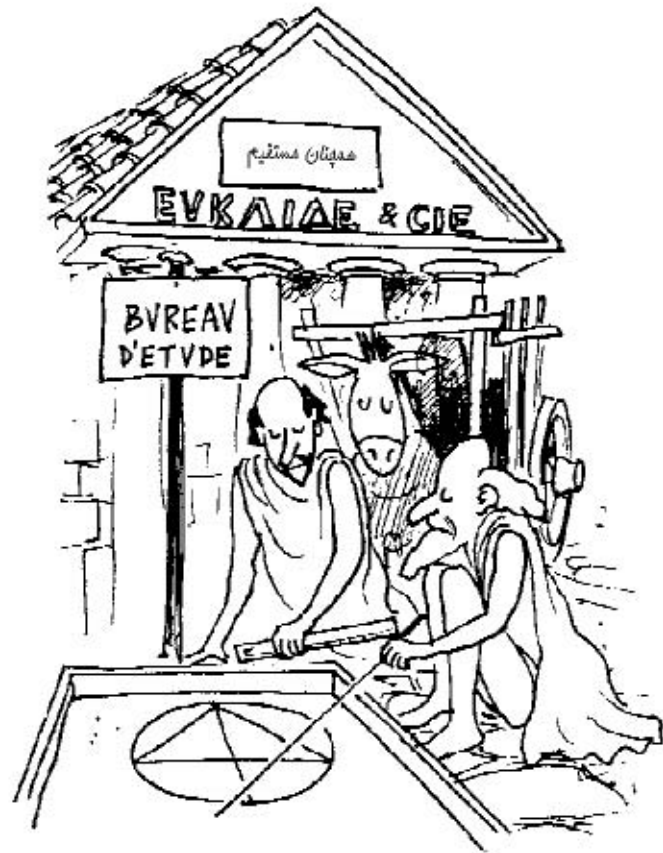


ماجراهای آنسلم لانتورلو

هندسه (ژئومتریکن)

ژان پیر پتی



بنیاد دانستن بدون مرز با پایه گذاری و مدیریت پرفسور ژان پیر پتی، فیزیکدان نجوم، برای تحقق هدف ترویج دانش علمی و فناوری در بیشترین کشورها و زبان های ممکن فعالیت می کند. به این منظور پرفسور کلیه تولیدات سی ساله خود را در زمینه عامی سازی علم، بخصوص آلبو های مصور خود را در دسترس عموم قرار داده است. همه اجازه دارند این فایل ها را چه به صورت دیجیتال یا چاپی تکثیر کرده و در کتابخانه ها یا فضاهای آموزشی، دانشگاهی و یا هر بنیاد دیگری که اهداف مشابه بنیاد فوق را دارد عرضه کنند. به شرط آنکه هیچ سود مادی یا اهداف سیاسی، فرقه ای بدنبال نداشته باشد.

همچنین این فایلها با فرمت PDF می توانند روی شبکه های کامپیوتری کتابخانه های مدارس یا دانشگاهها قرار گیرند.

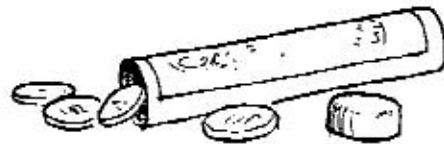
ژان پیر پتی در صدد خلق آثار دیگری است که قابل استفاده برای شمار بیشتری از مخاطبین باشد. برخی از آنها توسط بی سوادان نیز قابل خواندن است، به این شکل که وقتی در قسمت متن کلیک شود متن خوانده می شود. بنابراین آثار می توانند بعنوان منابع سواد آموزی مورد استفاده قرار گیرند. برخی دیگر از آلبوم ها دو زبانه هستند بصورتی که با یک کلیک ساده، متن از یک زبان انتخابی به زبانی دیگر تبدیل می شود که خود منبع جدیدی برای یادگیری زبان های خارجی است.

ژان پیر پتی در سال ۱۳۹۷ به دنیا آمد. او کار خود را در تحقیقات فرانسه به ثمر رسانده است. او فیزیکدان پلاسما بوده، یک مرکز کامپیوتری را هدایت کرده، نرم افزارهایی بوجود آورده، صدها مقاله در نشریات علمی به چاپ رسانده، در زمینه های بسیار متنوع از مکانیک سیالات گرفته تا تئوری علوم فضایی از او سی کتاب به چاپ رسیده که به بسیاری از زبان ها ترجمه شده اند، برای تماس با بنیاد می توانید به آدرس سایت مراجعه کنید.

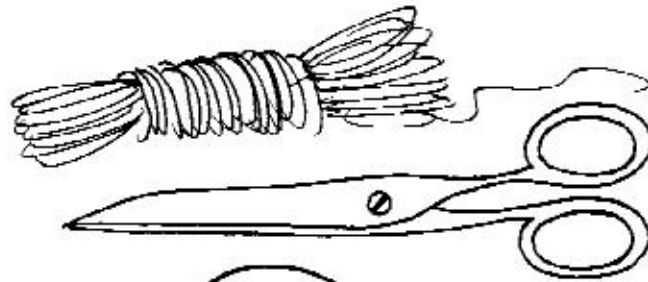
هشدار!

این نه یک درس است نه یک رساله .
این فقط داستان آنسلم لانتورلو و یکی از سفرهایش به
سرزمین هندسه می باشد .
خواندن آن ترجیحا" به همراه این وسایل توصیه می شود :

* ابتر اسپرین



* سپس نخ

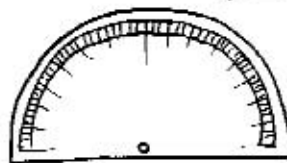


* قیچی

* پساب نواری

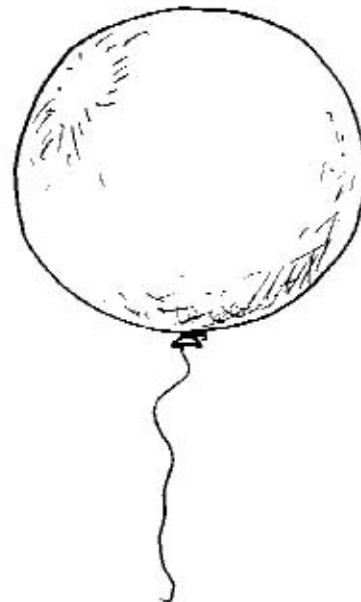


* نقاله



* و یک بادکنک

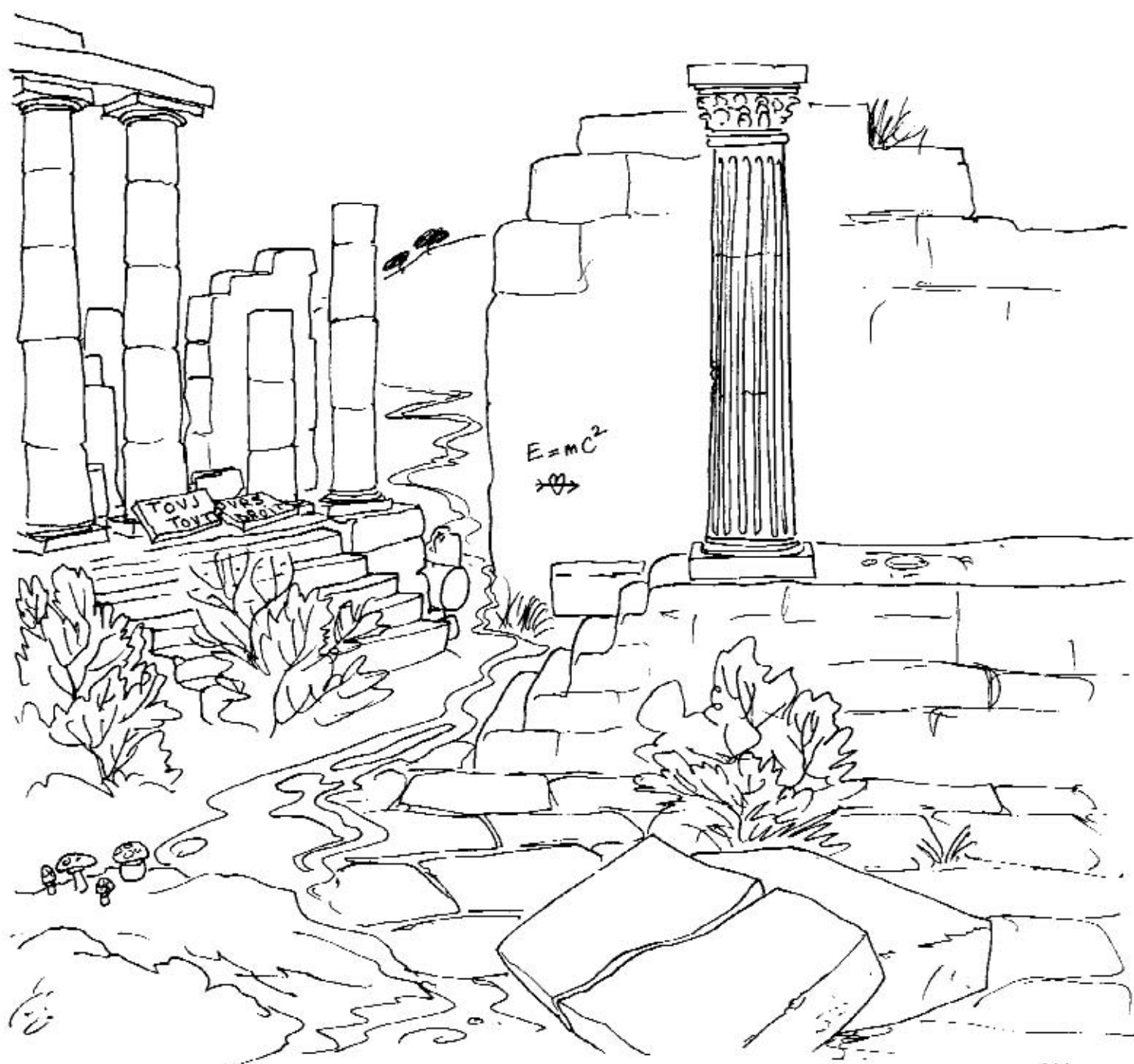
زیبای کاملاً "گرد" ...



شرکت اقلیدس و شرکا در اسکندریه تأسیس شد .
 قرن سوم قبل از میلاد مسیح . به مدت دو هزار و دوست سال
 امورات با موفقیت می گذشت .
 محصولات مورد توجه قرار گرفته بودند و مشتری ها راضی و وفادار .

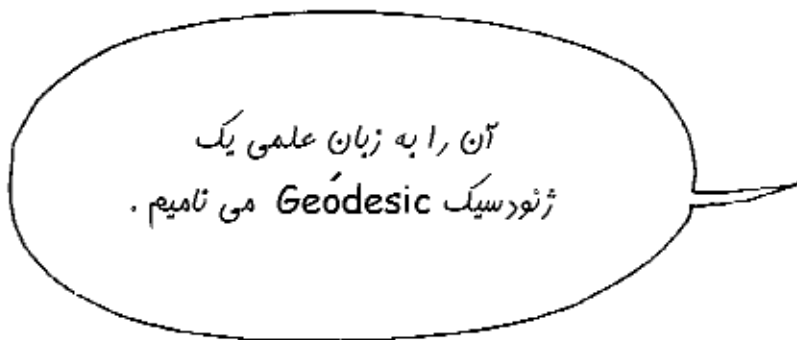
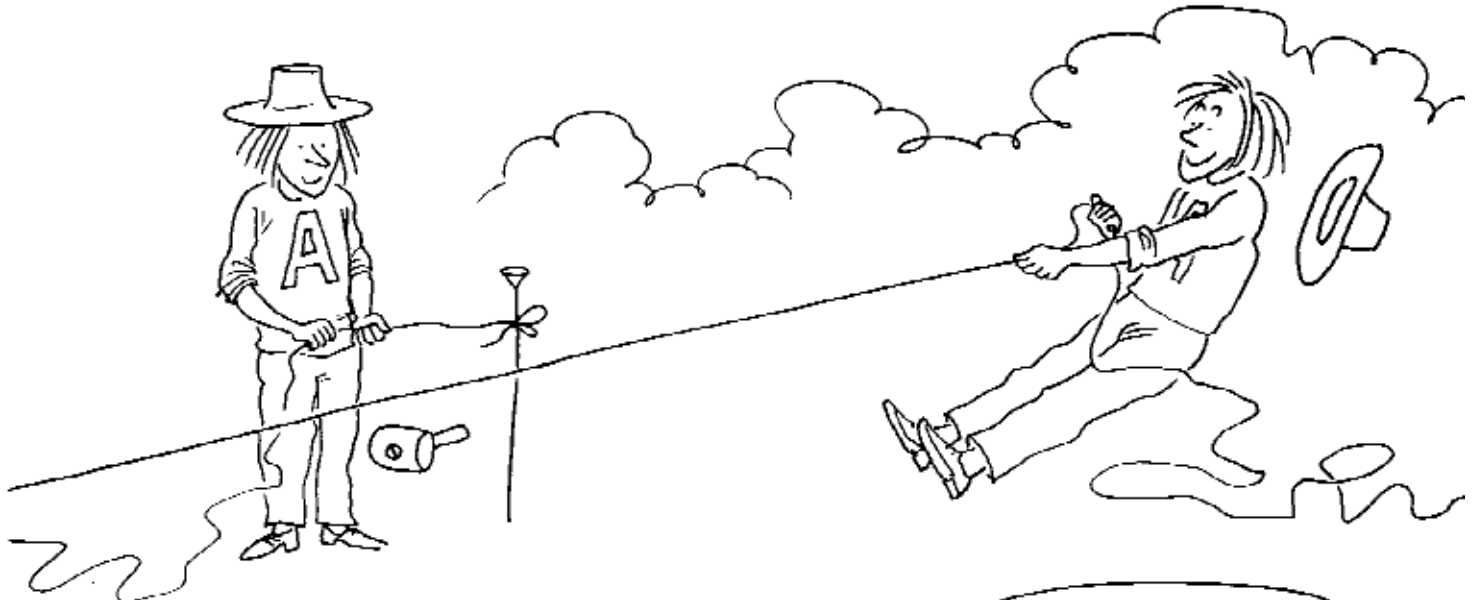


اما کم کم سلیقه مشتری ها تغییر کرد . بعضی ها که قبلا "مارک برایشان
 فیلی مهم بود ، پس از آزمایشاتی از سر کنجکاوای از خود می پرسیدند :
 " آیا واقعا " اقلیدس همه جا بهترین است ؟ "
 این داستان یکی از آنها ست که ما قصد داریم اینجا برای شما تعریف کنیم .



پیش گفتار :

یک روز آتسلم لانتورلو تصمیم گرفت نئی را بین دو تیرک بکشد :



آنسلم با سه نخ کشیده ، یعنی با سه ژئودسیک یک مثلث ساخت .



او با گذاشتن نقاله اش بر روی هر رأس این مثلث ، زوایای \hat{A} ، \hat{B} ، \hat{C} را اندازه گرفت و مجموعشان را حساب کرد.



بر طبق تئوری فوق العاده
شرکت اقلیدس و شرکا ، این
مجموع 180° درجه می شد .
فوب ...

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ \u0395\u03c5\u03ba\u03bb\u03b9\u03b4\u03b5}$$

دنیایی که آنسلم در آن زندگی می کرد ، دنیایی تاریک و مبهم بود .
 حتی ممکن بود دماغ خودت را با دماغ دیگری اشتباه بگیری .



چه چیزی در دوردست وجود داشت ؟
 چه چیزی در این مه پنهان است ؟
 به ژنودسیک به خط صافه ، و اگر راهم رو بگیرم
 و تا دورترین حد ممکن برم ، پی می شه .
 بطوره این مسافت رو کشف کنم و بینم داستان
 از چه قراره ؟

ژنودسیک م ، رو خوب بشم



آنسلم مدت طولانی راه رفت و راه رفت ...
 پشت سرش نخ بقدری صاف و کشیده باز می شد
 که برایش قدم های نامعلومش در مه مبهم نبود ؛ او
 داشت یک ژنودسیک بی نقص را می ساخت .

اما نمی دونم که شما متوجه شدین یا نه که بعضی روزها انگار همه چیز بر پیش میره .



آتسلم که هنوز نخ داشت ، تصمیم گرفت این قفیه را روشن کند .

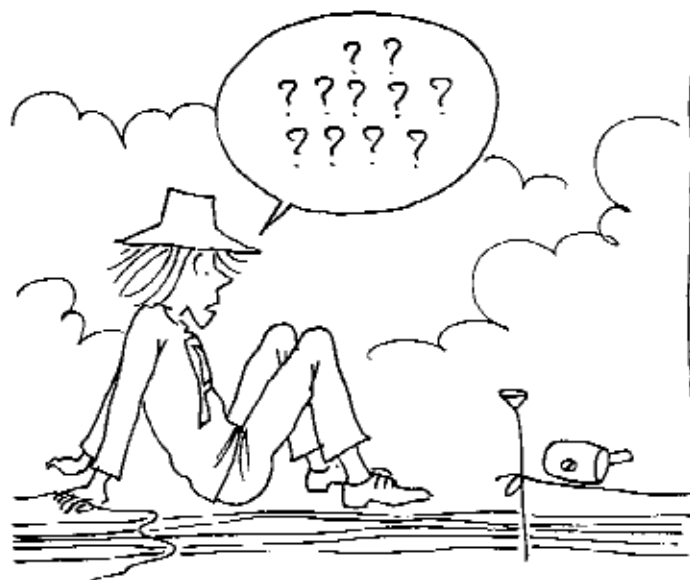
بنابر این ، با فونسردی به کشیدن نخ ادامه داد و با کنگلکاو بی حد راه فود را به جلو پیش گرفت .



ولی این باز همون تیرک فودمه!

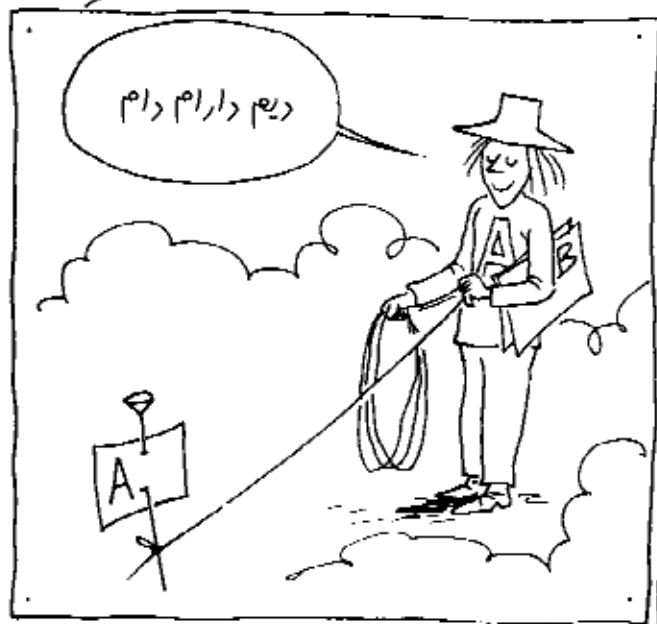
فقط صاف آتسلم بسته می شد!





??
?????
???

تئوری اقلیدس رو آزمایش می کنیم .
من سه تا ژنودسیک با طول مساوی رو
می کشم . اون مثلثی رو به من می ده که
هر سه زاویه اون باید برابر ۶۰ درجه باشد و
مجموع شون ۱۸۰ درجه .
روی یادداشت این طور نوشته شده .



دیم دارا ما دام



سپس مشاهده
فواهم کرد .

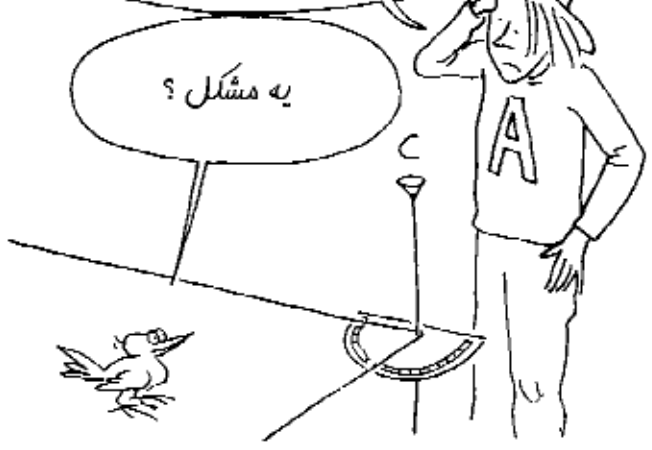


این دومین رأس B . فقط
مونه دو تا نخ دیگه بکش
تا سومی رو به دست بیارم .

علم چه
زیباست .

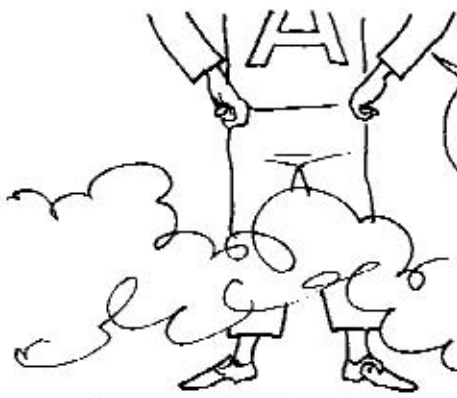
اوه ، لالا !
زاویه ها کاملا برابرن ، ولی
بیشتر از ۶۰ درجه می شن .

مجموع اونها مسلما " از ۱۸۰ درجه
بیشتر می شه !



یه مشکل؟





با این حال ، وقتی خط کش رو کاملا صاف میزارم ، می بینم که نخ هام کاملا صاف هستن .

الو ، شرکت اقلیرس ؟
ببینین ، من واقعا با وسایل شما مشکل دارم .



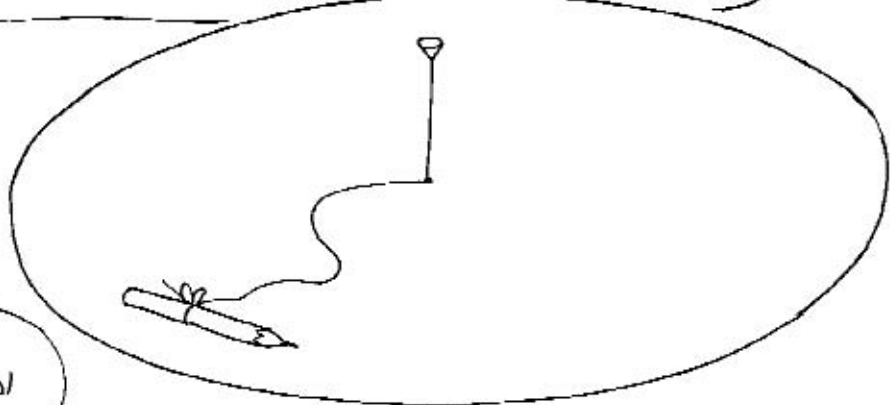
یه لحظه لطفاً ، شما رو وصل می کنم به بخش فنی .

مشکل با مثلث های ما ؟ عجیبه . چرا دایره های ما رو امتحان نمی کنین ؟
مشتری های ما از اونا خیلی راضی هستن .



پس یه دایره مجموعه نقاطی یه که به فاصله L از یک نقطه ای ثابت قرار گرفتن .

و شما می گین که : محیط برابر با $2\pi L$ و مساحت πL^2 . فومیدم .

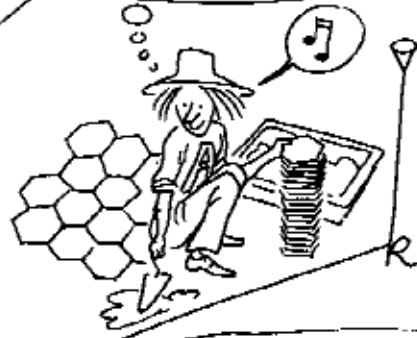


امری باشه ؟

برای اندازه گیری مساحت ، از کاشی های اقلیدس استفاده کنید .
 برای اندازه گیری محیط عناصر های اقلیدس بهترین وسیله موجود
 در بازار است . رضایت مشتریان بهترین تبلیغات برای ماست .

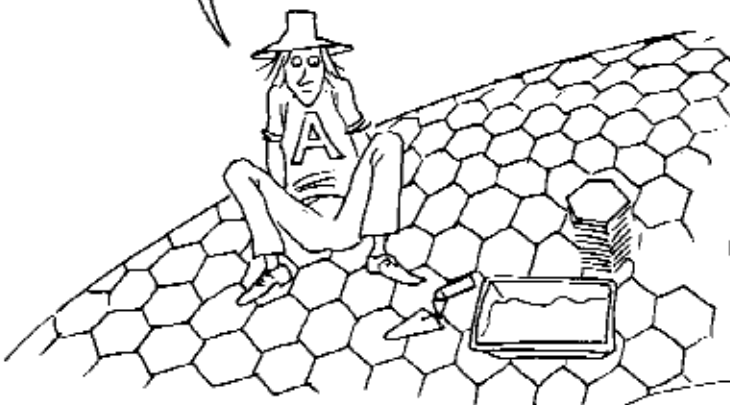


مساحت : πL^2



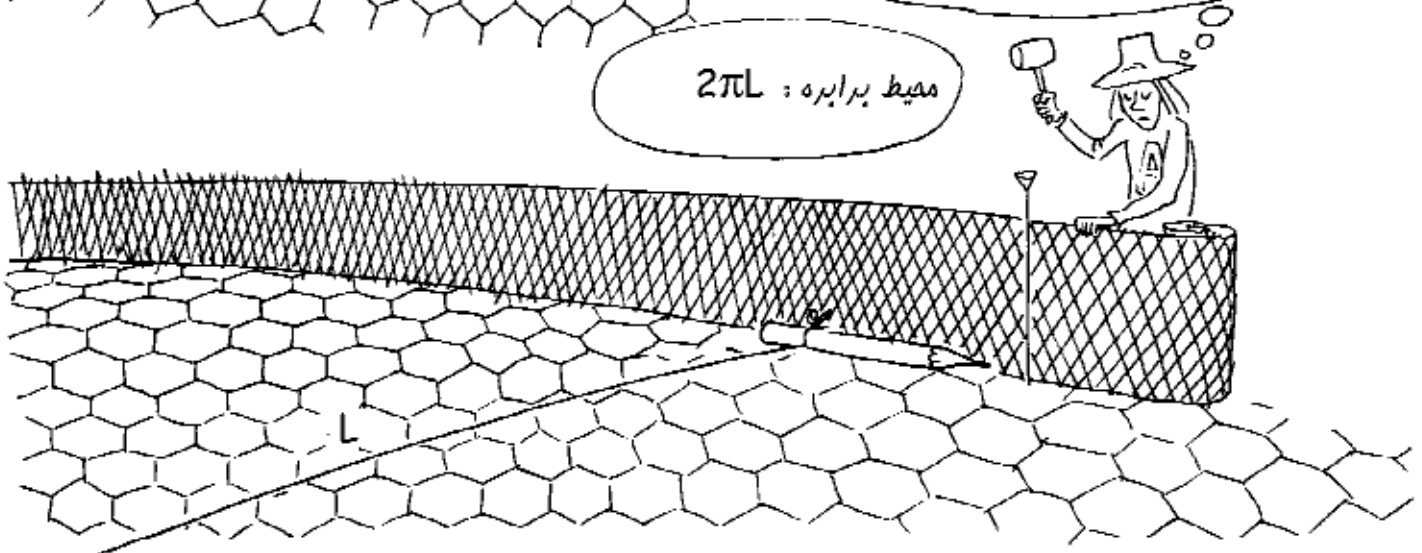
چه خوب شروع شد ، کاشی
 اضافه آوردیم!

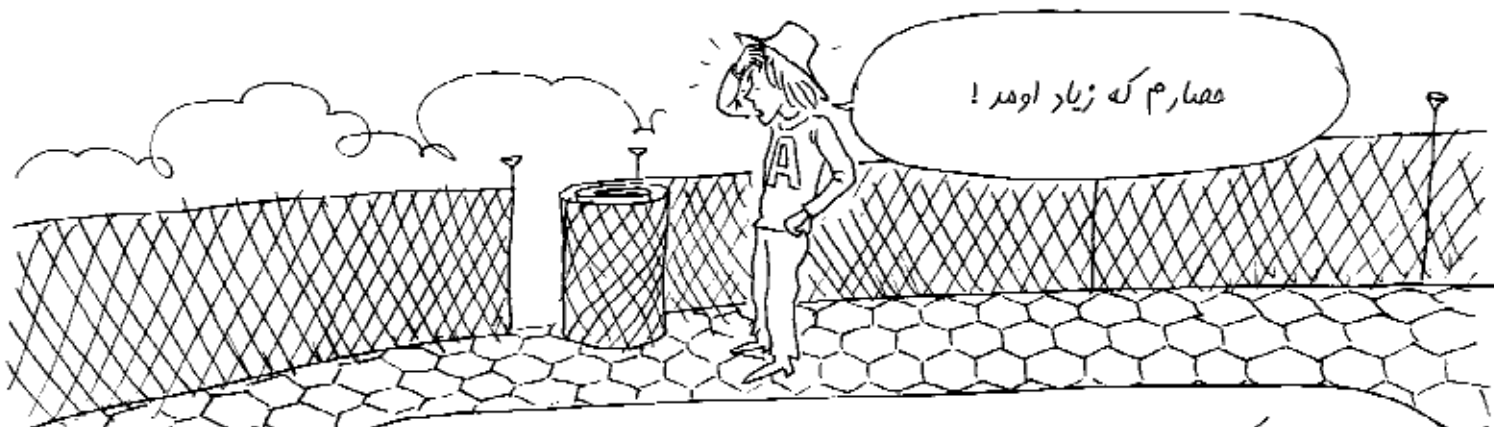
اینجا همه چیز منظم ، زیبا ،
 آراسته ، آرام و لذت بخشه .



به کمک عناصر شون میروم
 محیط رو اندازه بگیرم

محیط برابره : $2\pi L$





حصارم که زیاده اوهر!

الو، شرکت اقلیدس؟ بله، باز من هستم! من مقدار زیادی کاشی و حصار اضافه آوردم! این داستان $2\pi L$ و πL^2 شما اصلاً درست نیست!

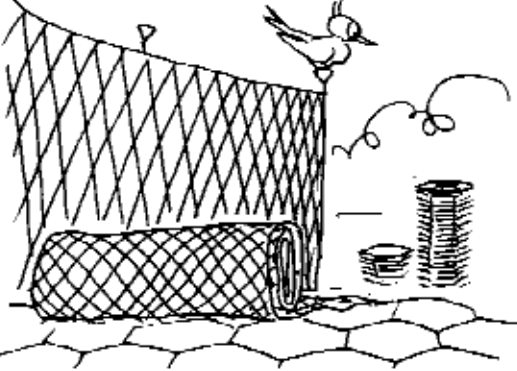


این چوری دار نزنین، آقا. من فقط یه منشی ام. شما رو وصل می‌کنم به بخش فنی.



نه، نه، کاشی‌ها کاملاً بیفت هم هستن. شعاع هم کاملاً صافه و حصارم هم کاملاً روی دایره قرار گرفته!

آقا باور کنین که این اولین باره که این اتفاق میفته. بازم آزمایش کنین و نگران نباشین، می‌دونین که تئوری‌های ما تضمین شده هستن.



بنابراین آنسلم با افزایش هر باره شعاع L دایره اش به کاوش خود ادامه دار. اما اضافه آمدن تکه‌ها بیشتر و بیشتر می‌شد.

که این طور ، حالا بیشتر از ۳۶٪ عصاره اضافه آوردیم !
و ۱۹٪ کاشی اضافی ! و دایره ای که رسم کردیم
به خط صاف شده !

در ضمن این خط کش به
هر حال کاملاً صافه !

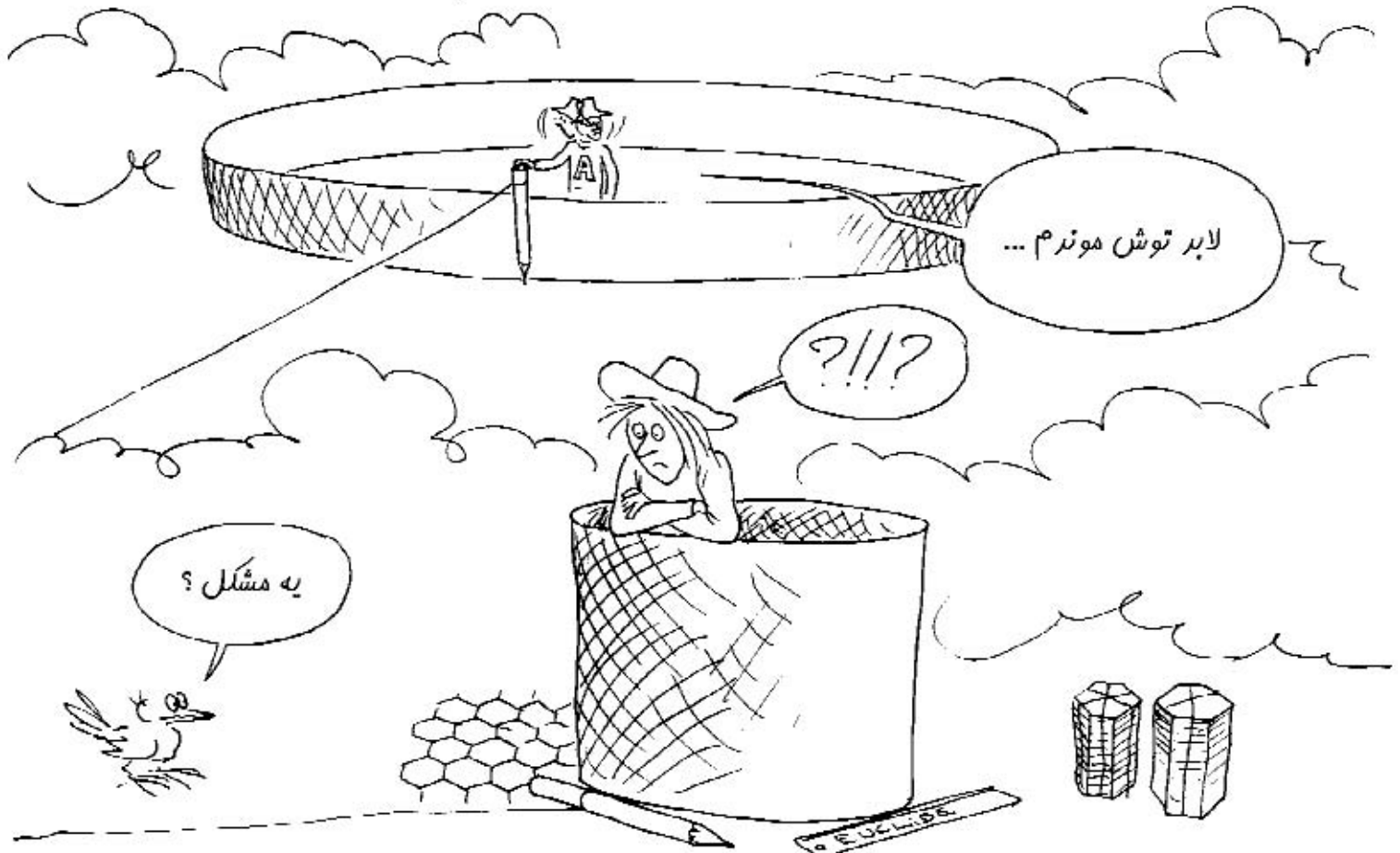
دارم فواب می بینم
یا چی ؟

آنسلم باز هم شعاع L را افزایش داد
و این بار ...

انتهای دایره M از اون
طرف بیرون زده .

و حالا وقتی L رو بزرگ می کنم ،
میطمینم کوچک می شه ، ما برای عجیبیه !

پس از آفرین اندازه گیری :



چه اتفاقی افتاد؟

برای دانستن، ابهامات، اکتار می گذاریم :



آنسلم ناگوان فهمید که او روی یک کره قرار دارد
که قوانین هندسی سطح صاف را روی آن
اجرا کرده است.

اما آتسلم چه حسابی کرده بود که خطوط صاف
رو روی سطح کروی رسم می کرد؟ بی معنی به!

رفیق، منظورت از خط صاف چیه؟ آگه منظورت
کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه است، پس خطوط
صاف روی کره هم وجود داره.

مفهوم ژئودسیک (کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه)
منحصراً به سطح صاف نیست.

یه کش رو بین دو
نقطه به کره بکش.

ولش کن!

یه ژئودسیک
به دست میاری.

این لایبر به تله ست!

سطح صاف

بینگ

چی داری می گی؟ اون چیز صاف نیست!

فوب، این فط کش رو بگیر و فودت بررسی کن.

تو به این می گی
یه فط کش!

این یه فط کش برای سطومه.
روی سطح صاف بفوبی عمل می کنه، نیگا کن:
با اون نه به چپ میری نه به راست.

سطح صاف

با این فط کش مسفره ای به ...

فوب، با وجود این که لانتورلو ژنودسیک هاش رو رسم کرد، اون به هم رسید، پس روی
یه کره، ژنودسیک ها همون دوایر هستن؟

تمام کوتاه ترین فطوط بین دو نقطه ای روی یه کره بفش هایی
از ژنودسیک های منحنی بسته هستن که دوایر ترسیم شده
روی این کره می باشن. اما نه هر دایره ای!



قفسیه چیه ؟ داری با کلمات بازی می کنی ؟
 می فوای بگی که روی یه کره انواع متعدد
 و مختلف دایره ها وجود داره ؟!

فرای من ، کمون می کردم فهمیدم ، و حالا می بینم که هیپی نمی فهمم ...

یه دایره ، مجموعه نقاطی یه که به فاصله
 ثابت N قرار گرفتن و ما اونو قطب می نامیم .

این مجموعه تمام دایره هایی
 که قطب همه اونا N ست
 و ما اونها رو موازی
 می نامیم .

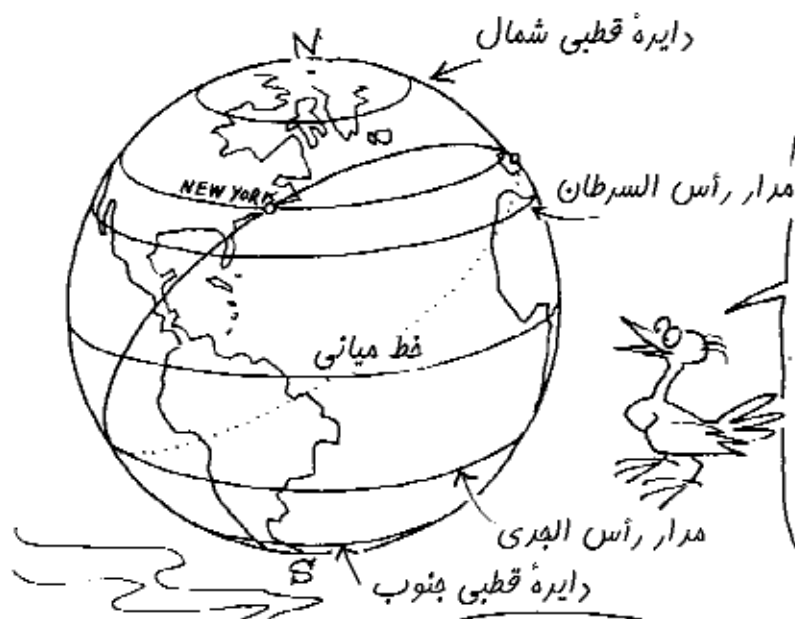
در میون اونها یکی از همه بزرگتره که می تونه به عنوان
 خط میانی کره به کار بره .

این دایره های موازی
 همچنین نقاطی با فاصله مساوی
 از نقطه L "قطب جنوب" ،
 نقطه متقابل "قطب شمال" ، هستن .

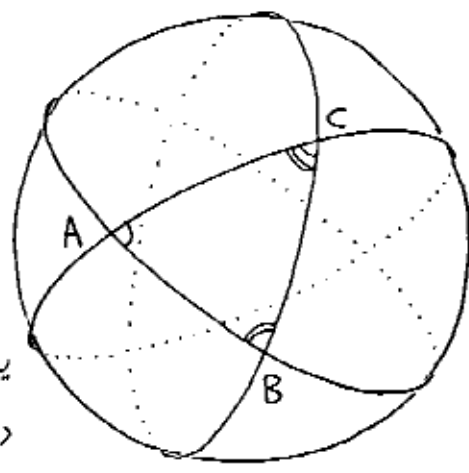
بالافره می فهمیم که چرا یه دایره روی یه کره
 دو مرکزی ، N داره !

ما این خطوط میانی را دایره بزرگ کره فوایم نامید
 و اونا دقیقاً "ژئودسیک هایش فواین بود .

این اولین باره که یه ژئودسیک رو از نزدیک می بینم ...
 فیلی هیجان انگیزه !



روی ستاره زمین دوایر قطبی و مدارها به موازات هم هستن. مداریر و نیویورک روی یه مدار هستن. اما کاملاً واضحه که این کمان موازی که آنها رو به هم وصل می کنه، کوتاه ترین مسیر نیست. کوتاه ترین مسیر دایره بزرگ است!



یه مثلث از سه کمان ساخته فوادر شد که ناگزیر از سه دایره بزرگ قرض گرفته شده.

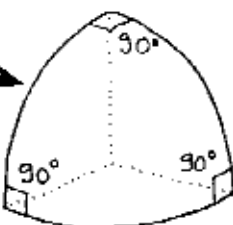
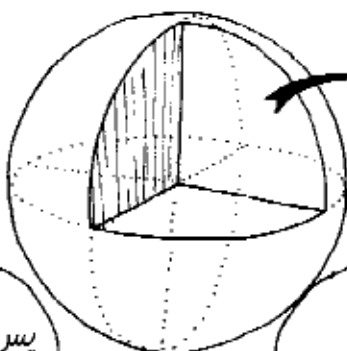
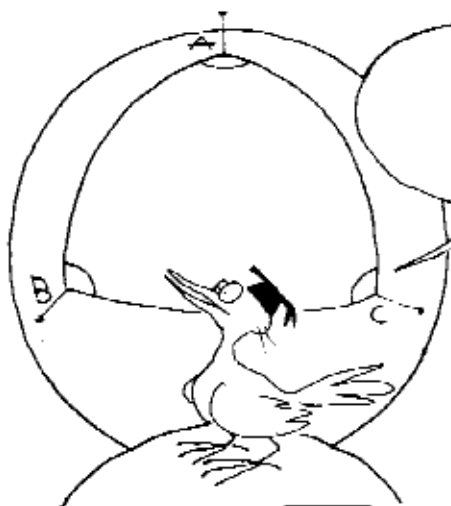


می تونیم این مثلث ها رو به کمک چسب نواری یا کش تشکیل بدیم و با قرار دادن یه نقاله بر روی هر رأس روی سطح کره زوایا رو اندازه گیری کنیم.

در یه فاصله کوتاه، پیرامون کره اختلاف کمی با سطح صاف داره. همچنین، در این وضعیت، مجموع ...

فیلی نزدیک به ۱۸۰ درجه ست.

اینم مثلثی که می‌تونیم به عنوان مثال به کمک سه تکه نخ قابل ارتجاع اونو تشکیل بدیم.



این مثلث به کم فاصله چونکه اون هشتمین قسمت سطح کره رو اشغال می‌کند.

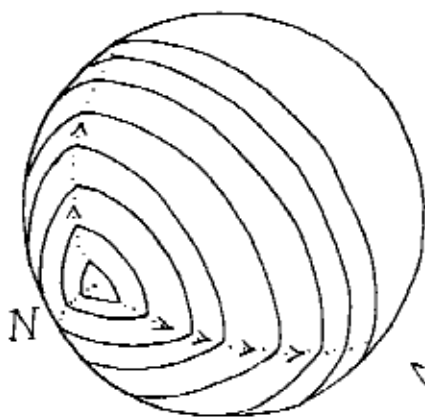
پس مثلثی همیشه قائم الزاویه و متساوی الاضلاع.

و مجموع زوایای $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ همیشه ۲۷۰ درجه

و تو هیچی نفهمیدی!



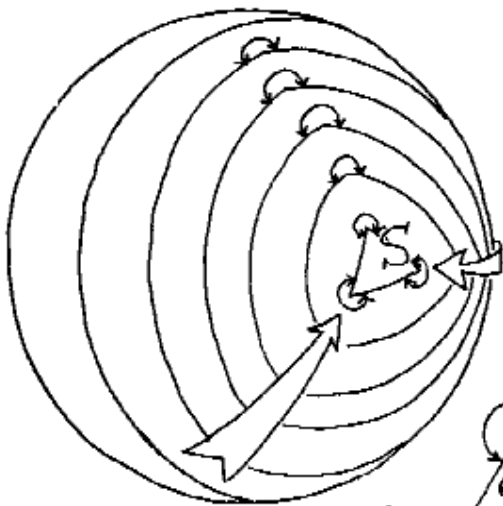
حالا مثلثی رو فرض کنیم که بازم از این نخ های ارتجاعی تشکیل شده و ما بتدریج راس های اونو از هم دور می‌کنیم. زوایای این راس ها افزایش می‌یابد. و مجموع آنها نیز به همین ترتیب.



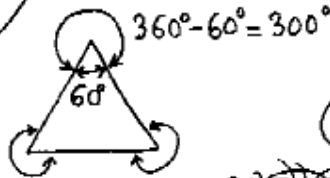
۱۸۰°

بالافره می‌تونیم ترتیبی بدیم که سه راس روی خط میانی کره قرار بگیرد. در این صورت سه زاویه \hat{A} و \hat{B} و \hat{C} مسطح هستند و ۱۸۰ درجه و مجموع آنها به ۵۴۰ درجه می‌رسد!!

با ادامهٔ پابجایی، رأس‌های مثلث، روی نیمکرهٔ دیگر، مثلث متوجه نقطهٔ متقاطع S فواید شد. اگر همان مفهوم آغازین را برای زوایای رئوس فقط کنیم، بنابراین هر یک از آنها بیشتر از 180° درجه خواهند بود! دقیق بگویم، آنها هر یک $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ خواهند بود.

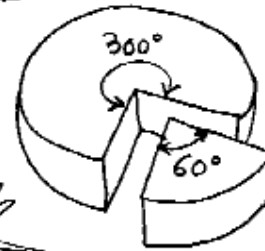


$$جمع: 300 \times 3 = 900^\circ$$



محیط کامل 360° درجه، نشان می‌دهد

هو... ۳۰۰



بدین ترتیب، روی کره، مجموع زوایای یک مثلث می‌تواند از 180° تا 900° درجه باشد!



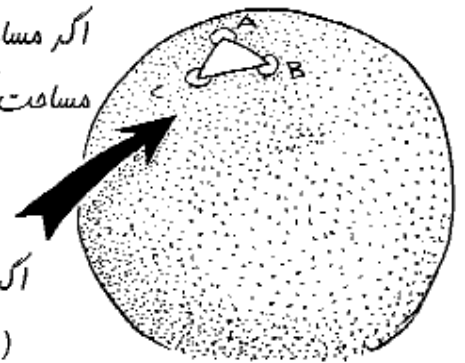
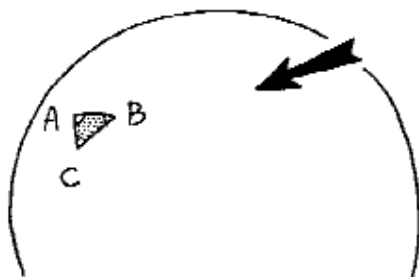
با پیروی از تئوری گوس، مجموع زوایای یک مثلث رسم شده بر روی یک کره برابر است با:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 + \frac{A}{3 \times 1414 R^2} \right)$$

که R شعاع کره مذکور است و A مساحت مثلث.



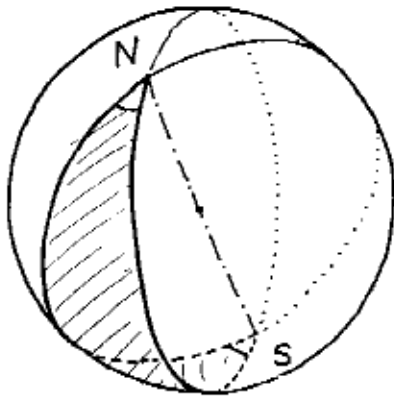
اگر مساحت مثلث ناچیز باشد (در قیاس با مساحت کره) به فرمول اقلیدس می‌رسیم:
 $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ)$



اگر برعکس، مثلث تقریباً "سطح کره" را دربر داشته باشد
 $(3 \times 1414 \times R^2)$ ، به حالت 900° درجه بر می‌گردیم.

یادداشت اضافه :

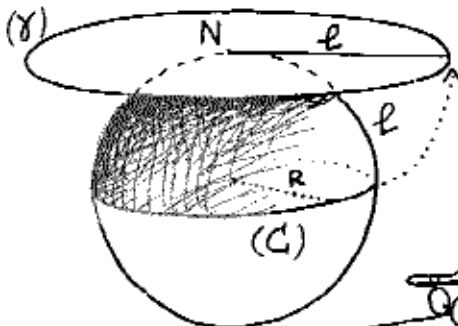
دو نقطه یک کره می توانند توسط دو کمان Géodesic به هم متصل شده و یک دایره بزرگ را تشکیل دهند. اما اگر این نقاط N و S نقاط متقابل باشند، در این صورت از آنها Géodesic های بی نهایت عبور می کند... دو تا از این "خطوط صاف کره" یک متساوی الساقین را تعریف می کنند که دو زاویه و دو ساق آنها با هم برابر است. مجموع زوایا می تواند هر مقداری باشد...!



فیلی اعمقانه ست ...



مدیریت



حالا سعی کنیم بفهمیم که چرا کمی قبل، آنسلم کاشی و عصار اضافه آورد.



(C) دایره ای است که او رسم کرد و (L) دایره ای است که او تصور می کرد رسم کرده. او مساحت را به کمک فرمول هندسه سطح صاف πL^2 ($\pi = 3.1416$) مناسبه نمود. مساحت واقعی نصف مساحت کره است: $2\pi R^2$. L یک چهارم محیط است، برابر با $\frac{1}{2} \pi R$ ، و ارتباط بین این دو مساحت $\pi/8 = 1/2333$ می باشد. ارتباط محیط ها $2\pi L / 2\pi R$ برابر $\pi/2$ می باشد. حالا اگر تردید دارید، سعی کنید با یک چیز صاف سطح یک کره را بپوشانید!

اوف!

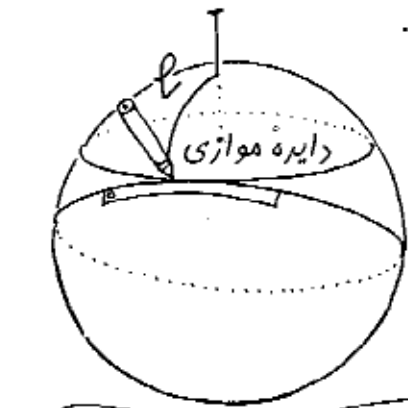
چین می فوره!

یه چیز صاف!

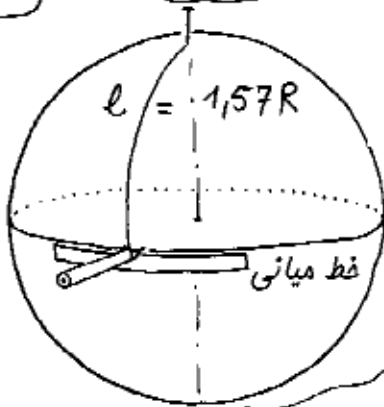
چه چیز صافی!



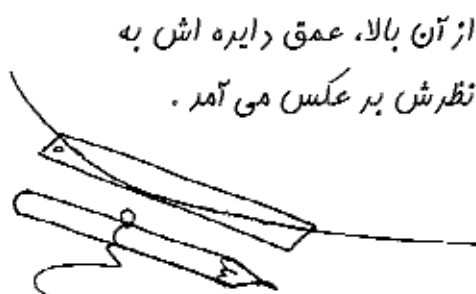
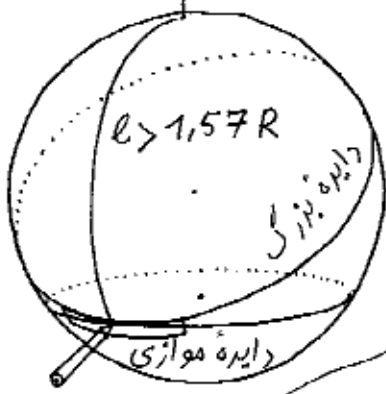
از آنجایی که لانتور لو به خط میانی کره نرسیده بود ،
عمق دایره اش به نظرش طبیعی می آمد .



این دایره یک دایره موازی است ،
در حالی که خط کش او از یک
ژئودسیک یعنی از یک
دایره بزرگ کره تبعیت
می کرد .



در خط میانی کره ، یعنی وقتی که
 $L = \pi/2 R$ است ، دایره موازی با
ژئودسیک یکی شده و دایره به
نظرش " خط صاف " می آمد .

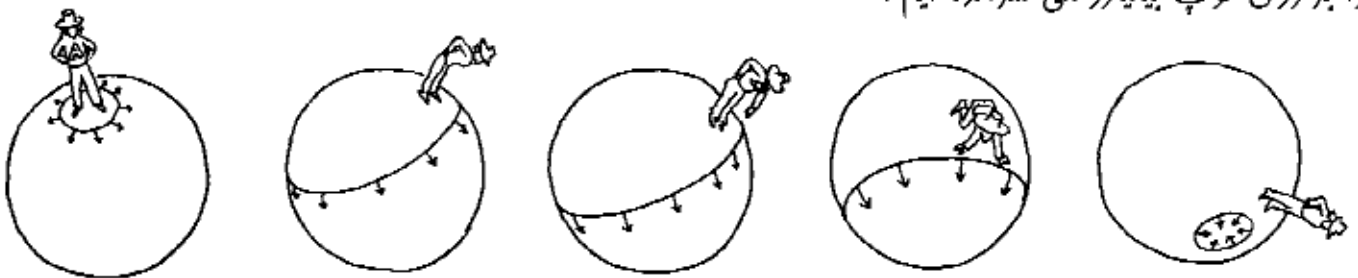


از آن بالا ، عمق دایره اش به
نظرش بر عکس می آمد .



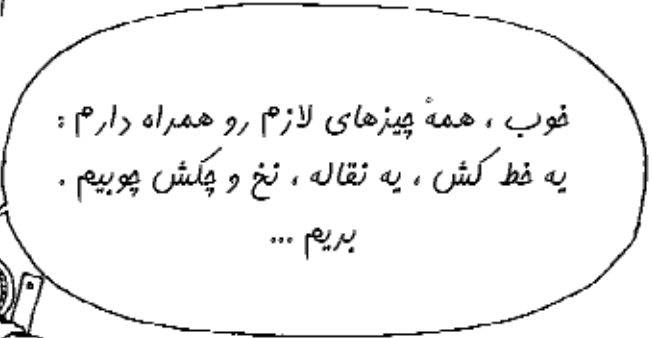
من کیام ؟

این خصوصیت توضیح می دهد که چگونه می توان به دلفواه وارد یک دایره شد یا از آن بیرون آمد ، بیرون عبور کردن
از آن ، وقتی این دایره بر روی یک کره رسم شده است . باید این دایره را همچون حلقه لاستیکی فرض کرد که آن
را بر روی توپ بیلیارد می سرانده ایم .





مدتی طول کشید تا آنسلم تمام این حالت ها را که توسط گوس ریاضیدان (۱۷۷۷-۱۸۵۵) کشف شده بود، دریابد. او تصمیم گرفت عازم کشف دنیای سطوح شود:



فوب، همه چیزهای لازم رو همراه دارم: یه فط کش، یه نقاله، نخ و چکش پویم. بریم ...



بعضی وقت ها علم منجر به تحمل فطر میشه.

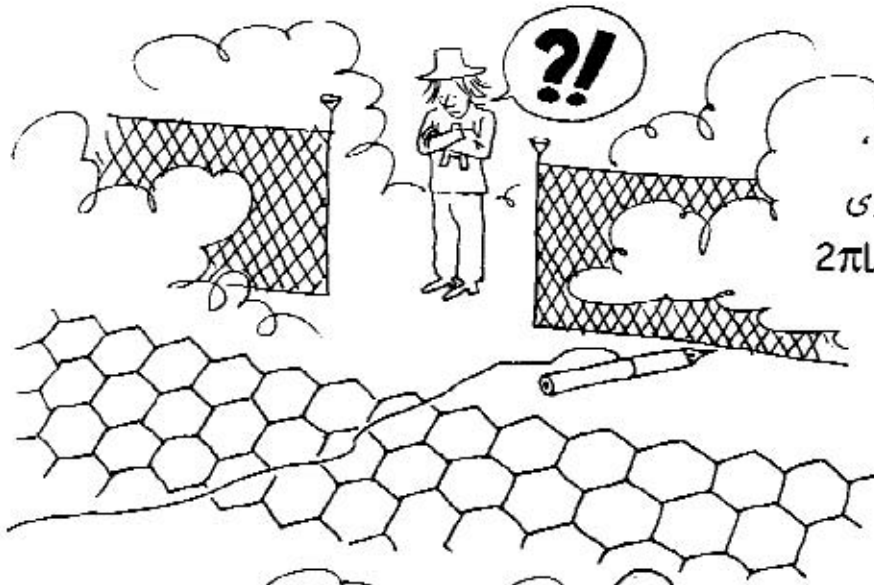
آنسلم پس از رسیدن به یک دنیای جدید، یک بار دیگر یک ژنودسیک باز کرد، ولی این بار:



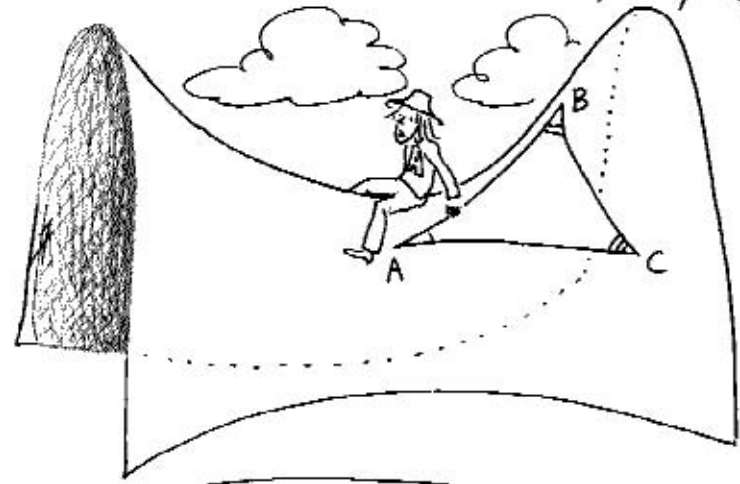
ژنودسیک بسته نشد.



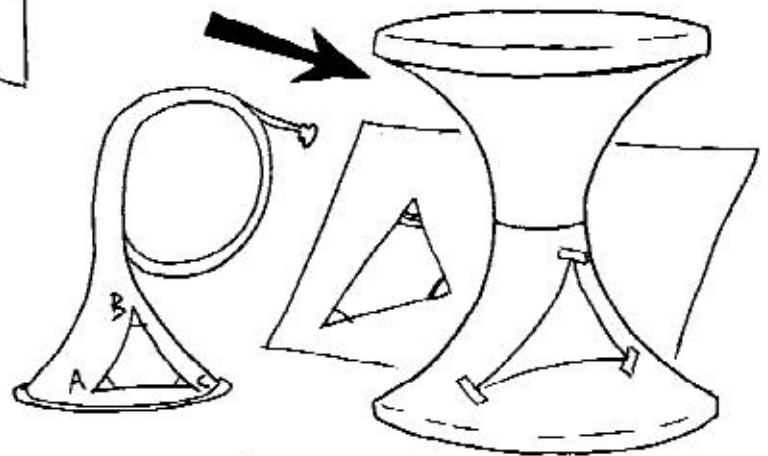
آنسلم به کمک سه نخ کاملاً کشیده شده یک مثلث سافت، ولی مجموع زوایا در رأس ها این بار کم تر از ۱۸۰ درجه را آشکار می سافت.



یک دایره هنوز هم مجموعه نقاطی به که به فاصله L از یک نقطه ثابت قرار گرفتن، لانتورلو متوجه می شود که این دایره که بر روی این سطح چرید ترسیم شده، محیطی بیشتر از $2\pi L$ دارد در حالی که مساحتش افزون بر πL^2 می باشد.



ابهامات را کنار بزنیم: این بار سطح شکل یک گردنه کوهستانی یا زمین یک اسب را دارد. بعضی از اشیاء زندگی روزمره تان نیز می تواند به کار آید: بوق شکار یا این شکل چهار پایه.



اینجا من دیکه هیچی نمی فهمم ...

نه بابا ...



برای اینکه آخر داستان را بدانید، ورق بزنید.



انحناء :

یک سطح منحنی ، سطحی است که تنوری های اقلیدسی در آن به کار نمی آید . انحنای می تواند مثبت یا منفی باشد .

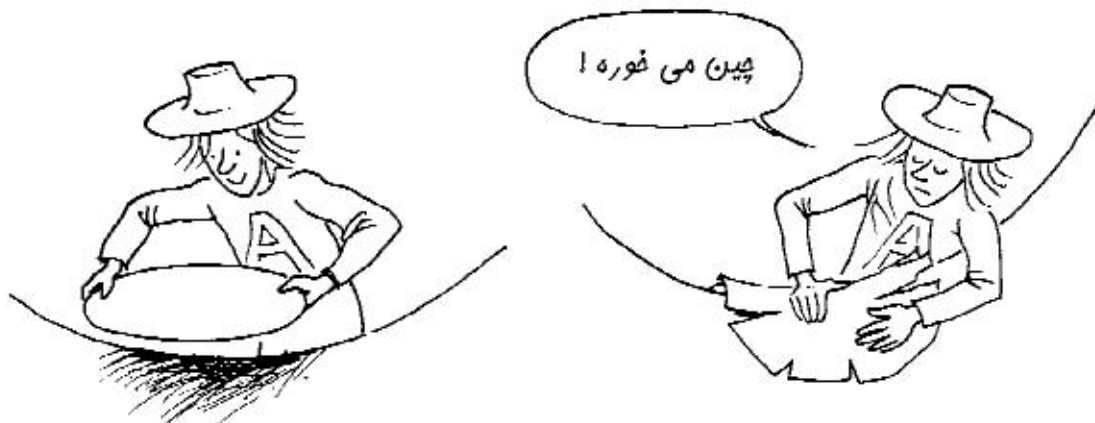
در یک سطح با انحنای مثبت ، مجموع زوایای یک مثلث از 180° درجه بیشتر خواهد بود . اگر دایره ای با شعاع L رسم کنیم ، سطح آن کمتر از πL^2 و محیطش کمتر از $2\pi L$ خواهد بود .

در یک سطح با انحنای منفی ، مجموع زوایای یک مثلث کمتر از 180° درجه خواهد بود .

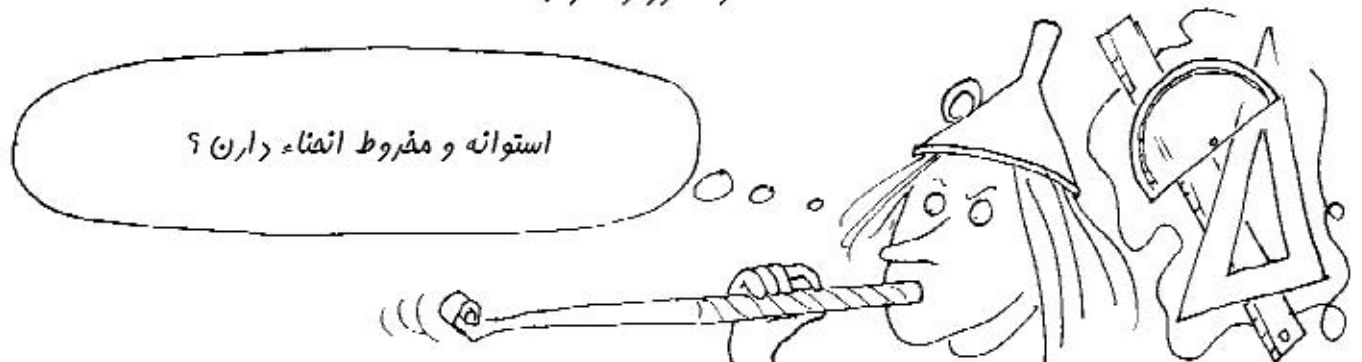
اگر دایره ای با شعاع L رسم کنیم ، سطح آن بیشتر از πL^2 و محیطش بیشتر از $2\pi L$ خواهد بود .

اندرکی قبل ، آتسلم متوجه شده بود که در عین تلاش برای پوشاندن یک کره ، سطحی با انحنای مثبت ، با یک عنصر مسطح ، چین هایی ظاهر می شود . پوشاندن یک سطح با انحنای منفی نیز توسط یک عنصر مسطح غیر ممکن است : چین ها ظاهر می شود .

این آزمایش احاطه کردن (پوشاندن) یکی از آسان ترین راهها برای مشخص کردن مثبت یا منفی بودن انحناء می باشد .

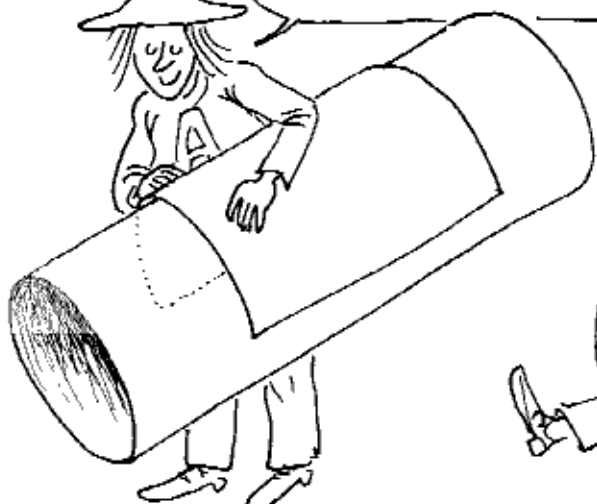


همان طور که در صفحه قبل می توان دید ، سطوح می توانند مناطقی با انحنای مثبت و منفی را نمودار سازند .

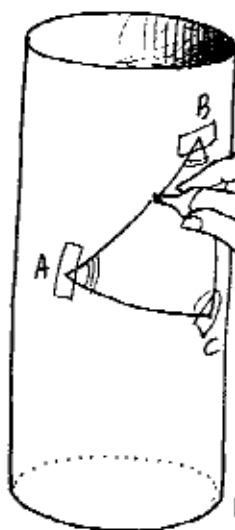


آزمایش پوشاندن

یه استوانه و یه مخروط رو همیشه
با یک سطح صاف پوشاندر!



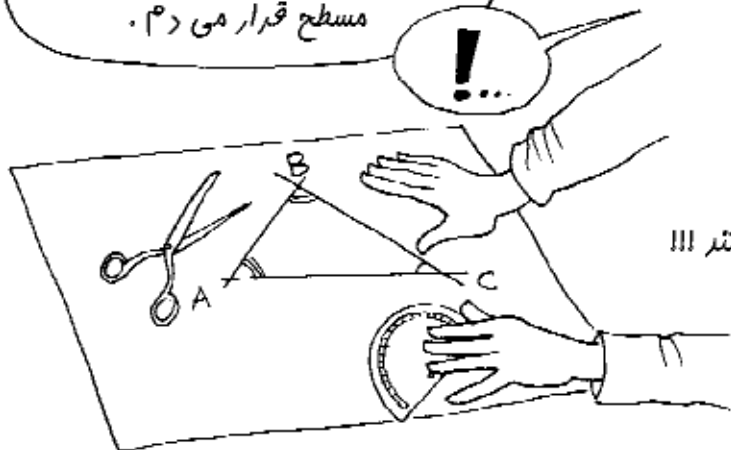
هول نکن . من سه تا نخ ارتجاعی ، یعنی
سه تا ژئوسپیک رو به کمک چسب نواری روی استوانه ام
می چسبونم ...



هالا ژئوسپیک هام
رو روی سطح علامت میزارم ...

استوانه ام رو کاملاً به صورت
مسطح قرار می دم .

! ...

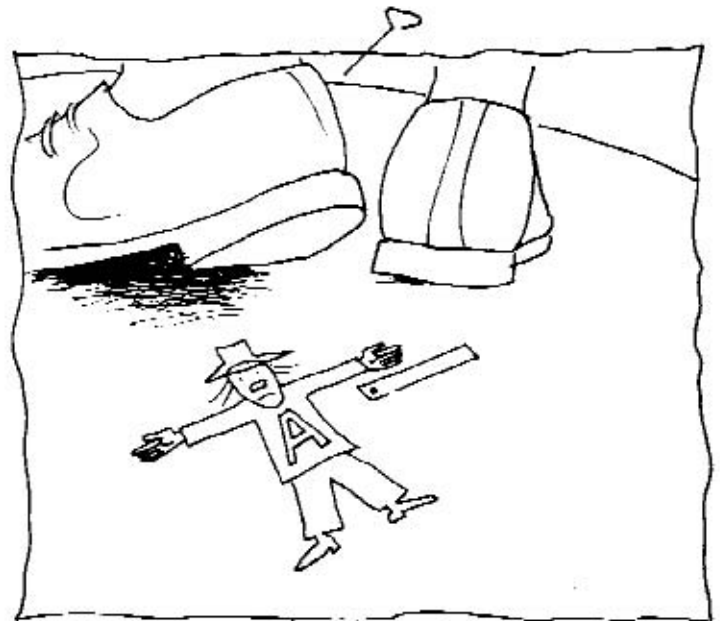
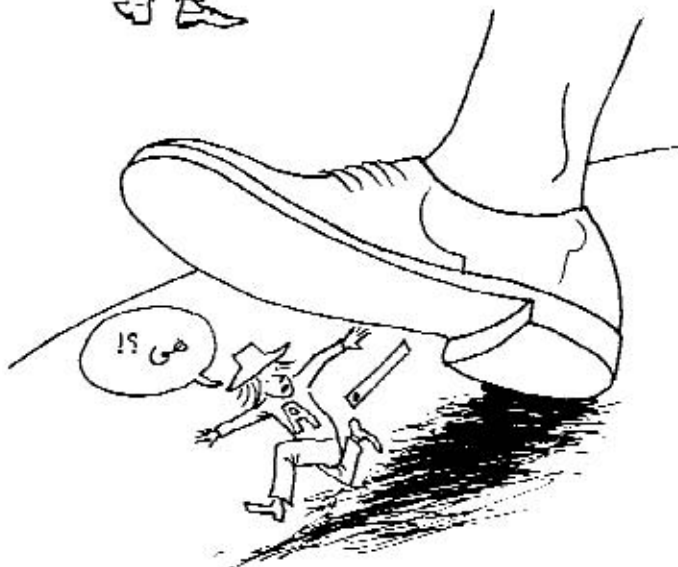


در ادامه تعریف مان ، استوانه و مخروط
با تبعیت از هندسه اقلیدسی ، سطح صاف هستند !!!

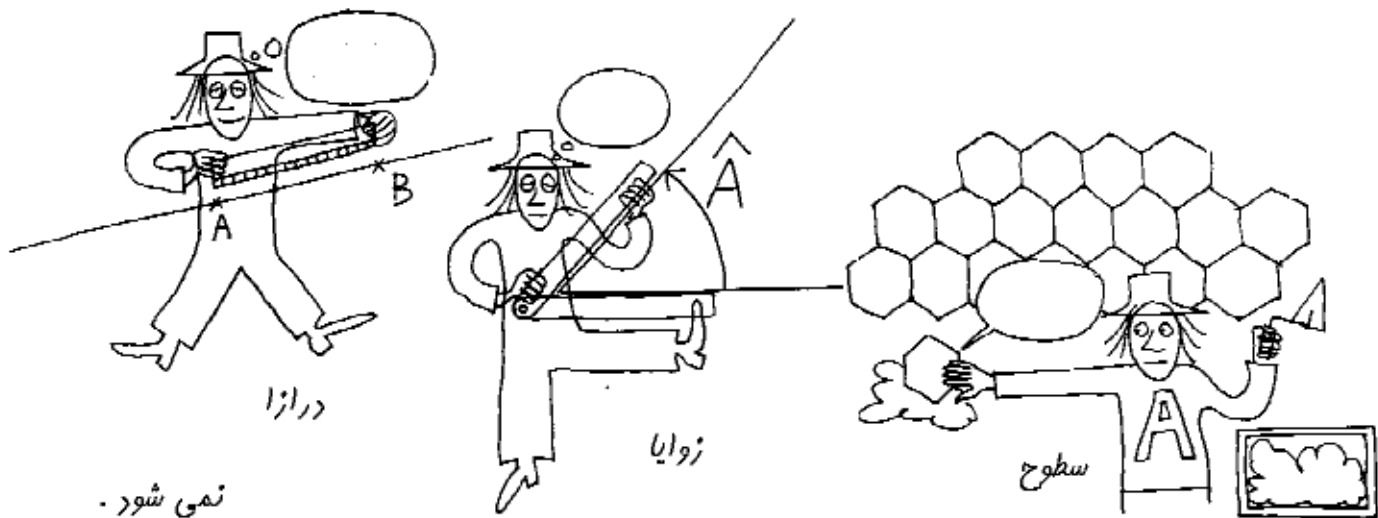


مفهوم سطح :

کمی قبل ، ابرهای ضمیم مانع از آن شدند که آتسlem بتواند دورتر از نوک دماغش یا همین ورود را ببیند ... اگر این طور نبود ، او می توانست انحنای سطح کروی را ببیند .
 یک راه دیگر هم وجود دارد که نگذارد لانتورلو این انحناء را ببیند :
 اینکه او را در آن سکنی داد به نحوی که او با آن یکی شود .



شما متوجه فواید شد که این وضعیت برید به هیچ وجه مانع اندازه گیری



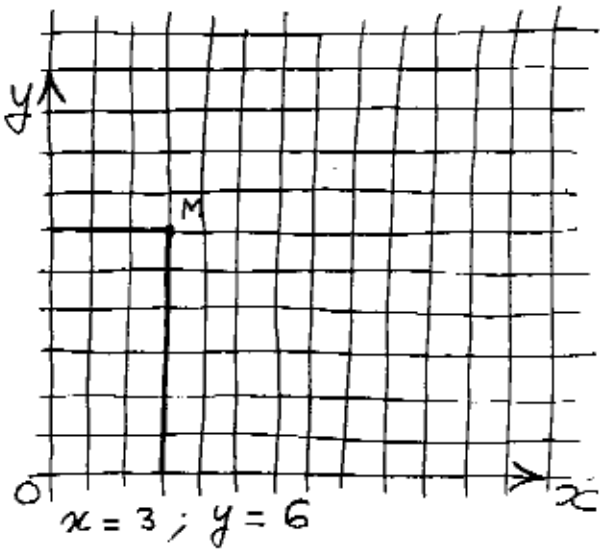
با آنکه آنسلم میبوس در سطح بود ، بقوی توانسته بود انشاء را مشاهده کند ، نشانه آن را (مثبت یا منفی) مشخص کند و حتی آن را اندازه بگیرد بی آنکه برای این کار حتی قادر به دیدن آن باشد .
 اگر مجموع زوایای یک مثلث 180° درجه باشد ، بنابراین این سطح صاف است .
 اگر این مجموع افزون بر 180° درجه باشد ، انشاء مثبت است و آنسلم می تواند شعاع منفی R را به کمک فرمول : درجه $(1 + \frac{A}{\frac{3}{114}R})$ که در آن A مساحت مثلث است ، حساب کند .

اگر این مجموع کمتر از 180° درجه باشد ، می توان شعاع منفی R ، توسط $(1 + \frac{A}{\frac{3}{114}R^2})$ مشخص نمود ولی آن دیگر مفهوم فیزیکی عادی را فواید داشت .
 متوجه فواید شد که یک سطح صاف می تواند همانند سطحی باشد که یک شعاع منفی بی نهایت دارد .
 در این صورت تمام تئوری های اقلیدسی را دوباره باز می یابیم .

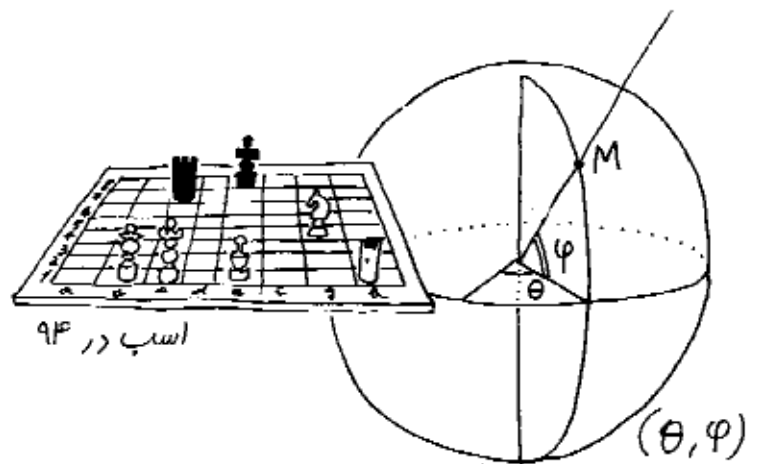


مفهوم بُعد :

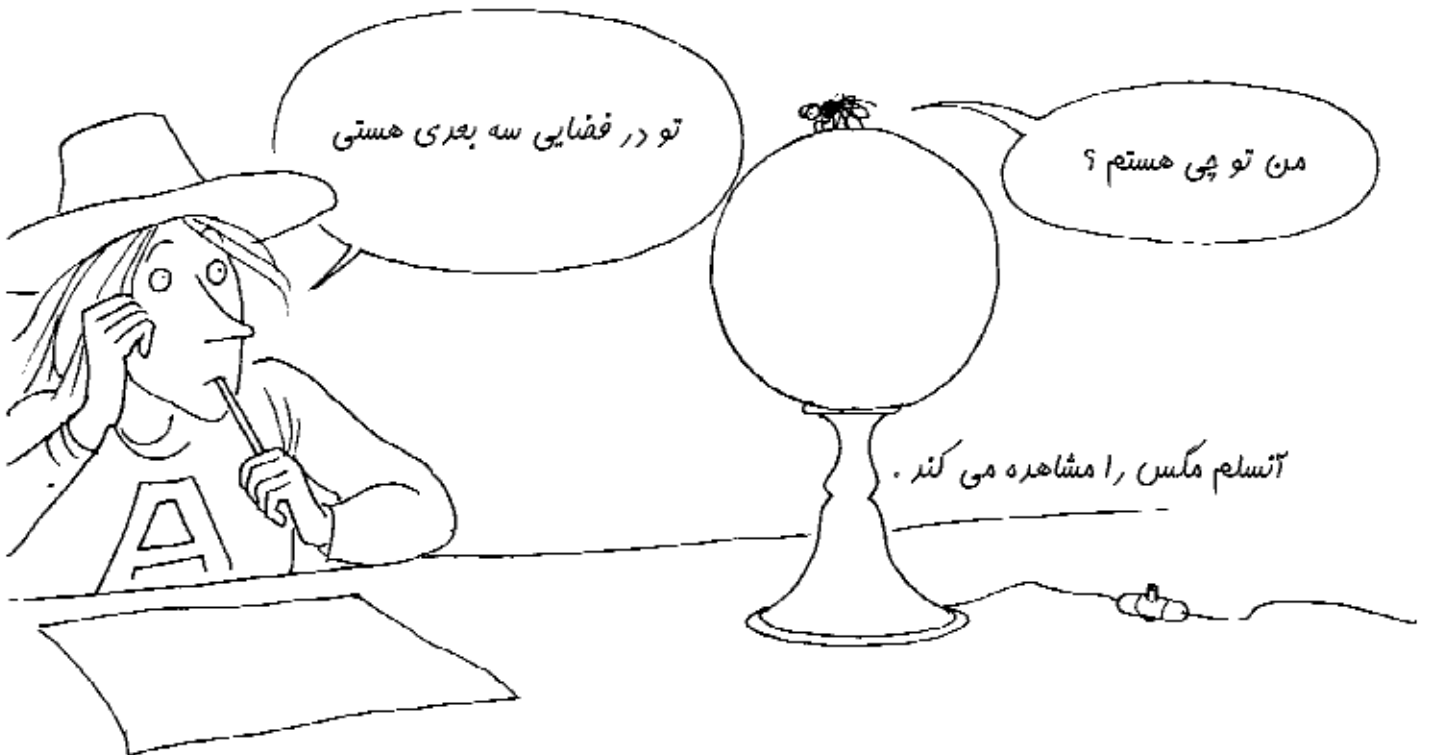
تعداد بورها بسادگی تعداد مقادیر و مفتحاتی است که باید در یک فضا داد تا یک نقطه را در آن تعریف نمود .
سطوح تپلی فضاهایی با دو بُعد هستند . طول ها ، تعداد ها و زوایا می توانند کمیت های به کار رفته در نقطه گذاری باشند ...

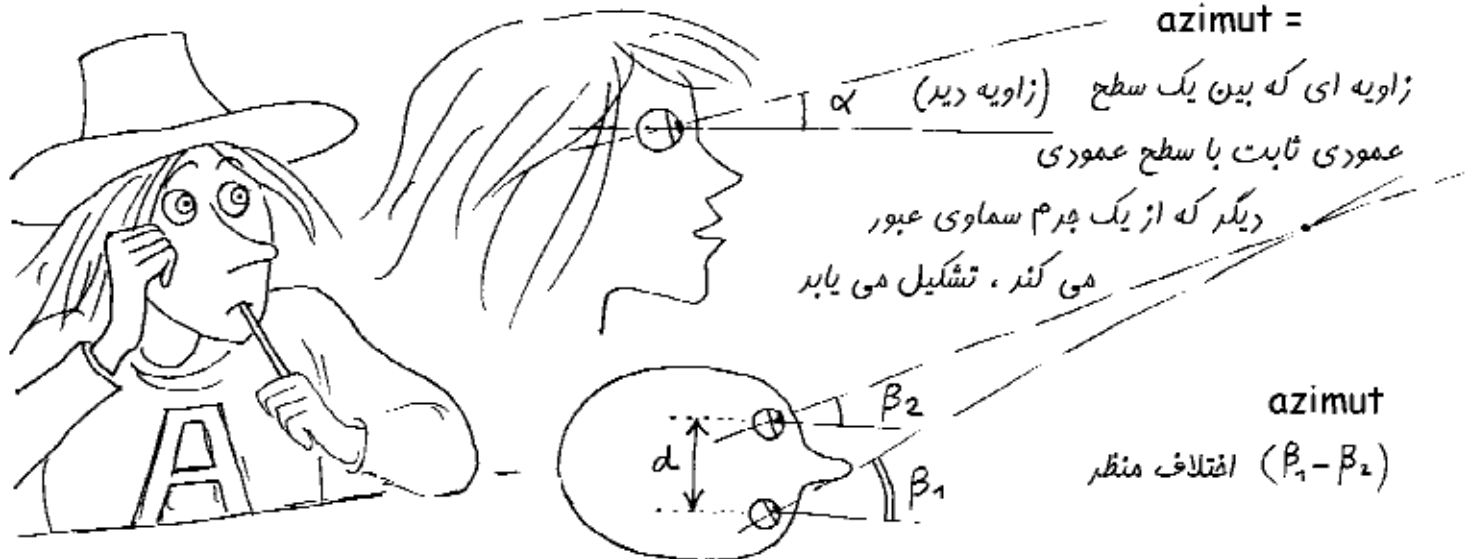


رسم بر این است که گفته شود فضای ما ، اگر زمان را مستثنی کنیم ، دارای سه بُعد است .



عرض جغرافیایی ، طول جغرافیایی

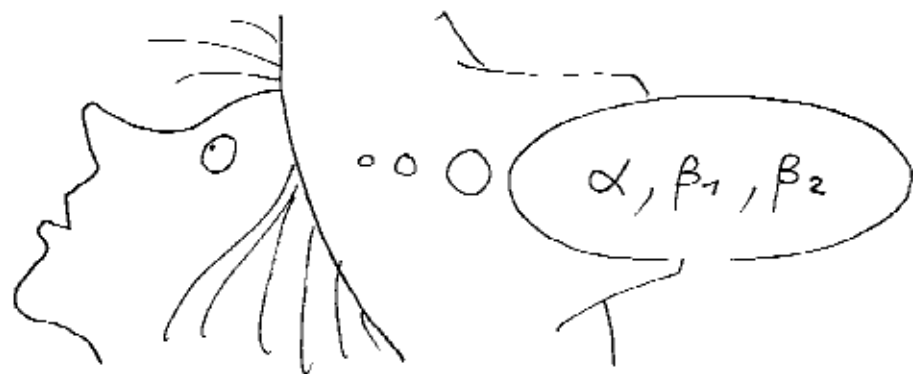
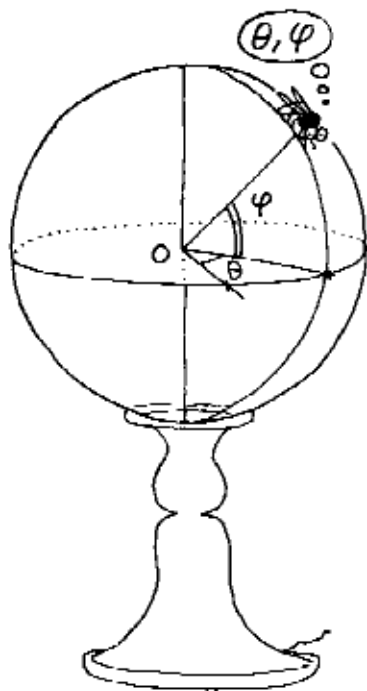


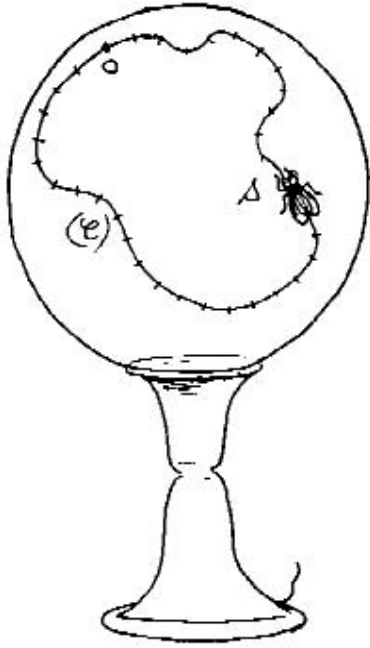


آنسلم اشیاء را نسبت به بدن و مغز فویش نشانه گذاری می کند. وضعیت یک شبی دقیق به کمک سه زاویه شناخته می شود: زاویه دید α و زوایای عمودی دو چشمش: B_1, B_2 . اختلاف زاویه B_1, B_2 ، اختلاف منظر نامیده می شود. در مغز آنسلم یک رمز گشایی انجام می شود که این اختلاف منظر را به فاصله تبدیل می کند.

عمل فرو رفتن:

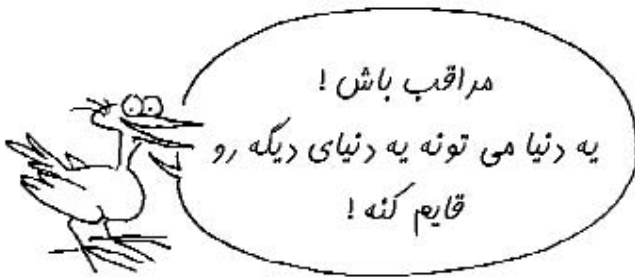
اما مگس نیز روی سطح کروی لامپ گردش می کند که وضعیتش در این فضای دو بعری می تواند به کمک دو زاویه θ, φ (طول جغرافیایی و عرض جغرافیایی) مشخص شود. ما می گوئیم که این فضای دو بعری در فضای سه بعری ما فرو رفته است.





فرض کنیم که مگس انشای (L) رسم شده بر روی کره را دنبال می کند. موقعیت او را می توان تنها به کمک یک مقصه (فاصله مساب شده چبری اش از یک نقطه مبدأ S است) علامت گذاری کرد.

انشاء تصویر می است از یک فضای تک بعری. این فضای تک بعری در فضای دو بعری (کره) فرو رفته که خود کره نیز در فضایی سه بعری فرو رفته است. بدین ترتیب، فضایی که ما در آن گردش می کنیم می تواند در فضایی با بعری بالاتر فرو رفته باشد بی آنکه ما حتی متوجه آن شویم.



مراقب باش!
یه دنیا می تونه یه دنیای دیگه رو
قایم کنه!



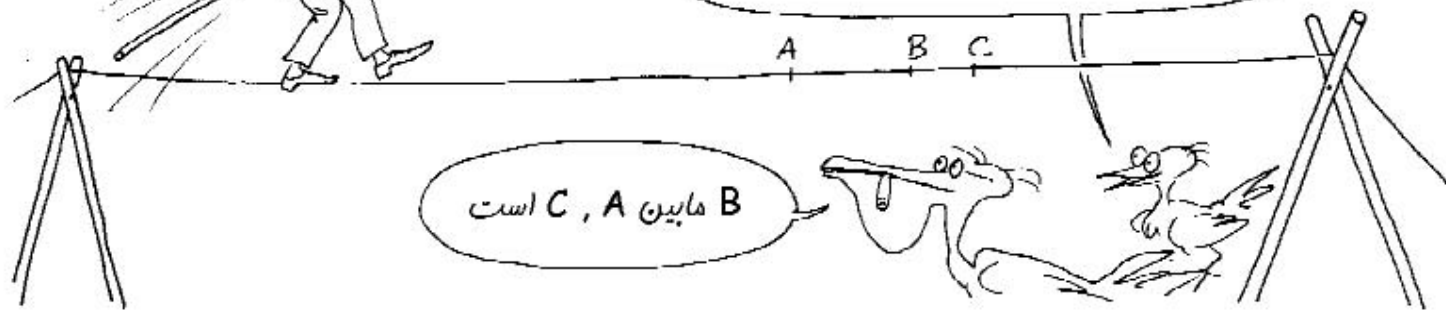
آه، آگ ممکنه ماوراء الطبیعه
رو ول کن!

رفیق، می دونی ما در فضایی با یک بعر مفروض می شویم.

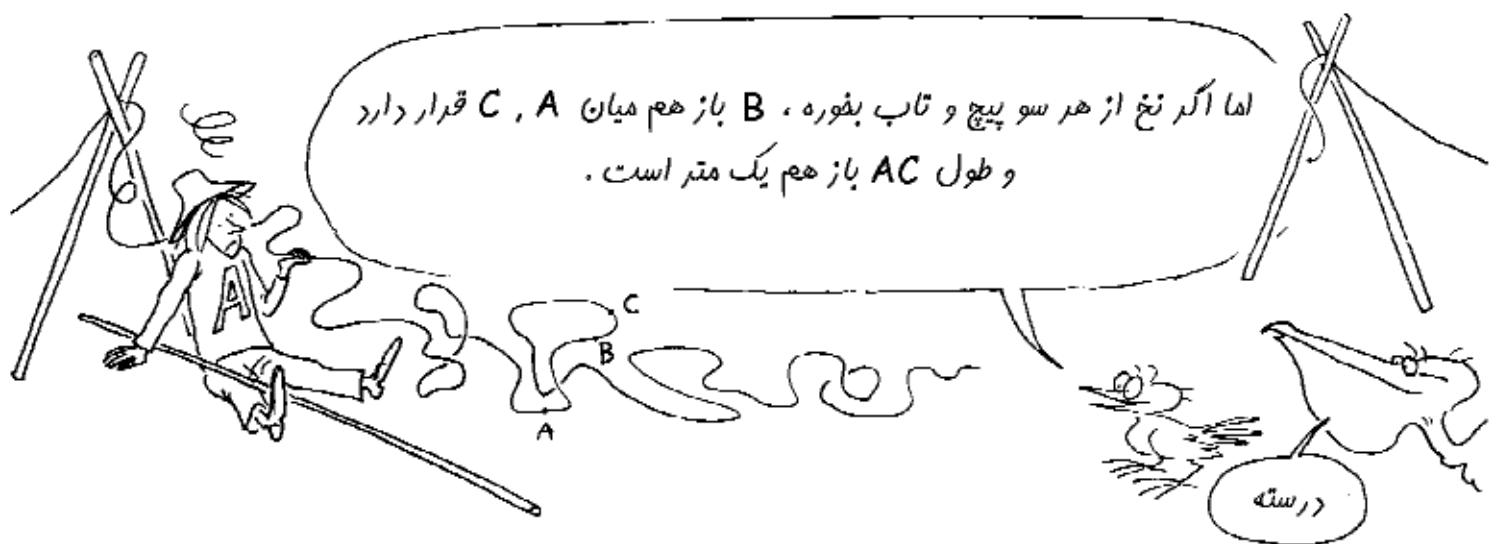


اوه، لالا امن، فضایی تک بعری، اینو دوست ندارم!

فاصله A از C یک متره



B مابین A, C است



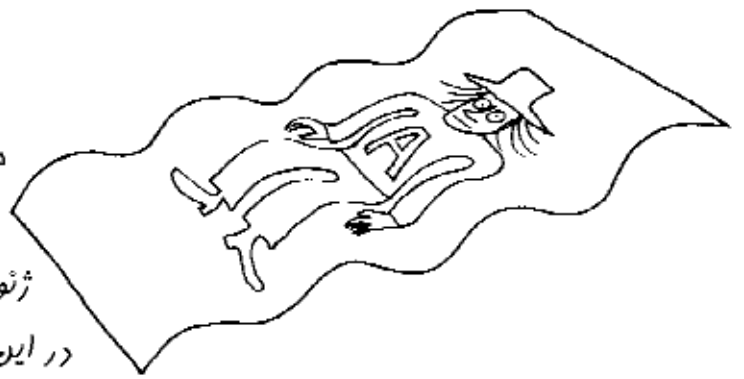
این مطلب اشاره بر این دارد که برفی مفتحات می توانند مستقل از شیوه ای که فرو رفتن عمل می کند ، باشند .



اما ما کاملاً از منقبض یا منبسط کردن نخ خودداری می کنیم تا مانع از تغییر طول میان دو نقطه متوالی شویم . اکنون ، سطوح را در فضای سه بعری عاری فرو می کنیم .

اگر یک سطح صاف را وارد یک فضای سه بعری معمولی کنیم ، می توانیم آن را بایضا کنیم و بپرفانیم ، بی آنکه هندسه آن را تغییر دهیم .

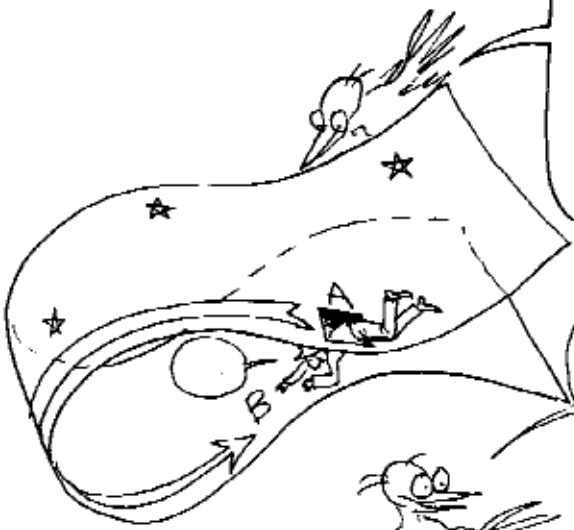




ما مشاهده کردیم که تغییر شکل
یک سطح صاف به شکل استوانه نه
ژئودسیک ها را تغییر می دهند زوایا را.
در این دیدگاه ، ورقه موجدار فلزی همواره از هندسه سطح

صاف اقلیدسی پیروی می کند . ساکن یک چنین فضای دو بعدی اقلیدسی ، هیچ آگاهی از انتقال ، پرفش
یا تموج نخواهد داشت که تنها شیوه های مختلف فرو رفتن در فضای سه بعدی است .

ظاهر " ، فضای سه بعدی ها می تواند خود نیز در فضایی که ابعاد
بیشتری دارد فرو رود ، بی آنکه ما بتوانیم متوجه آن شویم .
در واقع ، یک چنین فرو رفتنی تأثیری بر ژئودسیک های فضای
ما ندارد ، بنابراین ادراک ما که مبتنی بر نور است ، از
ژئودسیک های فضا پیروی می کند .



برین ترتیب ، می شود بین دو نقطه مسیری کوتاهتر
از مسیر طی شده توسط نور را پیش بینی کرد .



هی ، تو ...

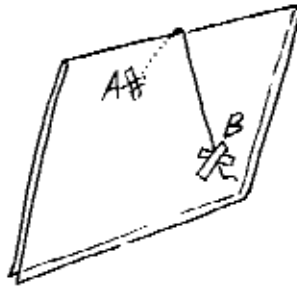
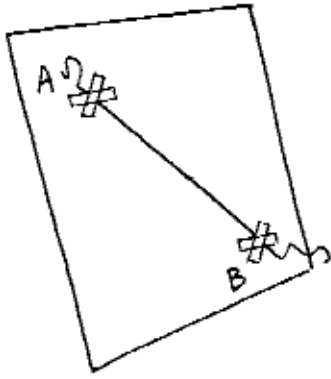
چی کار می کنی ؟



حالا فهمیدم چی کار می خوای بکنی !
تو داری منو به سمت علوم تفیلی می کشونی .

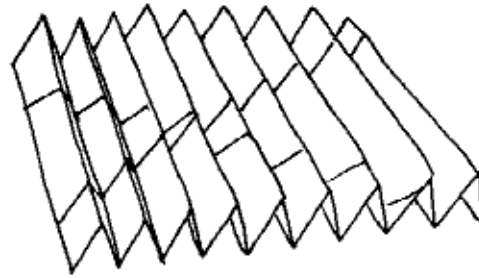
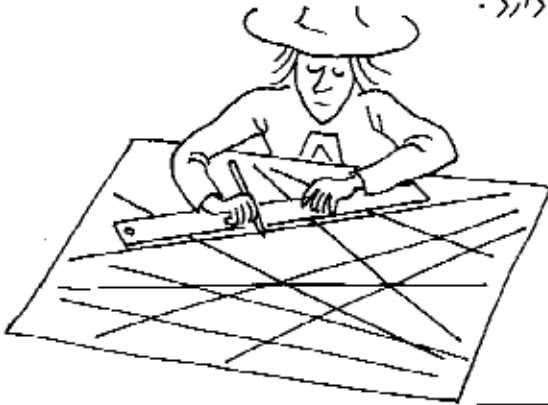
دارم ته صرفم رو کشف می کنم .

قسمتی از یک سطح صاف را بگیرد و آن را تا کنید :



تا خوردگی به هیچ وجه
فقط سیر ژنودسیک ۴ رو عوض می کنه !

روی یک برگ کاغذ ، به کمک یک خط کش ، خطوط صاف و ژنودسیک هایی
رسم کنید ، سپس کاغذ را امپاله کنید . هنوز هم ژنودسیک های سطح ، با
یا برون چین مقابل پشمان شما قرار دارد .



اما این قسمت اول سفر که چیزی جز یک مشت موملات نبود ،
چونکه مرحله بصری شامل :



می فوام پیاده شم !!!

فضای
منحنی سه بعدی
است



آقای لانتورلو؟

مسلماً

من نماینده شرکت اقلیدس و شرکاء هستم ،
ما می دونیم که شما مشکل داشتین با ... ! ...
ابزارهای ما شما رو مایوس کردن .

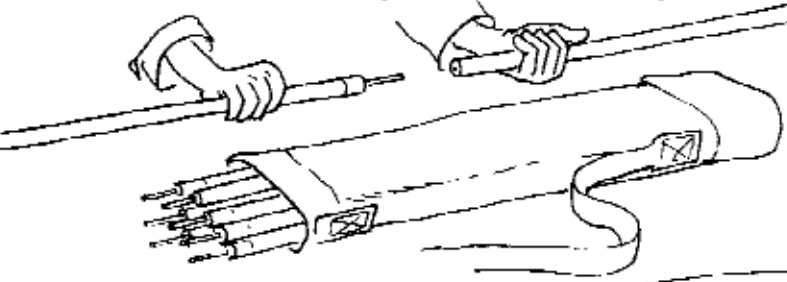
ما اینجا ابزار جدیدی داریم که این
بار باعث کمال رضایت
شما خواهند شد .

دوباره
نشون برین

آینده متعلق به فضای
سه بعدی است .
می دونین ، هندسه
دو بعدی یه کم ...
از مر افتاده ست .



ابزار جدید و ضروری ما برای ژنودسیک ها ...



تشکیل شده از میله های مکعب
که کاملاً "داخل یکدیگر می روند .



و این به شما این امکان را می دهد که نه به راست
بروید نه به چپ ، نه به بالا و نه به پایین ، فقط مستقیم !

این رنگ برای اندازه گیری سطوحه .
دقیقا، صد گرم در متر مربع .

برای اندازه گیری حجم ها ، آنها را با گاز پر کنید .
مقدار را مستقیما از روی متر نمای فضا سنج
می خوانید .

چه نبوغی

و به قاطر داشته باشییر : سطح کره : $4\pi L^2$
حجم : $4/3\pi L^3$

باشه

اقلیدس و شرکا

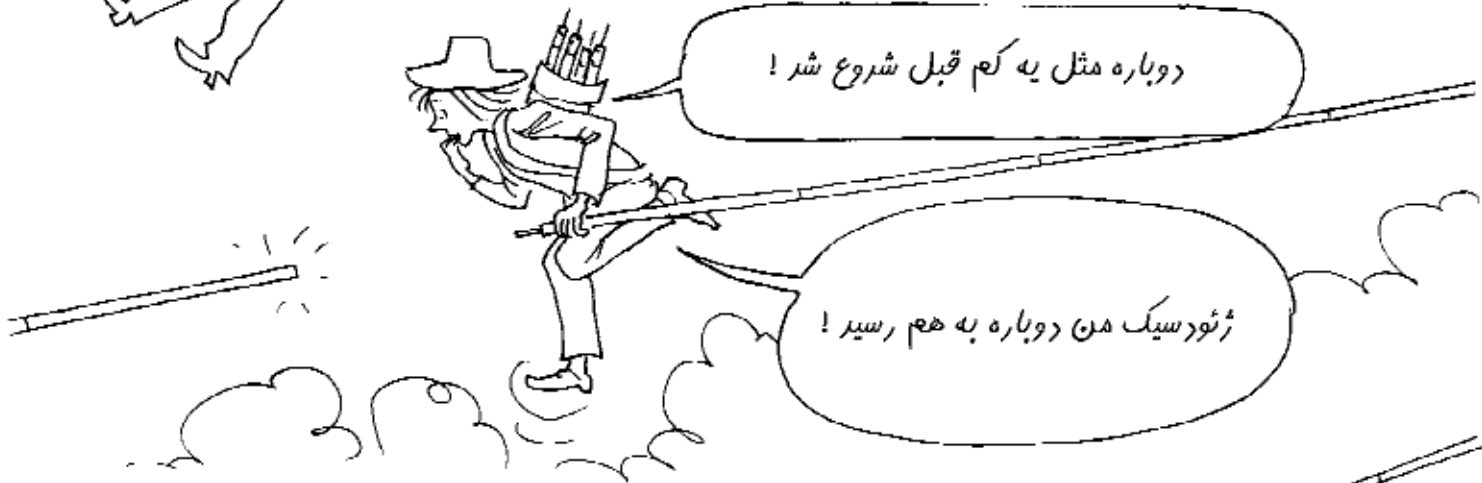
چه شغلی ا

آتسلم این بار در فضایی سه بعری فرود آمد و ما
او را در اکتشافش همراهی خواهیم کرد .



چه ابزار زیبایی .
و این میله ها دقیقا
یک متر می شوند .

اما بعد از قرار دادن مقدار
نسبتا "زیادی" میله ...



دوباره مثل یه کم قبل شروع شد!

ژنودسیک من دوباره به هم رسیر!

یه فضای سه بعری بسته!

این آخر همه چیزه

آنسلم که دست از کار کشیده بود تا بر روی
سیاره ای کوچک چیزی
روشن اندازه گیری
بفورد ، تصمیم گرفت
زویا را دوباره از سر بگیرد .



مثل کمی قبل ، از سه تا
ژنودسیک برای ساختن
یک مثلث استفاده می کنم .



ژئودسیک هام بفوبی به هم وصل شدن ، ولی
با این حال مجموع زوایایم از ۱۸۰ درجه بالاتره ...



فوب

فیش ش ش



یه دونه درست می کنم و
میوم وسط اونو اندازه می گیرم .

یه کره با شعاع L مجموعه نقاطی یه
که به فاصله L از یک نقطه ای ثابت
که اونو N می نامم ، قرار می گیرن .

سطح اون از $4\pi L^2$ کمتره .



اینم میوم که از $4/3\pi L^3$ کمتره ا



بازم سرم کلاه رفتم

آتسلم باز هم بر شعاع A کره افزود.

فیش ش ش

سطح صاف

که این طور، کره ام ... مسطح شد!

دوباره و دوباره ...

فالا تقرب اون برعکس

می شه!

از اینکه دیگه هیچی نمی فهمم

اقلیدس و شرکاء

ولی ... پیرامون به رو م بسته می شه!

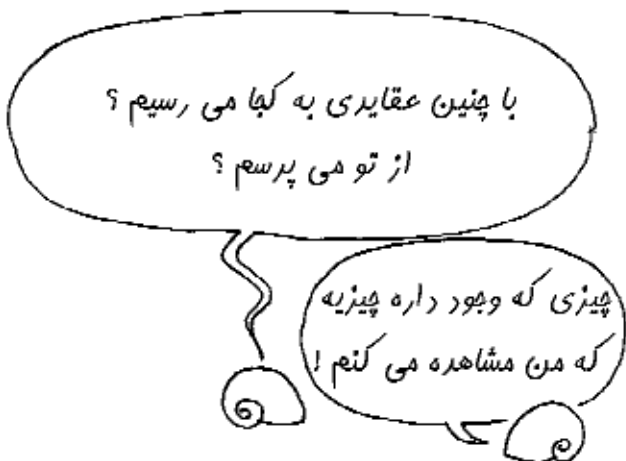
فیش ش ش

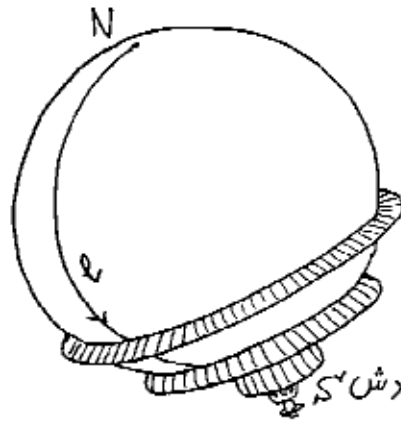
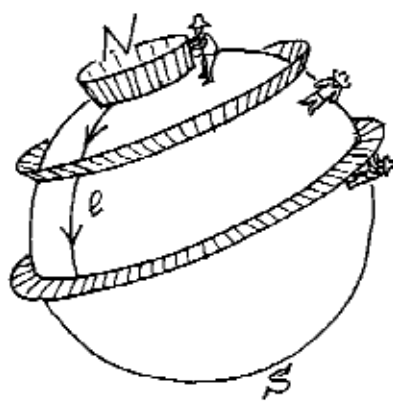
فوری کپسول رو قطع کن!



بنابر این با باد کردن یک بادکنک ساده در یک فضای سه بعری ،
 لانتورلو در آفر سر برگشت ... داخل !
 اگر او بموقع کپسول را قطع نکرده بود ، آن تو هلاک شده بود ،
 درست مثل دفعه قبل که آفر سر در مصاری که خود ساخته بود ،
 ملبوس می شد ، صفحه ۱۳ .

حالا دیگر با هیچ عزمی نمی توان انحنای این فضای سه بعری
 را قابل روءیت کرد . ژئودسیک هایش بسته شدند و همیش به متر مکعب رقم مخروطی را
 نشان می دهد ، درست مثل سطح سیاره ما ، سطح بسته به متر مکعب رقم مخروطی را عرضه می کند .
 مجموع زوایای یک مثلث در این فضای سه بعری بیشتر از 180° درجه است . برای "مشاهده"
 انحنایش ، باید قادر به مشاهده پوار بعری باشیم .
 می شود این طور گفت که دنیای سه بعری ما یک مافوق سطح است که در فضایی پواربعری
 فرو رفته که خود آن نیز ممکن است یک مافوق سطح فرو رفته در یک فضای پنج بعری باشد ،
 و غیره ... اما امروزه گفتن یک چنین چیزهایی پنهان باب نیست .





لانتورلو در روی کره اش با بزرگ کردن شعاع L قلمروش، عاقبت در نقطه متقاطع قطب N ، مرکز دایره اش قرار گرفته و در مدار خودش

گیر افتاده بود. در فضای سه بعدي با انضای مثبت هم همینطور است. در این فضای دو بعدي که کره هست، وقتی آنسلم نیمی از سطح آزاد را مدار کشید، با فط میانی بر فرود کرد.

در فضای سه بعدي مافوق کروی هم فط میانی وجود دارد. وقتی بادکنکش نیمی از حجم موجود را پر کند، آنسلم به فط میانی می رسد. در روی کره، دایره فط میانی به نظر او همچون یک فط صاف آمده بود. همچنین در فضای مافوق کروی، "بادکنک میانی" به نظر او همچون یک سطح صاف فواهر رسید. از بالای فط میانی تقرب بادکنک برعکس می شود و آن خود بر روی نقطه متضاد S ، نقطه N ، مرکز بادکنک متمرکز می شود.

در روی کره، هر نقطه ای یک نقطه متضاد دارد. در یک فضای سه بعدي مافوق کروی نیز چنین است، هر چند که درک آن کمی مشکل باشد.





مشکلی داری؟

راستش ، اوه ... تو مغز همه چیز به کم قاطی شده .



اسم من صوفی به . منحنی ها از هر نوعی به من مربوط می شه .

سفر در مافوق فضا ، همیشه اولش کمی عجیبه . باید از گیر افتادن اجتناب کرد . کم کم به آن عادت می کنی .

البته ...

کمی رشته کار از دستم در رفته ...





اما مرکز این مافوق کره کجاست؟



اگر من یک دایره روی یک سطح صاف رسم کنم، موافقیم که اون نمایش یک فضای یک بعری بسته است که در یک فضای دوبعری: سطح صاف، فرورفته.

و مرکز دایره روی دایره نیست.



یک کره، فضای بسته دوبعری را نشان می دهد که در یک فضای سه بعری فرورفته. مرکز این کره نیز دیگر بر روی کره نیست. مرکز آن در فضایی سه بعری است.



مرکز یک فضای مافوق کروی سه بعری، می تواند در فضایی چهار بعری قرار بگیرد، با این فرض که در آن فرورفته باشد. و همین طور الی آخر... بدین ترتیب مرکز یک فضای مافوق کروی چهار بعری در فضایی پنج بعری خواهد بود، الی آخر...



فوب ، اینم تو ، در دنیای دو بعری ت که روی اون پسیبری ، مثل یک عکس برگردان .

و تو شروع می کنی به بار کردن دایره که تنها یک کره یک بعری به .



در یک فضای دو بعری ، مرزی هرود یک سطح را تعیین می کند . در صورتی که در یک فضای سه بعری آن هم را هرود می کند .

اینجا وقتی به که من به ممیزی این سطح کروی می رسم .

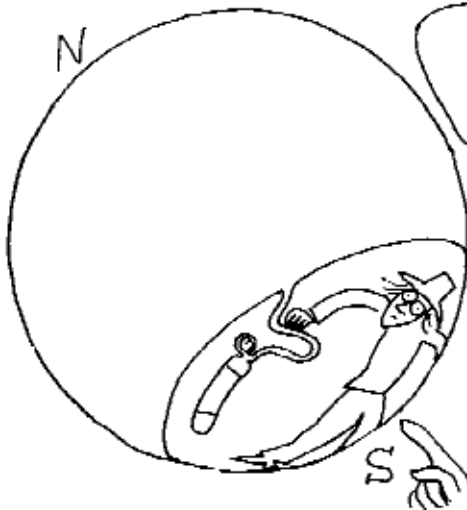


در یک فضای چهار بعری ، یک مرز می تواند سه بعد داشته باشد و یک مافوق هم چهار بعری را تعیین هرود کنند .

بازم شروع میشه !




بدو بریم !

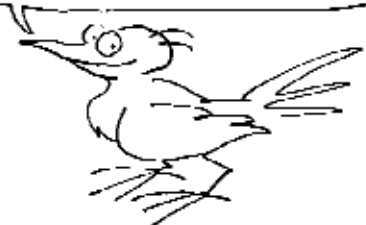


اینجا رو نیگا کن ، دایره ت که " یک بارکنک تک بعری " ست ، شروع می کنه به اشغال کردن بیشتر از نیمی از فضای موجود . اون شروع می کنه به بسته شدن به روی تو ، و متمایل میشه به سمت نقطه متضاد S .







برین ترتیب ، در فضای منفی و سه بعدی من ، وقتی بیشتر از نیمی از حجم کلی رو تزریق می کنم ، بادکنک به روی من بسته میشه و بدست نقطه متضاد متمایل میشه .




چونکه این کره ، در این فضای سه بعدی منفی ، احتمالاً دو تا مرکز داره که با هم متقاطع هستن .




فومیرم !




بالافره نمی دونم دقیقاً چی رو فومیرم ، ولی اساس می کنم یه چیزایی فومیرم .



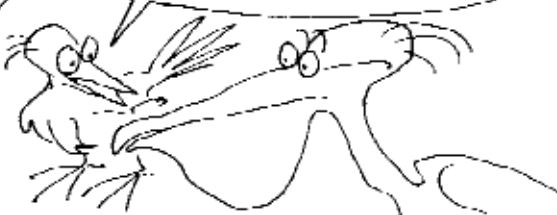
چه دلوره ای !



نه ، آنسلم ، وقتی بیشتر از سه بعد داریم ، فومیرن قیاس و پیش بینی است .

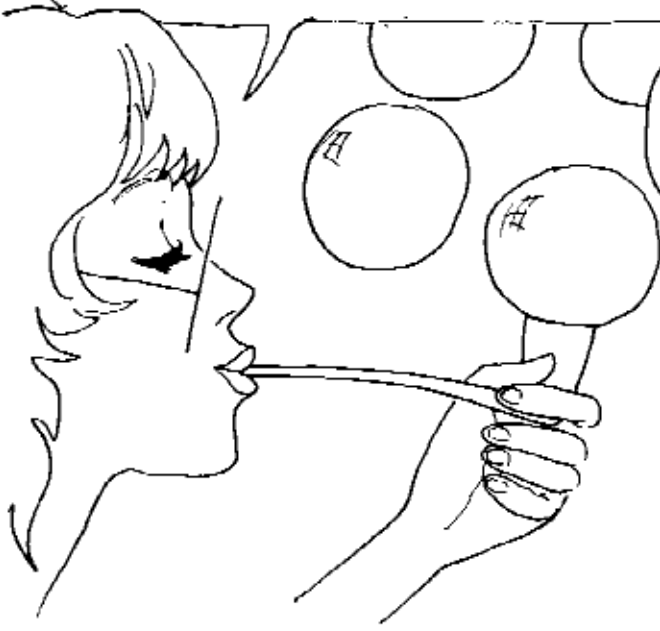


من پیش بینی کردم بدون اینکه بفهمم

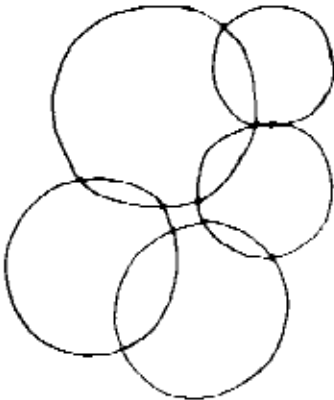
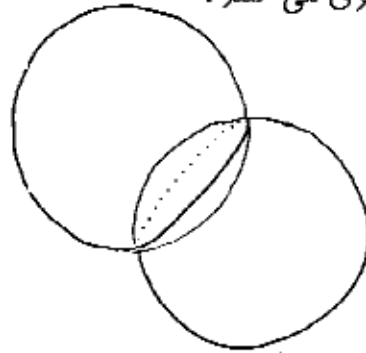


رسم کردن ، این تویی که اونو انجام فواهی دار ... تو مغزت !

حالا من به فضای سه بعری رو در نظر می گیرم و کره های دو بعری رو در آن قرار می دهم ، مجموعه ای از دنیاهای دو بعری کوچک .



این جهان ها می توانند در یکدیگر فرو روند .
نقاط مشترکشان تقسیم می شود در حالی که از
دو ایر ، اجسام یک بعری ، پیروی می کنند .



همچنین ، دو ایر که اجسامی تک بعری هستند ، وقتی
روی یک برگ کاغذ قرار می گیرند (دو بعری) ، قطع
می شوند و از نقاط پیروی می کنند . (عادت بر این است
که گفته شود نقطه بعری ندارد ، ابعاد آن صفر است .)



پس یک کره می تواند همچون فصل مشترک دو " حباب " سه بعری
در نظر گرفته شود که در فضایی چهار بعری در گردش است .

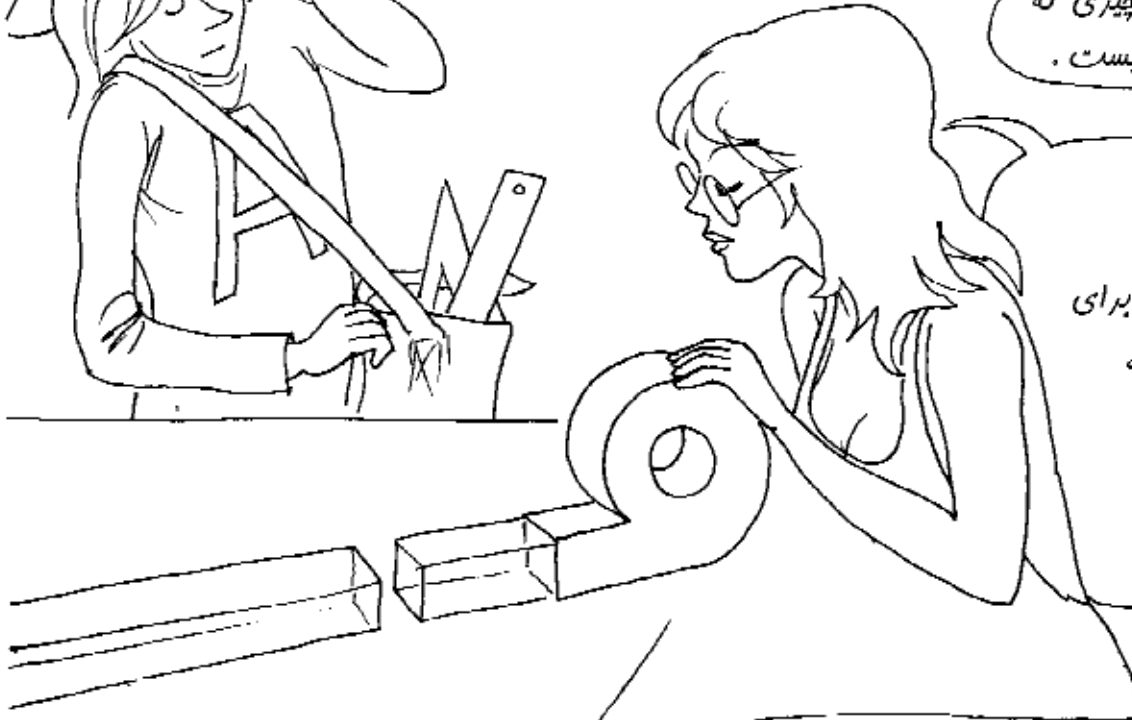
و همین طور الی آخر : یک فضای سه بعری منحنی ، مافوق کروی ،
می تواند همچون فصل مشترک میان دو حباب صابون چهار بعری
در نظر گرفته شود که در فضایی پنج بعری در گردش است .

آنسلم و صوفی پس از تجربه کردن ابهامات قیاس و پیش بینی، کشف دنیاها را خرید سه بعری را از سر گرفتند.



ریاضیات دیگر چیزی که سابق بود، نیست.

می بینی، این یک چسب نواری سه بعری برای ژئودسیک هاست. البته قسمت چسبنده در بالا قرار داره ...



هی، در این فضا، به نظر میاد ژئودسیک ها به هم نمی رسند. و حالا، وقتی من بار کنگ فضا سنج رو بار می کنم، حجم تولید شده بالاتر از $\frac{4}{3} \pi L^3$ ست در حالی که سطح از $4\pi L^2$ بالاتره. در مورد مجموع زوایای یک مثلث، اون این بار از 180° درجه کمتر است.



صفحه 2^3 رو به یار بیار، تو دوباره در یه فضای منحنی منحنی هستی.



فلاصه :



می دونی که در یک فضای سه بعری اتفاقات زیادی ممکنه رخ بده . مثل سطوح که فضاهای دو بعری هستن .

برین ترتیب ، اگر مجموع زوایای یک مثلث در یک فضای سه بعری بیشتر از 180° درجه باشه ، خواهیم گفت که انحنای آن مثبت است . با تشکیل یک کره به شعاع L در آن ، توسط فضا سنج حجمی پایین تر از $\frac{4}{3}\pi L^3$ و سطحی کمتر از $4\pi L^2$ ، خواهی یافت . این فضای مافوق کروی به روی خود بسته خواهد شد . اگر مجموع زوایای یک مثلث در یک فضای سه بعری ، از 180° کمتر باشه بنابراین انحنایش منفی خواهد بود . حجم کره ای به شعاع L از $\frac{4}{3}\pi L^3$ بیشتر خواهد بود و سطح آن بیشتر از $4\pi L^2$. این فضا گسترده گویی بی نهایت خواهد داشت .



ولی اگر مجموع زوایا 180° باشه ، بنابراین فضا بسادگی اقلیدسی است .

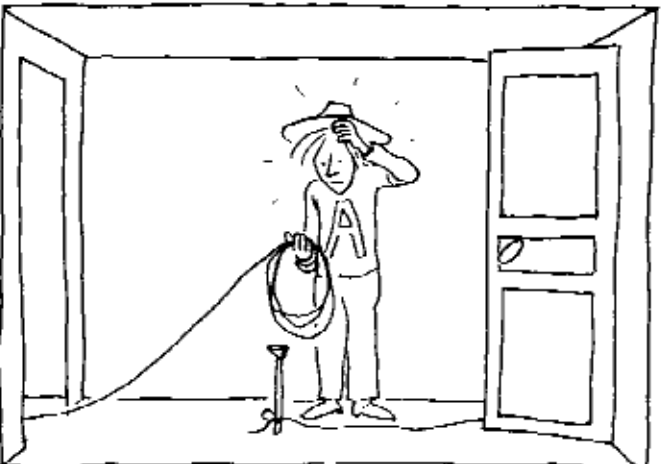
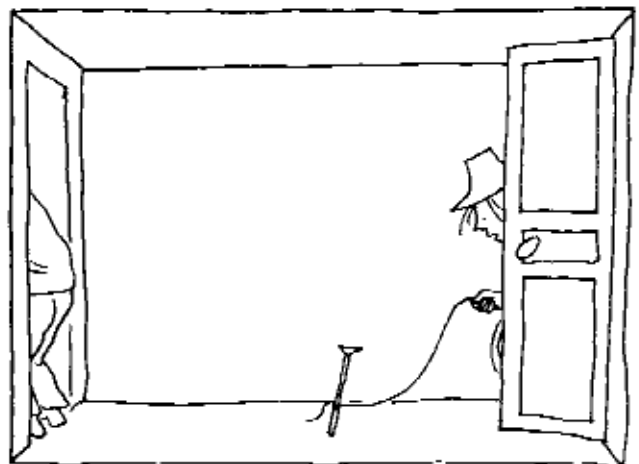
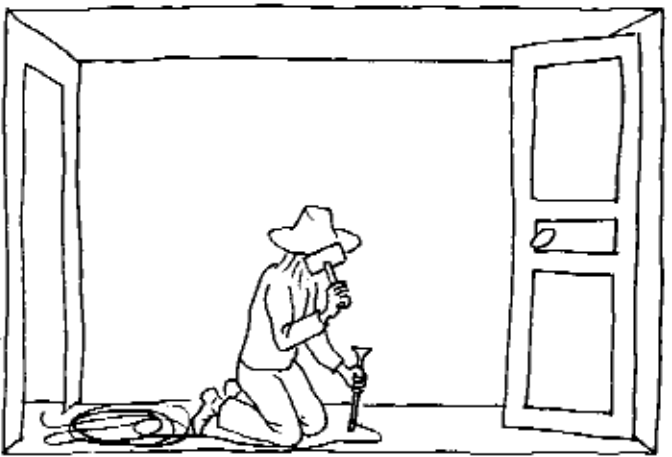
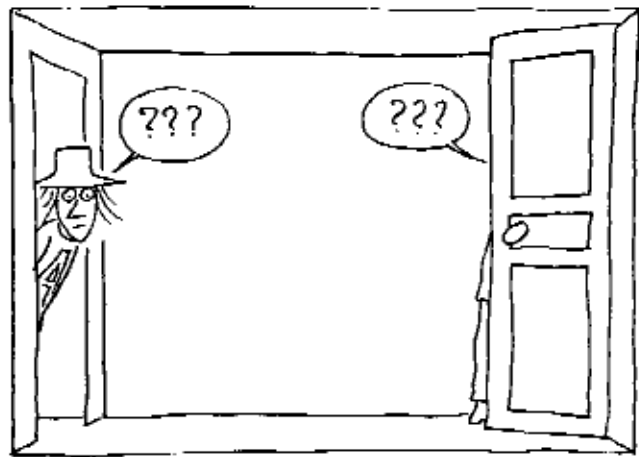
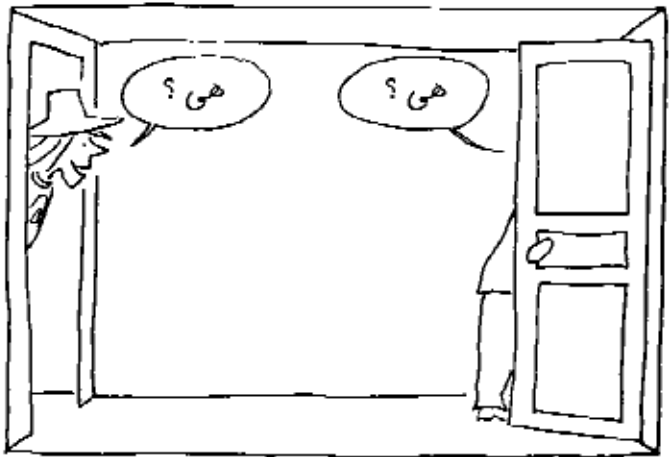
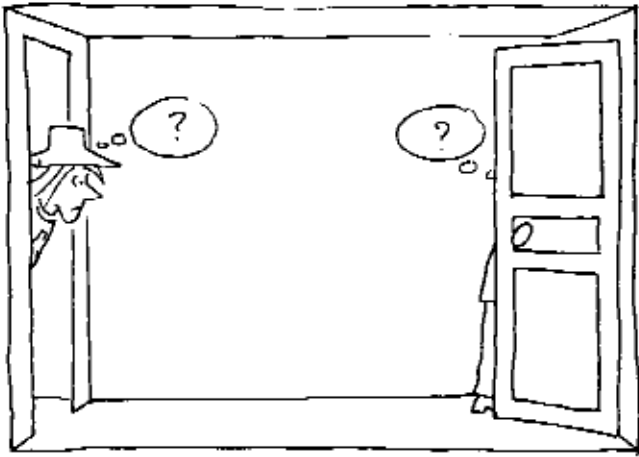
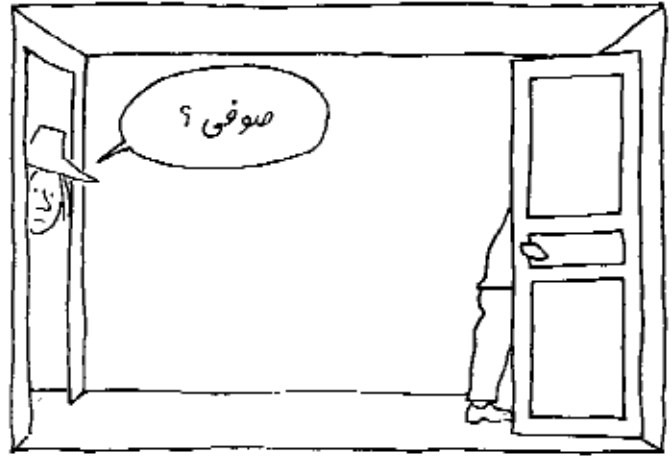
همه اینا برای رسیدن به اینجا...!

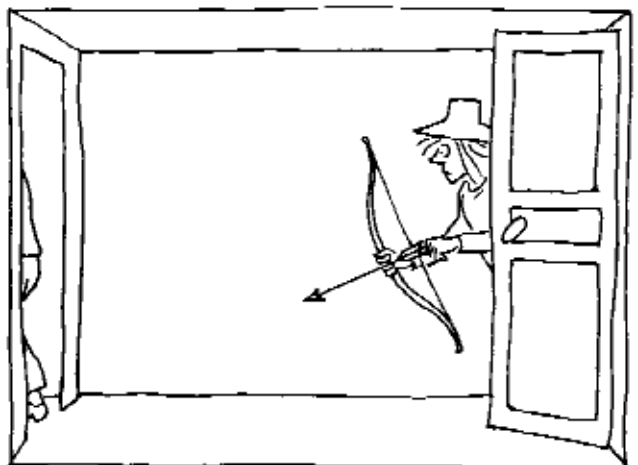
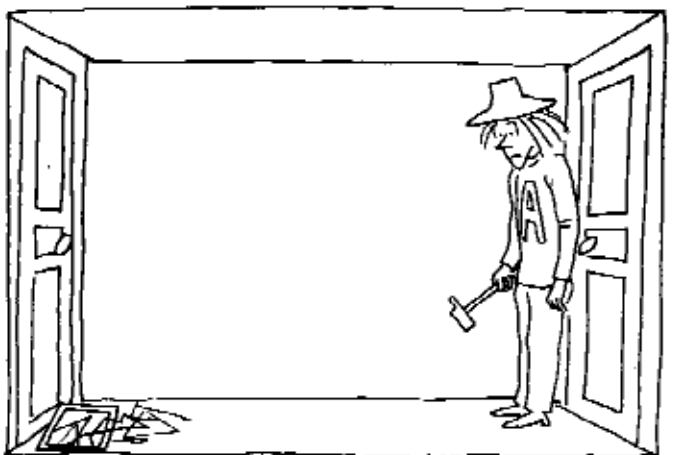
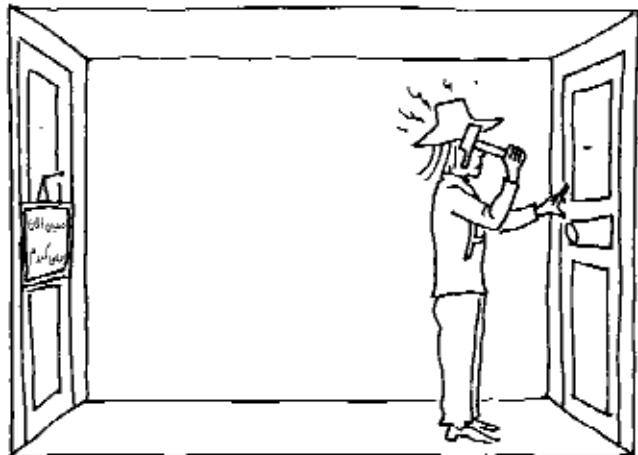
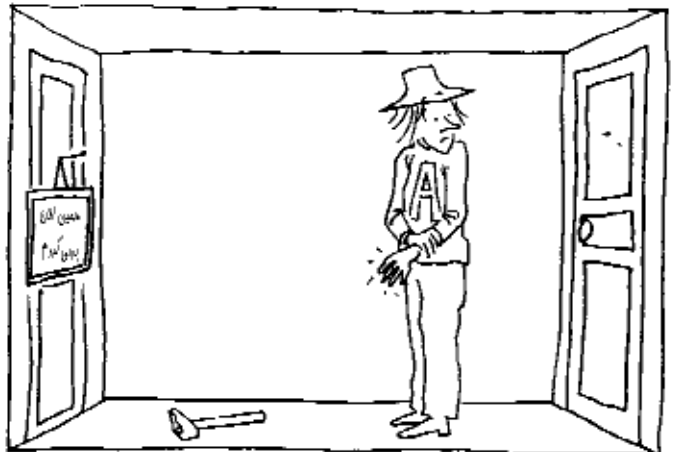
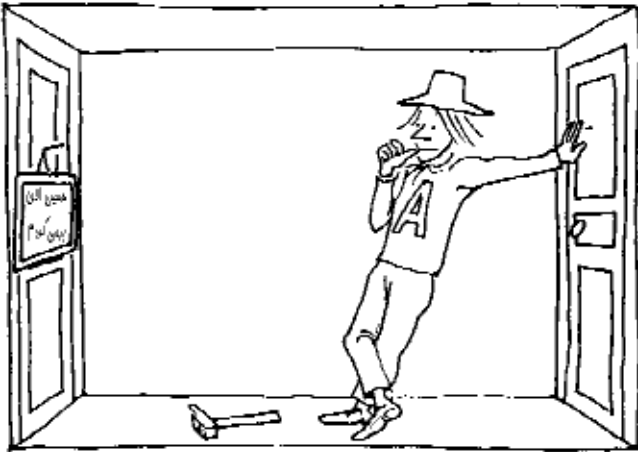
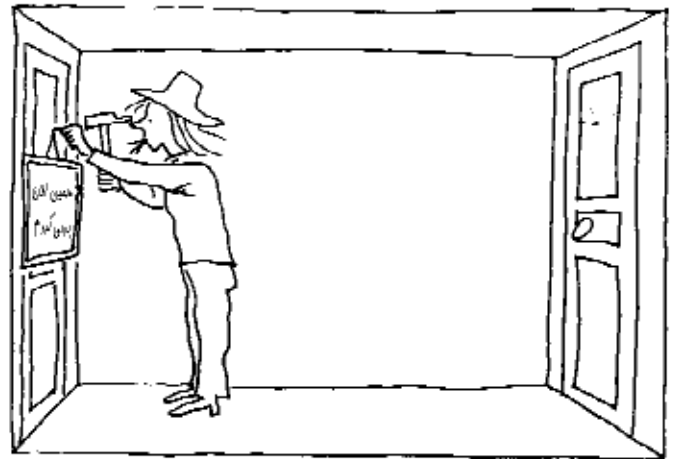
یک فضا یا باید بسته باشد یا باز! ...

گمونم حالا همه چیزو فهمیدم: وقتی انضای فضا مثبت است، اون به روی خودش بسته میشه.

وقتی انضای منفی ست، یا که فضا اقلیدسی ست، فضا بسته نمیشه، اون بی نهایته.

نه، دنیای هنر سه منحنی تر از اونی به که تو تصور می کنی، آتسلم!





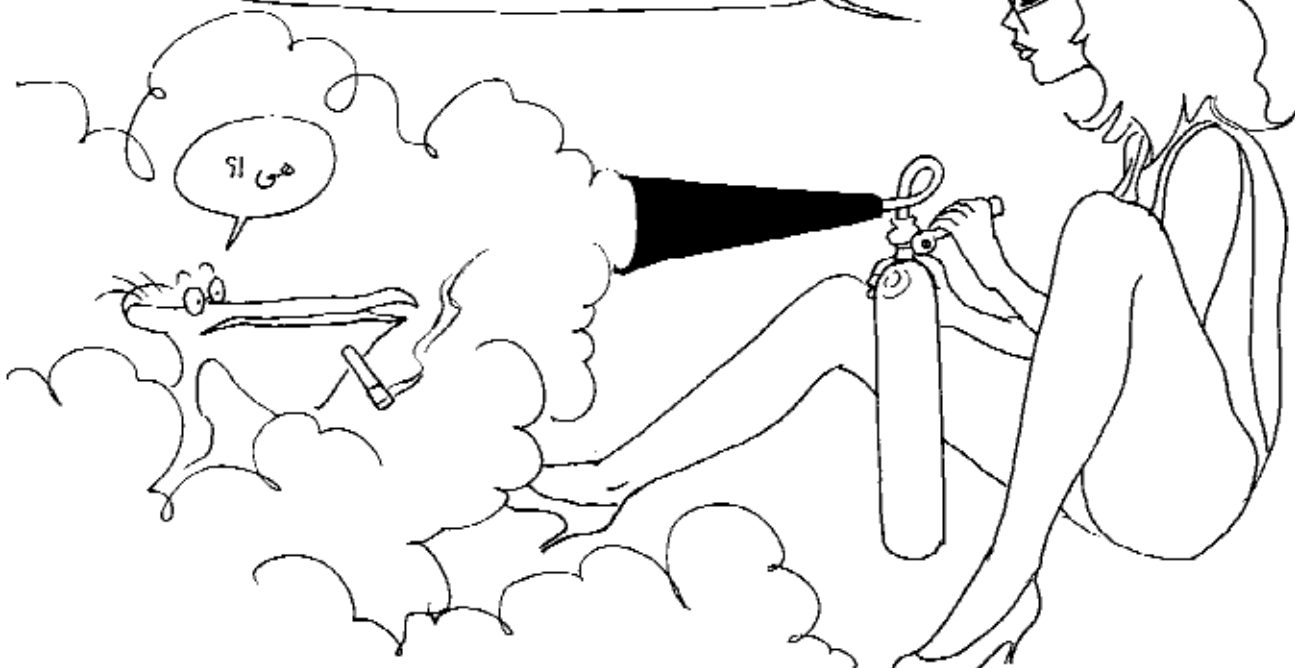
بنابراین ، لانتورلو در یک فضای استوانه ای سه بعدی پرتاب شده بود . اگر چه این دنیا اقلیدسی و بدون انحنای بود (مجموع زوایای یک مثلث در آن برابر 180° درجه است) ولی به روی خود بسته می شد .



فوب ، این طور فرض کنیم ...
دنیاهای گردی ، هزلولی و
استوانه ای . داریم می گردیم ،
نه ؟

این طور تصور می کنیم ؟

به برگشت کوچکی به فضاهای دو بعدی بکنیم .



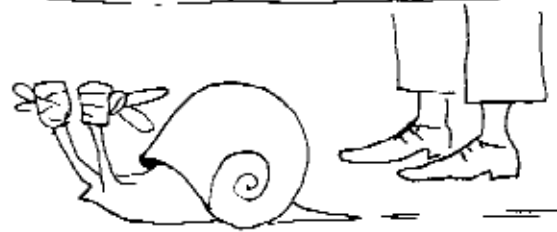
قاصی پاطی :



آنسلم عزیز ،
اینم به فلزون دست آموز . تو با بستن پشمای اون کاری فواهی کرد
که نه به ، است بره نه به چپ . بدین ترتیب اون یک ژنودسیک
کامل برایت رسم فواهد کرد .

صوفی

تا بعد



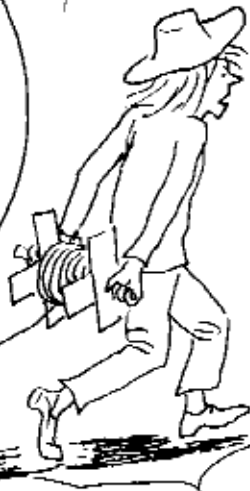
بریم



در ضمن ، مستقیم رفتن و دنبال
کردن کوتاه ترین مسیر بین دو
نقطه ، عین هم می مونه .

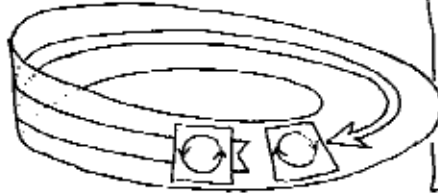
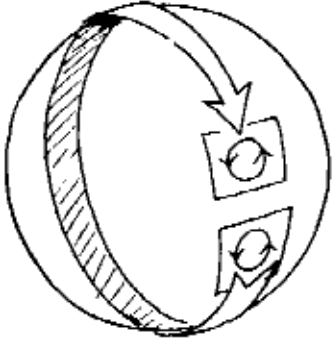
اما این هیوان کجا رفت ؟؟

کنار من بمون !



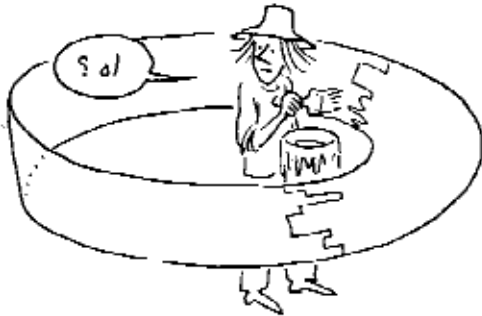


یک دایره را بر روی یک سطح رسم کنیم و به طور افتخاری آن را فلش گذاری می کنیم .
 فرض کنیم که این دایره عکس بر گردان کوچکی است که ما می توانیم آن را به دلفواه
 بر روی این سطح بلغزانیم . اگر دایره مشابه خودش باشد ، خواهیم گفت که این سطح
 جهت دار است (کره ، استوانه ، سطح صاف و غیره دارای همین وضعیت هستند) .
 اما اگر این عکس بر گردان روی یک نوار موبوس بلغزد ، چریان کاملاً " چیز دیگری خواهد بود .



هر بار که اون در دنیای دو بعری گشت
 می زرد ، جهت دایره عوض می شود .

سعی کن ، فواهی دید !



اه ؟

الزما ، نمی توان یک نوار موبوس را یا دو رنگ مختلف رنگ آمیزی
 کرد : چرا که آن فقط یک طرف دارد ، آن یک طرفه است .

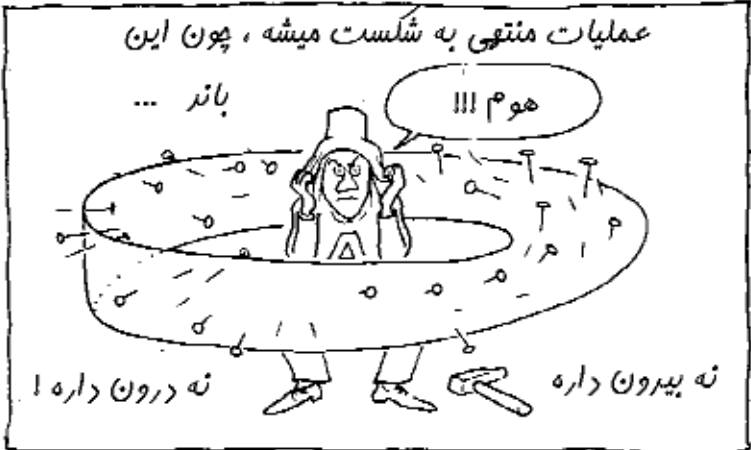
اون فقط یک کناره داره :



میشه اونو فقط یک بار فاشیه دارا !



آنسلم تصمیم گرفت برای مشخص کردن
 بیرون و درون آن میخ بکوبد .



عملیات منتهی به شکست میشه ، چون این

بانر ...

هوم !!!

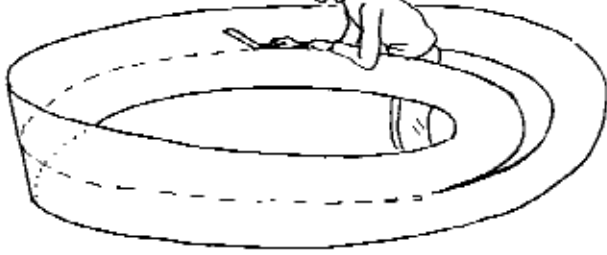
نه درون داره !

نه بیرون داره



بیچاره ...

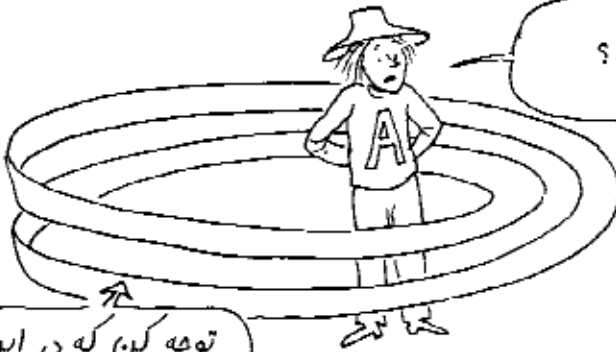
سعی کنیم اونو دو
قسمت کنیم



آتسلم ، دوست من ، گفتش از انجام دارنش
آسون تره .

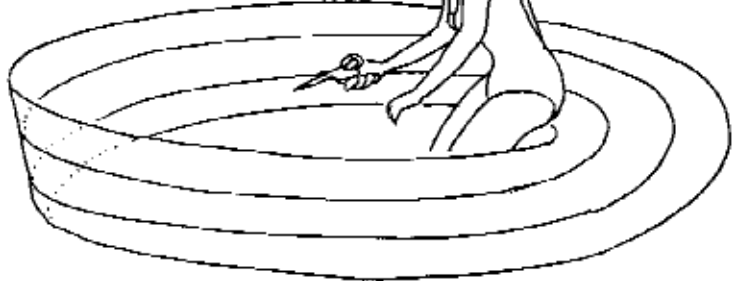


ولی برای دو قسمت کردن اون چی کار باید کرد ؟

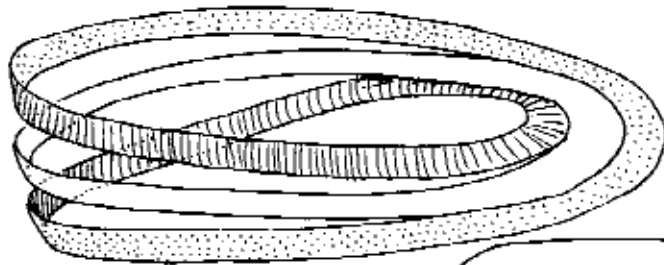


فیلی ساره ست ،
اونو سه قسمت
می کنی !

توجه کن که در این
عملیات اون چیز
دو وجهی میشه .



احساس می کنم کاملاً "کیچ شد"م



توجه کن که الان یه چیز یک وجهی (سفید) و یک
چیز دو وجهی (طوسی) با طولی دو برابر طول اولیه
وجود داره .

بعد از این گردش در روی نوار هوبوس ، به فضاهای اقلیدسی (برون انشای)
سه بعدی بر می گردیم :

جهت گیری فضا :

وقتی خودم رو توی آینه نگاه می کنم ،
دست چپم تبدیل به دست راستم میشه ،
اما چرا سرم با پاهام عوض نمیشه ؟ ...

بعلاوه ، از کجا مطمئن باشیم
که کارمون درسته ؟

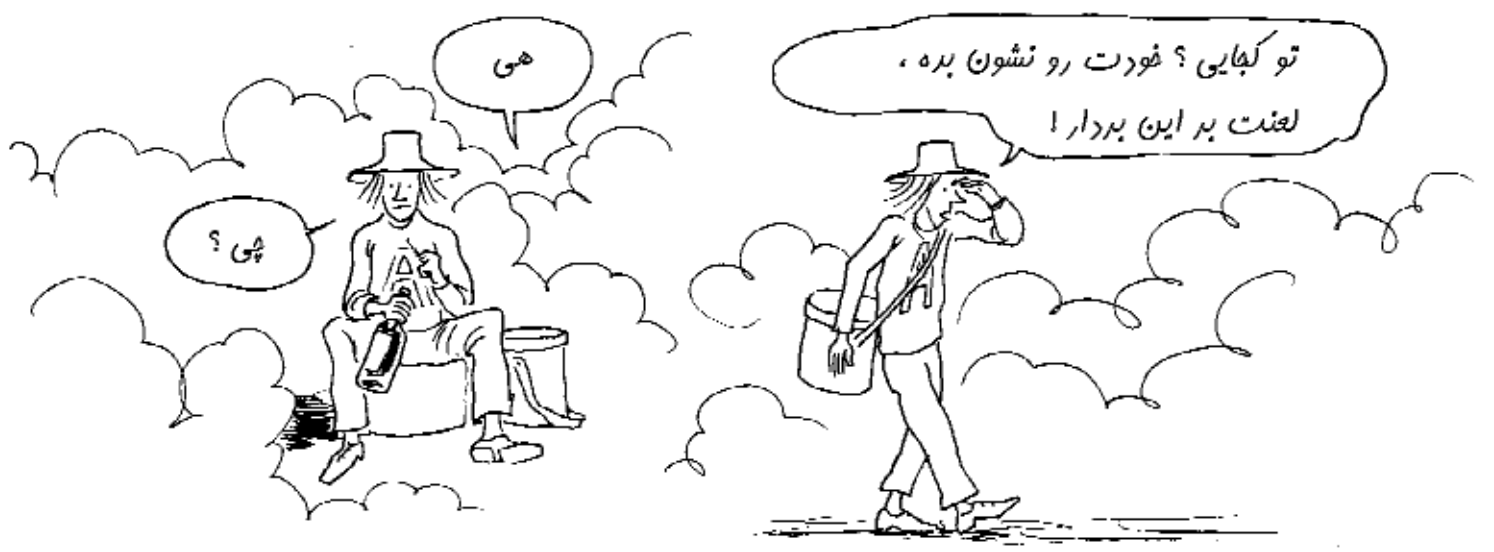
دست راست ؟
این متضاد چیه ،
و برعکس

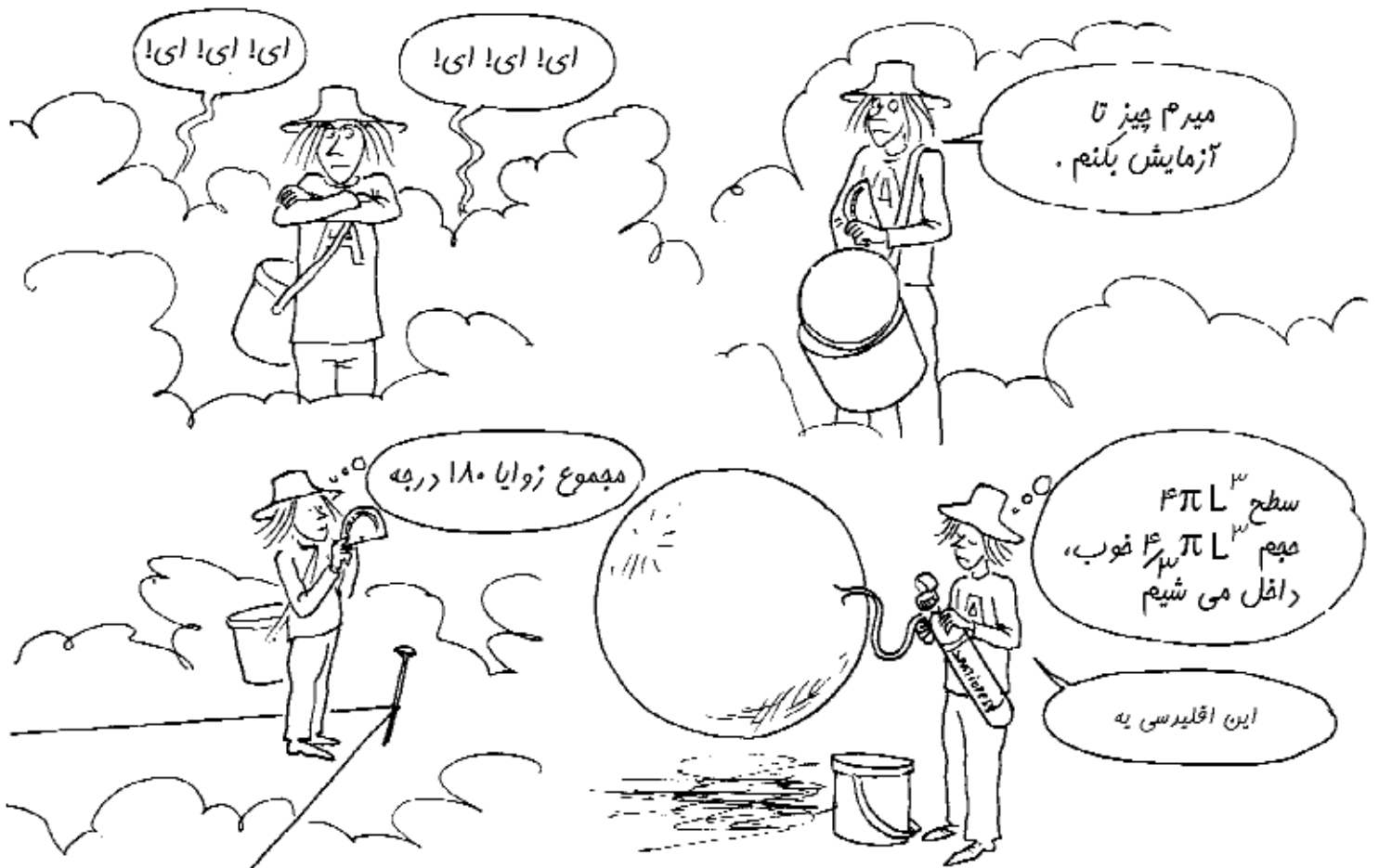
این یه چیزی یه که احساس می کنیم
درست انجام میدیم .

الو ، الو ، چه طور می توئین مطمئن باشیم که پوست صرف تون
در جهت درستی پیپیره شده ؟

این برجستگی یه ، آگه این طوری نباشه ، برعکس فواید بود !

آنتورلو را در اکتشافش در دنیای جریر و سه بصری اقلیدسی (بدون انما) ، همراهی می کنیم .



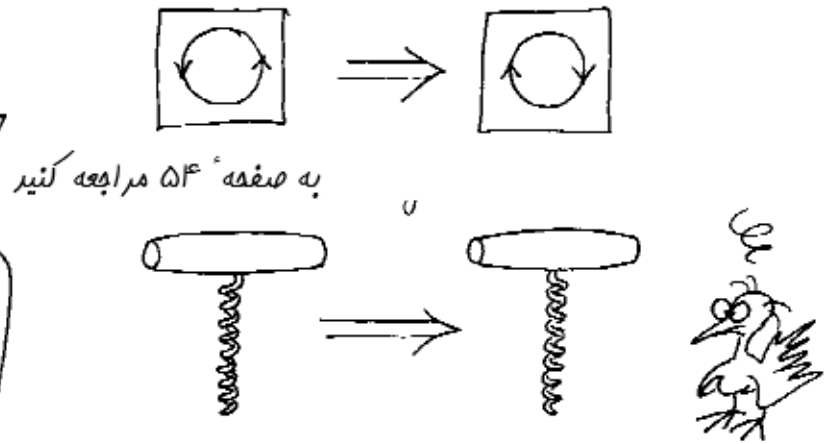


این شراب صورتی پروانس (Provance) و کیفیتش معمولیه، مثل همه ی هاها...





بنابر این نوار موبوس (فضای بدون سمت دوبعدی) یک معادل سه بعدی دارد. روی نوار موبوس، وقتی دایره‌ی عکس برگردان در این فضای اقلیدسی میگردد، جهت آن تغییر میکند.



ما متوجه فوایم شد که این اشیاء "در آینه" هستند.

دربازکن یا فود آنسلم میتوانند همچون "عکس برگردانهای سه بعدی" در نظر گرفته شوند.

هر بار که یک شیئی در این فضای سه بعدی میچرخد، جهت آن برعکس میشود.

از آنجای که قرار بر این بوده که ما لانتورلو را در سفر فضایی ش همراهی کنیم، طبیعی است.

که ما نیز همراه او بطری را "در آینه" بیاییم و دربازکن در جهتی غیر عادی بچرخد.

"گردش" ثانوی در این فضا دید اصلی چیزها را به ما فواهد داد. (به شرطی که ما اشیاء را در جای خودشان بگذاریم.)



آنسلم و کانگارو (از فضای متقاطرها) در یک مکان زندگی میکنند، اما با هم اختلاف دارند از این لحاظ که چیزی که "برای کانگارو در جهت درست" قرار داده "برای آنسلم در جهت برعکس" قرار داده و برعکس.

فاتمه:

همه چیز عوضی پیش میره.

دیگر نه راست وجود داره نه چپ، نه بر عکس وجود داره نه بجا.
به کدوم سمت پیش فواهر رفت؟ و چه مسیری رو دنبال میکنم؟

آنسلم باید ژئودسیک را دنبال کرد.
ژئودسیک های زندگی.

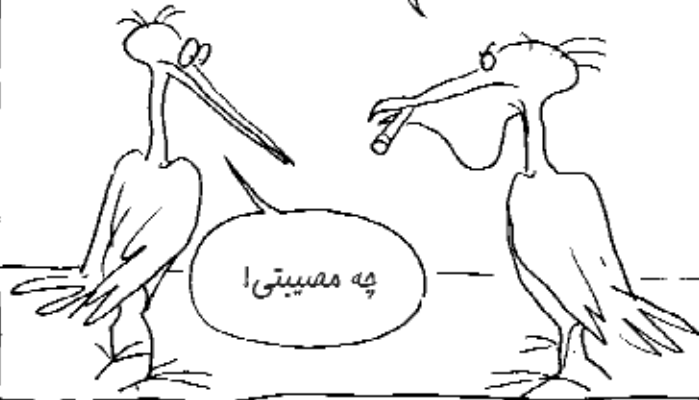
اون هیپووقت منو باور نفواهر کرد، که
میگم دنیا فیلی عجیب و غریبه.
اینا هزیون های ریاضیدان هاست.

این یه کار تونه!

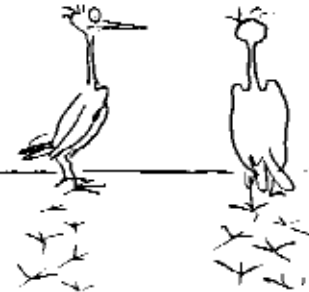
چرا باید فودرو مشغول این چیزها کرد، در
حالی که واضحه که فضا اقلیدسی به (*).

(* گفتار استروگرافی (۱۸۳۰)، استاد دارای کرس ریاضیات
در پترگارد، پس از مطالعه ی آثار رای من و لویاتپوسکی.

قبول کنیم که جوان شباهتی به پیزی که هست، نذاره. تو همه ی این چیزهایی رو که در مدرسه آموختی، تصور می کنی؟!



وانگه، دست آفر پیزی که اهمیت داره زندگی و برای زندگی روزمره
فلسفه، فلسفه، فلسفه، شرح فلسفه



اما پشت همه ی این چیزها چی وجود داره؟

فیزیک، عزیز من...



میفواهم این موضوع رو روشن کنم!

پیش به سوی ملموسات



کسی هست؟



