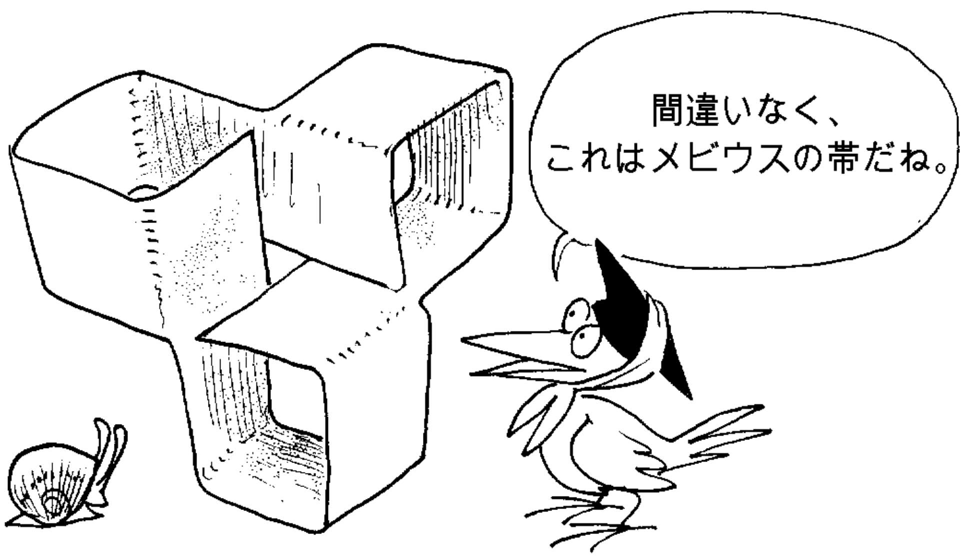
アンセルム・ラントゥルーの冒険

トポロジーの世界

ジャン＝ピエール・プチ



翻訳者：髙橋 隆太(Ryuta Takahashi)

読者への警告。

次の状況に当てはまる場合、読まない方が良いでしょう:

- 入眠前の時間帯
- 重い食事の後
- 或いは何も確信が持てない時。(ただ悪化するだけだから)

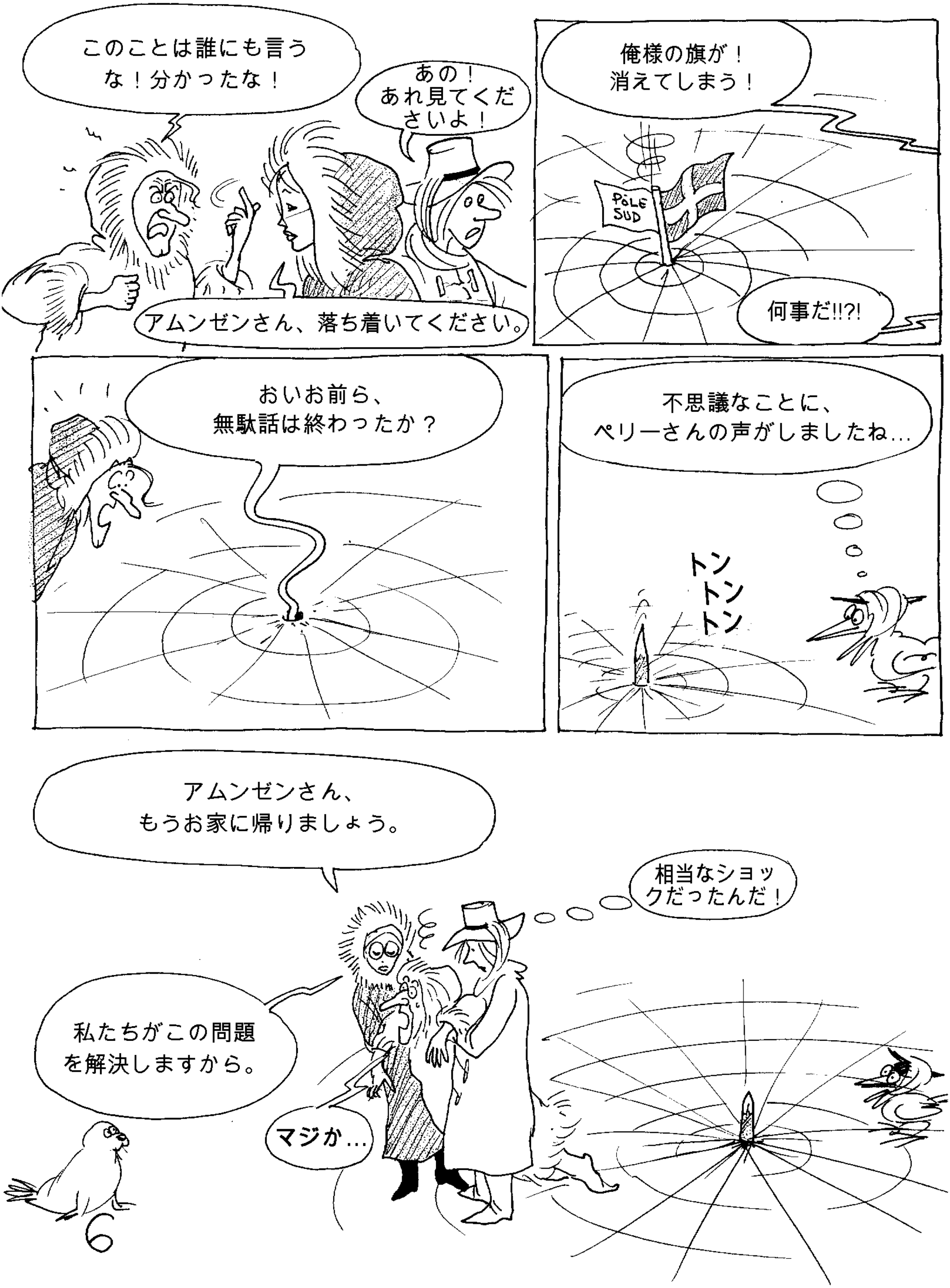
著者より。

南極点の無い世界

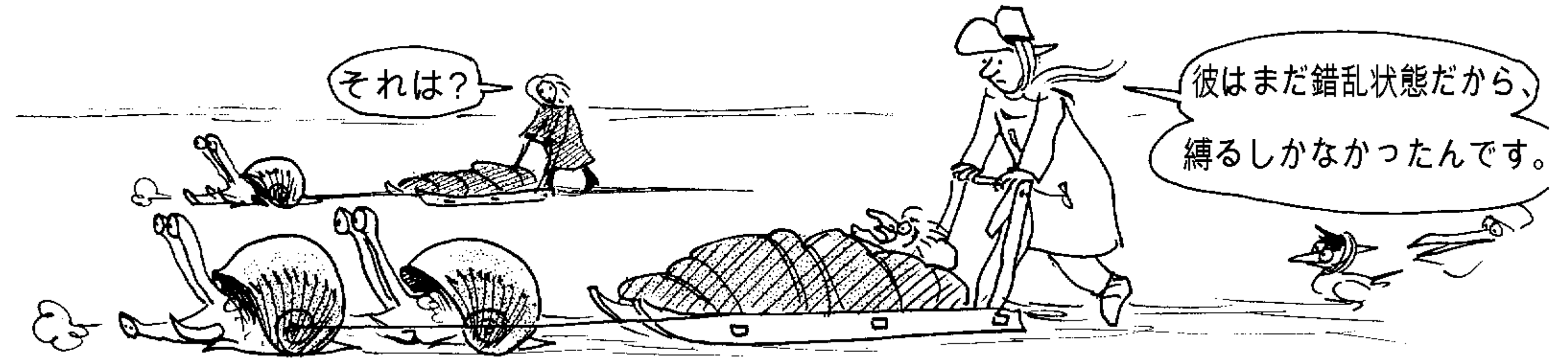
北極点を見つけたぞ！
Pôle NORd
ペリーさん、おめでとうございます。
うーん…
でもまだ南極点が残ってるんだよなぁ…
ハックション！
よし、俺様アムンゼンは南極点を探す旅に出る！
俺は子午線に沿って行くつもりだ。
私たちもついて行っていいかしら？
うーん、女性をこのような遠征に連れて行くのはあまり気が進まんなぁ。
でも私と仲間であなたの功績を物語ることができるわよ。

そうなると話が変わるな...
俺は並外れて控えめな人間だが、受け入れよう。
ハスキーを使わないのですか？
いや、カタツムリとマンモスの古い交配種である"マタツモリ"を使うんだ。子午線上を歩くよう特別に訓練された、しっかりした動物だ。
前進だ。子午線に沿って歩け。つまり...まっすぐ進むんだ！
フフフ、俺はやってやるぞ。
もう赤道を越えたみたいだけど、彼についていくのは大変だよ...
ああ、栄光あれ
雪の国へ、歩こう歩こう わたしは元気～♪
行け行け！
南極点が見えるぞ！俺様の南極点が..!
ああ...

俺様が一番最初だ...
栄光あれ！
ん！
？なんだこれは？？
なんの冗談の
つもりだ？
え!?
おお！
POLE NORD
おりゃぁあ！
ボキッ
それで、誰かこれについつ
て何か言いたいことはあるか？
Pôle Sud



このことは誰にも言うな！分かったな！
あの！あれ見てくださいよ！
アムンゼンさん、落ち着いてください。
俺様の旗が！消えてしまう！
POLE SUD
何事だ!!?!
おいお前ら、無駄話は終わったか？
不思議なことに、ペリーさんの声がしましたね…
トントントントン
アムンゼンさん、もうお家に帰りましょう。
相当なショックだったんだ！
私たちがこの問題を解決しますから。
マジか…



マタツモリは凍った子午線の上を音もなく滑っていった。

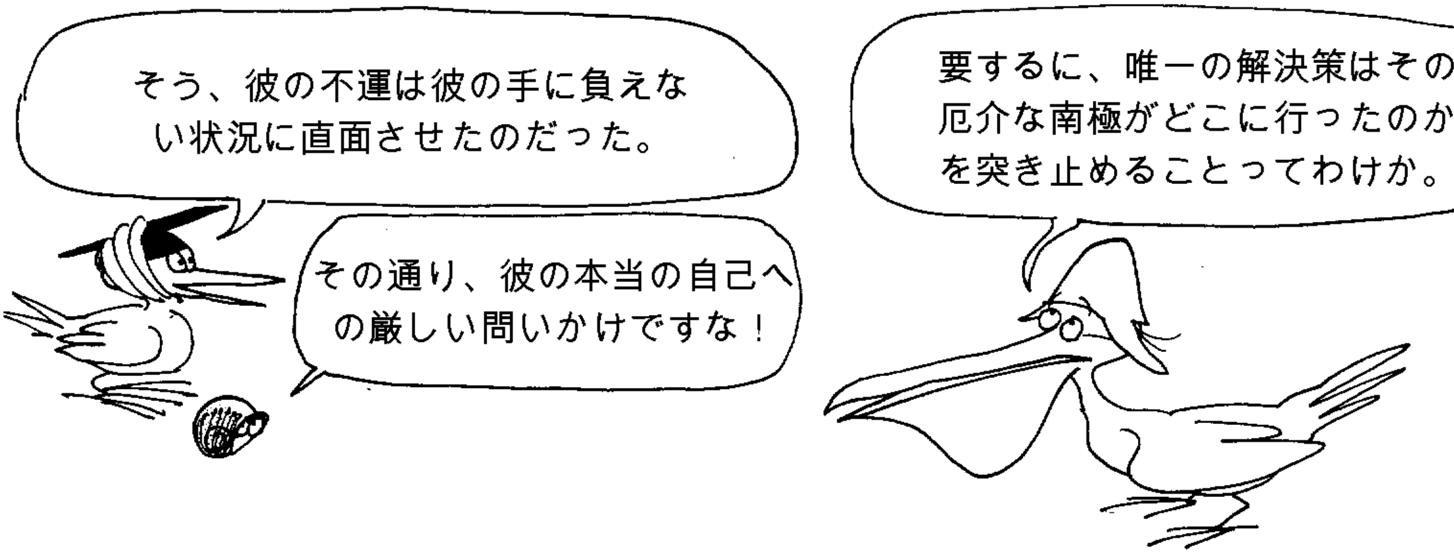

もし私たちが通った子午線の近傍を一方通行の表面(*)、
つまり単一の面を持つメビウスの帯として考えるとこれは明白になります。
(「ユークリッドを見つめて」54ページ参照)。
PÔLE
PÔLE
僕たちがさっきまでいた南極点はただの逆さまになった北極点だったということ？
だとすれば、本当の南極点はどこ？
それは難しいですね...
じゃあ一体何が起こっているんだ？
南極が無くなったらしいよ
そいつは面白い！
考えてみましょう。
彼らはなんて言ってるの？
ソフィーによると、俺たちは一つの面を持った球体にいるかも知れないらしい！
全くのナンセンスだ！
こんにちは、
そちらはどうですか？
そうですね、
実際こちらとあまり変わりません。
(*) 帯を半回転分ねじって両端を貼り合わせると一つの面のみを持つ。


私たちがアムンゼンさんを困った状況から救い出すためには、
まず最初にこの奇妙な惑星の形状を理解しなければなりません。そのために、
基本的な位相幾何学(トポロジー)の原則をいくつか使ってみましょう。
まずはすべての物体を次のように分解します。
収縮細胞
この分解できないものは、
点であるように思われます…
でも1点で何が
できるのだろう。
物体は点の集合として考えられ、
空間内の一定の場所を占めます。
それが収縮可能であるとは、
物体が自ら占めた空間内を通って、
最終的に1点に収束することが
できる場合です。
例えば、
この曲線を構成する点の集合を考えてみてください。
これは空間における1次元の物体です。
B
A
そうか、
点の集合である曲線のそれぞれの点の位置は、
1つのパラメータで示すことができますよね。
曲線距離、つまりある点から起点となる別の点
までの線の長さを使って。

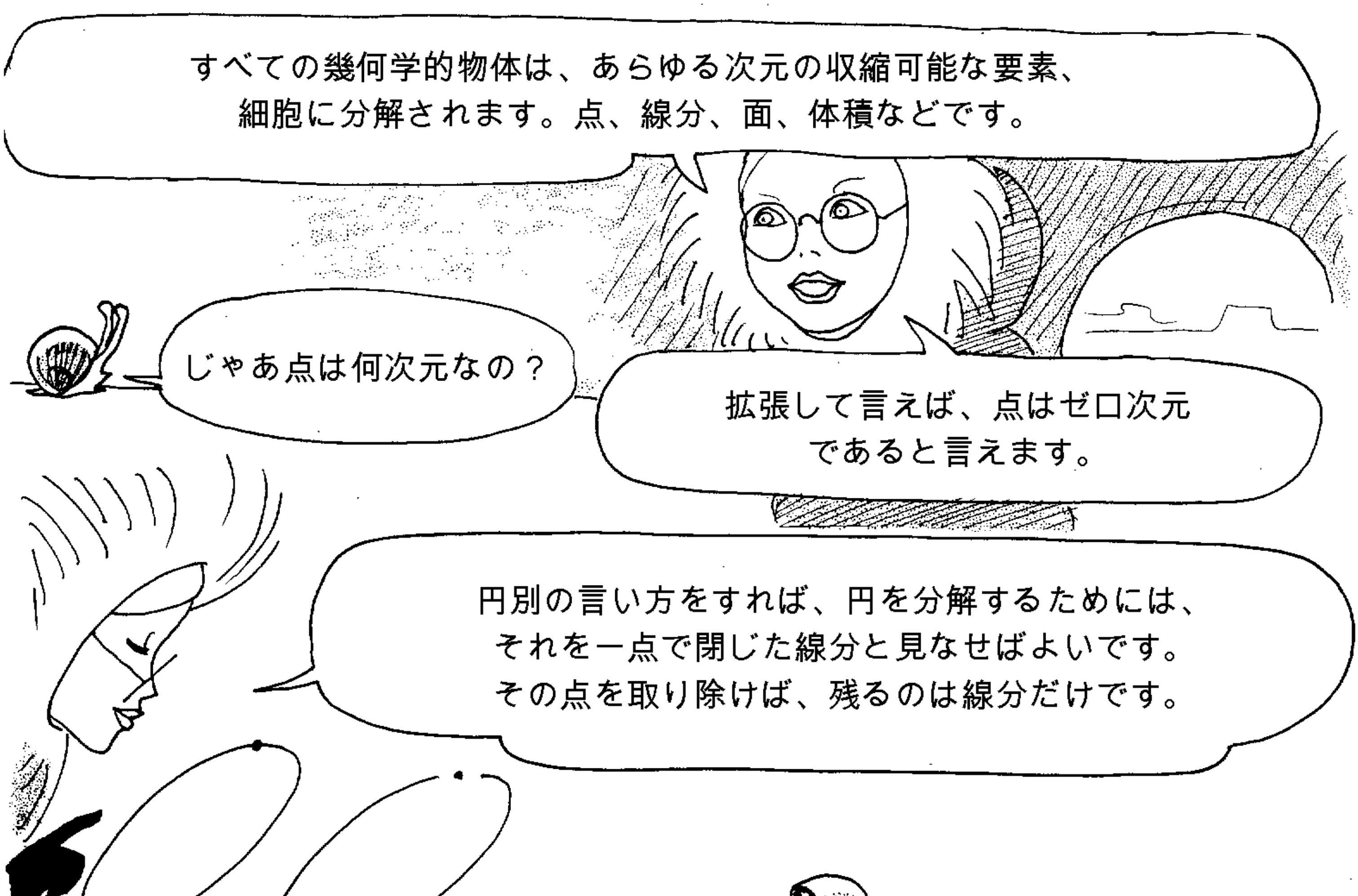

例えば、この曲線の一部を空洞のパスタのようなものの中に入れることができます。そしてその中で縮ませます。縮んで、縮んで…
ちょうど温度計の中の水銀のようにね。
A
B
実際、すべての曲線は収縮可能なの？
いえ、閉じた曲線は違います。
でもそれを切っちゃえばいいじゃないですか！
でもそれなら曲線は線分になりますね。もはや閉じた曲線ではありません。
例えば円を例にとると、こんな風に点を基準に縮小できるんですよね？
それではうまくいきません。なぜかというと、そのようにすると、それはもはや自分自身を通り抜けることはなく、最初に占めていた空間の外側で動いてしまうからです。
したがって、円は収縮可能ではなく、それは閉じた曲線全般も同様です。平面であろうとなかろうとね
しかし一方で、ディスクは表面の要素であり、収縮可能です

(*)「**Here's Looking at Euclid**」参照

収縮不可能な体積はありますか？
はい。例えばトーラス体積があります。
なるほど、切らなければ円のように収縮させることしかできませんね。
すると「トーラス表面」も収縮不可能か。
ねえねえ、何してるんですか？
こちとら忙しいんだよ。
皆さん、気づいているかどうか知らんけど、強硬症の探検家がこちらにいるんですよ？
本当に、麺を"チョップ"するだけで彼を救い出せると思っているんですか？
彼の"幾何学神経症"は幾何学的な概念をさらに深く掘り下げることで、もしかしたら助かるかも知れないんだ。
彼は個人的にも社会的にも、南極点の発見に全身全霊をかけて没頭していたんだよ。


そう、彼の不運は彼の手に負えない状況に直面させたのだった。
その通り、彼の本当の自己への厳しい問いかけですな！
要するに、唯一の解決策はその厄介な南極がどこに行ったのかを突き止めることってわけか。

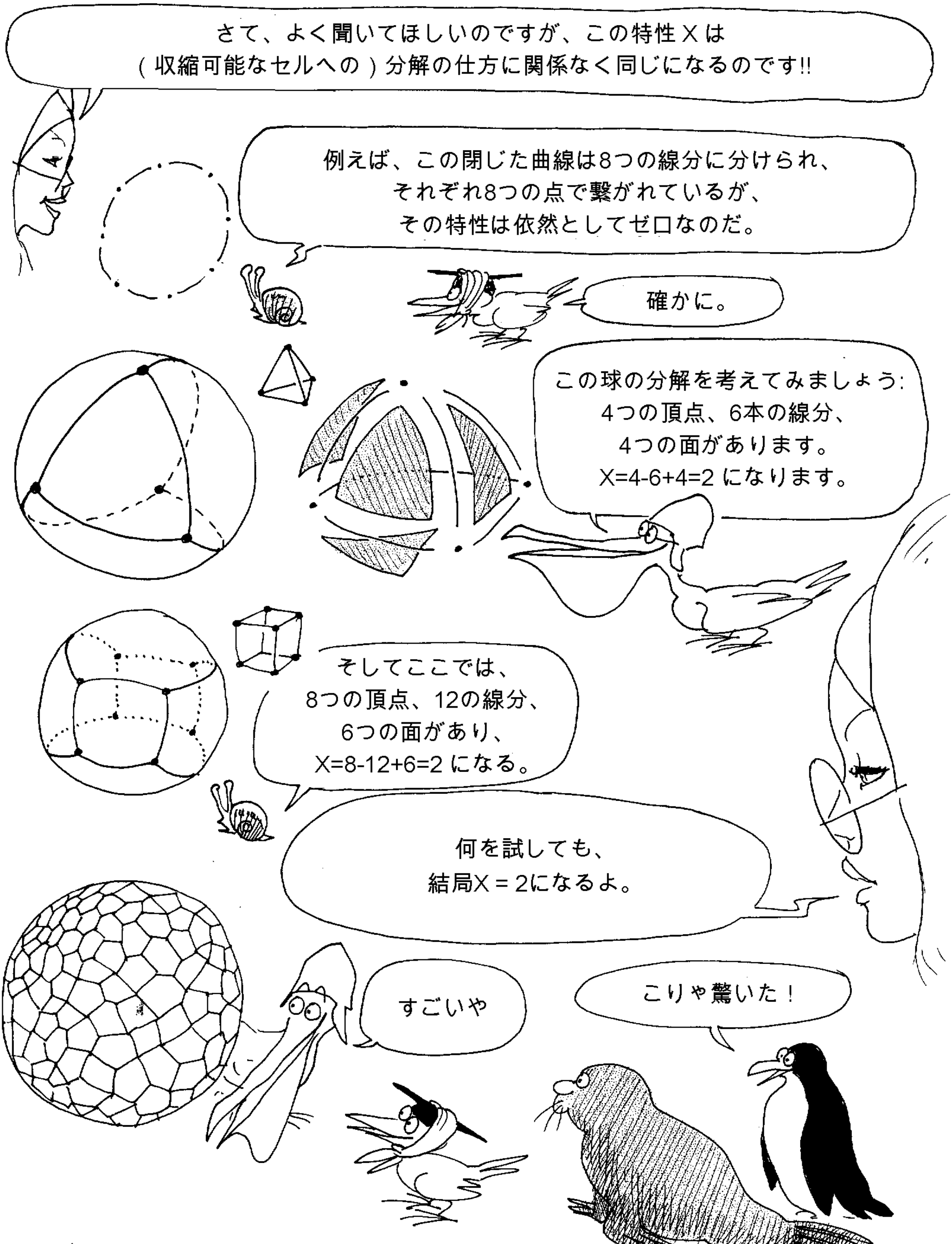
細胞分裂


すべての幾何学的物体は、あらゆる次元の収縮可能な要素、細胞に分解されます。点、線分、面、体積などです。
じゃあ点は何次元なの？
拡張して言えば、点はゼロ次元であると言えます。
円別の言い方をすれば、円を分解するためには、それを一点で閉じた線分と見なせばよいです。その点を取り除けば、残るのは線分だけです。


「表面の球」S2は、2つの半球と一点で閉じた線分に分解できるんだ。
「トーラス体積」？それはディスクで切ればいいだけさ。
じゃあ「トーラス表面」はって？点で切られた円を使って切るだけさ。
このように切られたトーラスは、円の形に沿って収縮する：
そして、その円は次に線分と点に分解しなければならないんだ。
こちらは1つの点、2つの線分、そして1つの面を含む別の解で、すべての要素が最初から収縮可能だとすぐに分かるよ。
でも、それらが僕たちにとって何の役に立つんだろう？
世界を理解することのように思えるなぁ…
A

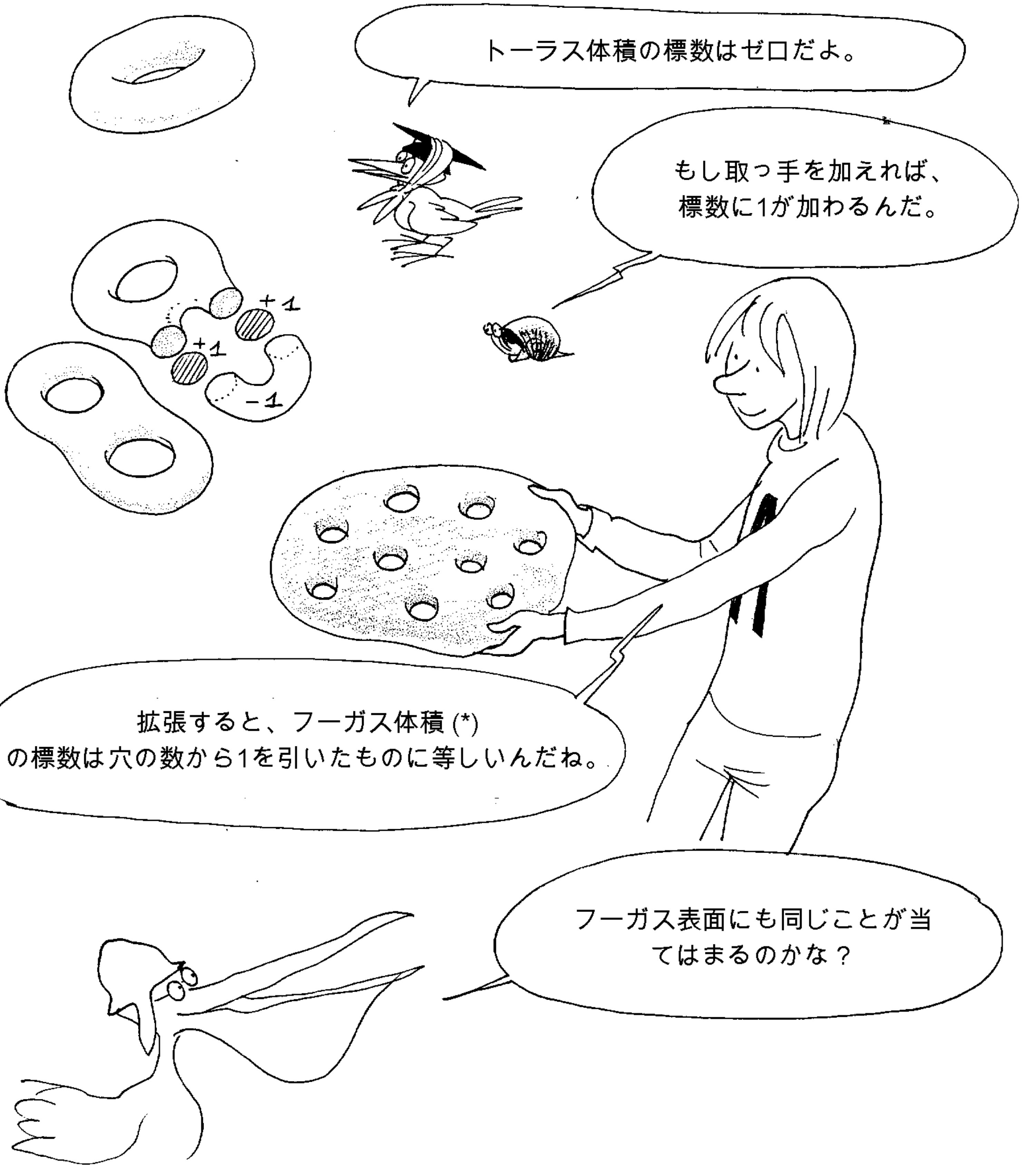
オイラー・ポアンカレ標数

(*) この特性は三次元を超える次元にも簡単に拡張されます。（交代和になります。）

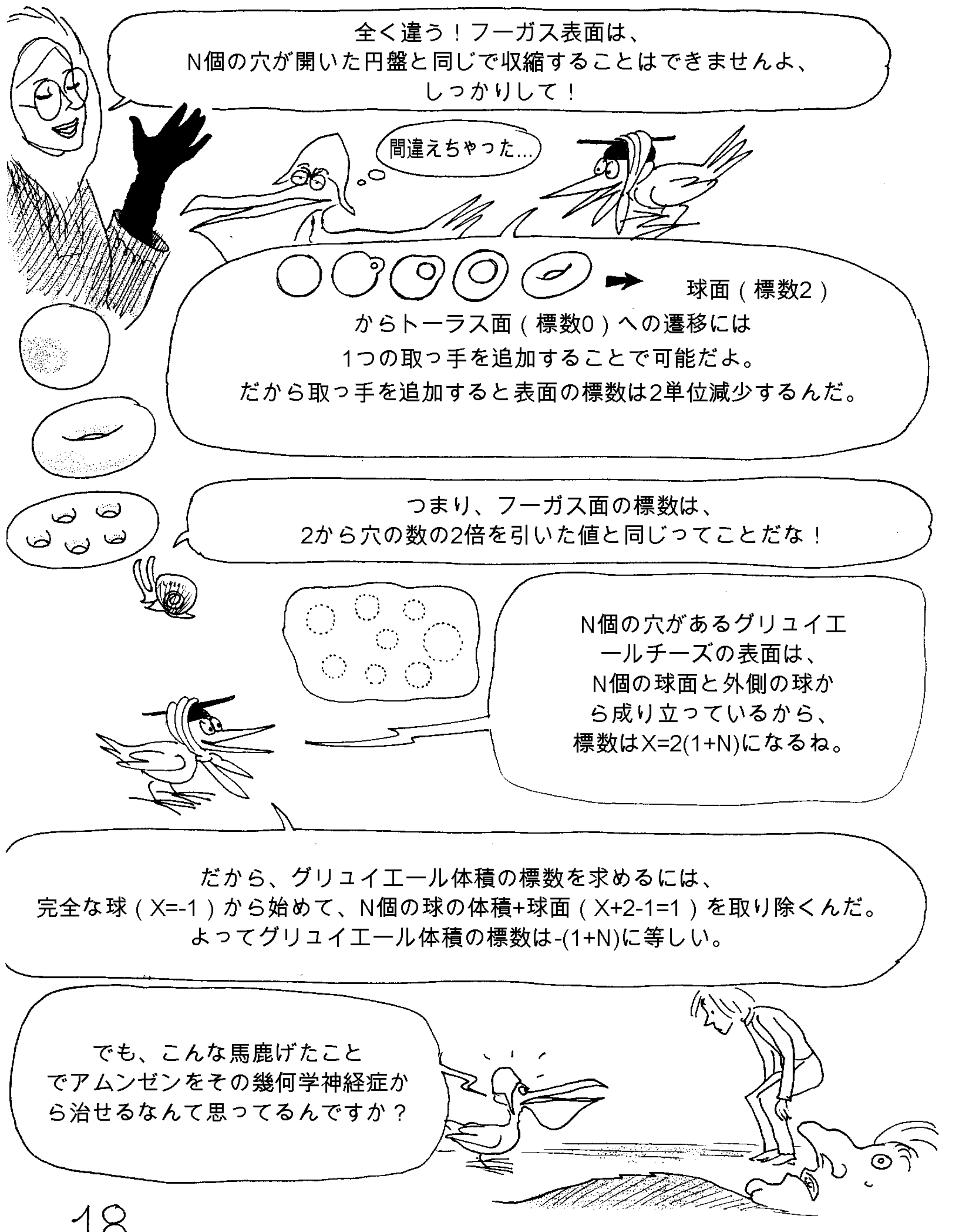

さて、よく聞いてほしいのですが、この特性Xは
(収縮可能なセルへの)分解の仕方に関係なく同じになるのです!!
例えば、この閉じた曲線は8つの線分に分けられ、
それぞれ8つの点で繋がれているが、
その特性は依然としてゼロなのだ。
確かに。
この球の分解を考えてみましょう:
4つの頂点、6本の線分、
4つの面があります。
X=4-6+4=2 になります。
そしてここでは、
8つの頂点、12の線分、
6つの面があり、
X=8-12+6=2 になる。
何を試しても、
結局X = 2になるよ。
すごいや
こりゃ驚いた!

有用な定理：もしある物体が2つの物体の結合であれば、
その標数は構成する2つの物体の標数の合計になります。

編集部



(*) フーガス: 南フランスで作られるオリーブベースのパン


全く違う！フーガス表面は、
N個の穴が開いた円盤と同じで収縮することはできませんよ、
しっかりして！
間違えちゃった...
球面（標数2）
からトーラス面（標数0）への遷移には
1つの取っ手を追加することで可能だよ。
だから取っ手を追加すると表面の標数は2単位減少するんだ。
つまり、フーガス面の標数は、
2から穴の数の2倍を引いた値と同じってことだな！
N個の穴があるグリュイエ
ールチーズの表面は、
N個の球面と外側の球か
ら成り立っているから、
標数はX=2(1+N)になるね。
だから、グリュイエール体積の標数を求めるには、
完全な球（X=-1）から始めて、N個の球の体積+球面（X+2-1=1）を取り除くんだ。
よってグリュイエール体積の標数は-(1+N)に等しい。
でも、こんな馬鹿げたこと
でアムンゼンをその幾何学神経症か
ら治せるなんて思ってるんですか？

私たちの住む世界

χ=1
χ=0
χ=1
球面S2の標数は、それを2つの半球と赤道の合併として考えることで計算できるね。この場合、X=1+1+0=2 だ。
『HERE'S LOOKING AT EUCLID』では、三次元の完全に自己閉じた空間である超球面S3の概念を紹介した
この超球面S3 の標数を計算してみよう。『HERE'S LOOKING AT EUCLID』で見たように、赤道 (*) は S2 の球面で、その標数は 2 だね。
つまり、僕たちの超球面 S3 は 2 つの収縮可能な体積で構成されていて、それぞれが -1 としてカウントされるんだ。
お前、正気か？
χ = -1 - 1 + 2 = 0
パチン！
(*) その物体を2つの類似した要素に分けます。
つまり、超球面S3の標数はゼロだ！

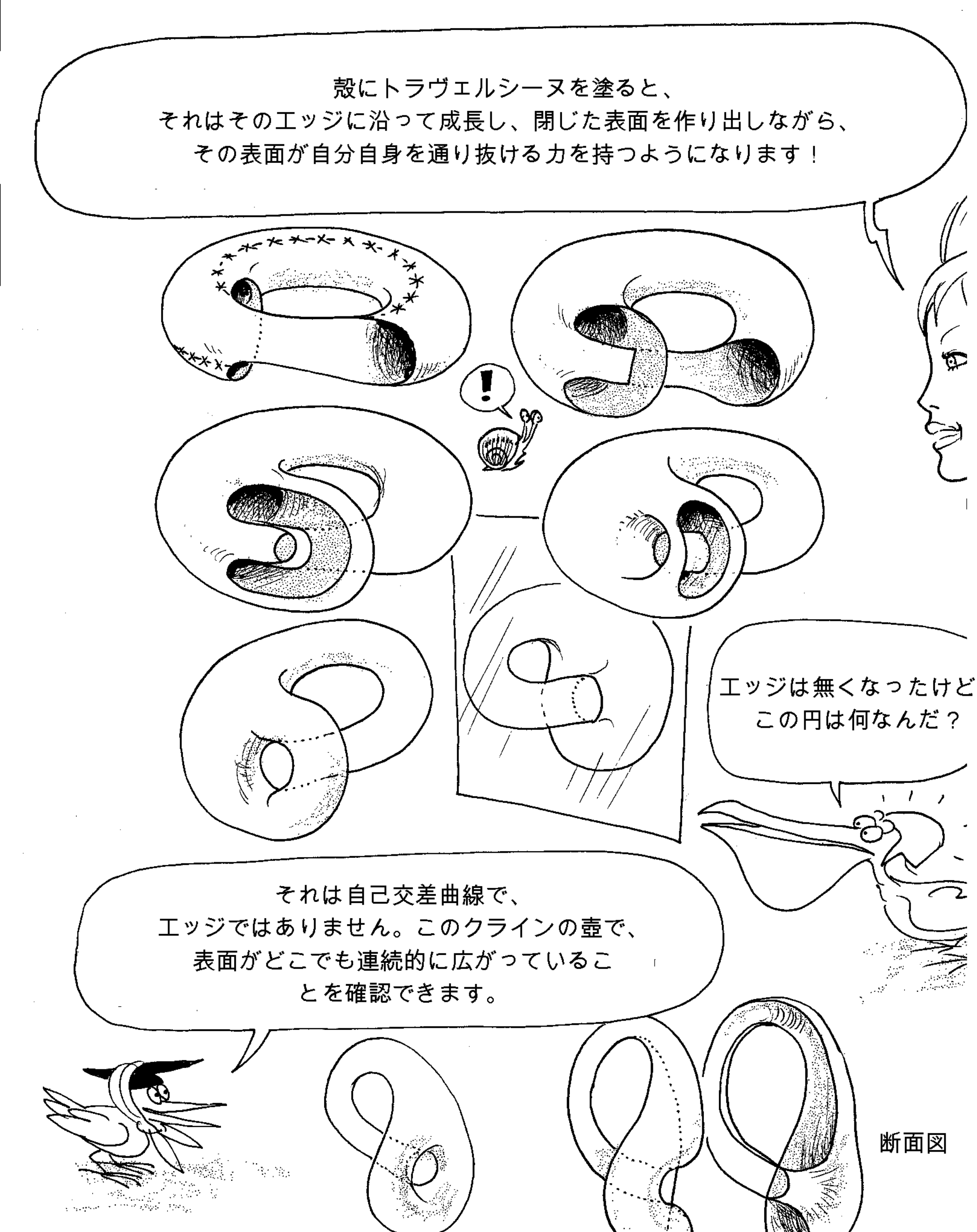
(*) ビックバンとフリードマンモデルについては64ページをご参照ください。


このオイラー・ポアンカレ標数は、幾何学的な対象のジャングルの中に少し秩序をもたらしてくれたね
振り返ると、円筒の端は穴の開いたディスクと位相的に同じで、その標数はゼロってことだね。
でも、この物体についてはどう考える？
これはメビウスの帯で、面は1つしかありません。裏表を定めることができないので、方向付け不可能（INORIENTABLE）だと言われています。
確かに、奇数回の半回転が施された帯は全てメビウスの帯で、方向付け不可能。でも、これらの2つの帯はどうも違って見えるなぁ…

(*) 「**HERE' LOOKING AT EUCLID**」 59ページ参照。

重なるエッジ

(*) トラヴェルシーヌはホモモレスの殻から得られます。

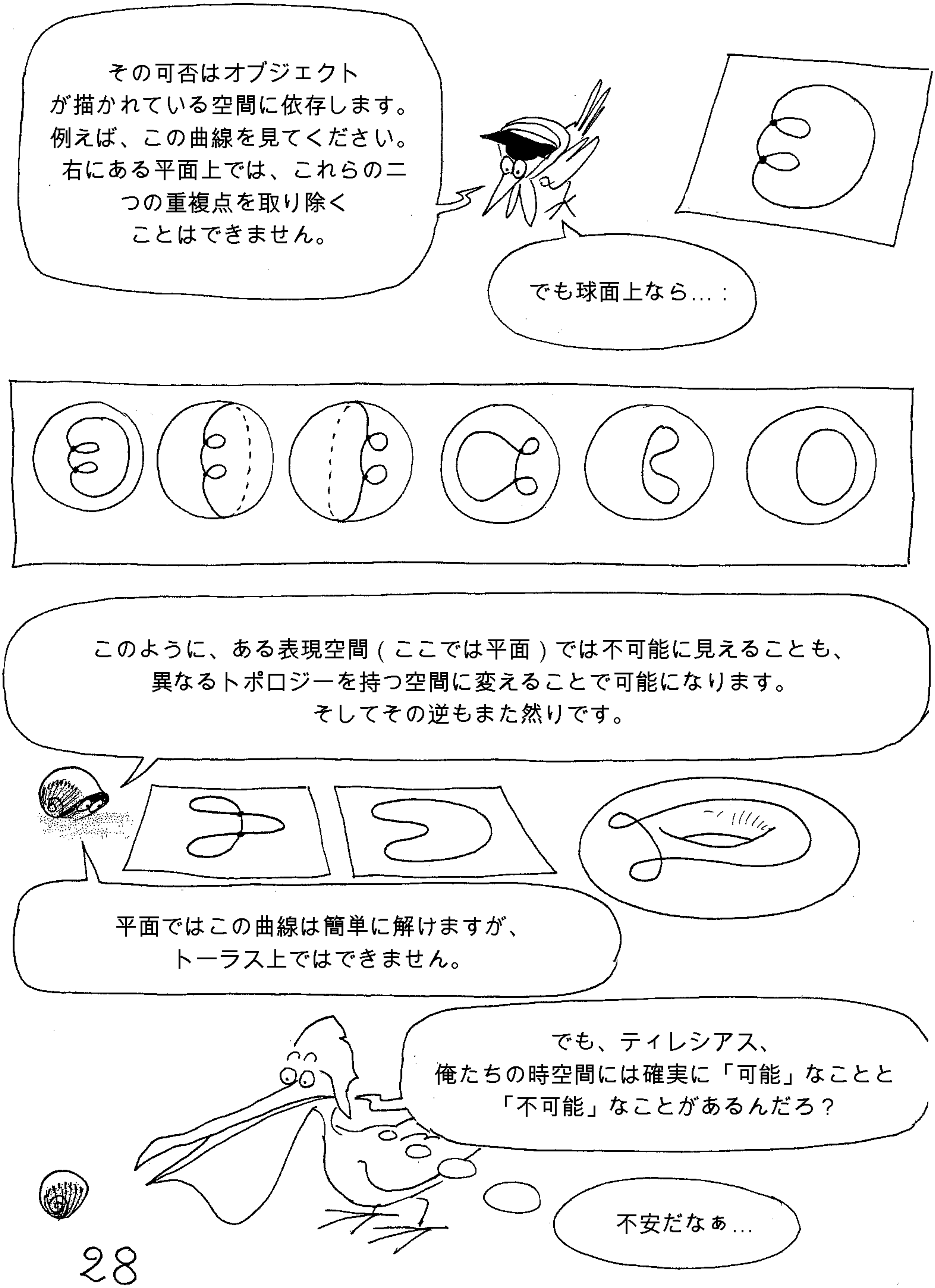

殻にトラヴェルシーヌを塗ると、
それはそのエッジに沿って成長し、閉じた表面を作り出しながら、
その表面が自分自身を通り抜ける力を持つようになります！
エッジは無くなったけど、
この円は何なんだ？
それは自己交差曲線で、
エッジではありません。このクラインの壺で、
表面がどこでも連続的に広がっているこ
とを確認できます。
断面図


この標数はゼロだ。なぜなら、これは2つのメビウスの帯（X=0）と1つの閉じた曲線（X=0）から成り立っているからさ。ちなみに、この中にその帯を見出すことは難しいことではない。
当然だけど、もし表面にメビウスの帯を見つけることができれば、それはその表面が1つの面しか持たないことを意味するってことか。
ティレシアス、お前の殻のメビウスの帯を探させてくれよ。
えっ!?
2人ともそれ以上はやめて！
それにしても、これは不思議な表面だなぁ。。
これまで扱ったのは標準的な形状で交差しないような表面、例えば球面やトーラスなどでした。対して、私たちの空間で交差する表面ははめ込みと呼ばれます。
はめ込み？

延長とはめ込み

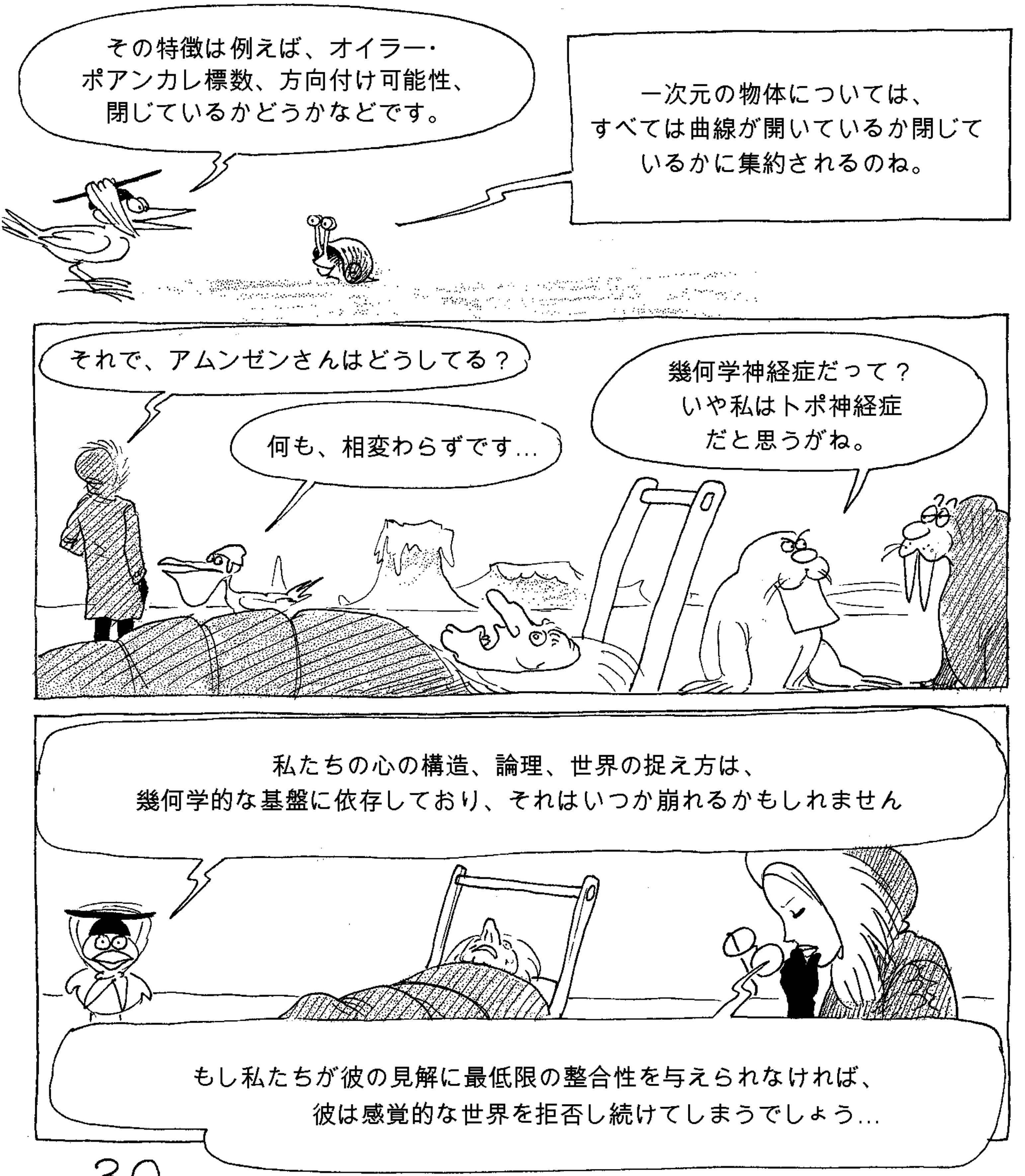
(*) 埋め込みとは、はめ込みの特殊なケースです。


I
II
III
平面上の規則的な変形（破線なし）によって曲線Iから曲線IIIに移すことができます。
この変形において各曲線を通過する際、矢印の回転（360°）は変わりません。
これは平面内での規則的なホモトピーで、
接線方向の矢印の回転数を保つのです。
いろいろ試してみたけれど、
この８の字を円に変えることができない…!
当然です。
矢印の回転数は同じではないですから。
８の上では、回転の代数和はゼロなのです!!
この閉曲線の変形のルール（連続性、正則性）を考慮すると、
あることは可能で、また別のことは不可能であることがわかりますな。
そう簡単に
はいかないね！


その可否はオブジェクトが描かれている空間に依存します。例えば、この曲線を見てください。右にある平面上では、これらの二つの重複点を取り除くことはできません。
でも球面上なら…：
このように、ある表現空間（ここでは平面）では不可能に見えることも、異なるトポロジーを持つ空間に変えることで可能になります。そしてその逆もまた然りです。
平面ではこの曲線は簡単に解けますが、トーラス上ではできません。
でも、ティレシアス、俺たちの時空間には確実に「可能」なことと「不可能」なことがあるんだろ？
不安だなぁ…


君は我々の時空間のトポロジーを知っているのか？
え、いや…
我々はただの見かけの存在に過ぎない…
そしてそれすらも確かなわけではないんだ！
閉じた曲線の交点は、表面上での表現方法によってのみ決まる。二次元の画像はあくまで投影に過ぎないんだ。
本質的にそれらの対象はただ一つ、閉じた一次元曲線ってわけか。
4次元の表現空間では、クラインの壺はもはや自己交差しないんです！
では、表現空間を変えることで何でもできるわけですね。例えば、クラインの壺を球に変えることもできるんですか？
いいえ、表現空間に依存しない特徴があるのです。

トポロジー(位相幾何学)

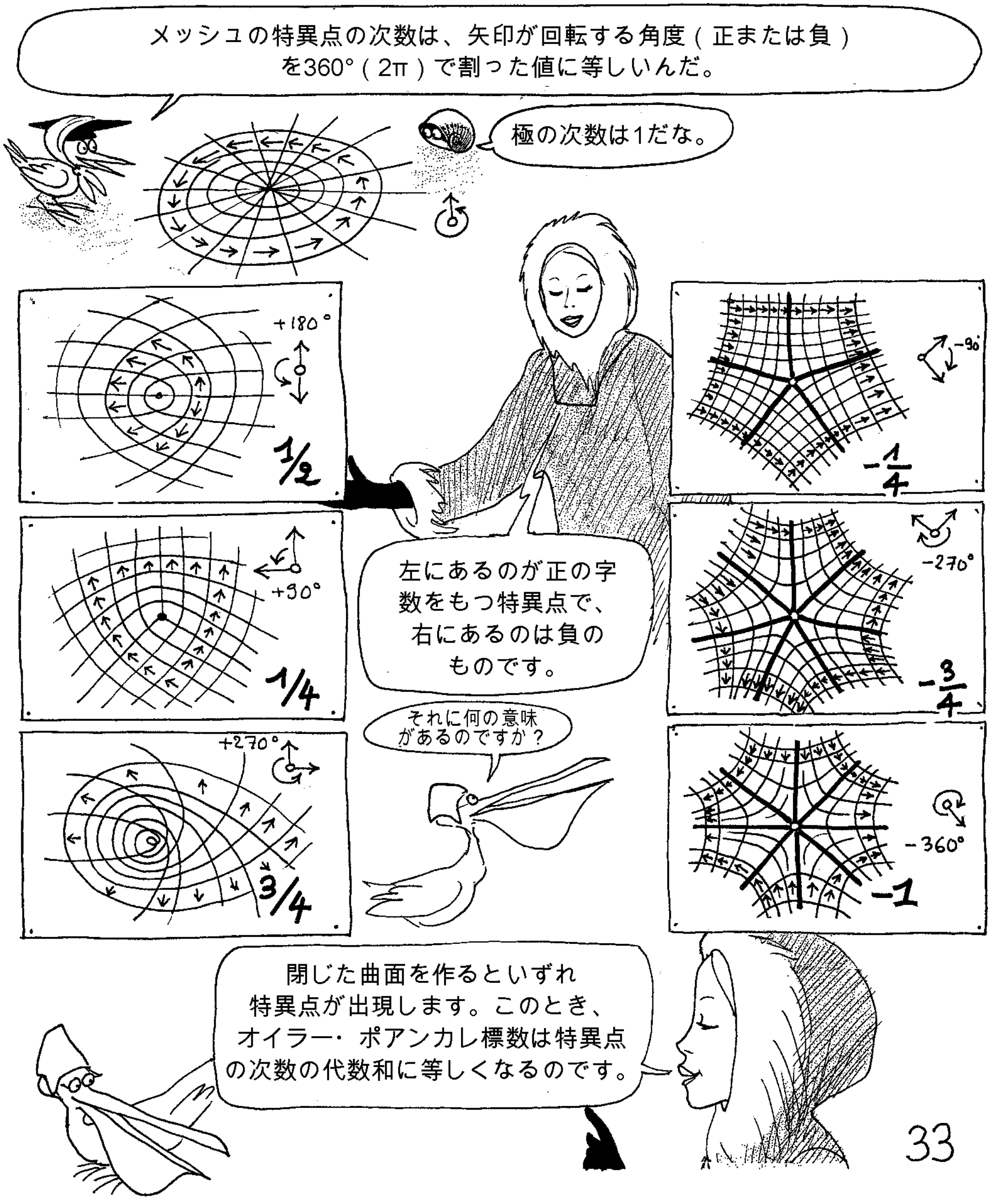

その特徴は例えば、オイラー・ポアンカレ標数、方向付け可能性、閉じているかどうかなどです。
一次元の物体については、すべては曲線が開いているか閉じているかに集約されるのね。
それで、アムンゼンさんはどうしてる？
何も、相変わらずです…
幾何学神経症だって？いや私はトポ神経症だと思うがね。
私たちの心の構造、論理、世界の捉え方は、幾何学的な基盤に依存しており、それはいつか崩れるかもしれません
もし私たちが彼の見解に最低限の整合性を与えられなければ、彼は感覚的な世界を拒否し続けてしまうでしょう…

メッシュ

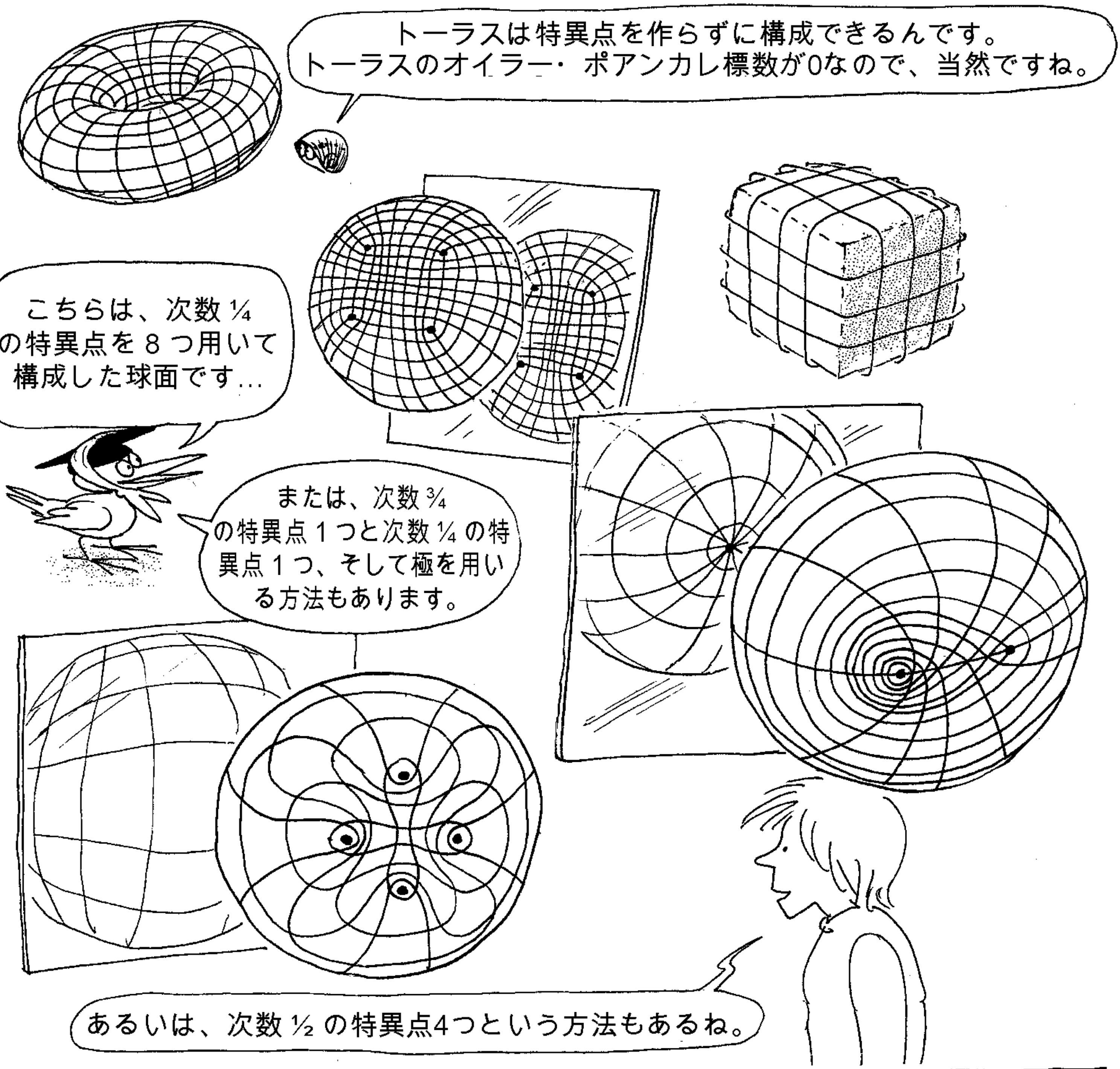
僕が見つけた表面を表現する良い方法、
それは：メッシュです。
例えばこれは円筒：
うーん。球を作るのは
簡単ではありませんね...
そしてトーラス：
クラインの壺：
球の場合、2つの極を取り入れる必要があります。
でもどうしてですか。
トーラスやクラインの壺
にはそんなものは必要
なかったのに...
オイラー・ポアンカレ標数は、
球に必要な極の数を教えてくれるんです。
トーラスやクラインの壺ではそれはゼロですが、
球面では2つです。

(*) ビッグバン(BELIN版)参照。

特異点



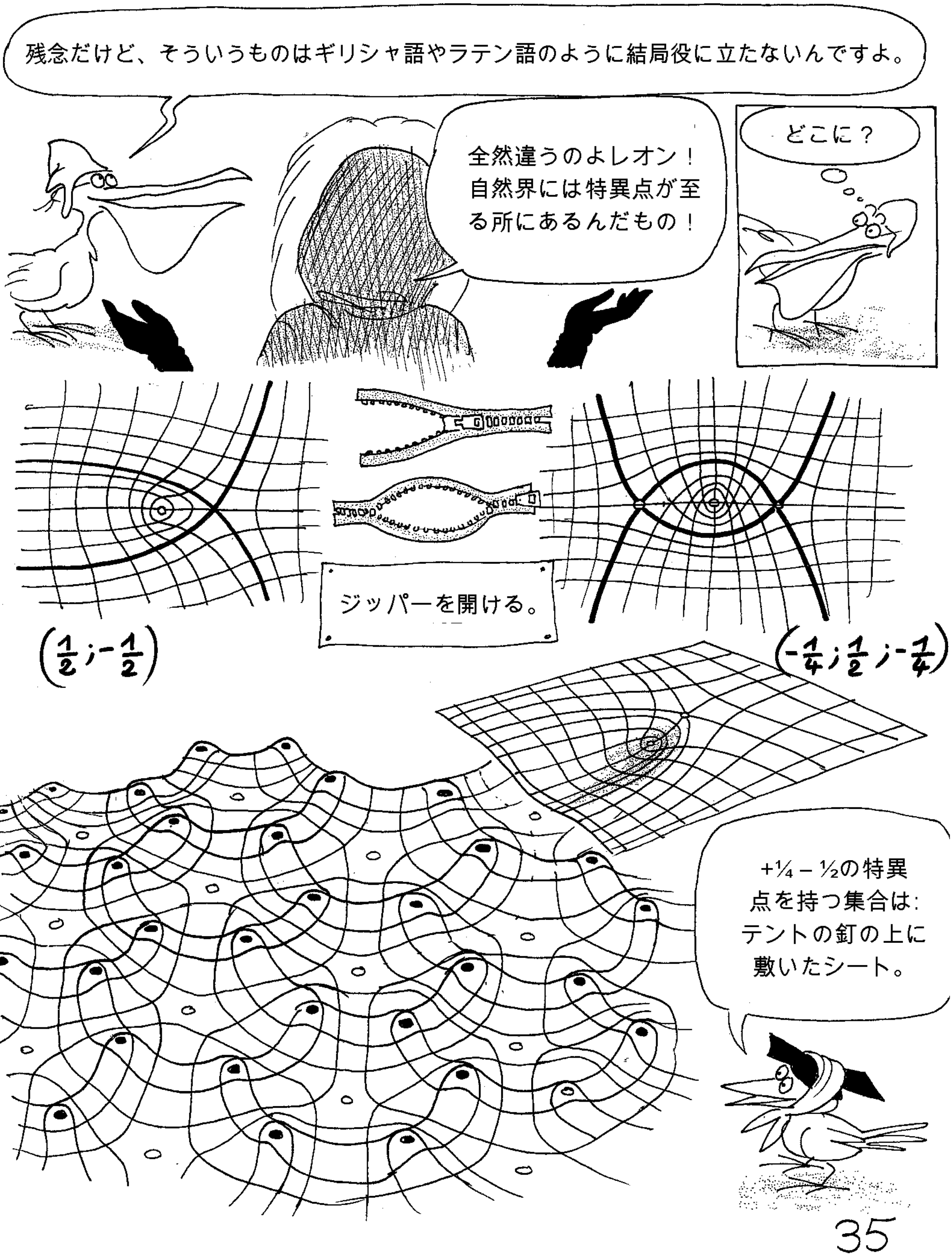
メッシュの特異点の次数は、矢印が回転する角度（正または負）を360°（2π）で割った値に等しいんだ。
極の次数は1だな。
+180°
1/2
+90°
1/4
+270°
3/4
-90°
-1/4
-270°
-3/4
-360°
-1
左にあるのが正の字数をもつ特異点で、右にあるのは負のものです。
それに何の意味があるのですか？
閉じた曲面を作るといずれ特異点が出現します。このとき、オイラー・ポアンカレ標数は特異点の次数の代数和に等しくなるのです。



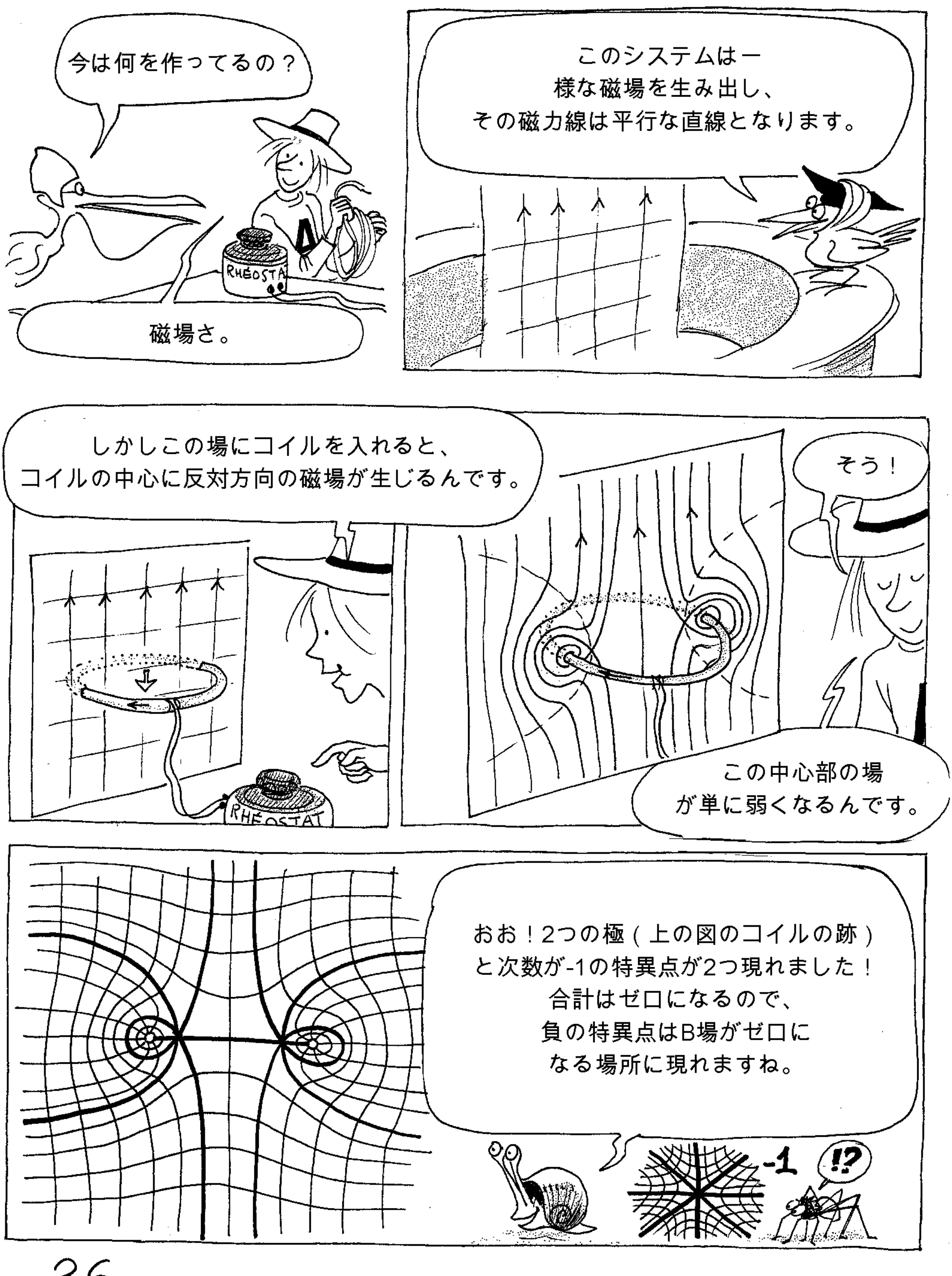
注記：

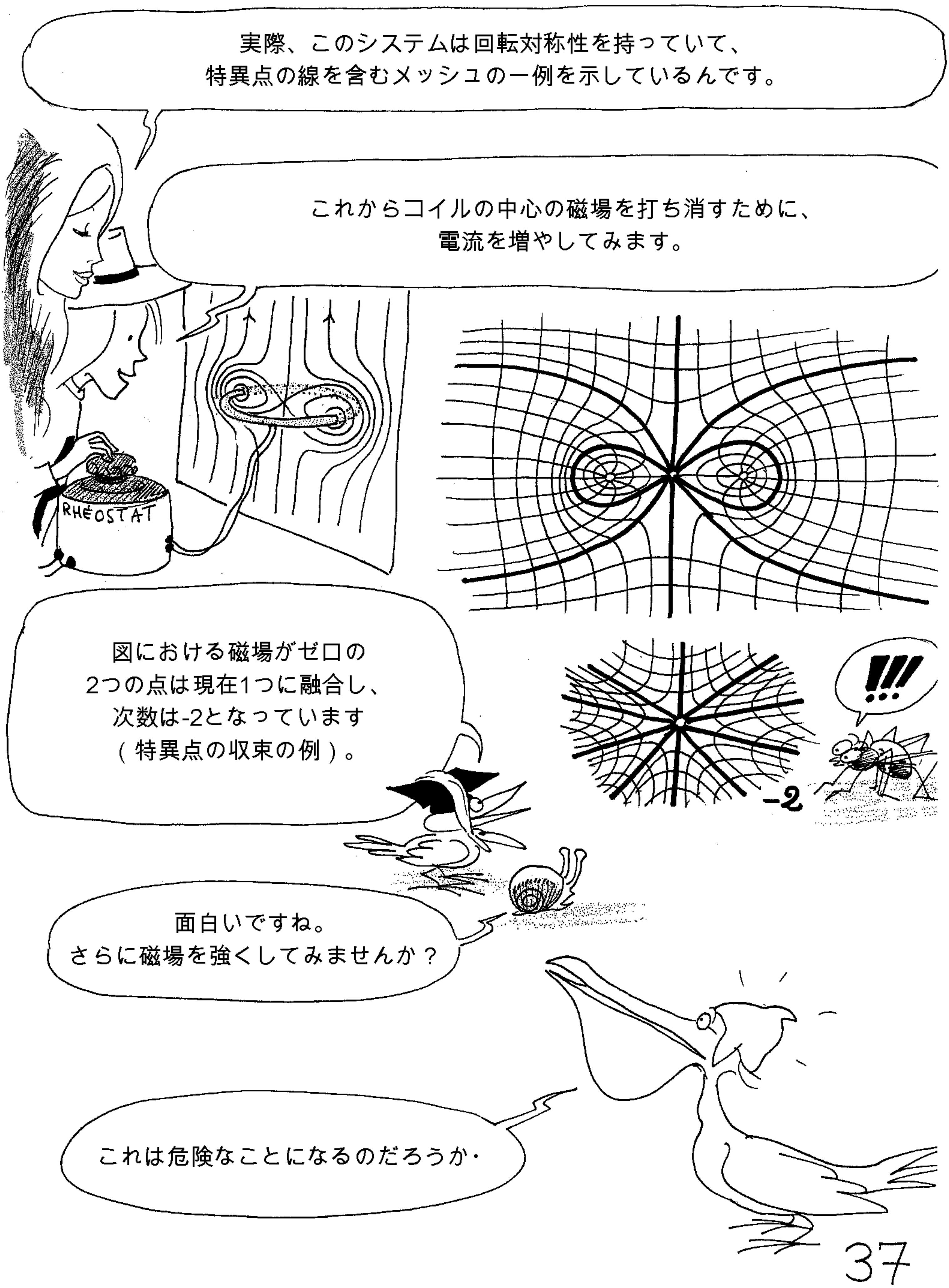
ブラックホール(BELIN版) の14ページから36ページを読んだ読者は、メッシュ特異点の図と配置、反転配置、および曲率との類似性に気づいたに違いない。これらの考え方はすべて(本質的には角度的なものであるが)、3次元空間で表現される曲面の総曲率と密接に関連しており、それはまさにオイラー・ポアンカレ標数に360°（または2π）を掛けたものに等しいのだ。

編集部

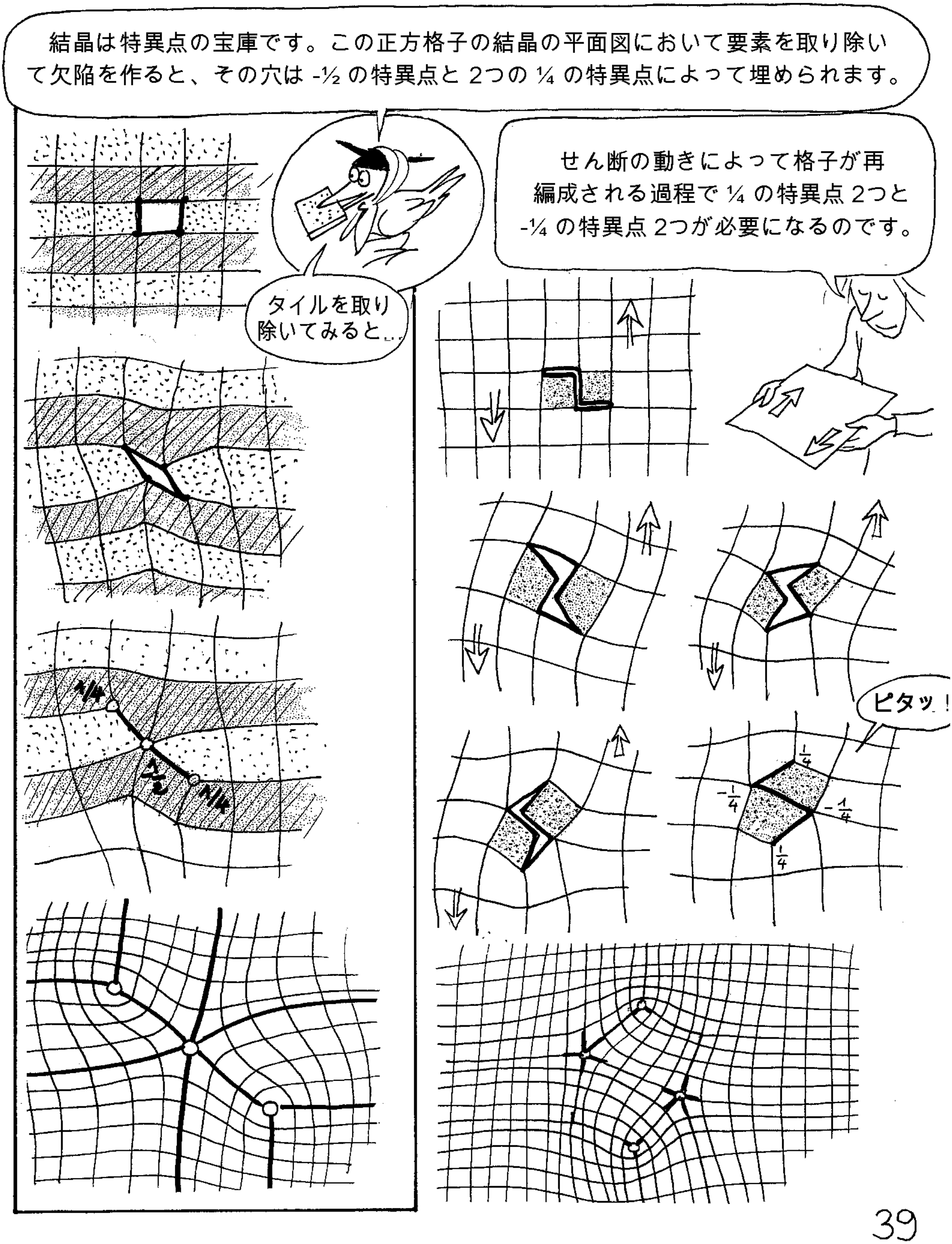


残念だけど、そういうものはギリシャ語やラテン語のように結局役に立たないんですよ。
全然違うのよレオン！自然界には特異点が至る所にあるんだもの！
どこに？
ジッパーを開ける。
(1/2 ; -1/2)
(-1/4 ; 1/2 ; -1/4)
+¼ – ½の特異点を持つ集合は:テントの釘の上に敷いたシート。


今は何を作ってるの？
磁場さ。
RHÉOSTAT
このシステムは一様な磁場を生み出し、その磁力線は平行な直線となります。
しかしこの場にコイルを入れると、コイルの中心に反対方向の磁場が生じるんです。
RHÉOSTAT
そう！
この中心部の場が単に弱くなるんです。
おお！2つの極（上の図のコイルの跡）と次数が-1の特異点が2つ現れました！
合計はゼロになるので、
負の特異点はB場がゼロになる場所に現れますね。
-1
!?


実際、このシステムは回転対称性を持っていて、
特異点の線を含むメッシュの一例を示しているんです。
これからコイルの中心の磁場を打ち消すために、
電流を増やしてみます。
RHÉOSTAT
図における磁場がゼロの
2つの点は現在1つに融合し、
次数は-2となっています
(特異点の収束の例)。
-2
!!!
面白いですね。
さらに磁場を強くしてみませんか？
これは危険なことになるのだろうか·

レオン、何を怖がっているんだい？
時空に不可逆的な変化を引き起こすこと？
せいぜい100ガウスですよ。
沈黙の壁以降、
レオンは磁場に強いこだわりを持
っているんです。
素晴らしい!
A
コイルの中心で磁場Bが反転し、
その特異点は2つの-1の次数を持
つ特異点に分かれました。
これによってトーラス型の磁
気渦が形成されました。
メッシュと特異点は物理学
のあらゆる交差点に存在するんですよ。



結晶は特異点の宝庫です。この正方格子の結晶の平面図において要素を取り除いて欠陥を作ると、その穴は -½ の特異点と 2つの ¼ の特異点によって埋められます。
タイルを取り除いてみると…
せん断の動きによって格子が再編成される過程で ¼ の特異点 2つと -¼ の特異点 2つが必要になるのです。
ピタッ！
1/4
-1/4
-1/4
1/4

(*) メッシュは2次元の物体を指します。舗装(埋め合わせ)はそれに相当するもので、より高次元の物体に対するものです。

以降の内容は、A、B、C、D の文字で分類された
「ページめくりアニメーション」を使って説明されます。

編集部

A

メビウスの帯をボーイ曲面へ変換

ボーイ曲面

B

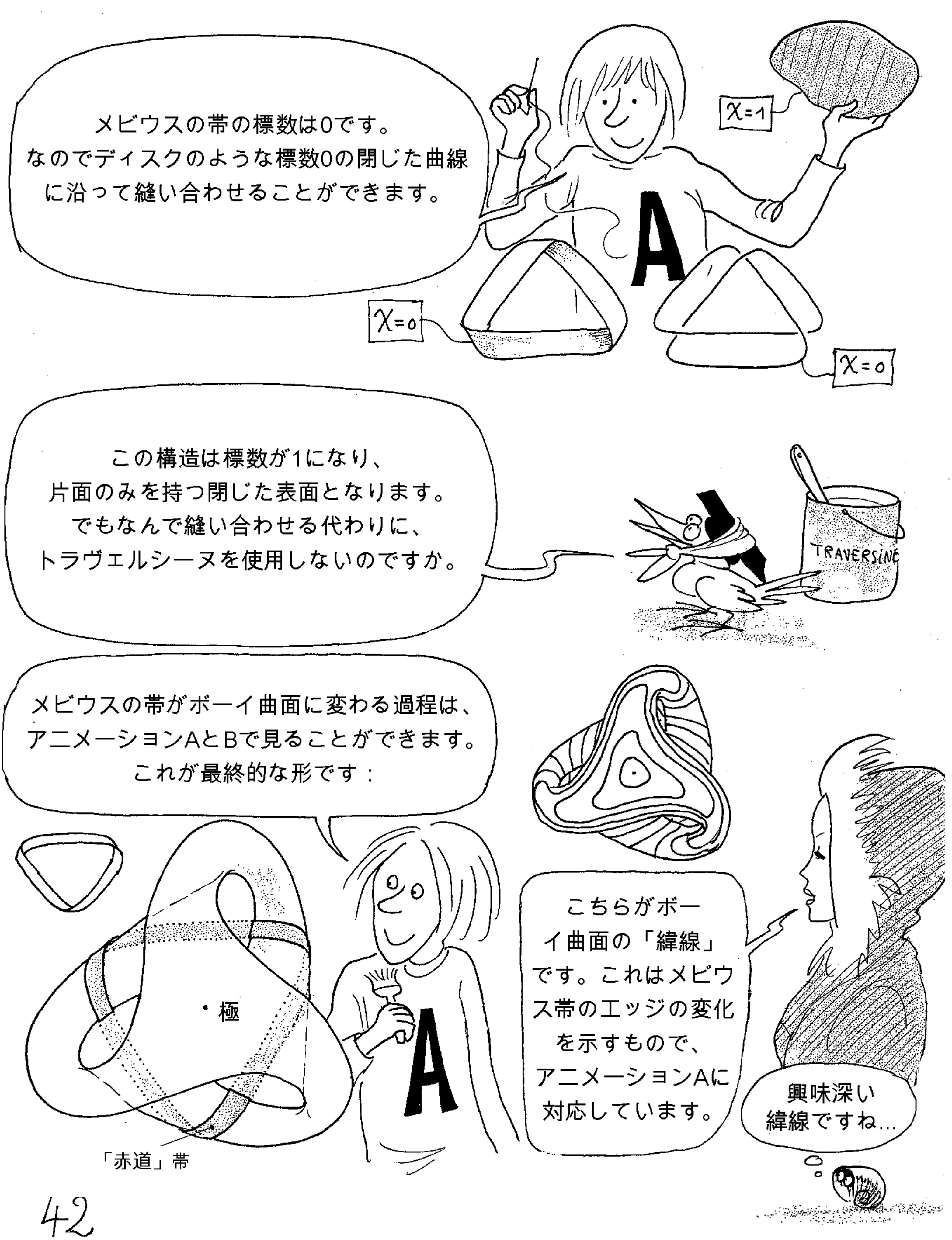
曲線エッジと自己交差の集合

C

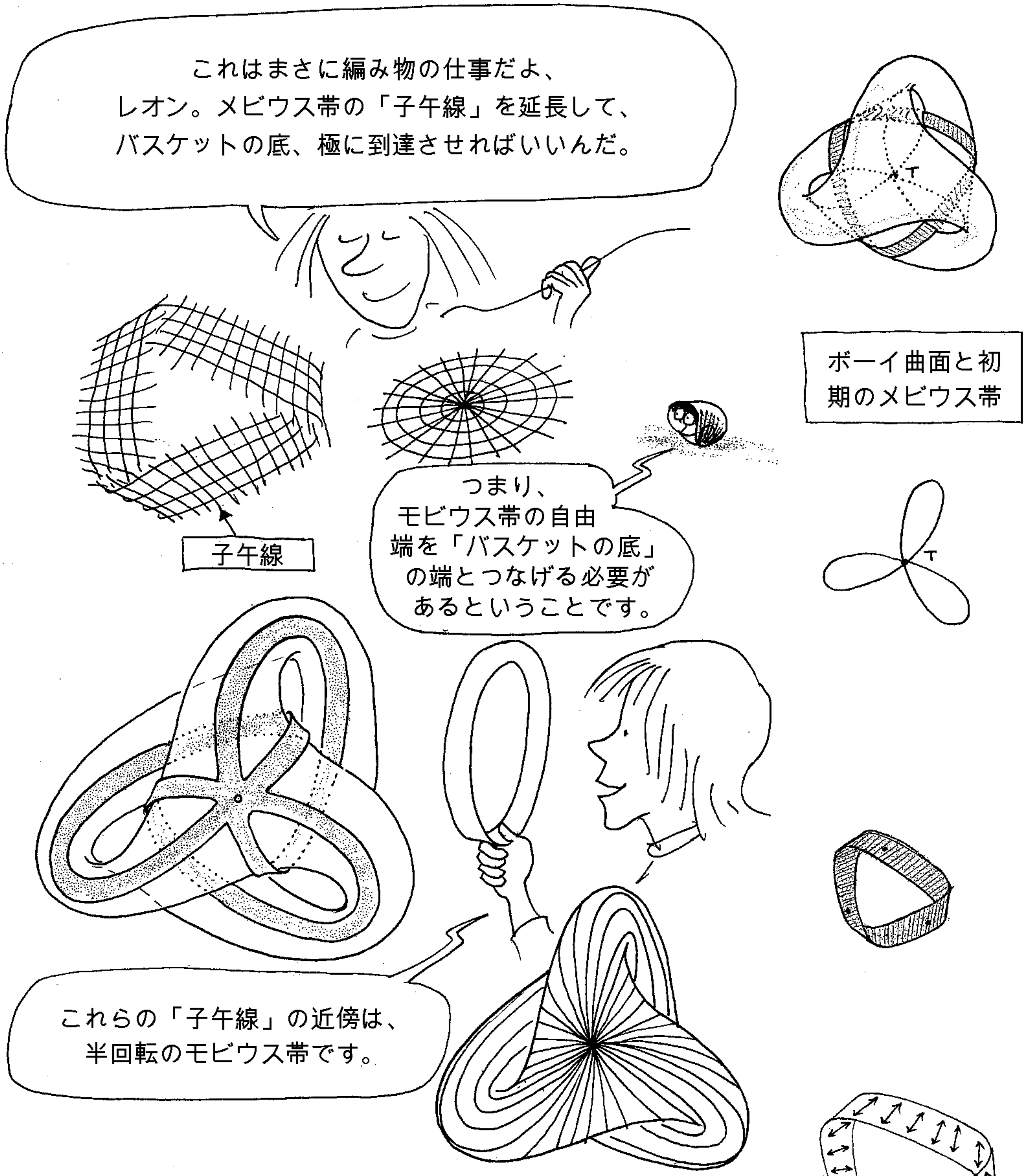
対蹠点を結ぶ

D

時間の見かけ上の逆転

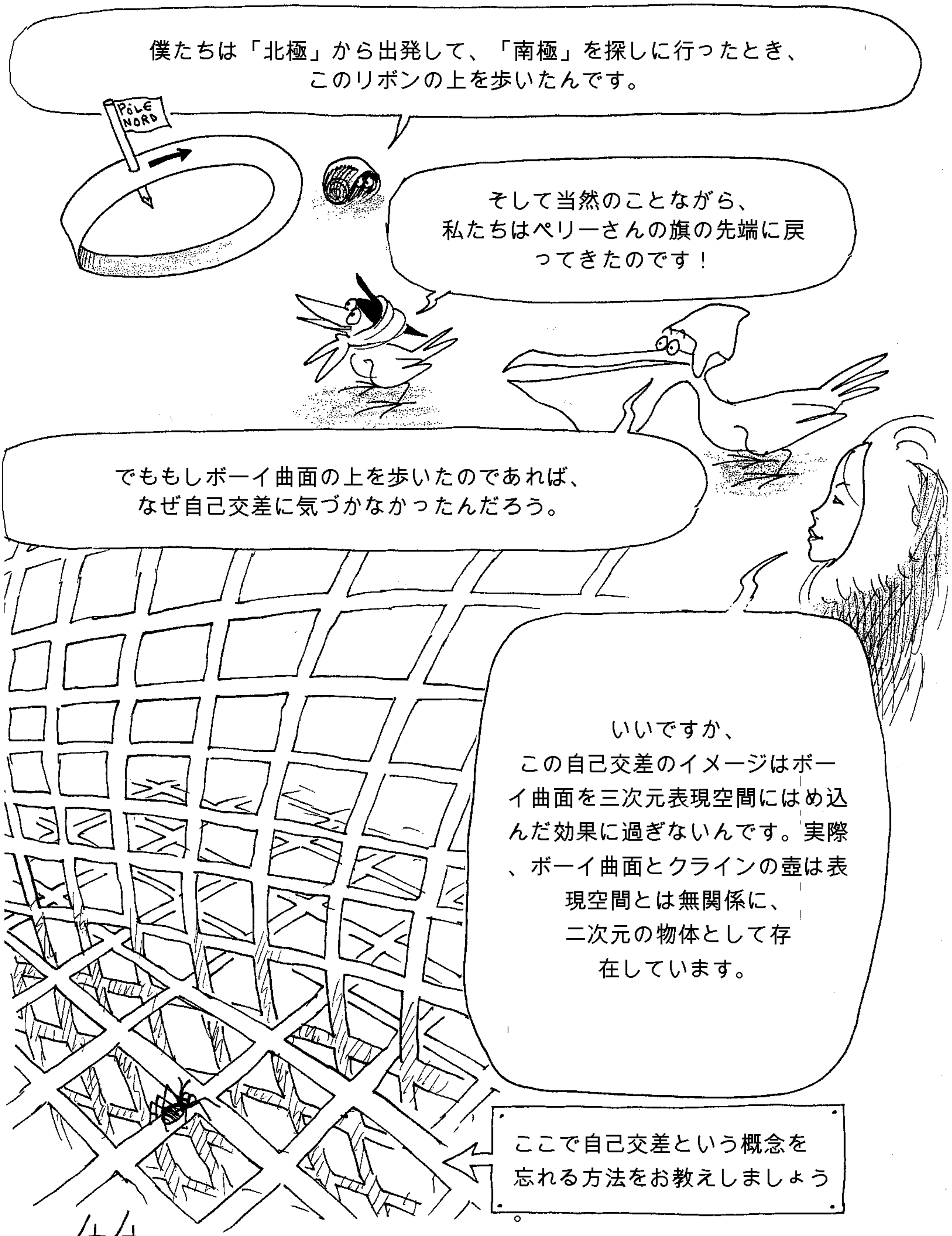


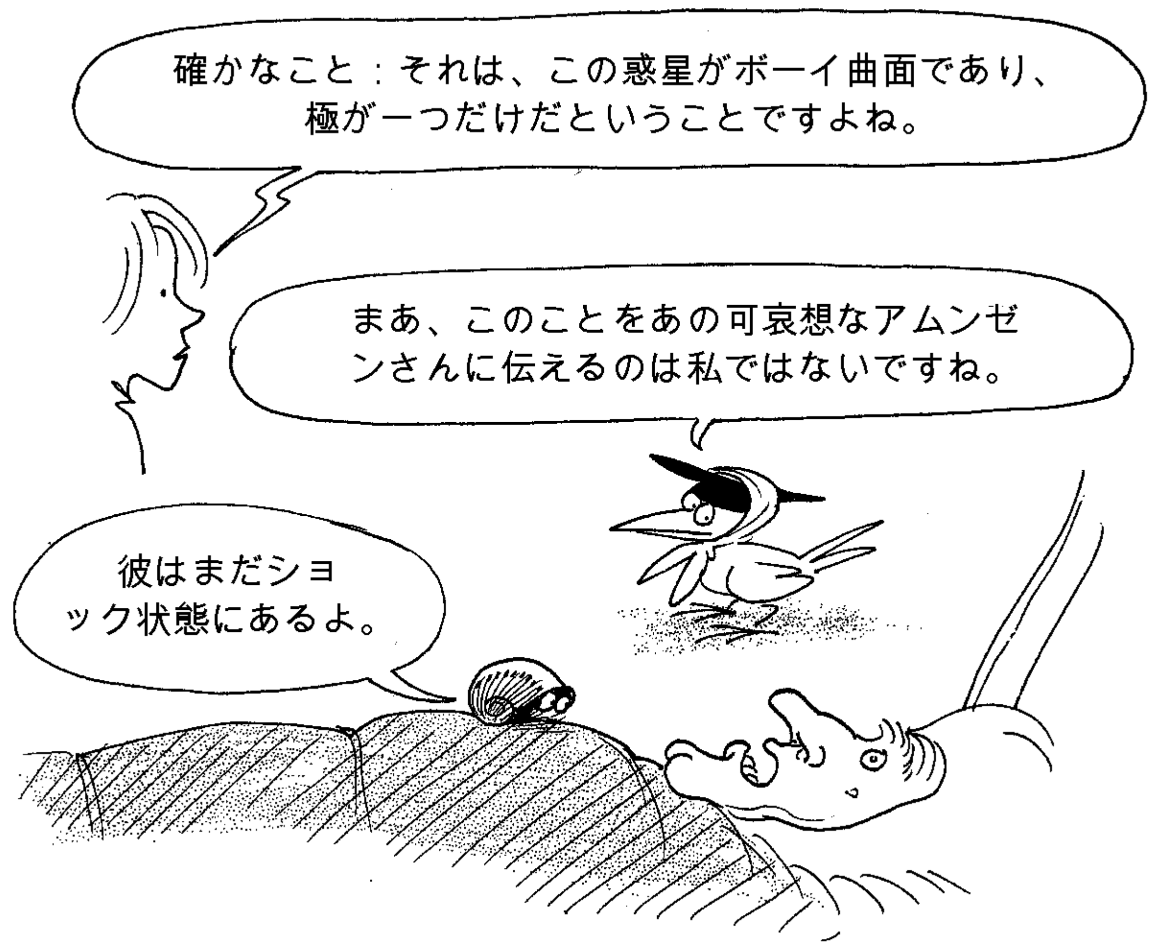
メビウスの帯の標数は0です。なのでディスクのような標数0の閉じた曲線に沿って縫い合わせることができます。
χ=1
χ=0
χ=0
この構造は標数が1になり、片面のみを持つ閉じた表面となります。でもなんで縫い合わせる代わりに、トラヴェルシーヌを使用しないのですか。
TRAVERSINE
メビウスの帯がボーイ曲面に変わる過程は、アニメーションAとBで見ることができます。これが最終的な形です：
極
「赤道」帯
こちらがボーイ曲面の「緯線」です。これはメビウス帯のエッジの変化を示すもので、アニメーションAに対応しています。
興味深い緯線ですね…

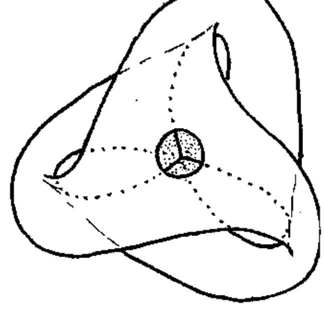


「子午線」と「緯線」の集合を持つボーイ曲面の最初のモデルは、著者によって考案されました。その後、彫刻家マックス・ソーズによって作成された美しい模型が、パリの「発見の宮殿」の「πルーム」に展示されています
。

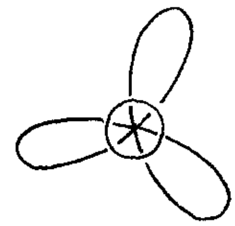
編集部


僕たちは「北極」から出発して、「南極」を探しに行ったとき、このリボンの上を歩いたんです。
PÔLE NORD
そして当然のことながら、私たちはペリーさんの旗の先端に戻ってきたのです！
でももしボーイ曲面の上を歩いたのであれば、なぜ自己交差に気づかなかったんだろう。
いいですか、この自己交差のイメージはボーイ曲面を三次元表現空間にはめ込んだ効果に過ぎないんです。実際、ボーイ曲面とクラインの壺は表現空間とは無関係に、二次元の物体として存在しています。
ここで自己交差という概念を忘れる方法をお教えしましょう。

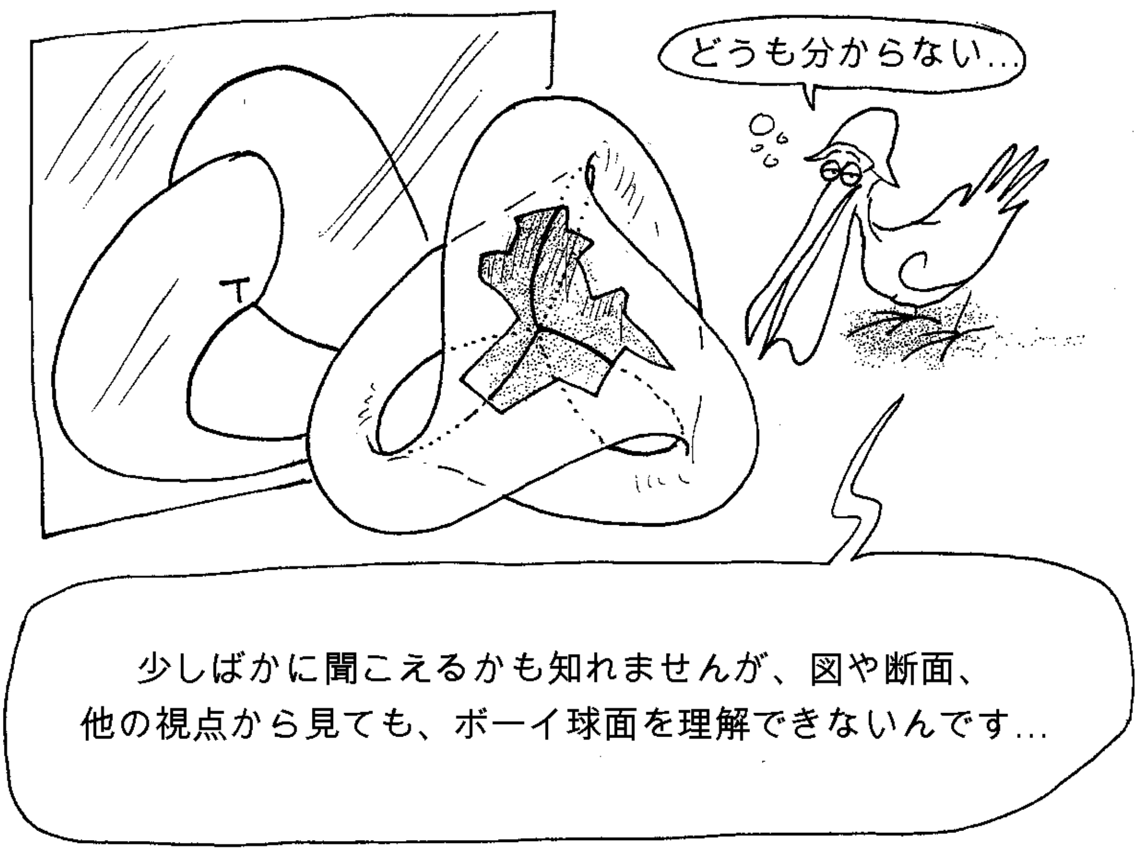


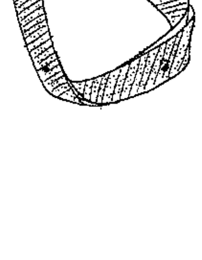


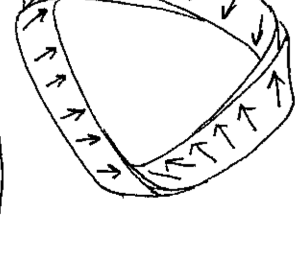
円形のエッジを持つメビウスの帯

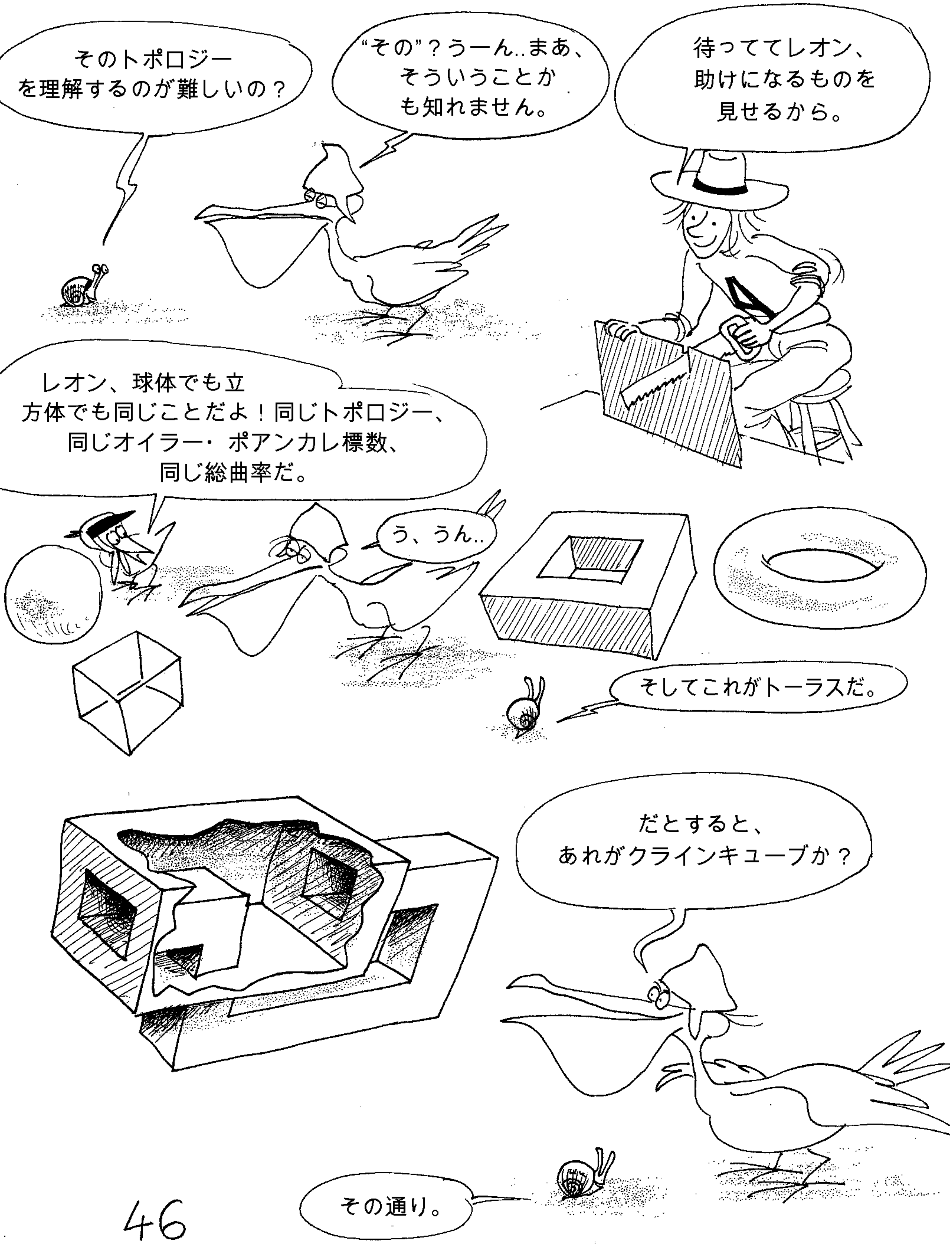


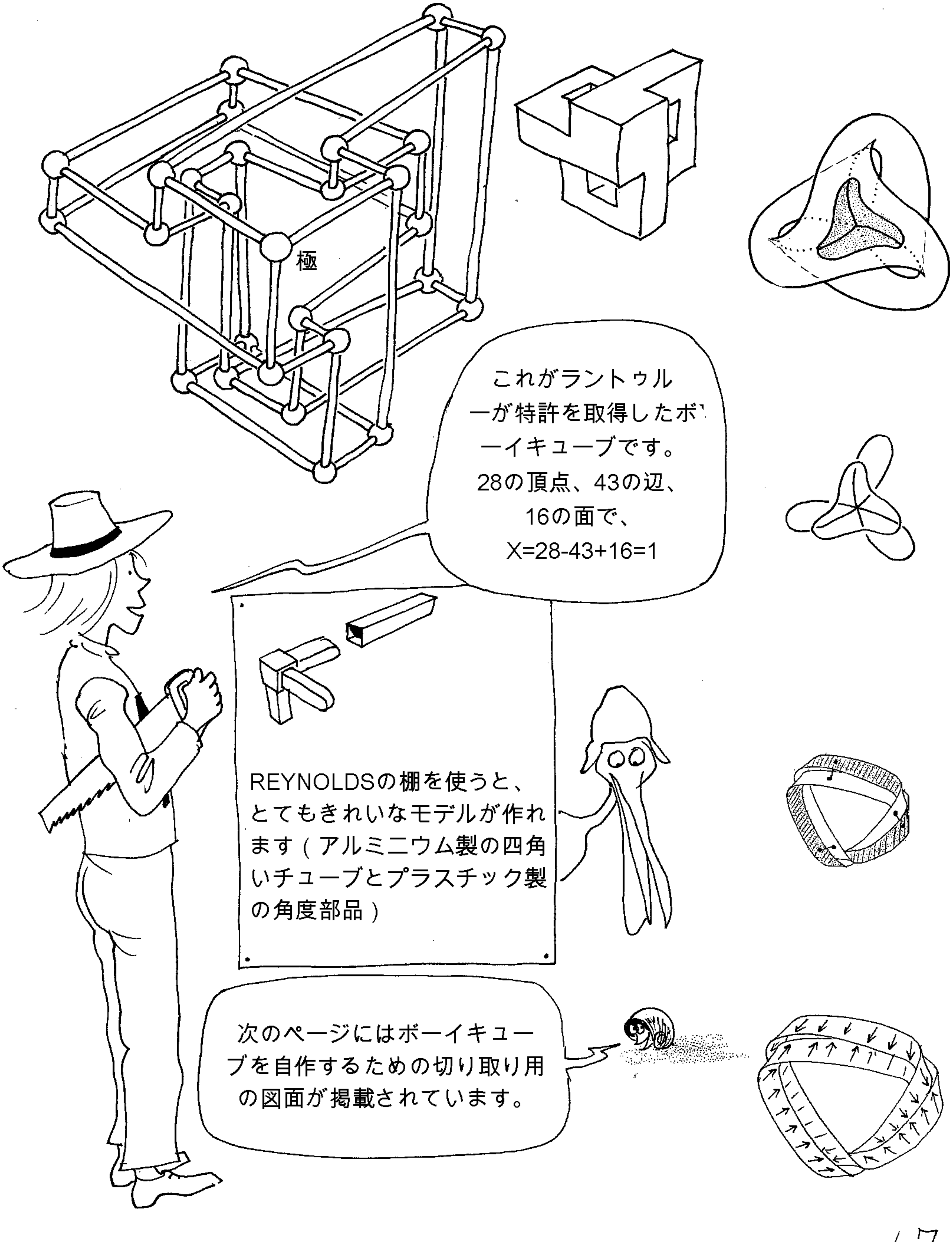
ボーイキューブ

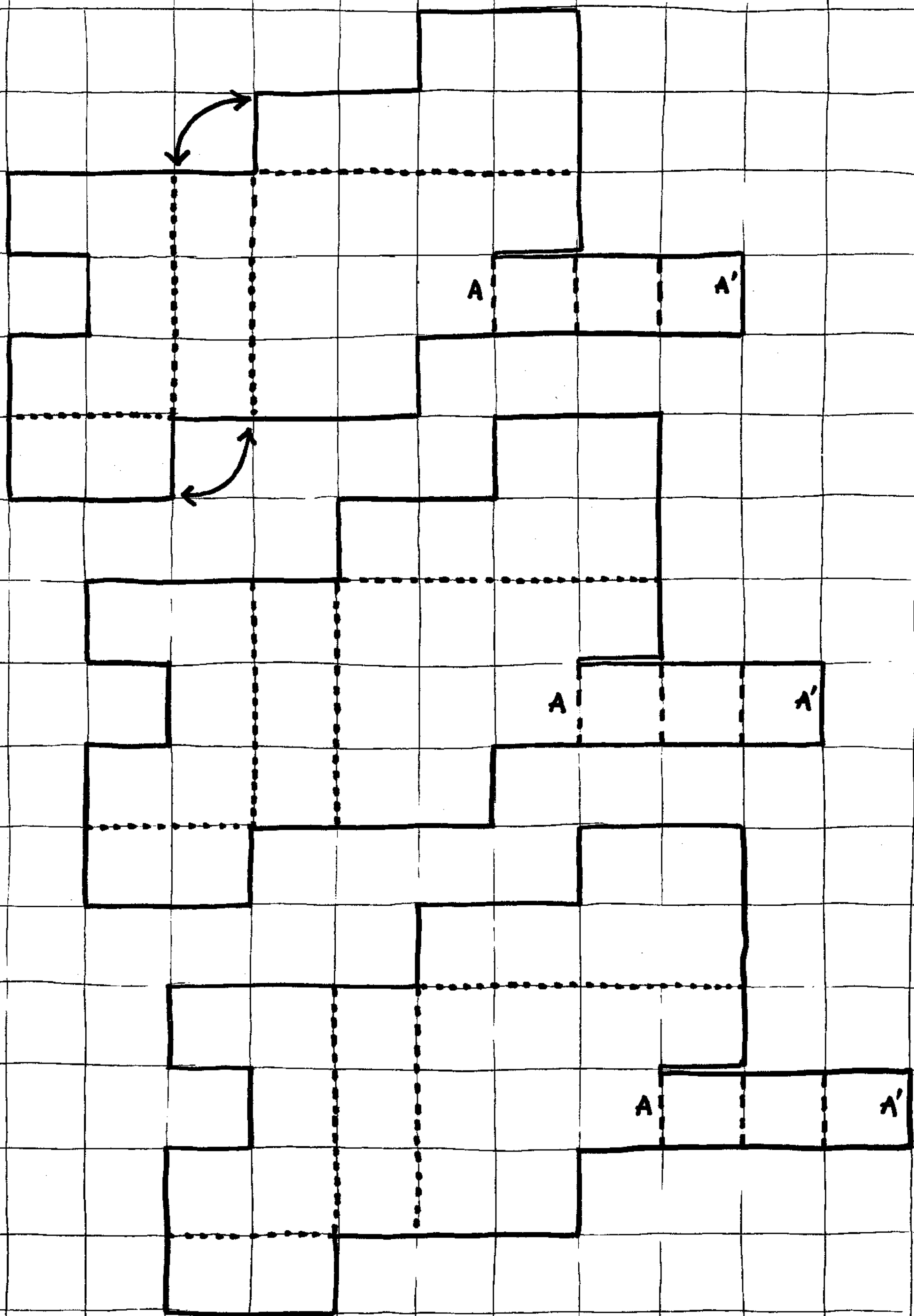


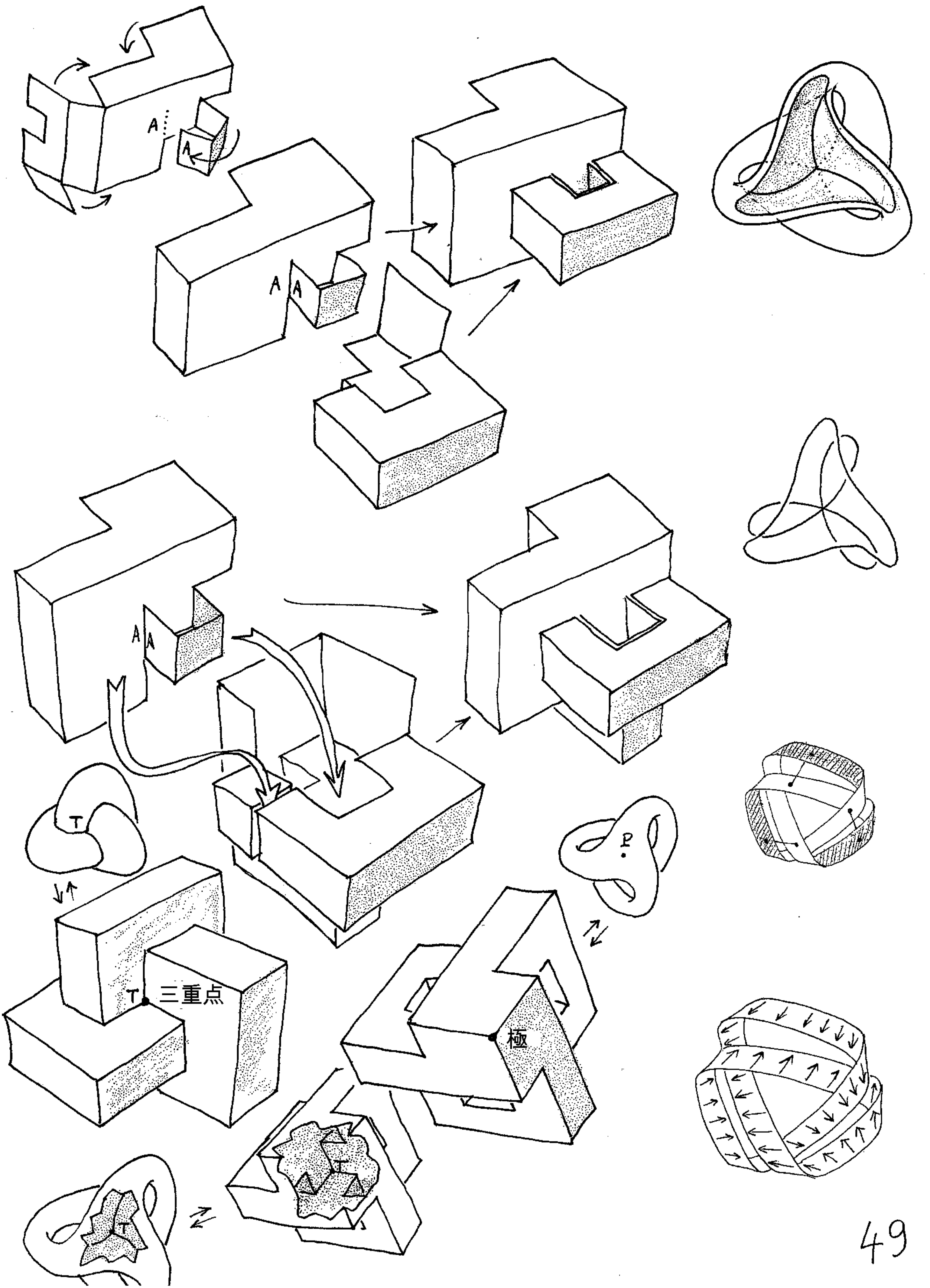





そのトポロジー
を理解するのが難しいの？
“その”？うーん..まあ、
そういうことか
も知れません。
待っててレオン、
助けになるものを
見せるから。
レオン、球体でも立
方体でも同じことだよ！同じトポロジー、
同じオイラー・ポアンカレ標数、
同じ総曲率だ。
う、うん..
そしてこれがトーラスだ。
だとすると、
あれがクラインキューブか？
その通り。


極
これがラントゥルーが特許を取得したボーイキューブです。28の頂点、43の辺、16の面で、X=28-43+16=1
REYNOLDSの棚を使うと、とてもきれいなモデルが作れます（アルミニウム製の四角いチューブとプラスチック製の角度部品）
次のページにはボーイキューブを自作するための切り取り用の図面が掲載されています。

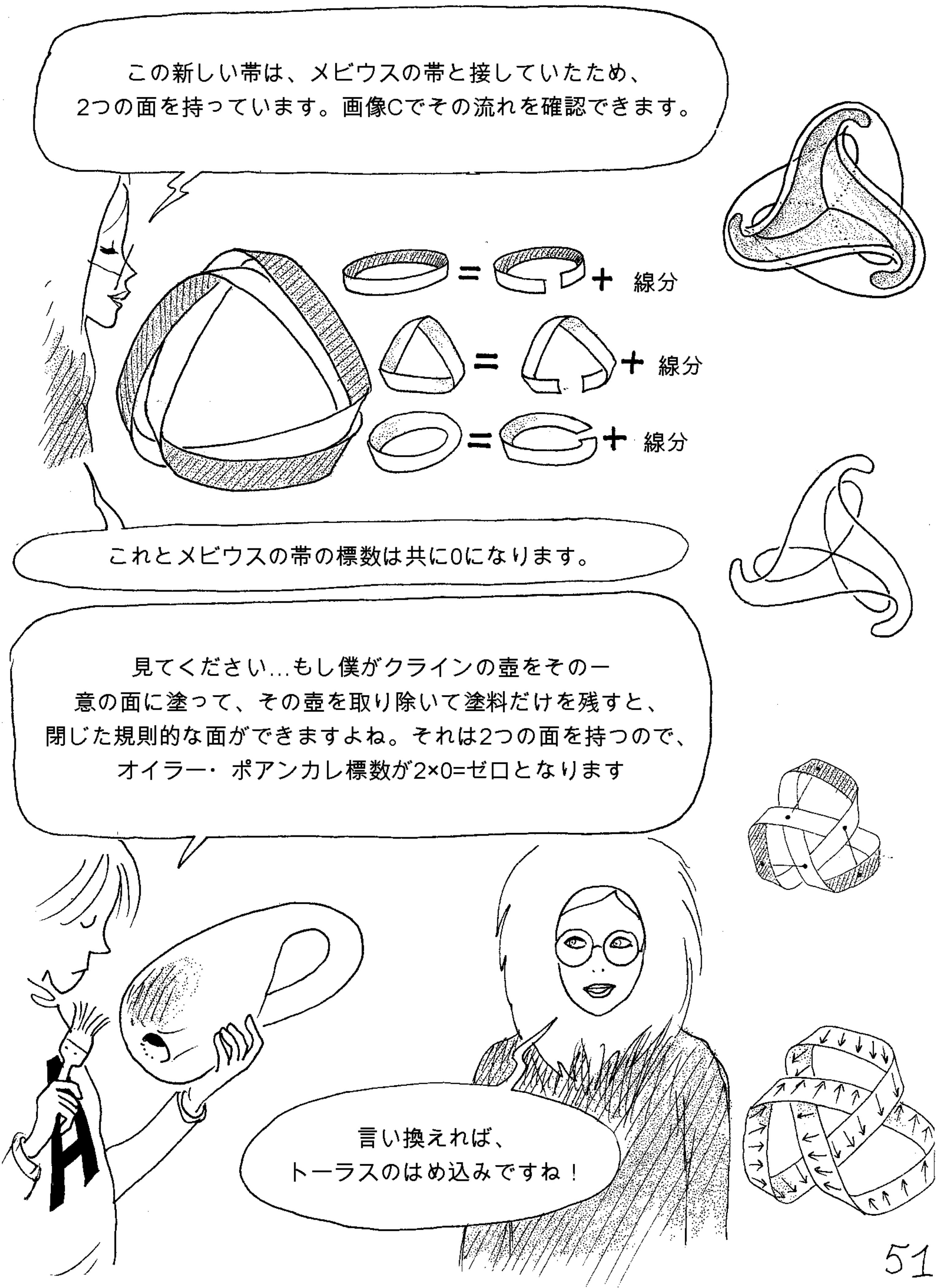

A
A'
A
A'
A
A'



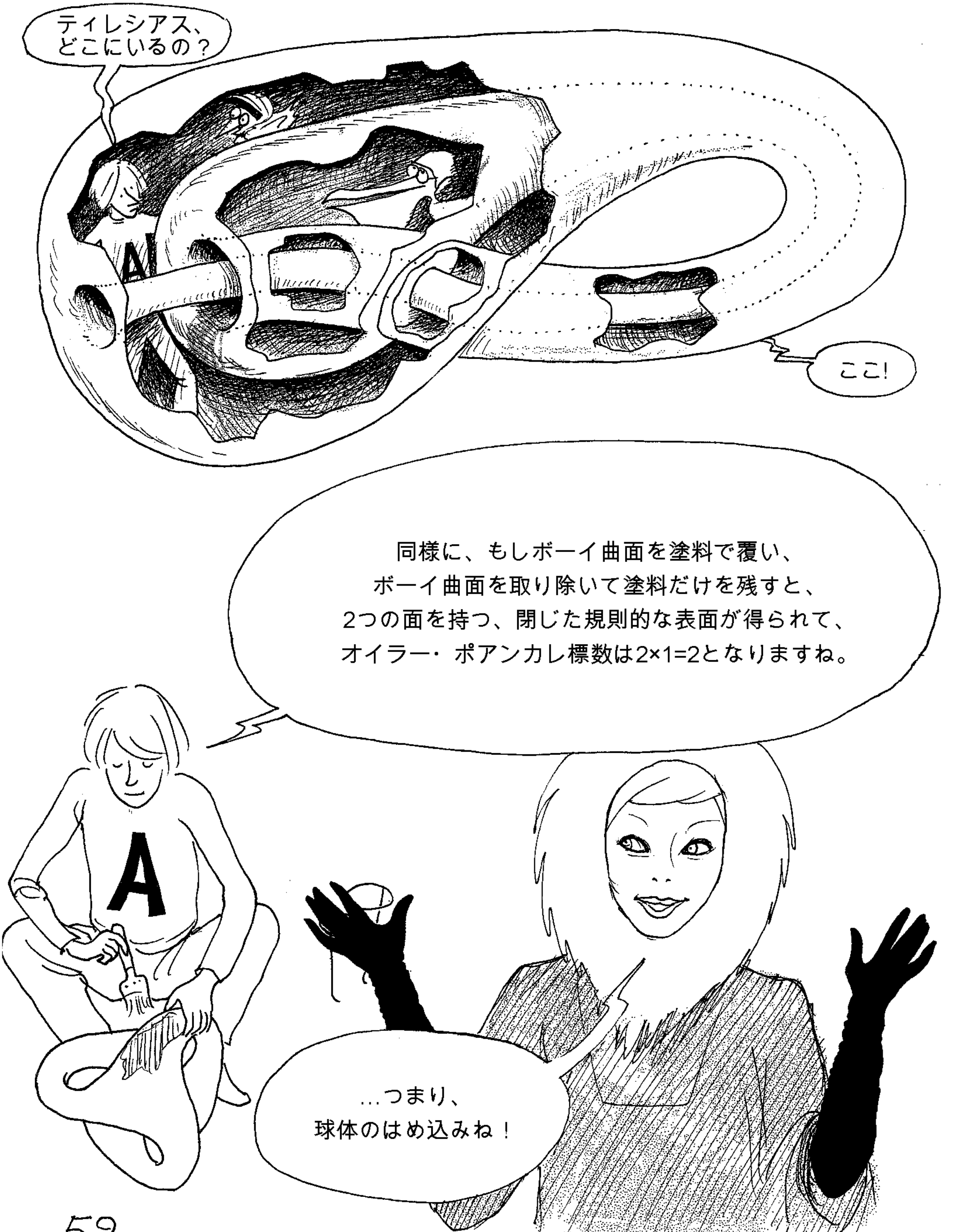
A
A
A
A
A
A
T
三重点
T
極
P
T
T

被膜

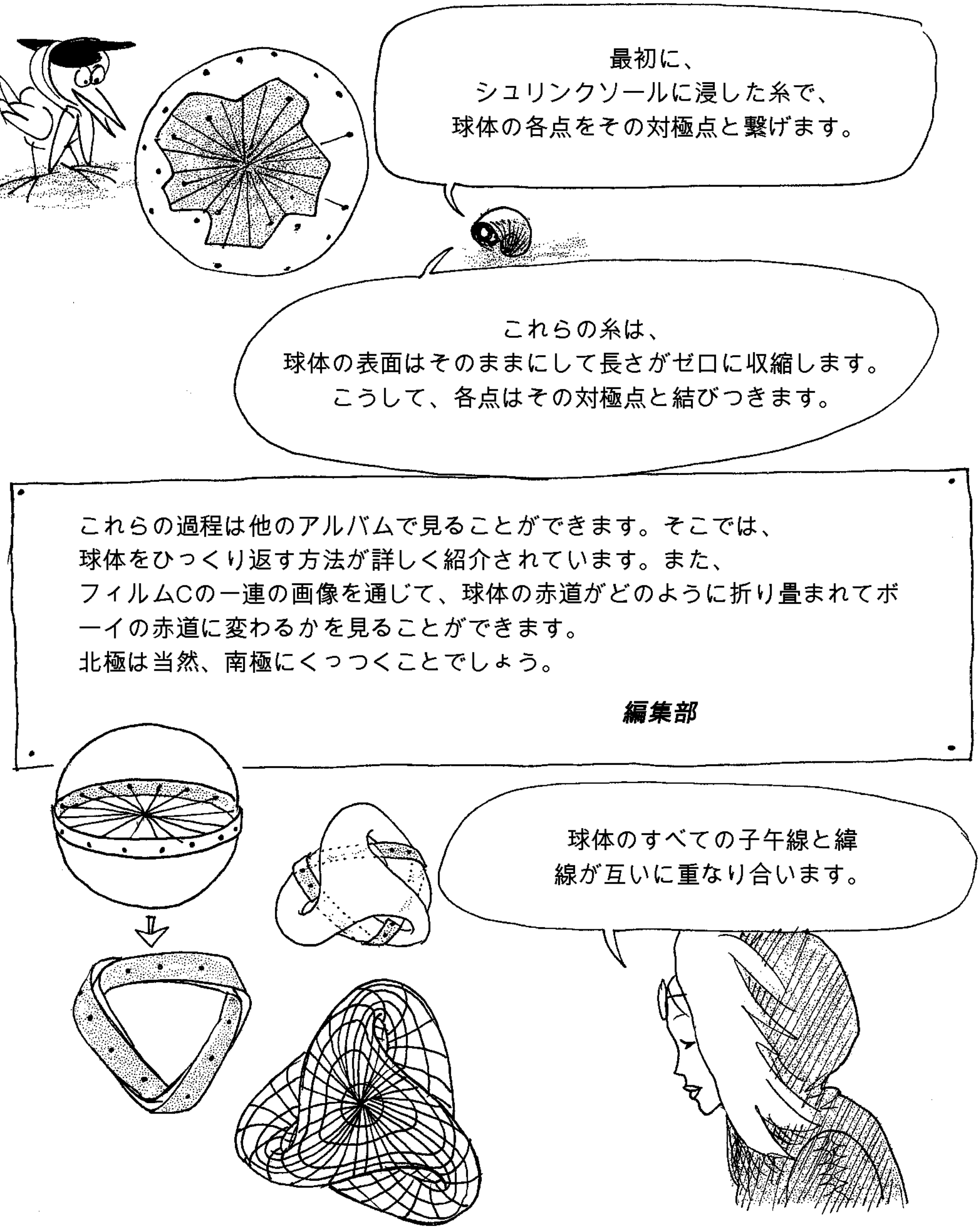

それでもうこの物語はおしまいですか？
いえ、予想外の展開になりそうです…
単一面性かつ向き付け不可能な対象の「二重被覆」は、両側性で向き付け可能となり、標数は倍になります。ですって。
何のたわごとだ？
簡単よ。メビウスの帯を取って、その一意の面を塗料で覆って、それから帯を取り除けばいいんですから。
….塗料だけを残すように！

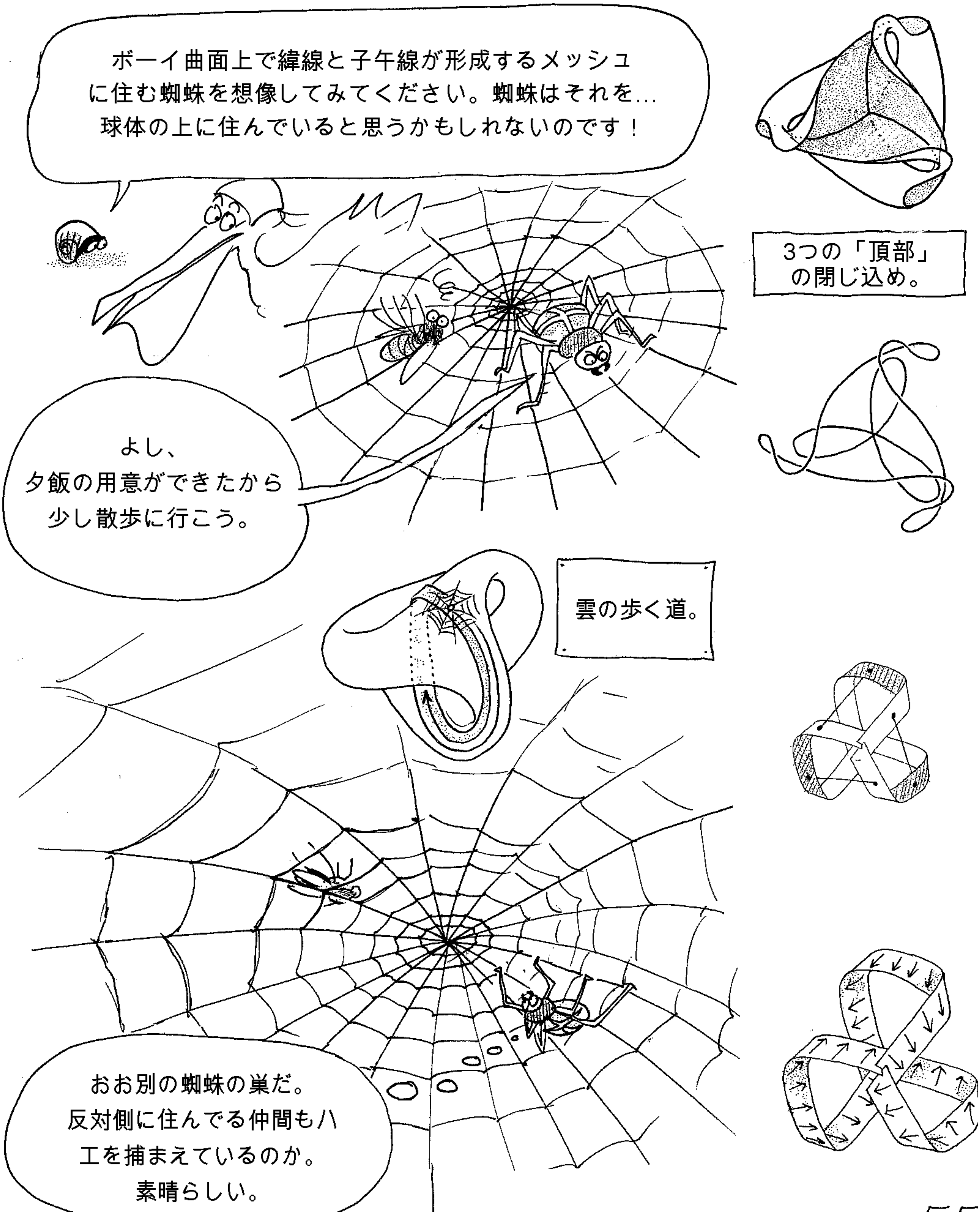


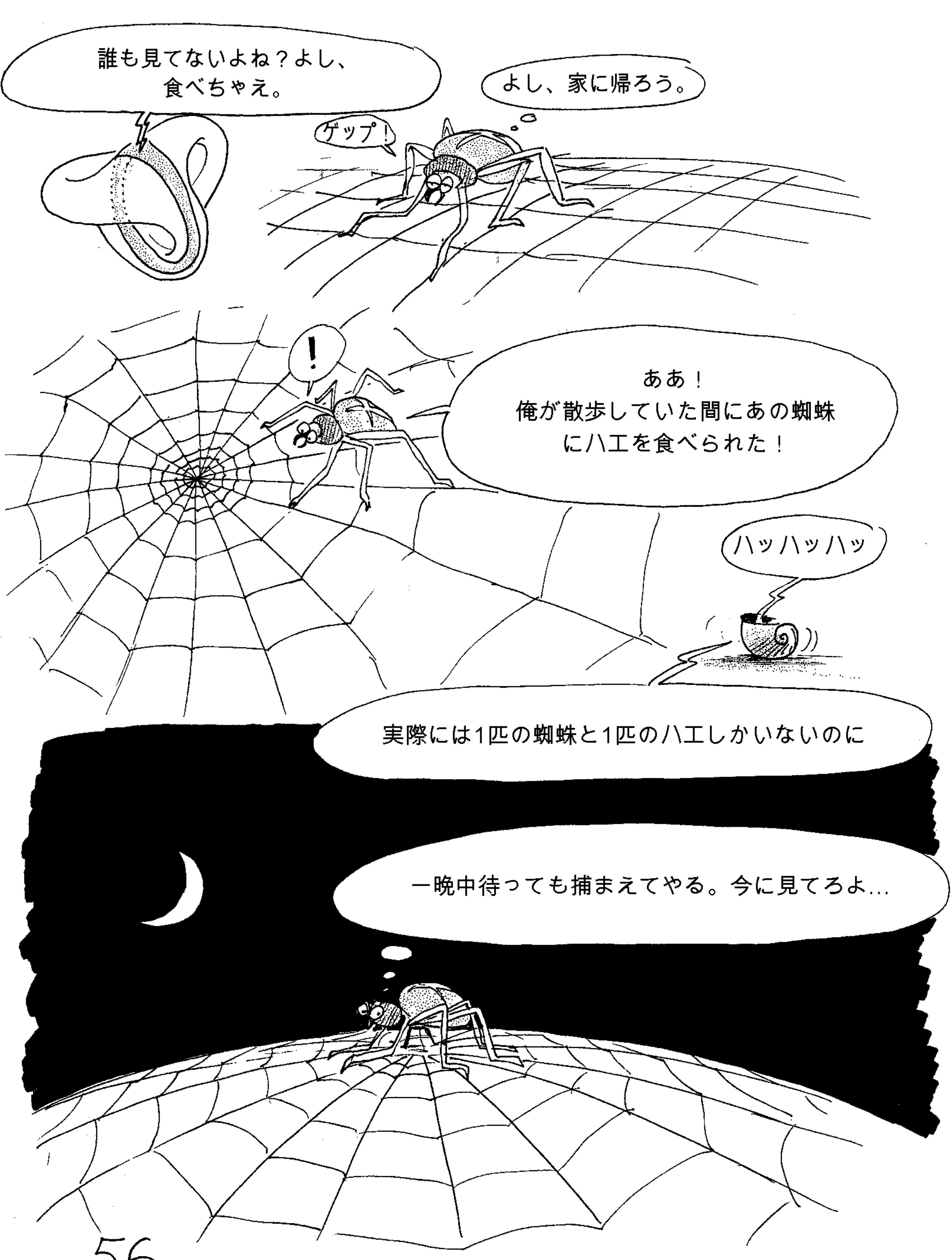
この新しい帯は、メビウスの帯と接していたため、2つの面を持っています。画像Cでその流れを確認できます。
= + 線分
= + 線分
= + 線分
これとメビウスの帯の標数は共に0になります。
見てください…もし僕がクラインの壺をその一意の面に塗って、その壺を取り除いて塗料だけを残すと、閉じた規則的な面ができますよね。それは2つの面を持つので、オイラー・ポアンカレ標数が2×0=ゼロとなります
言い換えれば、トーラスのはめ込みですね！


ティレシアス、どこにいるの？
ここ!
同様に、もしボーイ曲面を塗料で覆い、ボーイ曲面を取り除いて塗料だけを残すと、2つの面を持つ、閉じた規則的な表面が得られて、オイラー・ポアンカレ標数は2×1=2となりますね。
…つまり、球体のはめ込みね！

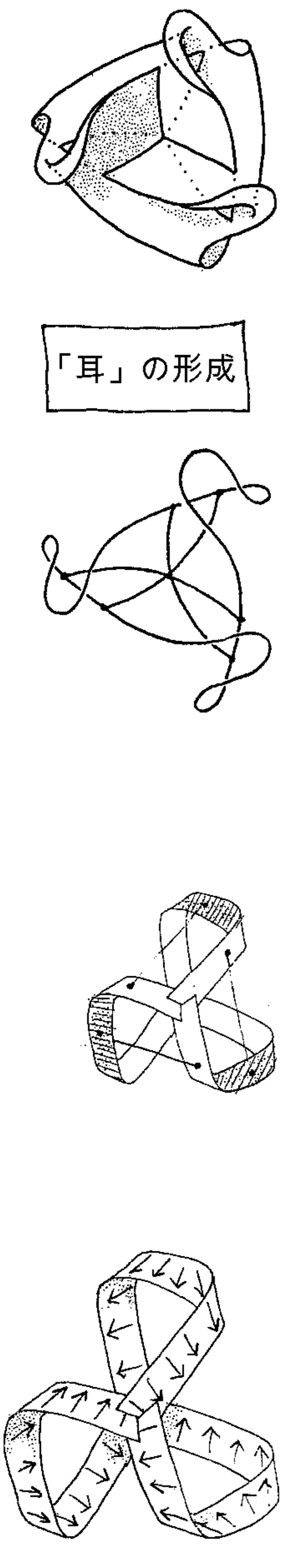

本当にこの奇妙な球を「展開」して、「普通」の球に変えることができるのでしょうか？
トラヴェルシーヌを使えば問題ありませんよ。トーラスでも同じです。
逆を考えてみましょう…もし「折り目をつけずに」球体を「再び折り返したい」と思った場合は…!
交差した帯の結果
シュリンクソール
シュリンクソールを使う必要がありますね。


最初に、
シュリンクソールに浸した糸で、
球体の各点をその対極点と繋げます。
これらの糸は、
球体の表面はそのままにして長さがゼロに収縮します。
こうして、各点はその対極点と結びつきます。
これらの過程は他のアルバムで見ることができます。そこでは、
球体をひっくり返す方法が詳しく紹介されています。また、
フィルムCの一連の画像を通じて、球体の赤道がどのように折り畳まれてボーイの赤道に変わるかを見ることができます。
北極は当然、南極にくっつくことでしょう。
編集部
球体のすべての子午線と緯線が互いに重なり合います。

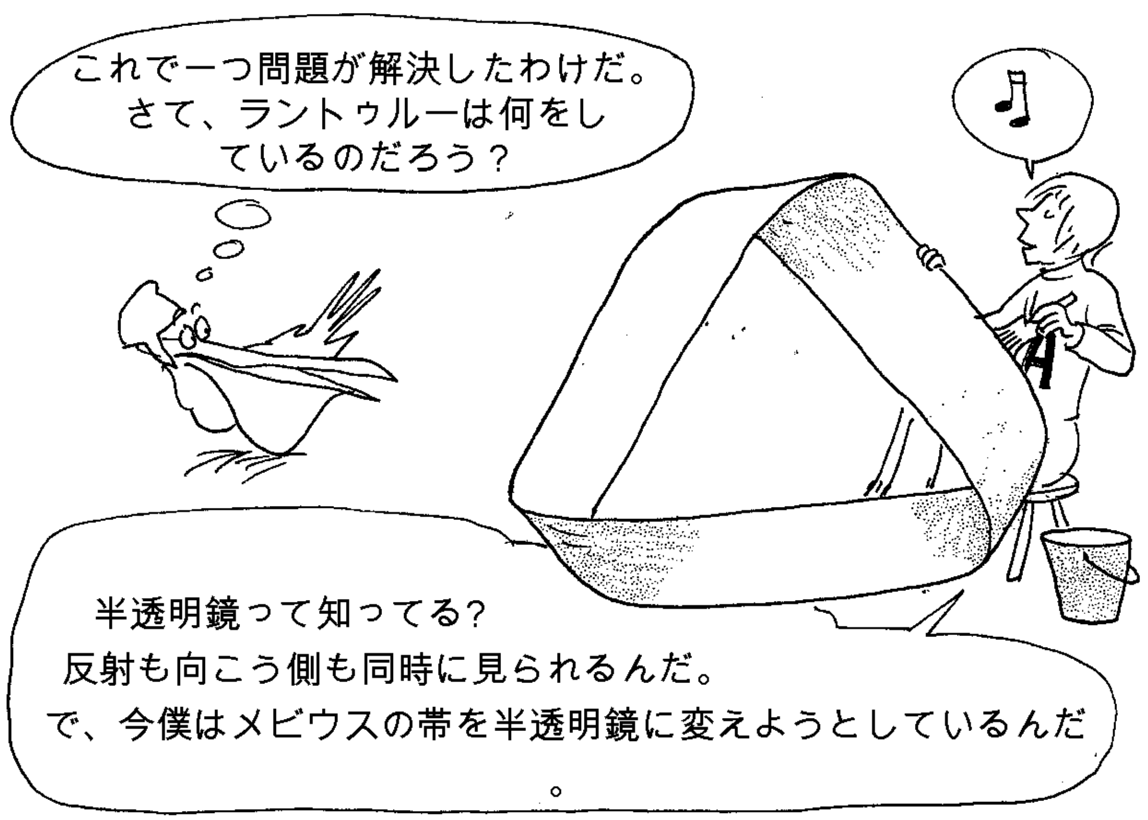

ボーイ曲面上で緯線と子午線が形成するメッシュ
に住む蜘蛛を想像してみてください。蜘蛛はそれを...
球体の上に住んでいると思うかもしれないのです！
3つの「頂部」
の閉じ込め。
よし、
夕飯の用意ができたから
少し散歩に行こう。
雲の歩く道。
おお別の蜘蛛の巣だ。
反対側に住んでる仲間もハ
工を捕まえているのか。
素晴らしい。

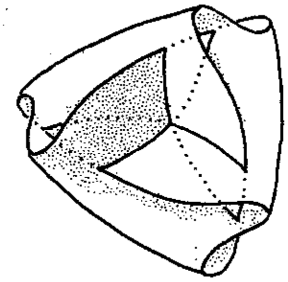

誰も見てないよね？よし、
食べちゃえ。
ゲップ！
よし、家に帰ろう。
！
ああ！
俺が散歩していた間にあの蜘蛛
にハエを食べられた！
ハッハッハッ
実際には1匹の蜘蛛と1匹のハエしかいないのに
一晩中待っても捕まえてやる。今に見てろよ...

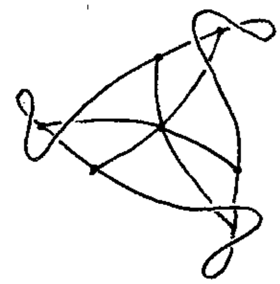

この蜘蛛の話…待って、アムンゼンの助ける方法が分かったかも！
それは何？
アムンゼンさん、すべて解決しましたよ！あなたの南極点を見つけました…！
ああ…
あなたはこれを持って…
南極点
…そして置いてください！
ペリーさんにも同じものを渡してたよな。
全てがうまくいきました…
北極点
南極点


「耳」の形成

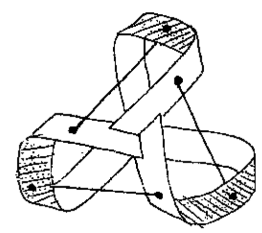
ああ、なんて良い日だ！
なかなか良い見栄えをしているなぁ
アムンゼンさん、歴史的な写真をお願いします。
しっしっ　歴史的な写真には俺だけが写りたいんだ。
南極点
科学においても、時には深く掘り下げない方がいいこともあるってことか…
各極はそれぞれ適切に設置されているし、もう心配はないかな。
実際、北極の下を掘ったら驚きが待ってますけどね。
それで誰かさんは動揺して怒り狂うのさ。

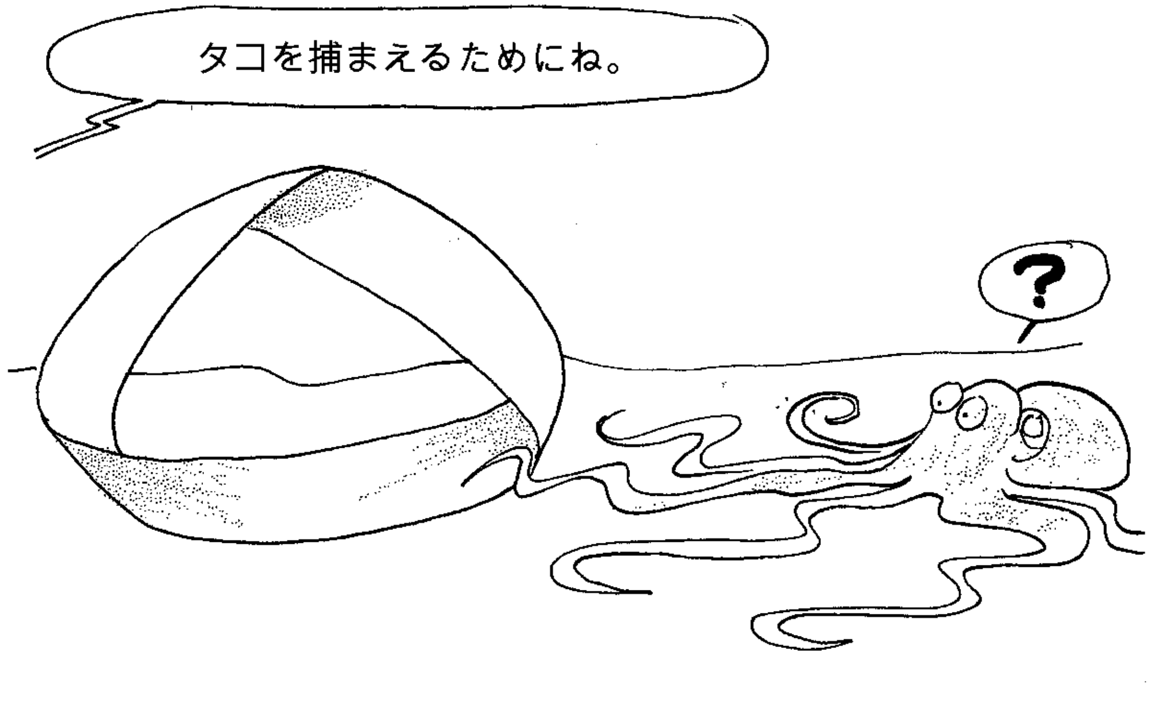

これで一つ問題が解決したわけだ。
さて、ラントゥルーは何をしているのだろう？
♪
A
半透明鏡って知ってる？
反射も向こう側も同時に見られるんだ。
で、今僕はメビウスの帯を半透明鏡に変えようとしているんだ。

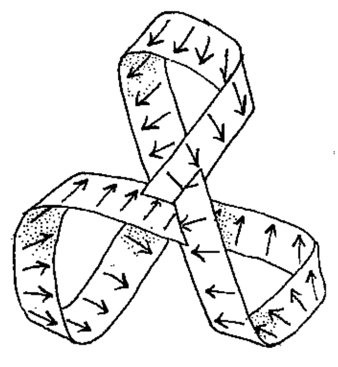




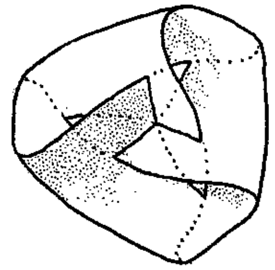
鏡像段階

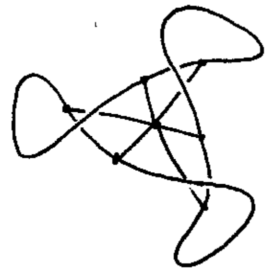



タコを捕まえるためにね。
?

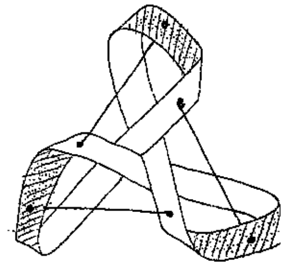


(*) このような鏡は、そこらに転がっているクラインの壺を使って作ることができます。

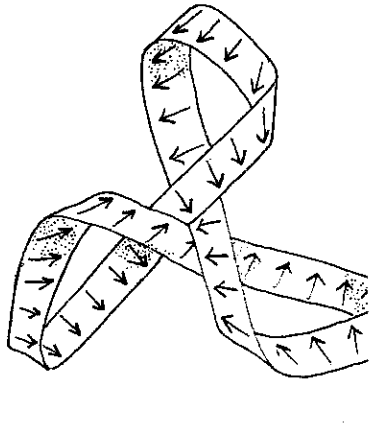




混乱した時空



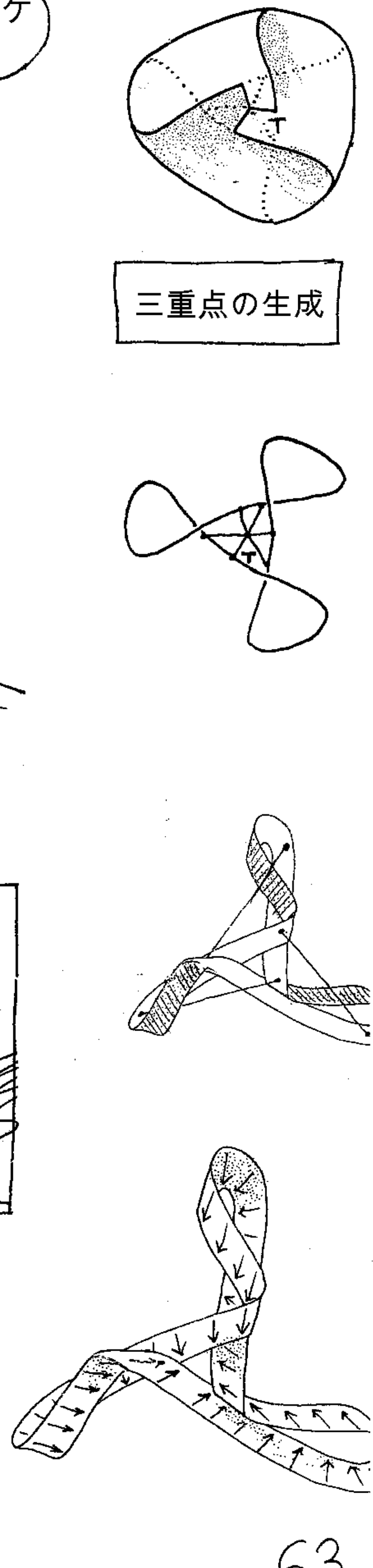
三重点の生成



(*) 誰もこれを試みたことはない。

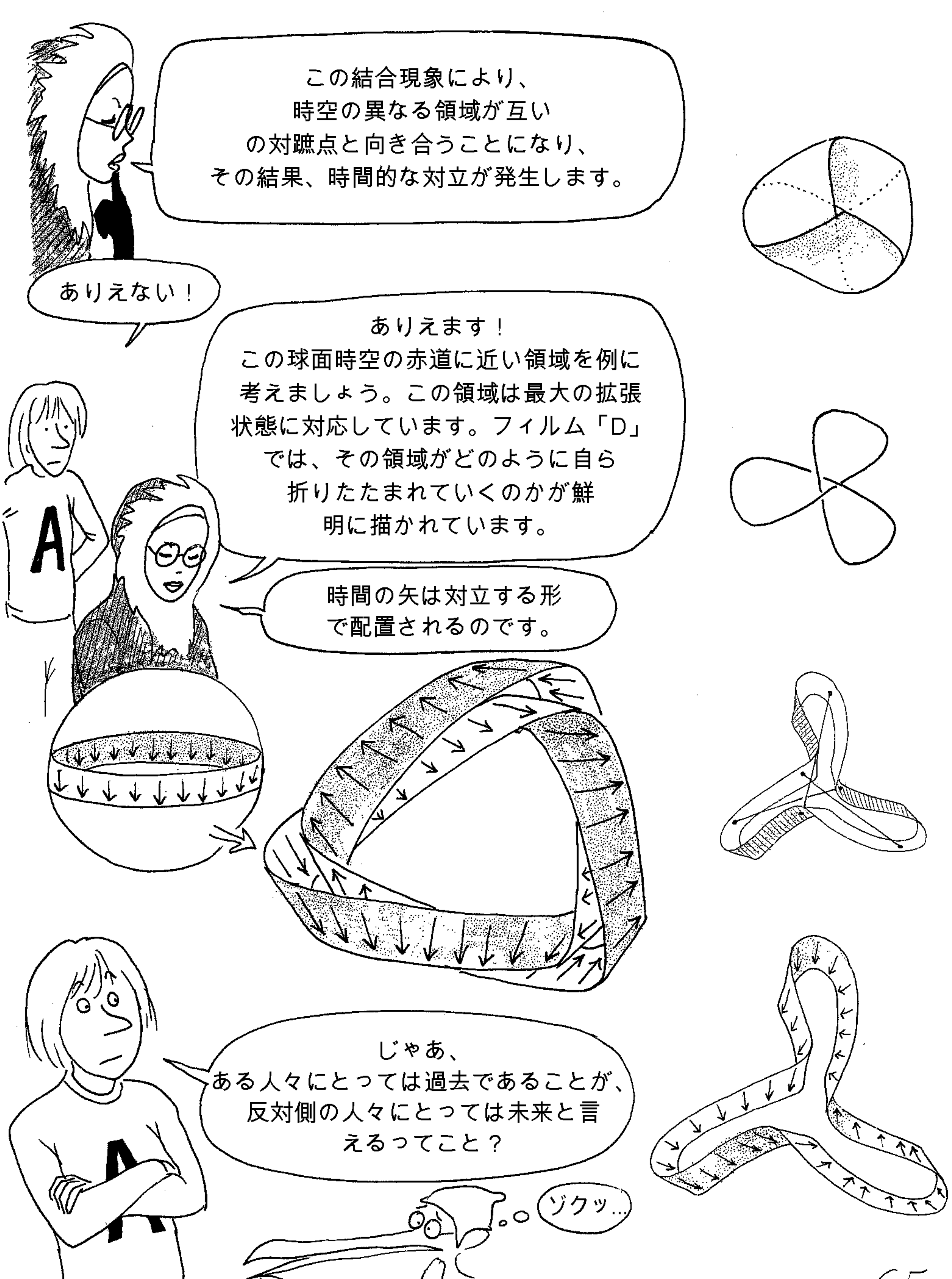

ビッグバンで見たように、
フリードマンの周期的宇宙モデルは無限のソーセージの鎖として表現でき、
各締め付けが新しいビッグバンを意味しています。
過去
時間
未来
ビックバン
各ビッグバンは極的なタイプの特異点なのです。
これらの特異点はどうやって繋がっているんですか？
円錐を取ってきて平らにします。
さらに、
これが無限に繰り返されることを考えた場合、次のようなことが起こります…
時間が単に「始まり」と「終わり」だけであると仮定できる場所、例えば
ビックバン
現在地
時間
時空
この古典的な球面時空モデルでは、一方の極がビッグバン、もう一方がアンチビッグバンとされています。空間は平行曲線に相当し、赤道は最大の拡張状態を示しています。また、「時間の線」は子午線に対応しています。
時間
膨張
縮小


これらの時間の経路、
宇宙の線を巡るには、優れたクロノスケープ(時空航行装置)が最適なのです。
この機械を一つ借りることができるかもしれません。この時空を探索するのは悪くないかと思います。
リオンとティレシアスはどこ？
僕とティレシアスはちょっと楽しんできたところなんです！
この時空間のすべての点を取り、それらを対蹠点に糸で結びつけて…


T
三重点の生成
T


…その後、すべての糸を『シュリンクソール』に浸しました。ティレシアスはそれが興味深い時空間の実験になると考えたのです。
あなたたち二人は結果がどうなるか、ことの重大さが全然わかっていない！！
なんで、何が起こるの？
M
M'
ティレシアスの行為によって、時空は収束しつつあるでしょ。ビッグバンから最大の膨張に至る膨張フェーズに関連するすべての出来事は、収縮フェーズの対応する出来事と共時的に一致して、対蹠点の領域が一致することによって結びつくことになるの。
ビッグバンとアンチビッグバンが合わさっちゃうってこと？
不思議で奇妙だし、そしてまさに偶然だね！
これはもう誰かが考えたことなのでしょうか？(*)
ティレシアスの言葉に耳を傾けるべきではなかった。

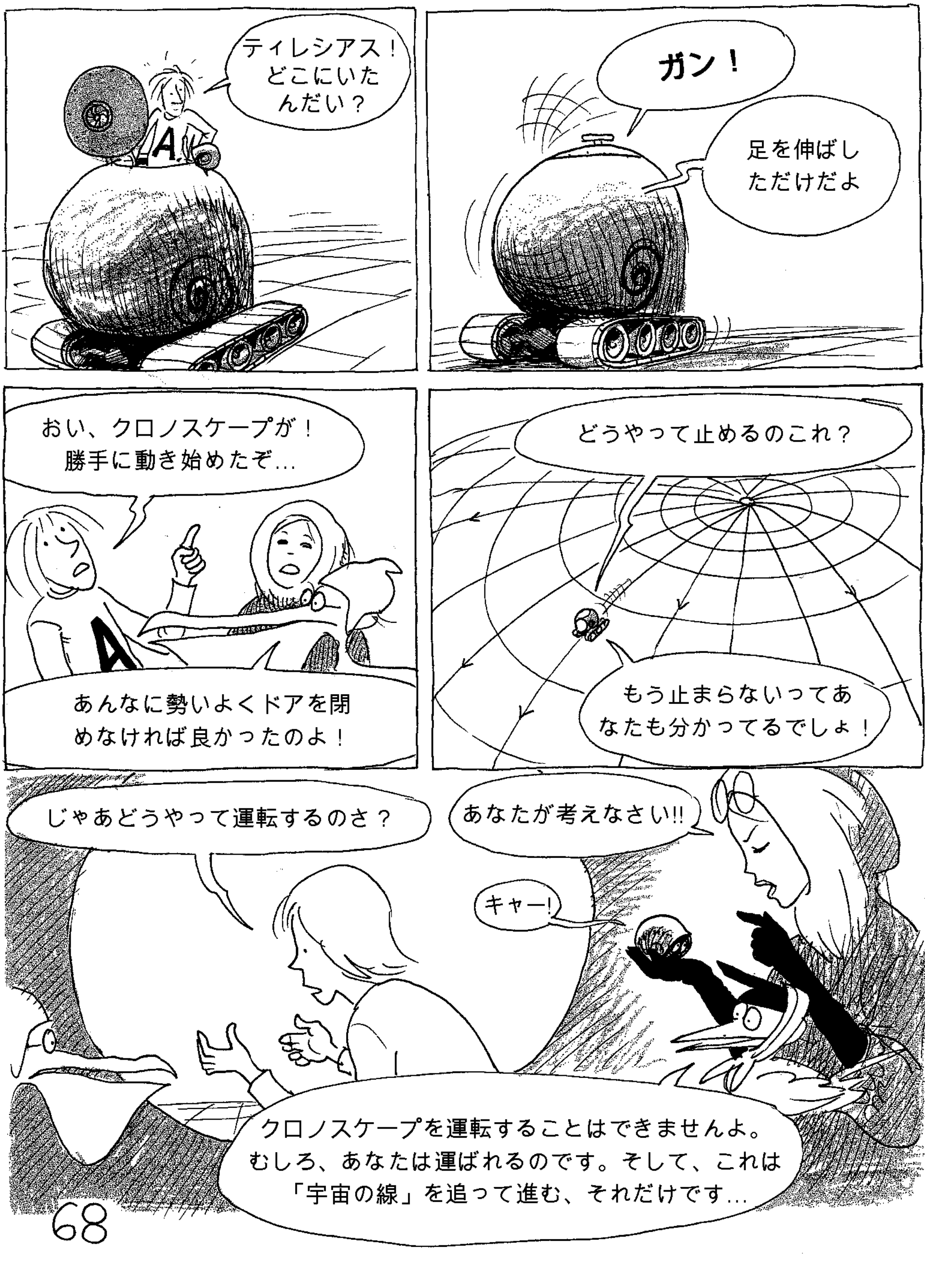
(*) ホイル と サハロフ


この結合現象により、時空の異なる領域が互いの対蹠点と向き合うことになり、その結果、時間的な対立が発生します。
ありえない！
ありえます！この球面時空の赤道に近い領域を例に考えましょう。この領域は最大の拡張状態に対応しています。フィルム「D」では、その領域がどのように自ら折りたたまれていくのかが鮮明に描かれています。
時間の矢は対立する形で配置されるのです。
じゃあ、ある人々にとっては過去であることが、反対側の人々にとっては未来と言えるってこと？
ゾクッ…

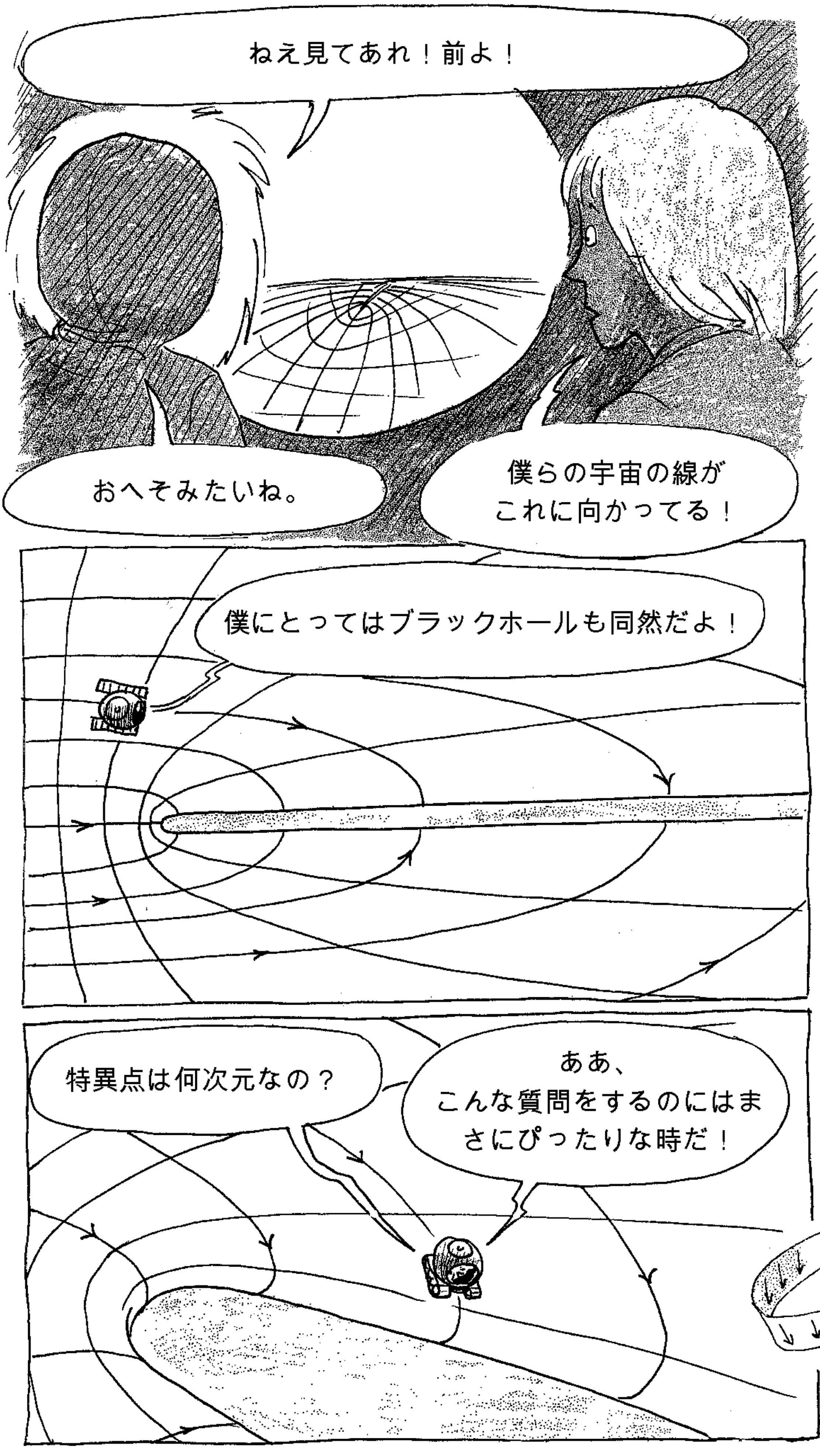
レオン、よくやった。素晴らしい。
つまり、これが宇宙を耐え難い矛盾の状態に陥れる危険があるということですか？
一種の論理の行き詰まりですね。
シュリンクソールの効果が現れるたら、宇宙は自ら衝突して、僕たちは時間が急速に逆流するのを感じることになりますよね。
ところでティレシアスはどこ？
クロノスケープに乗って、彼に呼びかけてみましょう。
A
捜索願い？


ハロー、ティレシアス。聞こえる？
ちょっと待って、もしティレシアスが僕たちにとって「レトロクロニック(時間逆行)」になっていて、僕たちが彼と接触することができたら、彼は僕たちがこれから言うことをすでに知っているはずですよね。
さらに悪いことに、このメッセージを送信するのはティレシアス自身の「固有の時間」での彼なんだ！
なんてことだ…！
とにかく、もし彼に出会うことになったら、事態はもっとひどくなるわ！
何で？
ファインマンは反物質が時間を逆向きに進んでいると考えていたからよ！
そしてルメートル神父(*)は、反物質を「裏返しに見た物質」(*)と考えていた！
もし不幸にもティレシアスに遭遇していたら、彼は「反ティレシアス」になっていたのよ。
そしてバーン！
バーンってどういう意味？

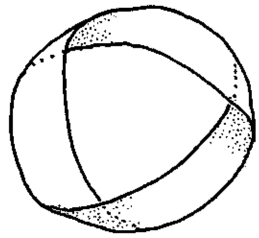
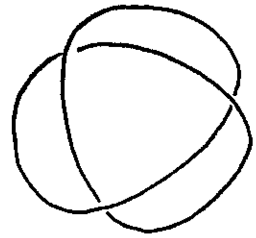
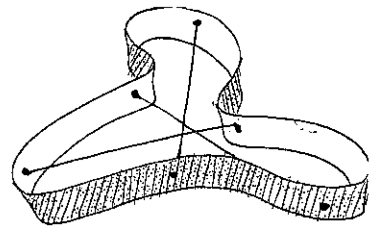
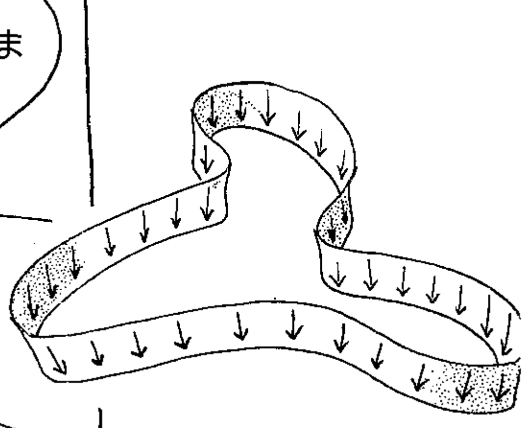
(*) ビッグバン参照

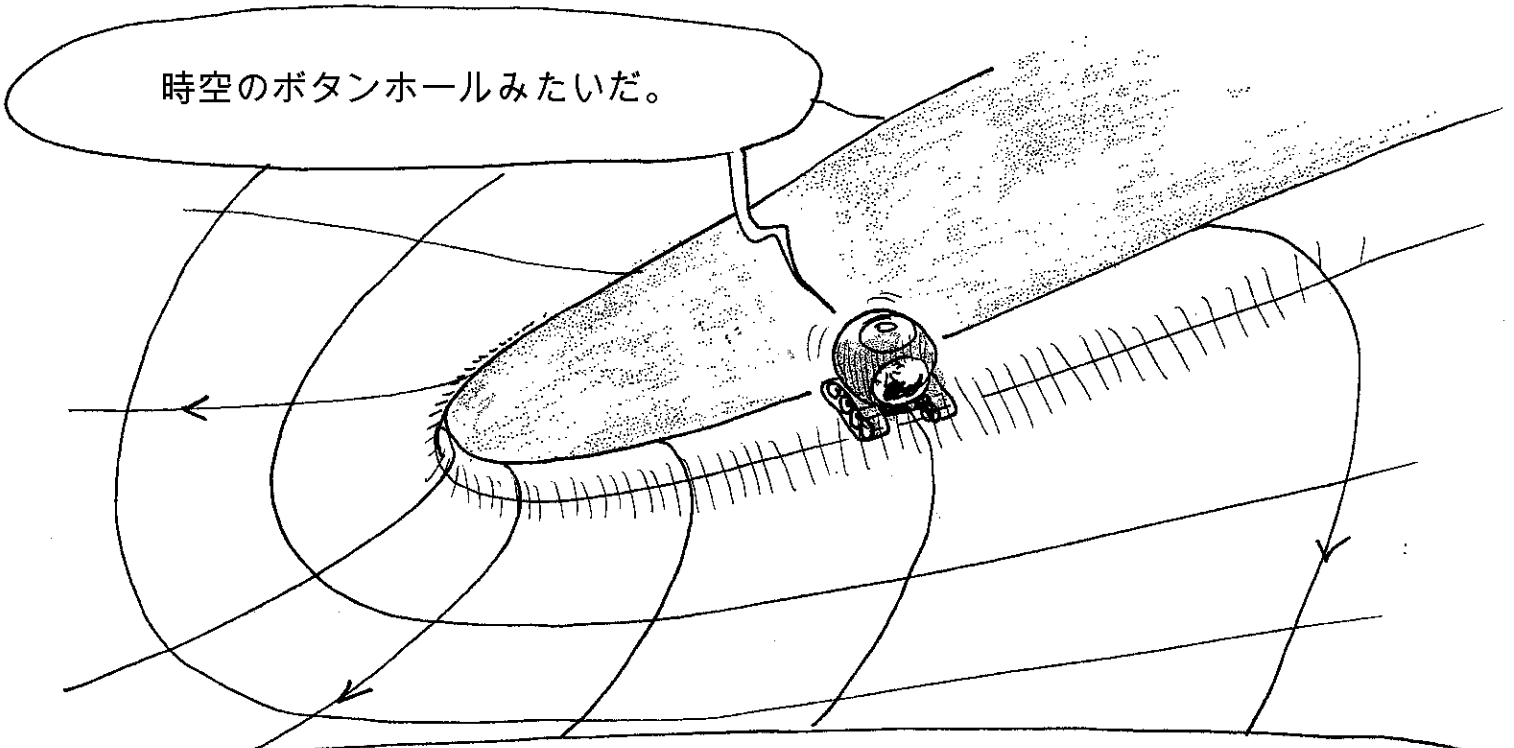


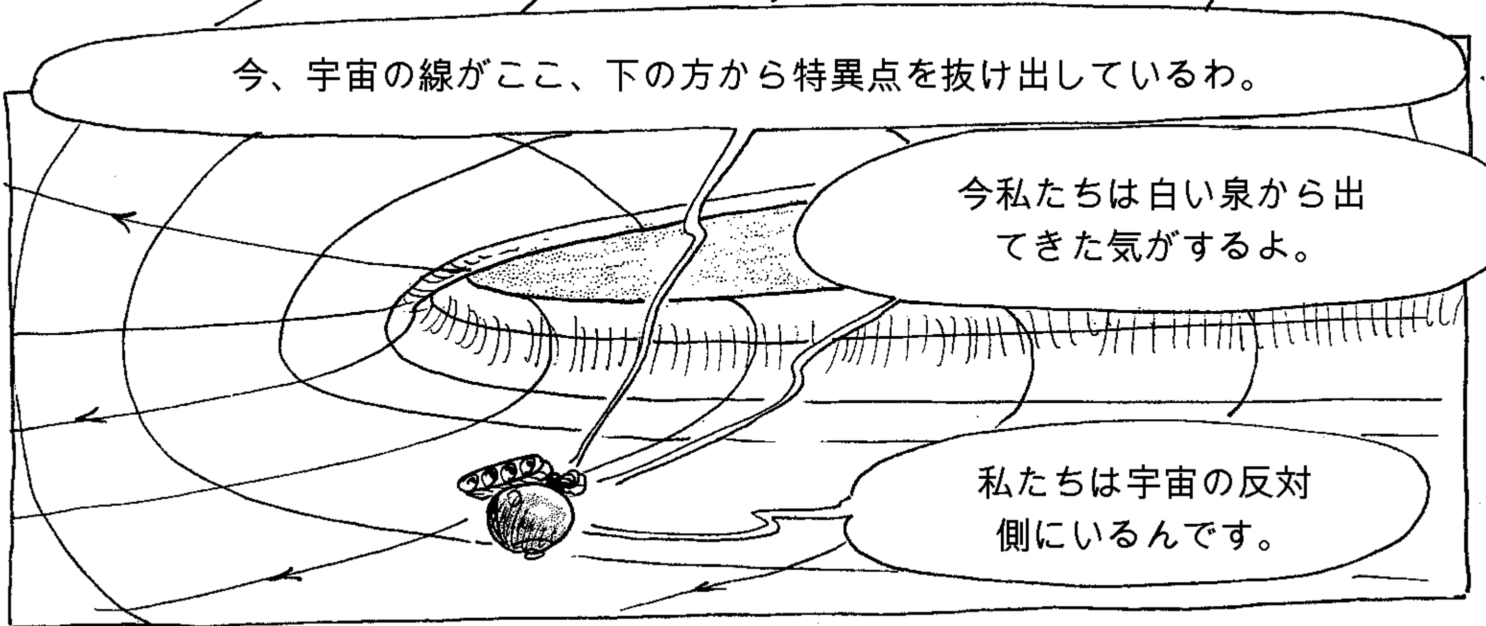
ティレシアス！どこにいたんだい？
ガン！
足を伸ばしただけだよ
おい、クロノスケープが！勝手に動き始めたぞ…
あんなに勢いよくドアを閉めなければ良かったのよ！
どうやって止めるのこれ？
もう止まらないってあなたも分かってるでしょ！
じゃあどうやって運転するのさ？
あなたが考えなさい!!
キャー!
クロノスケープを運転することはできませんよ。むしろ、あなたは運ばれるのです。そして、これは「宇宙の線」を追って進む、それだけです…

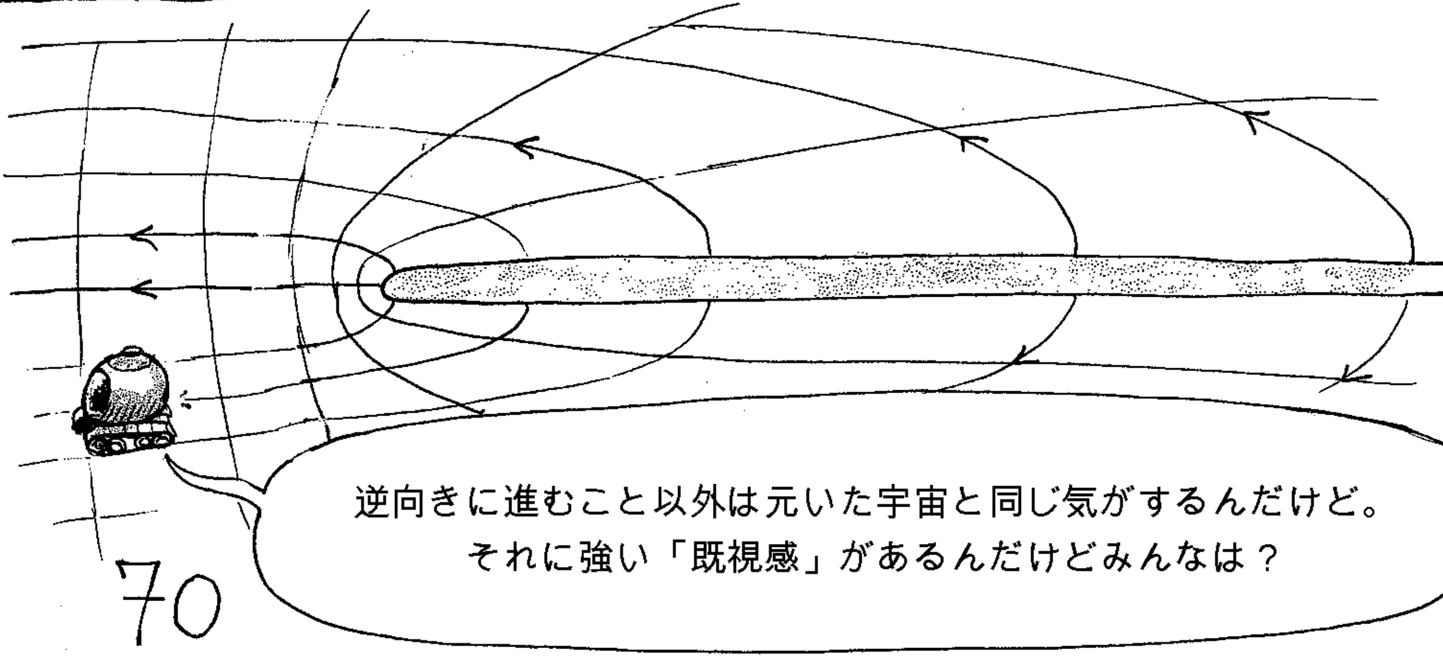


ねえ見てあれ！前よ！
おへそみたいね。
僕らの宇宙の線が
これに向かってる！
僕にとってはブラックホールも同然だよ！
特異点は何次元なの？
ああ、
こんな質問をするのにはま
さにぴったりな時だ！


時空のボタンホールみたいだ。


今、宇宙の線がここ、下の方から特異点を抜け出しているわ。
今私たちは白い泉から出てきた気がするよ。
私たちは宇宙の反対側にいるんです。


逆向きに進むこと以外は元いた宇宙と同じ気がするんだけど。それに強い「既視感」があるんだけどみんなは？

(*) 同じ構造は4次元で存在することができる。

科学的な附録

BOYはヒルベルトの生徒で、1902年にその曲面を発見しました。
最初の解析的な表現は1981年に、数学者J.M. SOURIAUの息子であるジェローム·スリオと著者によって行われました。使用された半経験的な方法は、曲面の子午線を楕円とみなし、それをパラメータ化するというものです。
現在の点は次のように表されます：

$$\begin{cases} x = X_1 \cos\mu - Z_1 \sin\alpha \sin\mu \\ y = X_1 \sin\mu + Z_1 \sin\alpha \cos\mu \\ z = Z_1 \cos\alpha \end{cases}$$

また、：

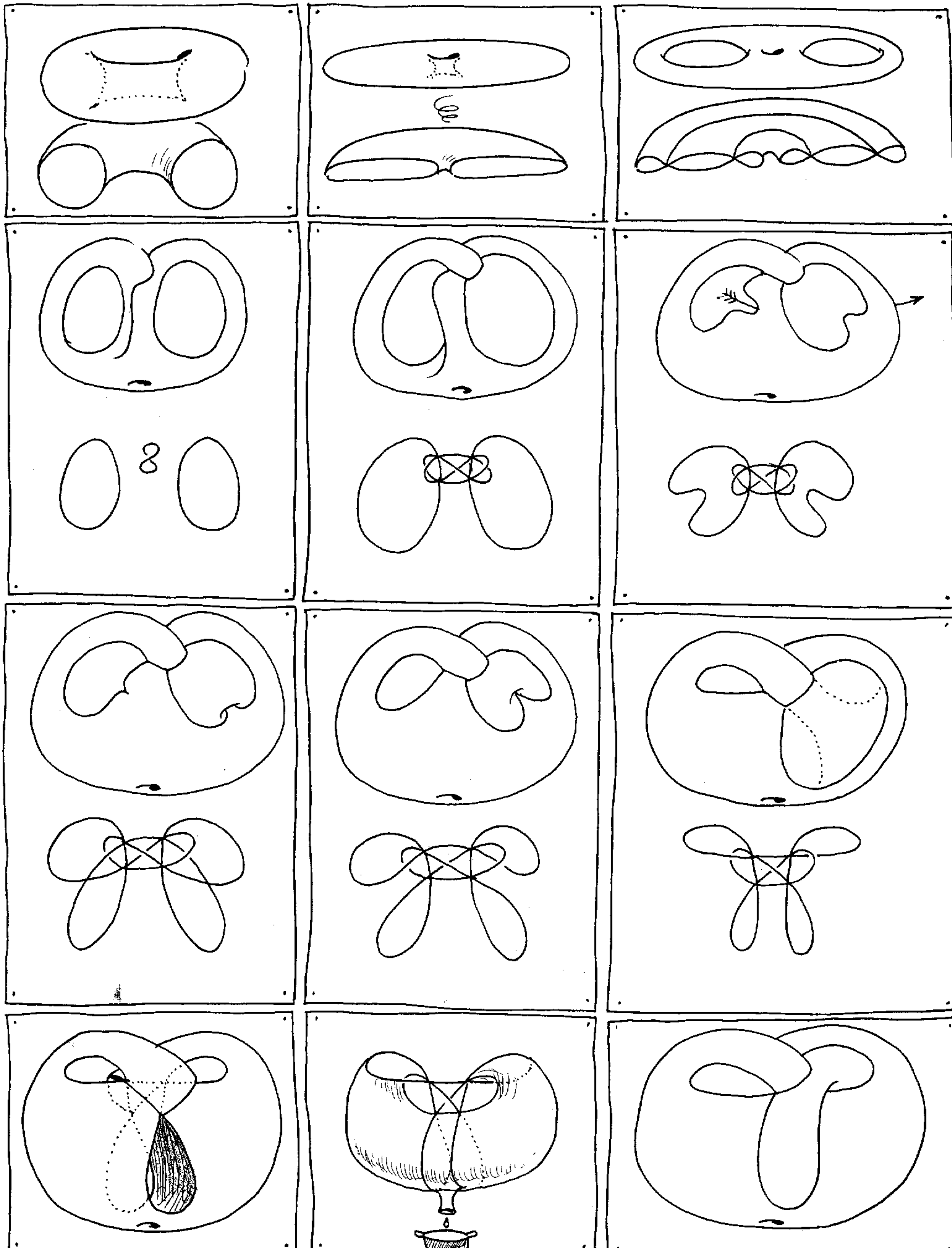
$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{A^2 - B^2}{\sqrt{A^2+B^2}} + A \cos\theta - B \sin\theta \\ Z_1 = \sqrt{A^2+B^2} + A \cos\theta + B \sin\theta \end{cases}$$

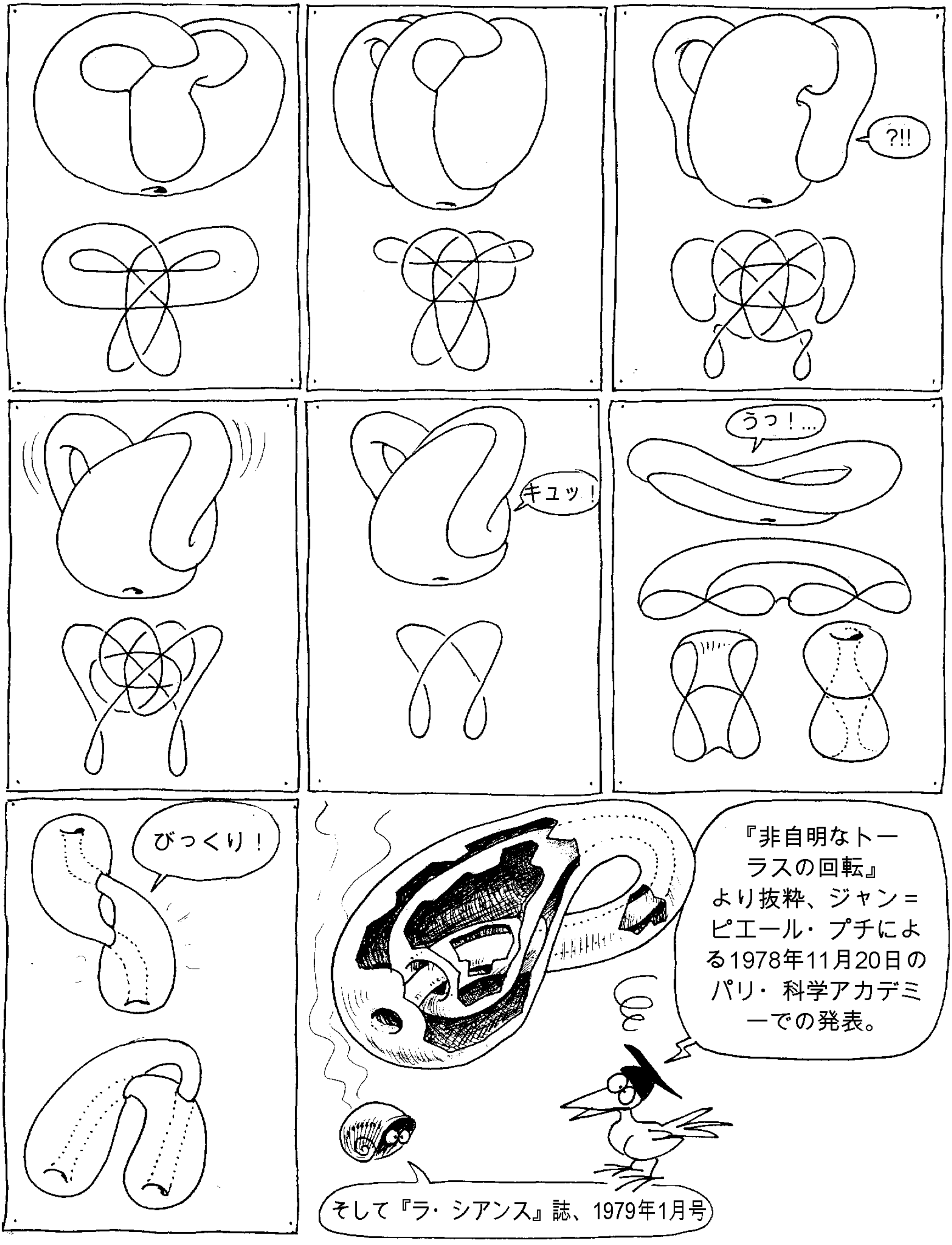
$$\alpha = \frac{\pi}{8} \sin 3\mu \qquad \begin{cases} A(\mu) = 10 + 1{,}41 \sin(6\mu - \pi/3) + 1{,}98 \sin(3\mu - \pi/6) \\ B(\mu) = 10 + 1{,}41 \sin(6\mu - \pi/3) - 1{,}98 \sin(3\mu - \pi/6) \end{cases}$$

子午線：曲線 $\mu=$定数；θは0から2π の範囲で変化，μ は0から π の範囲で変化する

下記のBASICプログラムは表紙を描画します：

```
1   REM  TRACE MERIDIENS DE LA SURFACE DE BOY
3   HOME : TEXT
50 PI = 3.141592:P3 = PI / 3:P6 = PI / 8:P8 = PI / 8
60  HGR : HCOLOR= 3
90  FOR MU = 0 TO PI STEP 0.1
95 P = P + 1
100 D = 34 + 4.794 *  SIN (6 * MU - P3)
110 E = 6.732 *  SIN (3 * MU - P6)
120 A = D + E:B = D - E
130 SA =  SIN (P8 *  SIN (3 * MU))
140 C2 =  SQR (A * A + B * B):C3 = (4 * D * E) / C2
160 CM =  COS (MU):SM =  SIN (MU)
180  FOR TE = 0 TO 6.288 STEP .06
190 TC = A *  COS (TE):TS = B *  SIN (TE)
200 X1 = C3 + TC - TS
210 Z1 = C2 + TC + TS
250  REM  VOICI LES 3 COORDONNEES
300 X = X1 * CM - Z1 * SA * SM
310 Y = X1 * SM + Z1 * SA * CM
350  REM  PROGRAMME DE DESSIN
360  HPLOT 130 + X,80 + Y
400  NEXT TE: NEXT MU
```




?!!
キユッ！
うっ！...
びっくり！
『非自明なトーラスの回転』より抜粋、ジャン＝ピエール・プチによる1978年11月20日のパリ・科学アカデミーでの発表。
そして『ラ・シアンス』誌、1979年1月号