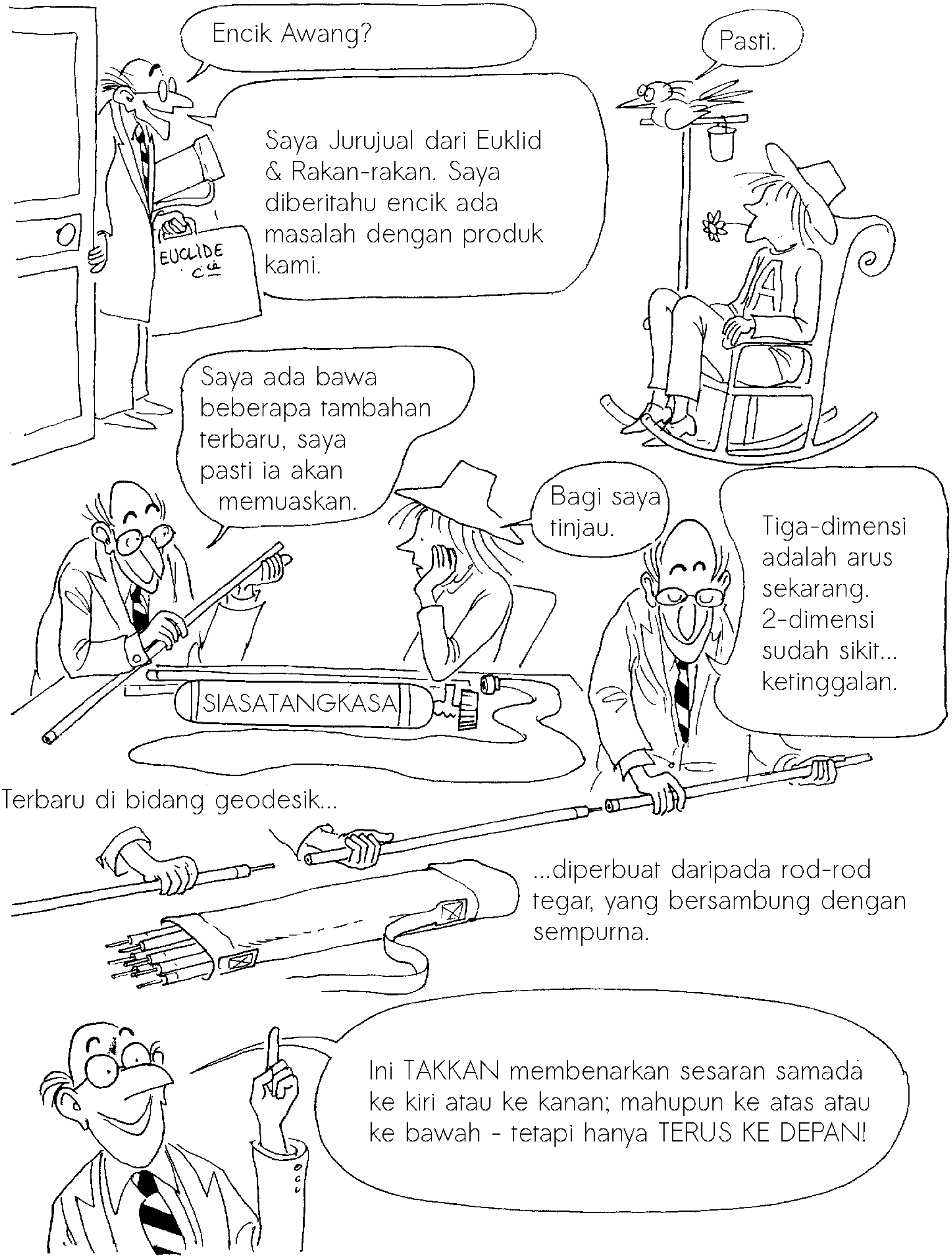


Ambil sekeping satah dan lipatkannya:



Menggunakan pembaris, lukiskan bebanyak garis lurus (geodesik) atas sekeing kertas. Lipatkan kertas itu beberapa kali. Apa yang anda lihat adalah geodesik samada permukaan terlipat atau tidak!



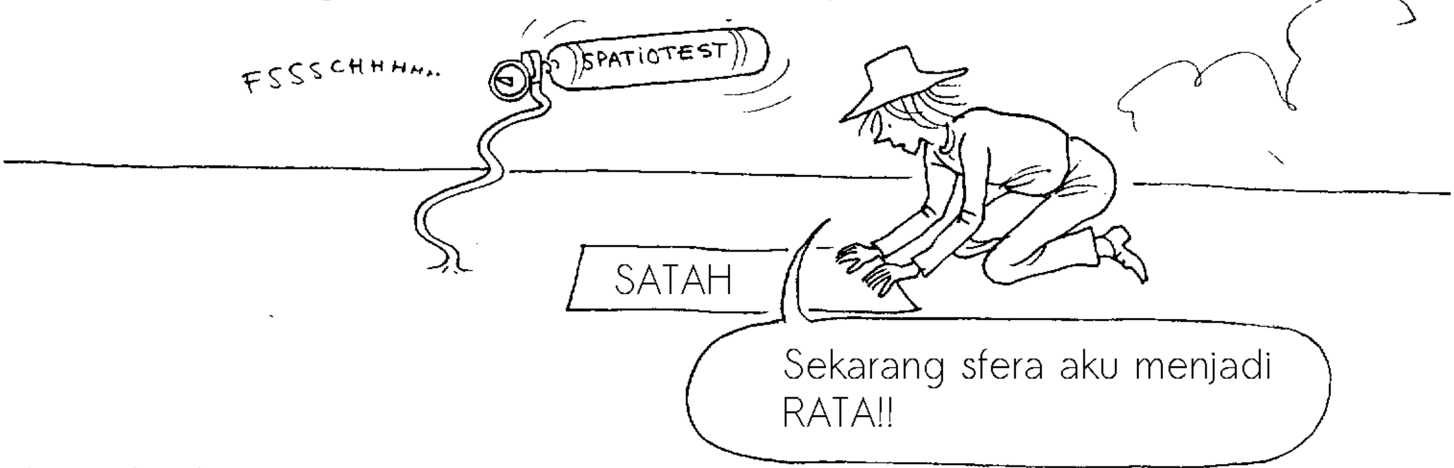

Encik Awang?
Saya Jurujual dari Euklid & Rakan-rakan. Saya diberitahu encik ada masalah dengan produk kami.
EUCLIDE
Pasti.
Saya ada bawa beberapa tambahan terbaru, saya pasti ia akan memuaskan.
SIASATANGKASA
Bagi saya tinjau.
Tiga-dimensi adalah arus sekarang. 2-dimensi sudah sikit... ketinggalan.
Terbaru di bidang geodesik...
...diperbuat daripada rod-rod tegar, yang bersambung dengan sempurna.
Ini TAKKAN membenarkan sesaran samadá ke kiri atau ke kanan; mahupun ke atas atau ke bawah - tetapi hanya TERUS KE DEPAN!


Untuk pengukuran luas, bolehlah cuba CAT baru kami, 100g per meter persegi, tepat.
Pandainya.
Untuk isipadu pula, Selider gas ini. Boleh baca nilainya terus daripada meter yang sangkut pada SIASATANGKASA.
Ingat - luas sfera $4\pi l^2$, isipada $\frac{4}{3}\pi l^3$.
OK.
EUKLID
Memang kerja susah.
Kali ini Awang mendarat di satu ruang 3-dimensi. Kita mengikuti pengembaraannya...


Cantiknya kejuruteraan yang jitu, setiap rod tepat satu meter.
Tetapi beberapa ketika selepas tersambung rod-rod...
Alamak, lagi sekali!
Geodesik menutup.
Ruang 3-dimensi tertutup?
Habis cerita!!
Awang yang duduk atas asteroid yang melaluinya, Tatkala menikmati roti bakar, berhasrat untuk mengukur sudut lagi.
EUCLIDE
Sekarang aku akan membina satu SEGITIGA daripada tiga GEODESIK...

Aku telah pasang geodesik dengan sebaik-baiknya - tapi jumlah sudut segitigaku lebih dari 180 darjah!
Baiklah...
SPATIOTEST
FSCHHHHHHHH
Saya akan bikin satu dan ukur isipadu serta luas permukaannya.
Sfera berjejari ℓ adalah set titik-titik berada pada satu jarak tetap ℓ dari satu titik yang diberi, yang akan aku namakan N.
Luasnya kurang dari $4\pi\ell^2$...
...dan isipadunya kurang dari $\frac{4}{3}\pi\ell^3$!
Ini cukup pening!

Awang menambahkan jejari sferanya...



Lagi dan lagi...

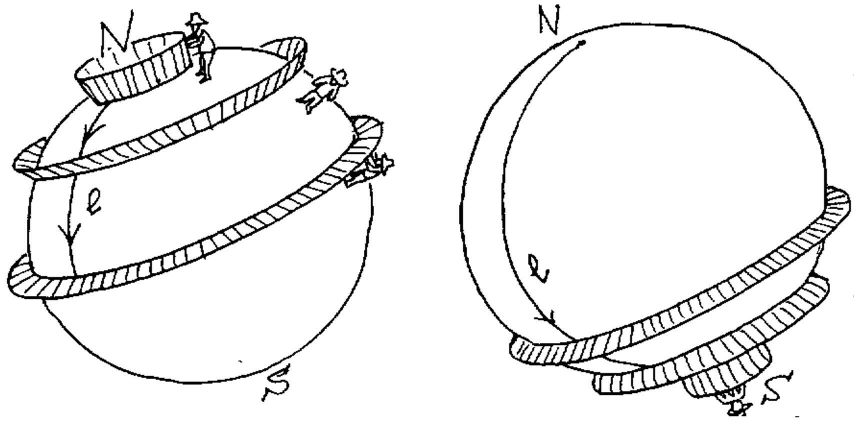
Beberapa ketika kemudian...

Maka... hanya dengan meniupkan satu belon di dalam ruang 3-dimensi, Awang terperangkap - DI DALAMNYA!

Jika dia tidak menyekat gas dalam masanya, dia akan dihimpit seperti yang berlaku di mukasurat 13 di mana dia terperangkapkan di dalam penjara sendiri.

Niat yang terbaik di dunia ini pun tidak mungkin MELIHAT LENGKUNGAN sebegini dalam ruang tiga-dimensi ini. Geodesiknya menutup dan jumlah isipadunya adalah meter kiub satu angka tak terhingga, seperti permukaan planet kita, di mana hanya meter kiub nombor terhingga sahaja menduduki. Jumlah sudut sesuatu segitiga di dalam ruang 3-dimensi ini adalah lebih daripada 180 darjah. Untuk "LIHAT" lengkungan itu, haruslah tinjau dari empat-dimensi.

Boleh jadi benar bahawa ALAM 3-dimensi kita adalah satu HIPER-PERMUKAAN yang terendam di dalam ruangan 4-dimensi, yang mana ianya terendam di dalam hiper-permukaan dalam lima-dimensi, dan sebagainya. Tetapi buat masa kini, bukan citarasanya untuk membincang...



Atas sfera, dengan membesarkan jejari ℓ kawasannya, Awang mendapati dia berada di titik kutub S melawan titik asal N - terperangkap di dalam bahan sendirinya.

Di dalam ruang 3-dimensi berlengkungan positif, perkara yang sama terjadi. Dalam sfera 2-dimensinya, Awang mencapai KHATULISTIWA, menutupi setengah luas yang ada. Di dalam ruang HIPER-SFERA 3-dimensi ini, juga ada satu KHATULISTIWA; and Awang sampai sana semasa belonnya menduduki setengah isipada yang ada. Di atas sfera, khatulistiwa nampaknya seperti satu GARIS LURUS. Seperti itu, di atas hiper-sfera, "belon khatulistiwa" nampaknya seperti satu SATAH. Selepas melalui khatulistiwa dan kecekungan terbalik, dan dia bergerak sendiri ke arah titik S, lawan kutub N, tengah belon.

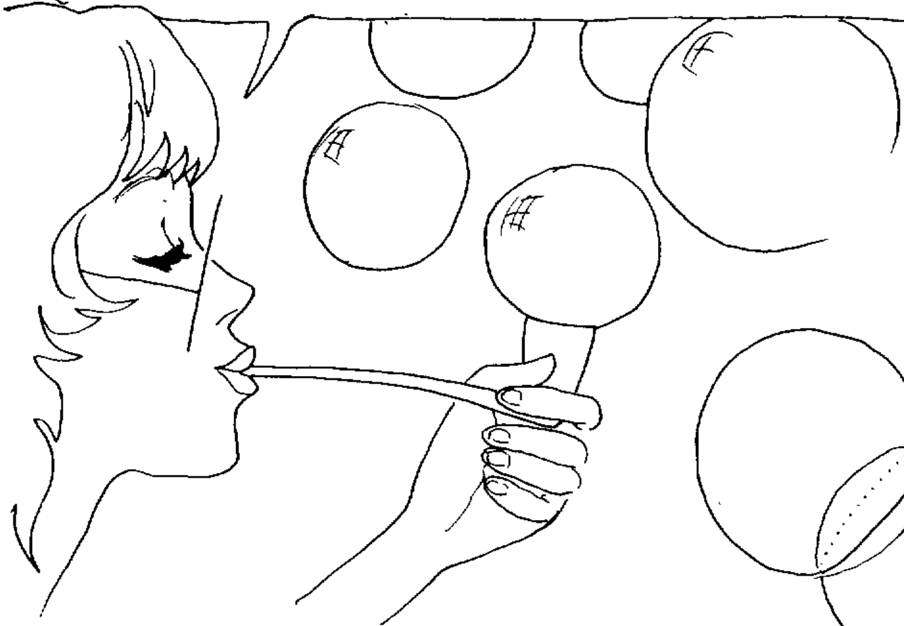

MASALAH?
Er, semuanya mengacau di dalam kepala otakku.
Nama saya Sofie. Semua jenis lengkung - itulah bidang saya.
Mengembara di atas hiper-sfera agak memeranjatkan pada mulanya. Cara terbaik supaya tidak terbuntu adalah jalan sedikit demi sedikit pada satu masa.
Mmm, ya.
Saya sudah kehilangan.


Mula-mulanya, manakah PUSAT hiper-sfera?
Tengok ni - jika saya lukis satu bulatan atas SATAH, anda akan bersetuju ia mewakili satu ruang dengan satu-dimensi yang TERENDAM di dalam ruang 2-dimensi - iaitu, satah.
Dan pusat bulatan BUKANNYA atas bulatan itu.
Er.
Satu sfera mewakilu satu ruang 2-dimensi tertutup, terendam di dalam ruang 3-dimensi. Sekali lagi pusat sfera BUKANNYA berada atas sfera tu sendiri - hanya di dalam ruang 3-dimensi yang mengelilinginya.
Pusat satu hiper-sfera, dengan 3-dimensi, boleh didapati di dalam ruang 4-dimensi, dengan syarat kita anggap ianya TERENDAM sedemikian. Namun ianya tidak berada hiper-sfera yang sebenar. Begitu juga boleh direndamkan hiper-sfera 4-dimensi di dalam ruang 5-dimensi, dan seterusnya selagi yang mau dilalukan...

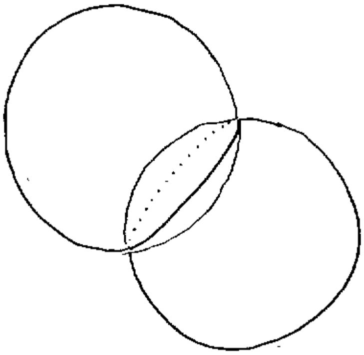

N.
Baiklah - ingat masa kamu diratakan seperti satu label kecil pada dunia 2-dimensi kamu...
...dan kamu mula membesarkan bulatan kamu - yang merupakan sfera 1-dimensi...
N.
...di dalam ruang 2-dimensi, sesuatu sempadan mengandungi satu permukaan. Begitulah satu ruang 3-dimensi, satu sempadan adalah batasan satu isipadu.
Ah! ITULAH di mana saya sampai ke TANDA TENGAH di KHATULISTIWA.
Didalam ruang 4-dimensi, sempadan mempunyai 3-dimensi, dan menjadi batas satu hiper-isipadu yang mempunyai 4-dimensi.
Sekali lagi!
Mari kita pergi!
N
Lihat - sinilah bulatan kamu, satu "belon 1-dimensi". Ia mula menutup lebih dari setengah ruang yang tinggal - menutup ke arah sendiri, dan ke atas kamu, and menuju ke arah anti-kutub S.
S

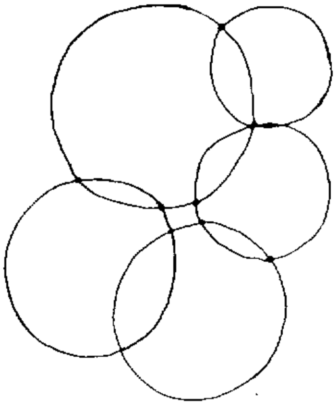
Seolah-olah di dalam ruang 3-dimensi aku, sebaik saja aku dipam lebih dari setengah isipadu, belon menutupi ke arah aku, menuju ke titik lawan-kutub.
Sebabnya sfera di dalam ruang lengkung 3-dimensi ini, ternyata ada DUA pusat, iaitu anti-kutub.
AKU DAH FAHAM!
?!!?
Er... aku bukannya pasti APA yang sudah aku faham, tapi aku terasa aku sudah fahami SESUATU.
Agak susah hatilah!
Takpa, Awang. Untuk dimensi lebih dari tiga, KEFAHAMANNYA ADALAH EKSTRAPOLASI.
Aku memang ekstrapolasi tapi tak faham!
Engkau harus membina gambaran itu di dalam imaginasi!

Saya akan mula dengan ruang 3-dimensi dan bebanyak sfera - alam 2-dimensi kecil di dalamnya.



Alam-alam ini boleh saling menembusi. Titik persamaan mereka dari bulatan - objek satu-dimensi.





Begitu juga bulatan-bulatan ini dengan satu-dimensi apabila terletak di atas sekeping kertas (2-dimensi) memotong dalam TITIK-TITIK. (Biasanya dikatakan dimensi untuk sesuatu titik adalah KOSONG.)

Maka satu sfera boleh dilihat sebagai saling-potongan dua "buih" 3-dimensi yang berada di dalam ruang 4-dimensi.

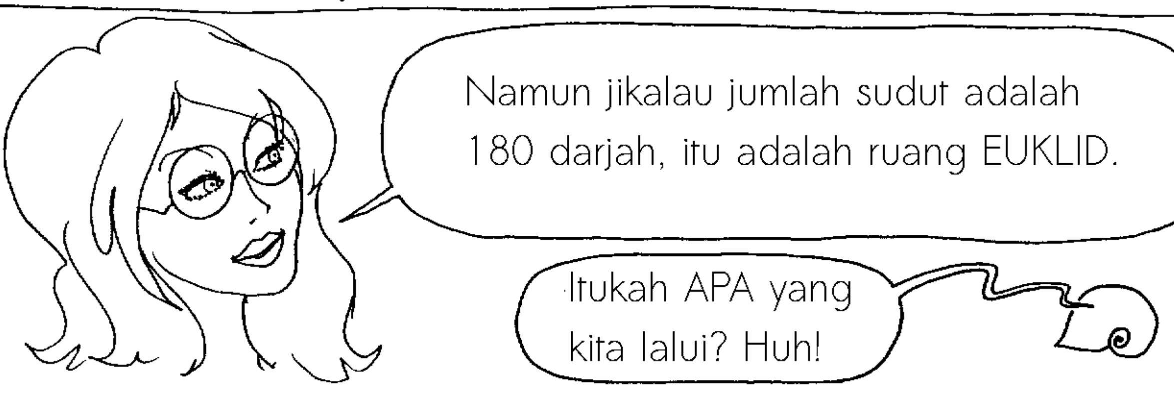
Dan begitulah disambung: sesuatu ruang lengkung 3-dimensi, sesuatu hiper-sfera, boleh difikir sebagai saling-potongan dua buih 4-dimensi di dalam ruang 5 dimensi.

Setelah mendalami lautan ekstrapolasi yang memeningkan itu, Sofie dan Awang kembali mengembara dunia 3-dimensi baru.

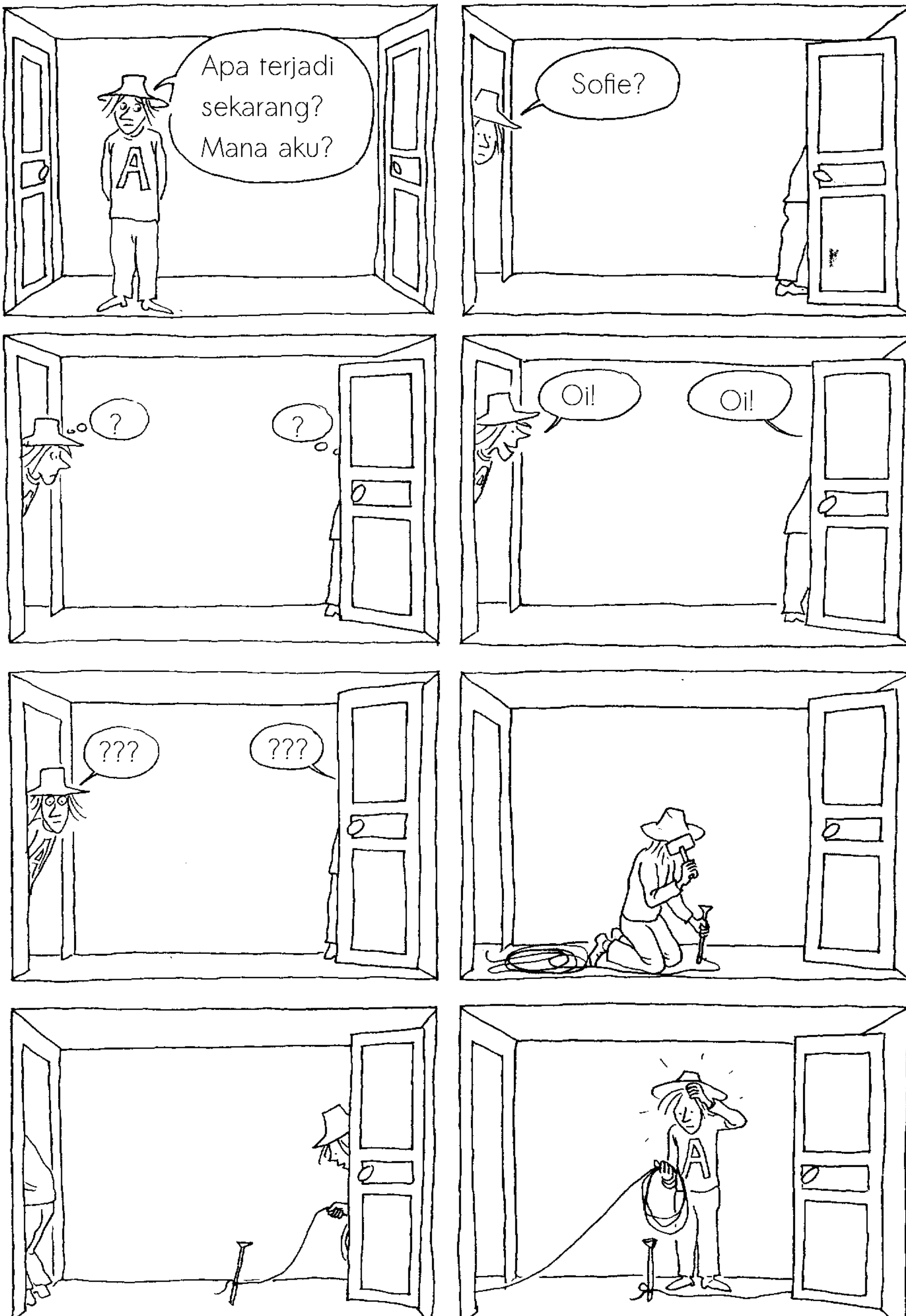
KESIMPULAN:

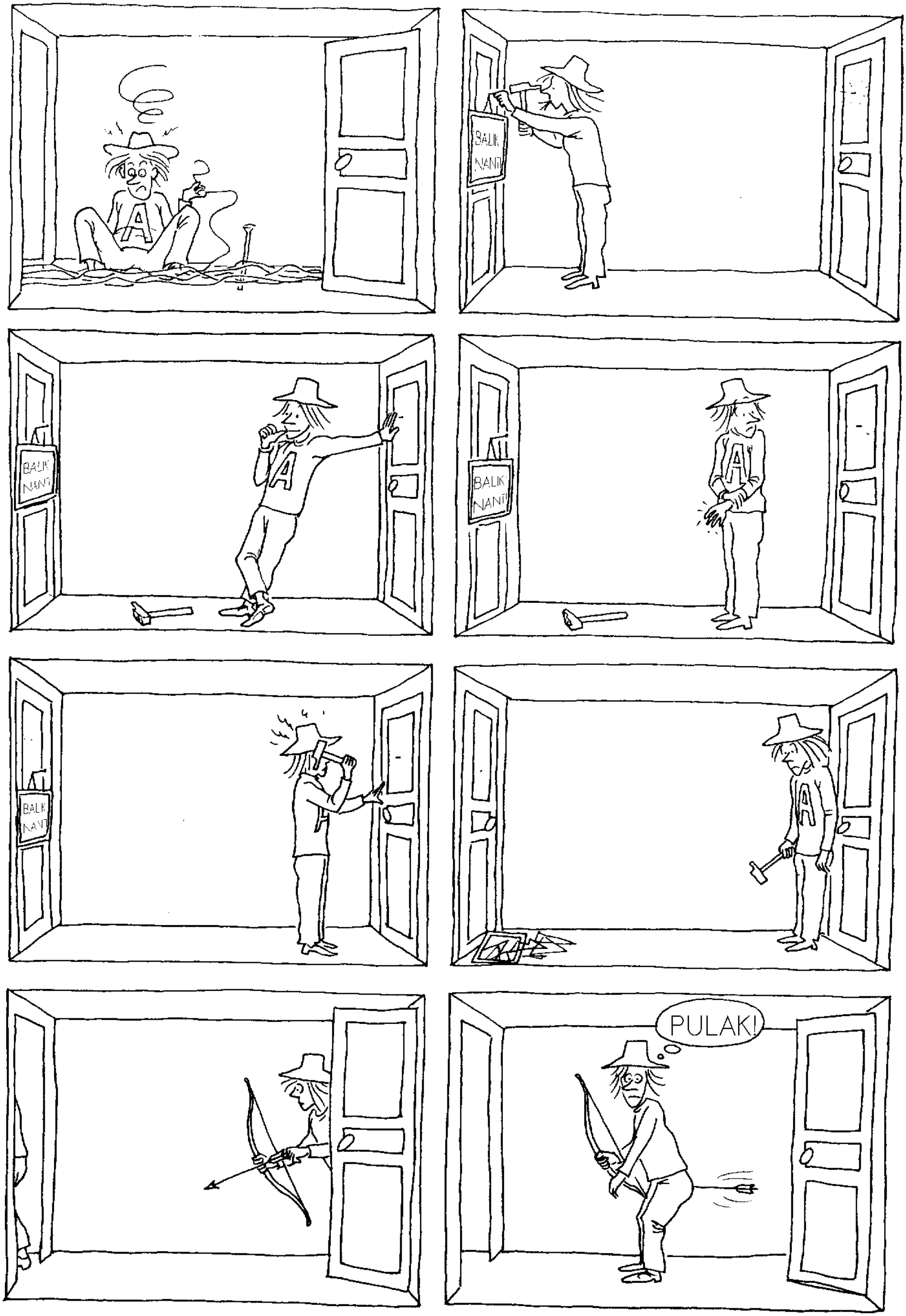
Tau tak di dalam ruang 3-dimensi, ada pelbagai perangainya. Seperti mana dengan permukaan, yang mana ianya adalah ruang 2-dimensi.

Jika jumlah sudut satu segitiga di dalam 3-dimensi adalah lebih dari 180 darjah, maka kita katakan LENGKUNGANnya POSITIF. Kemudian, dengan membentuk satu fera dengan jejari ℓ, SIASATANGKASA memberikan satu isipadu kurang dari $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ dan satu luas permukaan kurang dari $4\pi\ell^2$. Ruang ini, satu HIPER-SFERA, menutupi ke atas dirinya. Tetapi, jikalau jumlah sudut adalah kurang dari 180 darjah, maka lengkungan ruang 3-dimensi adalah NEGATIF. Isipadu sesuatu sfera jejari l adalah lebih dari $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ dan luas permukaannya lebih dari $4\pi\ell^2$. Ruang semesta adalah TIDAK TERHINGGA.



SESUATU RUANG SEMESTINYA SAMADA MEMBUKA ATAU MENUTUP!


Apa terjadi sekarang? Mana aku?
Sofie?
?
?
Oi!
Oi!
???
???


BALIK NANTI
BALIK NANTI
BALIK NANTI
BALIK NANTI
PULAK!

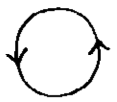

Nampak tak - Awang telah di letak dalam ruang 3-dimensi SELINDER. Walaupun ianya Eukild, dengan lengkungan sifar (jumlah sudutnya 180 darjah) alam ini menutupi dirinya.
PULAK!
Wah! Kita ada ruang sfera, yang hiperbola, dan selinder juga. Banyak juga, bukan?
GEOMETRI
Kamu rasa gitu?
Mari kita balik ke dua-dimensi pula.
Oi !?
NUCES

DALAM LUAR:

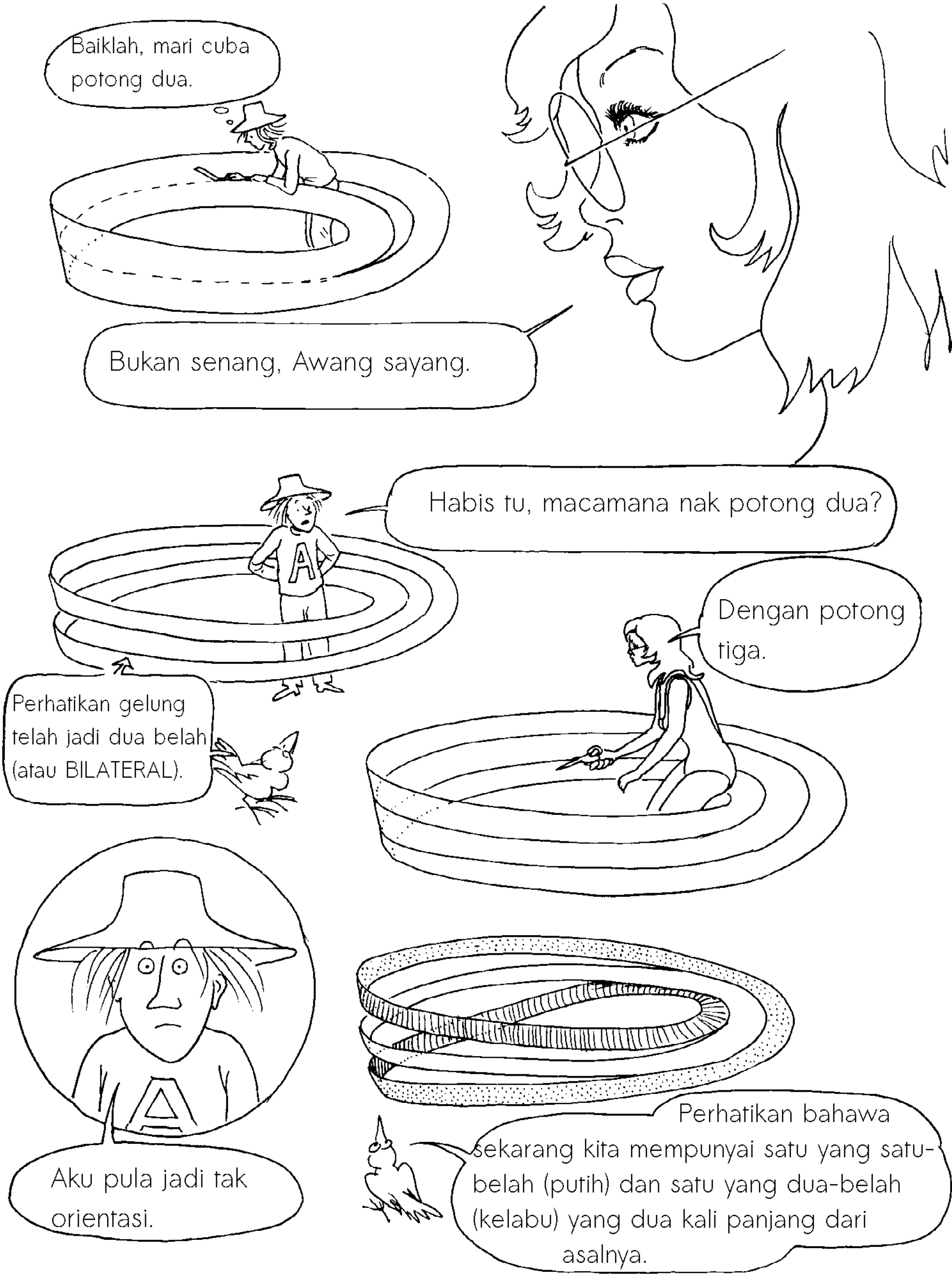
Ke depan Awang,
Ini seekor siput yang terjamin rasmi. Tutup matanya dan ia pasti bergerak bukan kiri atau kanan tetapi selalunya menuju geodesik sempurna.
Yang benar,
Sofie.
Jom jalan.
Mulanya geodesik
Betul juga: ke hadapan terus atau mengikuti landasan terpendek adalah perkara yang sama.
Eh, mana pergi binatang tu?
Oi, kawan!


Menutupi seperti sebelumnya.
Jumlah sudut adalah 180 darjah. Ini adalah Euklid. Satu lagi selinder.
Ataupun bukan...
!?!
Pelik...
Mari kita bongkar... Kali ini Awang berada di dalam satu RUANG 2-DIMENSI BUKAN-BOLEHORIENTASI. Contoh terbaik ruang sebegini adalah Gelung Mobius (1830). Idea ini terlepas dari orang Yunani walaupun mereka terfikir akan segalanya.
Sofie? Lepaskan saya!

Lukiskan satu bulatan atas permukaan, dan tambah anak panah padanya.



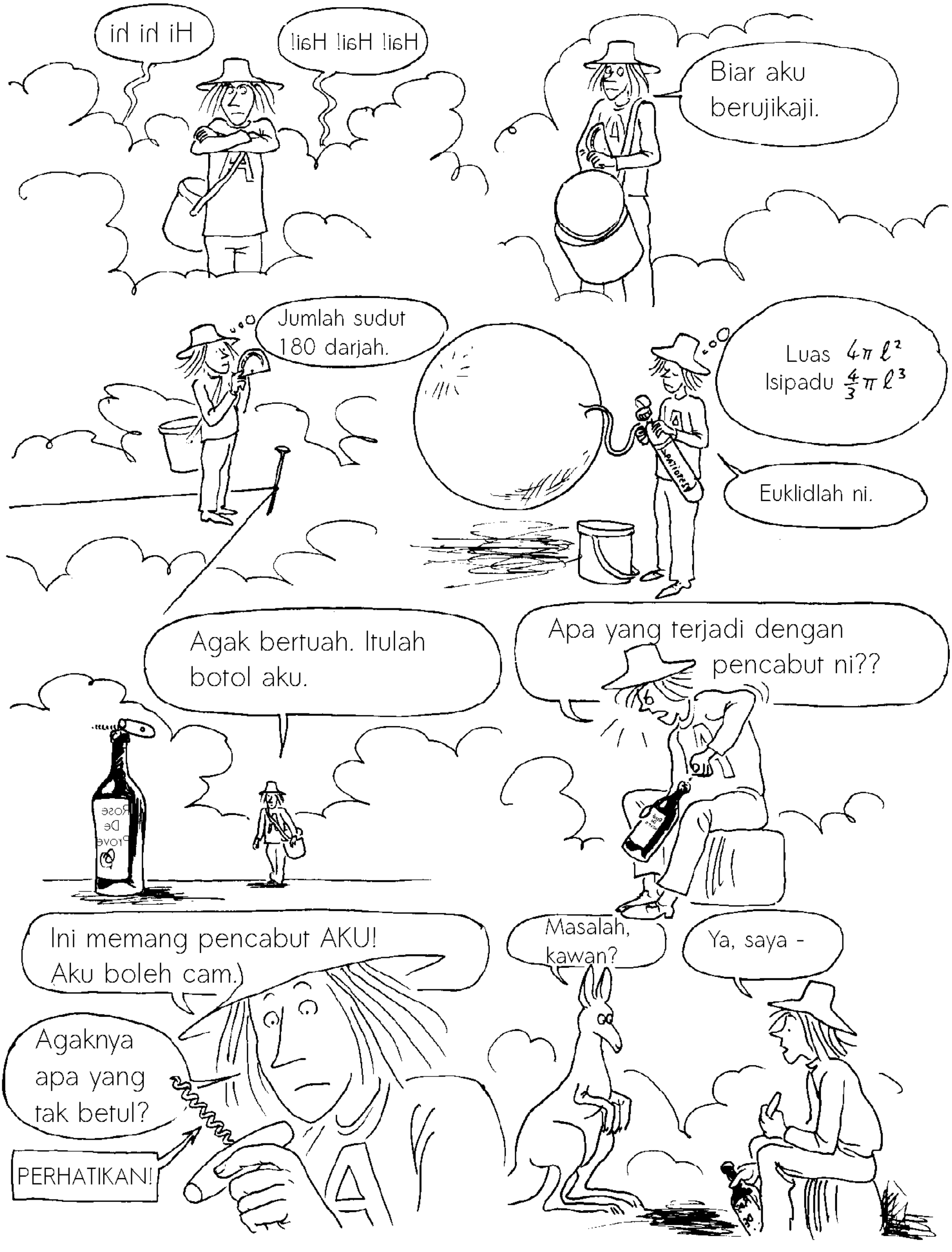
Bayangkan bulatan itu sebagai satu label kecil yang boleh menggeluncur atas permukaan sesuka hati. Jika bulatan itu kembali ke tempat asal dengan anak panah menuju arah yang sama, kita katakan permukaan itu adalah BOLEHORIENTASI - seperti dalam sfera, selinder, satah, dll. Tetapi atas Gelung Mobius, agak berbeza...


Baiklah, mari cuba potong dua.
Bukan senang, Awang sayang.
Habis tu, macamana nak potong dua?
Dengan potong tiga.
Perhatikan gelung telah jadi dua belah (atau BILATERAL).
Aku pula jadi tak orientasi.
Perhatikan bahawa sekarang kita mempunyai satu yang satu-belah (putih) dan satu yang dua-belah (kelabu) yang dua kali panjang dari asalnya.

Selepas menjejaki Gelung Mobius, mari kita kembali meninjau tentang ruangan 3-dimensi Euklid.

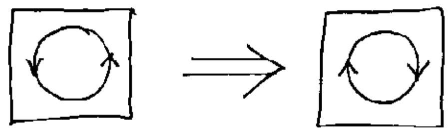
ORIENTASI RUANG:

Mari kita menemani Awang mengembara ke satu lagi dunia 3-dimensi Euklid (tanpa lengkungan)

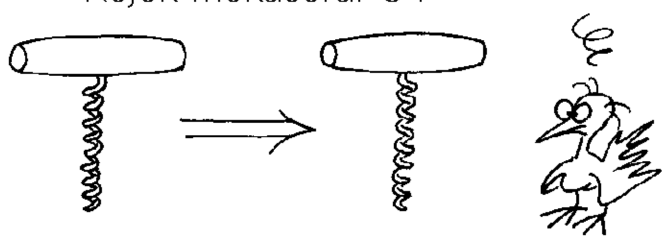

Hi hi hi
Hai! Hai! Hai!
Biar aku berujikaji.
Jumlah sudut 180 darjah.
Luas $4\pi \ell^2$
Isipadu $\frac{4}{3}\pi \ell^3$
Euklidlah ni.
Agak bertuah. Itulah botol aku.
Rose De Prove
Apa yang terjadi dengan pencabut ni??
Ini memang pencabut AKU! Aku boleh cam.
Agaknya apa yang tak betul?
PERHATIKAN!
Masalah, kawan?
Ya, saya -


Ulala, ini Rosé Perancis.
Rosé De vence
Ada pencabutnya, kawan?
Er - ya...
Di mana dia anak kambing saya, anak kambing...
Blub
Blub
Blub
Tak rasa pelik?
Tak, kamu terasa ja.
Makanlah keju Parmesan Bisulfida dua kali sehari.
Selamat tinggal!
Pencabut dirosakkan dan seekor kangaroo minum Rosé aku. Lagi seperti ini aku akan mula khayal.
Geram!
Sbling!
Kami mengesyorkan supaya anda menelitikan pencabut ini sepenuh perhatian.

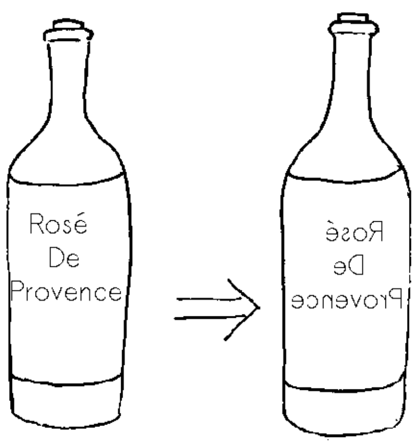
Gelung Mobius - satu ruang 2-dimensi bukan-bolehorientasi - mempunyai satu analogi 3-dimensi.
Di atas Gelung Mobius, label bulatan menjadi satu 'litar' dalam ruang itu, boleh kembali dengan orientasinya bertukar.



Rujuk mukasurat 54



Pencabut di bawah merupakan imej cermin.
Pencabut, dan Awang juga, boleh dianggap sebagai "label" di dalam 3-dimensi. Setip kali satu objek membentuk satu 'litar' ruang 3-dimensi ini, orientasinya terbalik. Seraya kita menemani Awang menunai hajat kelilingi ruang, tidak memperanjatkan bahawa seperti dia, kita mendapati botol itu adalah imej cermin, dan pencabut memintal ke arah berlawanan. "Litar" kedua akan mengembalikan objek ini kepada penambilan asalnya dengan syarat kita membiarkan begitu.



Awang dan kangaroo (sejenis binatang di kutub berlawanan) berada di dalam ruang yang sama; mereka berasa apa yang menjadi jalan betul bagi kangaroo, merupakan jalan salah bagi Awang - dan begitu juga lawannya.

EPILOG:


Semuanya kelam kabut. Tiada kiri atau kanan, tiada lagi ikut jam atau lawan jam, tiada jalan betul atau jalan salah. Jalan mana, yang harus SAYA ikut?
Kamu harus mengikuti geodesik, Awang - geodesik kehidupan kamu.
Huh, takkan boleh aku percaya alam boleh jadi begitu gila! Ini semua KHAYAL seorang AHLI MATEMATIK.
Semacam dari KOMIK ja.
Mengapa hiraukan kegilaan begitu sedangkan sungguh jelas alam ADALAH Euklid! (*)
(*) Satu pandangan dinyatakan oleh Ostrogradsky pada 1830, seorang profesor matematik di Petrograd, selepas kuliah atas kerja Riemann dan Lobachevsky.


Bayangkan alam bukan seperti yang terlihat? Gila, cuba fikir kalau itu diajar di sekolah!!
Memang Nahas!
Walaubagaimanapun, apa yang penting adalah DUNIA BENAR - bukan macam spekulasi menara gading! Dan ....
Jadi, apa yang di belakang semua ni?
FIZIK, cinta...
Aku akan kemukakan semuanya!
Mari kita dengari dari dinding KONKRIT.
Sesiapa sana?


... jika ketumpatan bahan di alam kurang dari 10^{-29} g.cm $^{-3}$ ...
?
... maka alam akan berlengkungan negatif dan sambungan tak terhingga...
... dan jikalau ketumpatan lebih daripada 10^{-29} g.cm $^{-3}$ ...
!..
... alam merupakan hiper-sfera dan menutupi
Dan jika ketumpatan adalah 10^{-29} g.cm $^{-3}$, ianya mematuhi Euklid...
Hmmm
Doctor Einstein?
Ya? ...
TAMAT