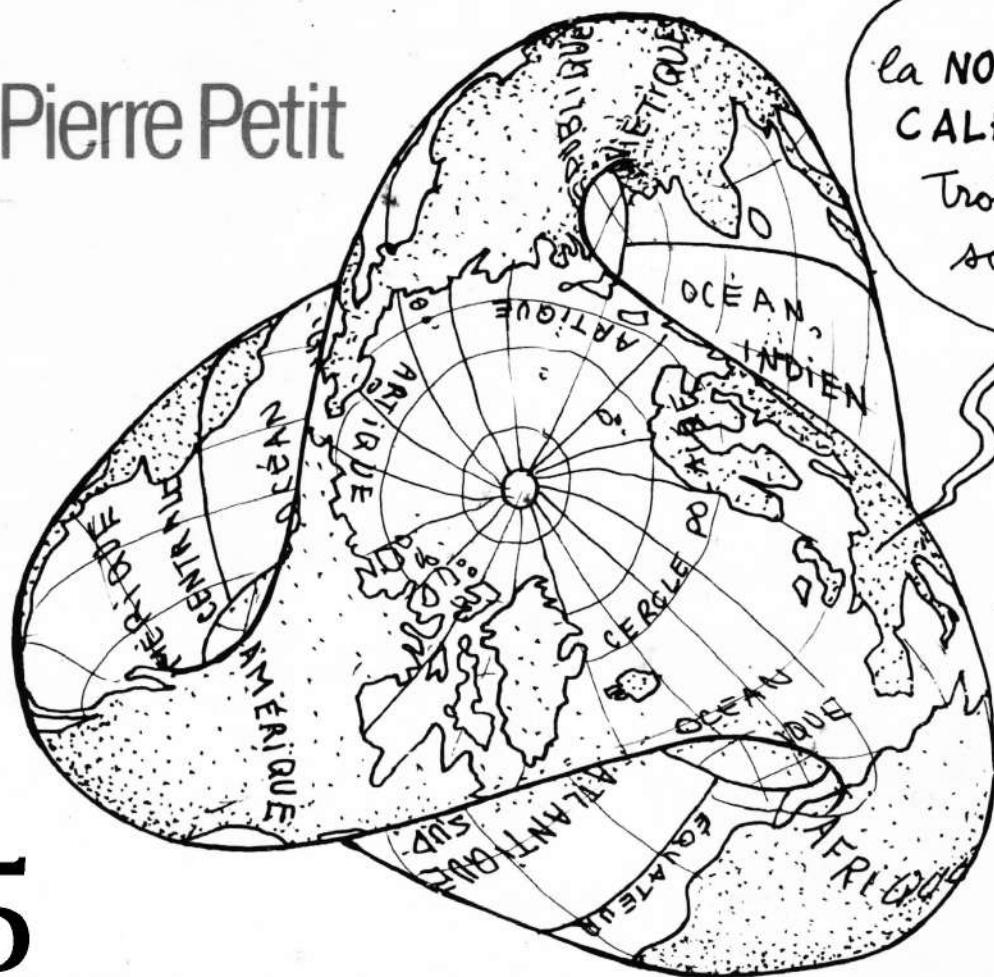


Les aventures
**d'ANSELME
LANTURLU**



le
TOPOLOGICON

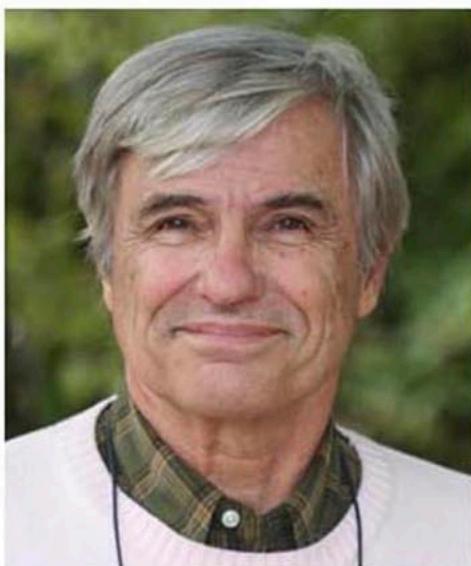
par Jean-Pierre Petit



1985

Savoir sans Frontières

Association à but non lucratif créée en 2005 et gérée par deux scientifiques français. But : diffuser des connaissances scientifiques en utilisant la bande dessinée à travers des pdf gratuitement téléchargeables. En 2020 : 565 traductions en 40 langues avaient ainsi été réalisées, avec plus de 500.000 téléchargements.



Jean-Pierre Petit

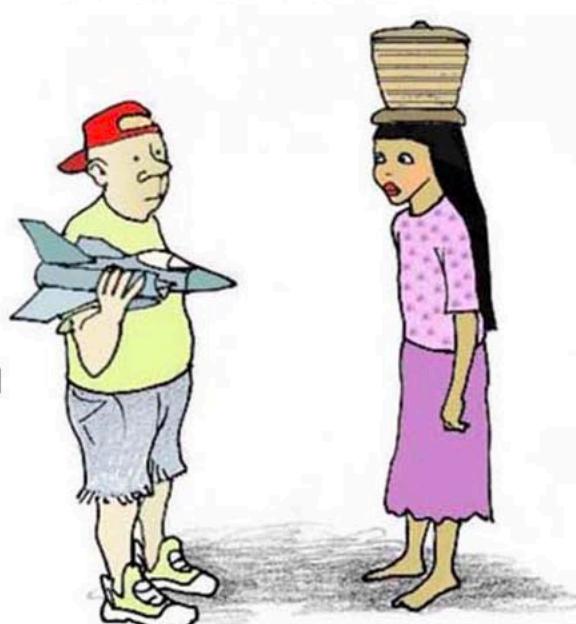


Gilles d'Agostini

L'association est totalement bénévole. L'argent des dons est intégralement reversé aux traducteurs.

Pour faire un don, utilisez
le bouton Paypal sur la page
d'accueil du site Internet

<http://www.savoir-sans-frontieres.com>



Coordonnées bancaires France ➔ Relevé d'Identité Bancaire (RIB) :

Etablissement	Quichet	N° de Compte	Cle RIB
20041	01008	1822226V029	88

Domiciliation : La banque postale
Centre de Marseille
13900 Marseille CEDEX 20
France

For other countries ➔ International Bank Account Number (IBAN) :

IBAN
FR 16 20041 01008 1822226V029 88

and ➔ Bank Identifier Code (BIC) :

BIC
PSSTFRPPMAR

Les statuts de l'association (en français) sont accessibles sur son site. La comptabilité y est accessible en ligne, en temps réel. L'association ne prélève sur ces dons aucune somme, en dehors des frais de transfert bancaire, de manière que les sommes versées aux traducteurs soient nettes.

L'association ne paie aucun de ses membres, qui sont tous des bénévoles. Ceux-ci assument eux-mêmes les frais de fonctionnement, en particulier de gestion du site, qui ne sont pas supportés par l'association.

Ainsi, vous pourrez être assurés, dans cette sorte « d'œuvre humanitaire culturelle » que quelle que soit la somme que vous donnez, elle sera *intégralement* consacrée à rétribuer les traducteurs.

Nous mettons en ligne en moyenne une dizaine de nouvelles traductions par mois.

Avertissement au lecteur.

Il est déconseillé de lire cet album :

- le soir avant de s'endormir
- après un repas trop riche
- ou quand on est sûr de rien, car cela ne ferait qu'aggraver les choses.

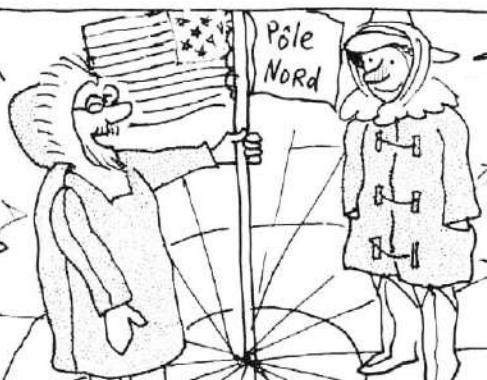
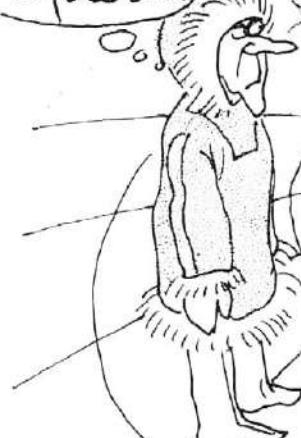
L'auteur

LA PLANÈTE SANS PÔLE SUD

Nous avons découvert le pôle Nord !

Félicitations, monsieur PERRY

Hmm... il me reste le pôle Sud



AAA...TCHOUM!



Eh bien, monsieur Amundsen, je pars découvrir le pôle Sud !

Hum... emmener une femme dans une telle expédition, cela m'ennuie...

je vais suivre un MÉRIDIEN.

On peut venir avec vous ?

Nous pourrions, mes collègues et moi, écrire votre histoire, relater vos exploits.

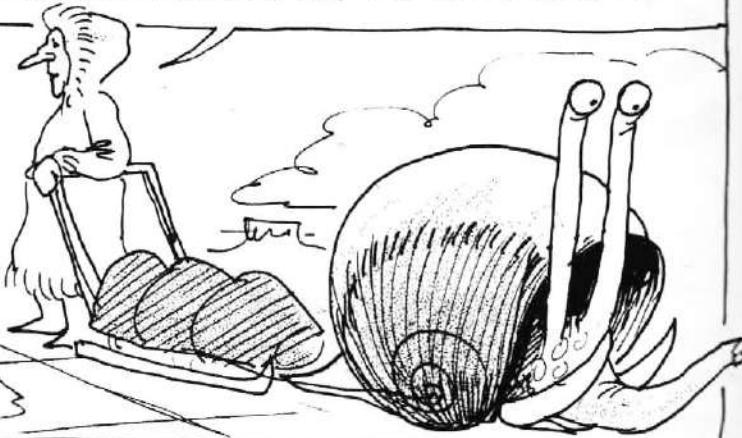


Hum ... c'est différent ...

bien que je sois d'une modestie à toute épreuve, j'accepte

vous n'utilisez pas de chiens esquimos ?

Non, j'utilise des **ESCARMOUHS**, un croisement ancien d'escargot et de mammouth. Des bêtes robustes, dressées à suivre les **MÉRIDIENS**.



En avant. Suivez-moi sur la **LIGNE MÉRIDIENNE**, c'est ...

TOUT DROIT!

On dirait que nous franchissons déjà l'**ÉQUATEUR**. Faut le suivre, celui-là ...

Ahrrr... la gloire

Ah Ah, je suis une bête.

En passant par la Norvège, avec mes sabots ♫

Allez ! allez !

le pôle Sud est en vue
MON pôle Sud !.

Argl...



Et pas un mot de cela
à qui que ce soit !

Hé, regardez !

Calmez-vous, monsieur Amundsen

Dites, c'est bientôt fini
vos âneries ?

Allons, monsieur Amundsen,
nous allons rentrer.

Nous allons
essayer d'éclaircir
tout cela.

ARGL...

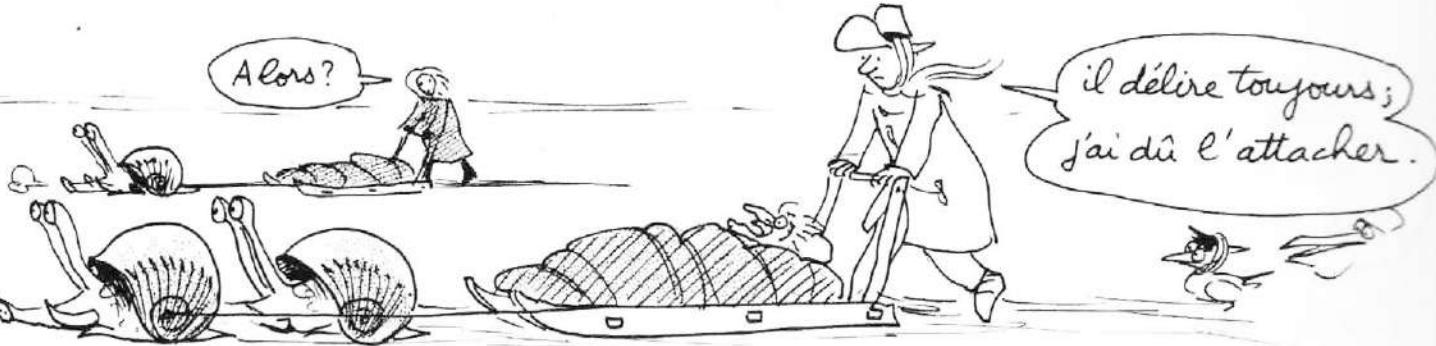
mon drapeau !
Il disparaît !!!

Hein !!?!

curieux... on aurait dit
la voix de monsieur Perry..

TONK
TONK
TONK

quel choc !



les escarmouths glissent sans bruit sur les méridiens gelés.



c'est tout-à-fait clair si on estime que le **VOISINAGE** du méridien que nous avons suivi constitue une **SURFACE UNILATÈRE**^(*), un **RUBAN DE MÖBIUS**, à un seul côté (VOIR **LE GÉOMÉTRICON**, éd. BELIN, page 54)



(*) une bande que l'on tord d'un demi-tour avant de la recoller, n'a plus qu'une seule face.

Oh, tu sais, c'est comme ici.

Si nous voulons tirer monsieur Amundsen de sa fâcheuse situation, il nous faut avant toute chose comprendre quelle est la **FORME** de cette étrange planète. Essayons d'utiliser quelques principes de base de la **TOPOLOGIE**. Pour ce faire, nous allons décomposer tout objet en :

CELLULES CONTRACTILES



L'objet indecomposable semble être le **POINT** ...

mais, que faire d'un point ?

Un objet, considéré comme un ensemble de points, occupe une certaine place dans l'espace. Il sera dit contractile s'il peut rétrécir jusqu'à n'être qu'un point, mais **EN SE PARCOURANT LUI-MÊME**.

Prends par exemple cet élément de courbe. C'est un **OBJET À UNE DIMENSION D'ESPACE**.

Ah, oui. La position d'un point sur cette courbe peut être repérée à l'aide d'une seule quantité : l'abscisse curviligne, ou la longueur de fil séparant le point d'un autre point pris comme origine.



je peux mettre ce bout de courbe dans une espèce de nouille creuse, à l'intérieur de laquelle il pourra rétrécir, rétrécir

Comme le mercure dans un thermomètre.

En fait, toute courbe est **CONTRACTILE** ?

Non, pas les courbes **FERMÉES**

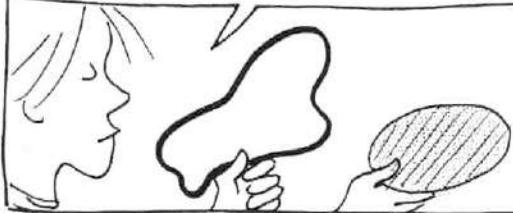
Si je prends par exemple un cercle, je peux le rétrécir selon un point comme ceci, non ?

un **CERCLE** n'est donc pas **CONTRACTILE** et il en est de même pour toute courbe fermée, plane ou non.

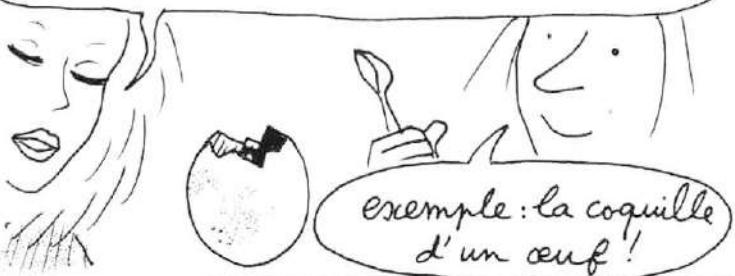
ça ne marche pas, car, ce faisant, il ne se parcourt plus lui-même : il évolue hors de l'espace qu'il occupait au début

En revanche, un **DISQUE**, élément de **SURFACE**, est, lui, contractile.

Ce disque est un élément de **SURFACE**, donc un objet à **2 DIMENSIONS**. Quel est l'objet à **2 DIMENSIONS** qui est au disque ce que le cercle est au segment.



Pour contracter une courbe fermée, il faut la briser. Même chose pour la sphère ou tout objet du **GENRE** sphère.



c'est un **DISQUE** ?



la **SPHÈRE**



Mais cette sphère avec un **TROU** cesse d'être cette surface fermée nommée sphère.

alors, c'est quoi ?



Mais, SOPHIE, le **VOLUME** qui est dans la sphère, dans l'œuf, est un objet contractile ?

là est la question ..

Précisément. La "sphère surface" **S₂** (*)

n'est pas contractile, mais la "sphère volume" l'est.

???



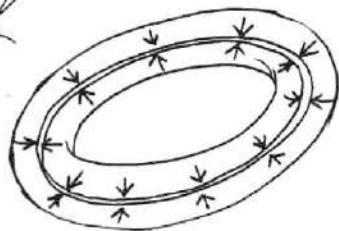
Autrement dit, la coquille d'un œuf n'est pas contractile, mais son jaune, si

(*) Voir **LE GÉOMÉTRICON**, éditions BELIN.

Existe-t-il des volumes non contractiles ?

Oui, par exemple le "TORE-Volume"

c'est clair. Si je ne le coupe pas, je peux tout au plus le contracter selon un cercle.



Le "TORE-surface" n'est pas contractile non plus.

Dites, vous jouez à quoi, au juste ?

T'occupe

je ne sais pas si vous réalisez que nous avons un explorateur cataleptique sur les bras

Croyez-vous que c'est en coupant des nouilles en quatre que nous le sortirons de là ?



Sa **GÉONÉVROSE** a une origine géométrique. Ce n'est qu'en approfondissant les concepts géométriques que nous trouverons, peut-être, le remède qui le guérira.

Tout son être était tendu vers cette découverte du PÔLE SUD, idée sur laquelle il s'était totalement investi, sur le plan personnel et social.

Effectivement, sa mésaventure l'a confronté à une situation qu'il ne pouvait plus assumer.

Bref, la seule solution est de trouver où est passé ce fichu pôle Sud



Eh oui, une remise en question brutale de son moi profond !



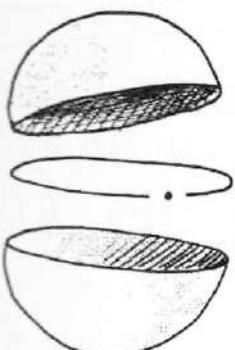
DÉCOMPOSITION CELLULAIRE

Tout objet géométrique sera décomposé en éléments, en cellules **CONTRACTILES** de toutes dimensions : POINTS, SEGMENTS, SURFACES, VOLUMES, ETC...

Et le POINT est de quelle dimension ?

Par extension, nous dirons que le POINT est de dimension ZÉRO.

D'autre part, pour décomposer un cercle, il suffit que je le considère comme un segment fermé sur lui-même en un POINT. Si je retire ce point, il reste donc le segment.

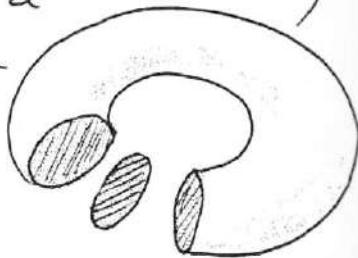


Une "SPHÈRE SURFACE" **S₂** peut être décomposée en deux calottes et un segment fermé sur un point.



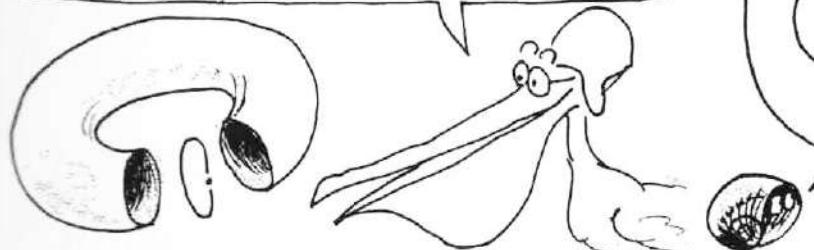
Un "TORE-VOLUME" ?

Voyons, je n'ai qu'à le découper à l'aide d'un disque



Et pour le "TORE-SURFACE" ?

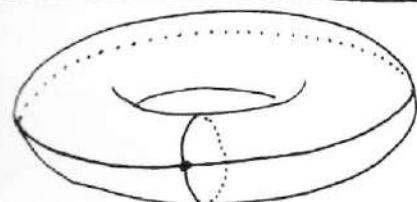
Voyons... je coupe par un cercle lui-même coupé en un point



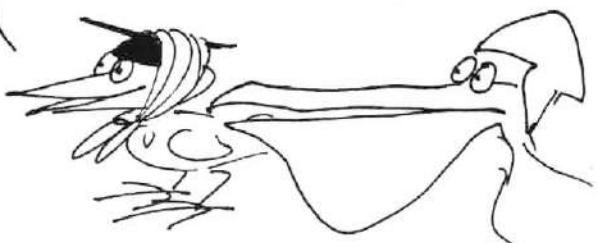
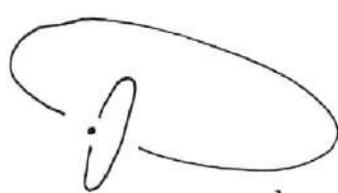
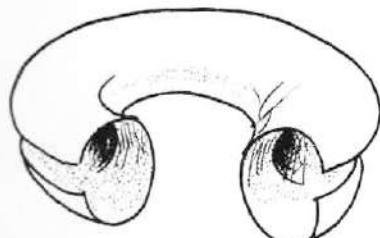
Le Tore ainsi coupé va se contracter selon un cercle :



qu'il faudra à son tour décomposer selon un segment et un point.



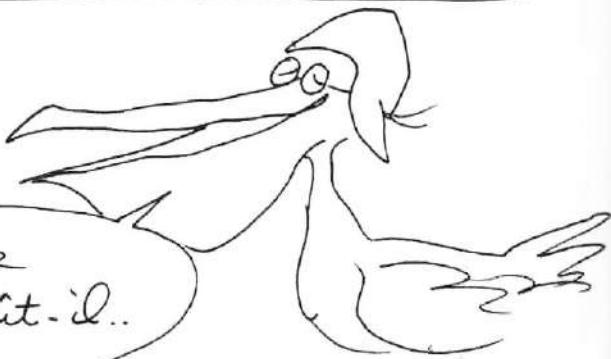
Voici une autre solution avec un point, deux segments et une face unique, où tous les éléments sont d'embûlée contractiles



Bon, et que va-t-on faire de tout cela ?



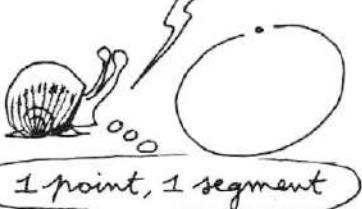
Comprendre le monde, paraît-il..



LA CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ

Un objet étant ainsi décomposé, nous allons fabriquer un nombre **X** qui sera égal au nombre de points, moins le nombre de segments, plus le nombre d'éléments de surface contractiles, moins le nombre de volumes contractiles (*), et on appellera ce nombre **X** la CARACTÉRISTIQUE D'EULER - POINCARÉ.

Ainsi pour le cercle $X = 1 - 1 = 0$



Pour la SPHÈRE-SURFACE
 $X = 1 - 1 + 2 = 2$



Pour le Tore-surface, voyons... un point, deux segments, un élément de surface

$$X = 1 - 2 + 1 = 0$$

C'est-à-dire 1 point, 2 segments et 1 élément de surface contractile

La caractéristique de la SPHÈRE-VOLUME est évidemment - 1, alors que celle du TORE-VOLUME est $1 - 1 = 0$ (Voir le dessin en haut et à droite de la page 14)

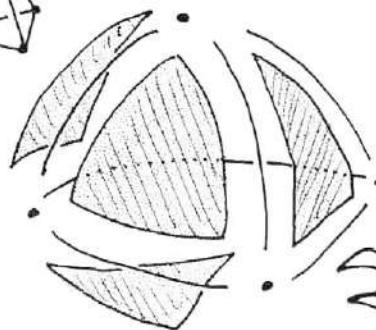
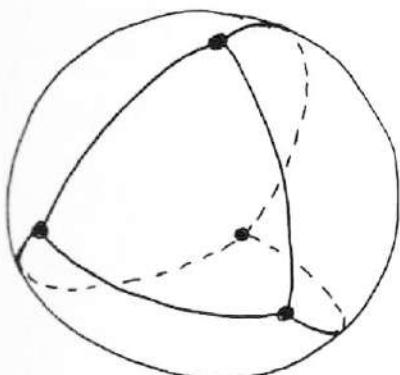


(*) Ce qui s'étend immédiatement à un nombre de dimensions supérieur à trois (c'est une somme alternée).

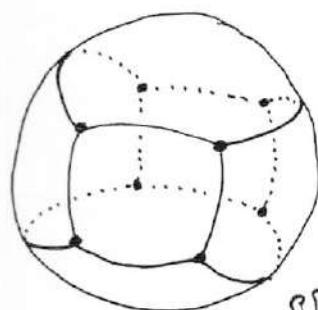
Et maintenant, écoutez bien : cette caractéristique X est **INDÉPENDANTE DU MODE DE DÉCOMPOSITION** (en cellules contractiles) !!

Par exemple, cette courbe fermée a été coupée en 8 segments, réunis par 8 points, et sa caractéristique est toujours nulle.

effectivement.

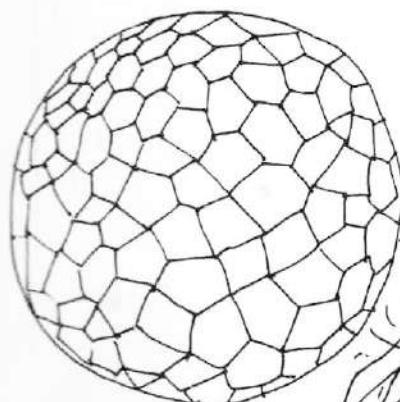


Voyons cette décomposition de la sphère : 4 sommets, 6 segments, 4 faces.
Je retrouve $X = 4 - 6 + 4 = 2$.



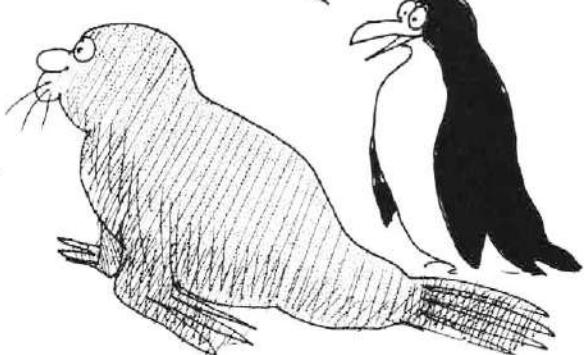
Et là, 8 sommets,
12 segments, 6 faces
 $X = 8 - 12 + 6 = 2$

Tu peux essayer tout ce que tu voudras, tu retomberas toujours sur $X = 2$.



Boufre
de boufre

Étonnant, non ?



Voici un Théorème utile : Si un objet est la réunion de deux objets sa caractéristique est la somme de celles des 2 objets le composant.

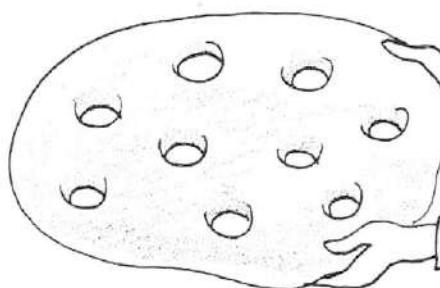
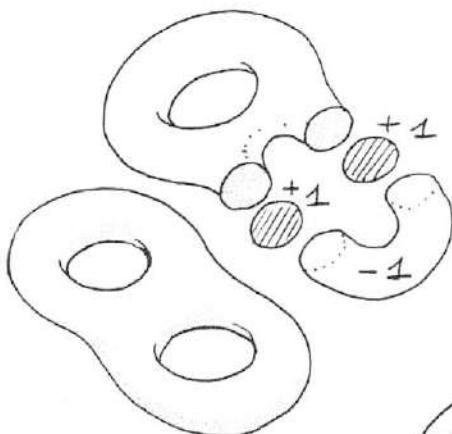
La démonstration



Le Tore-Volume a une caractéristique nulle



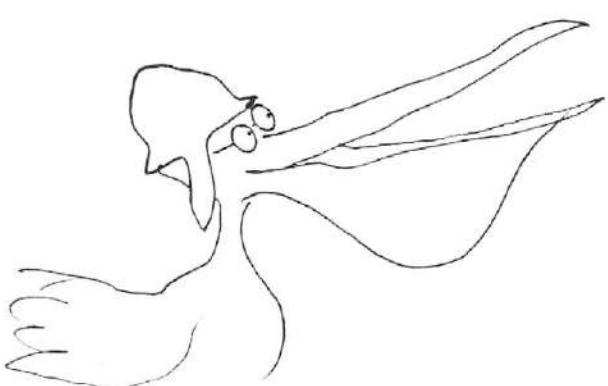
Si on rajoute une anse on ajoute une unité à la caractéristique



Par extension, la FOUGASSE-VOLUME (*) doit avoir une caractéristique égale au nombre de trous, moins une unité



Je suppose que cela doit être la même chose pour la FOUGASSE-SURFACE ?



* Sorte de pain du midi de la France

Rien à voir ! la FOUGASSE-SURFACE ne peut pas se contracter selon un disque à N trous, enfin !

plante ...

On peut passer de la SPHERE-SURFACE (caractéristique 2) au TORE-SURFACE (caractéristique zéro) en ajoutant une anse. Donc l'ajout d'une anse diminue la caractéristique d'une surface de 2 unités.

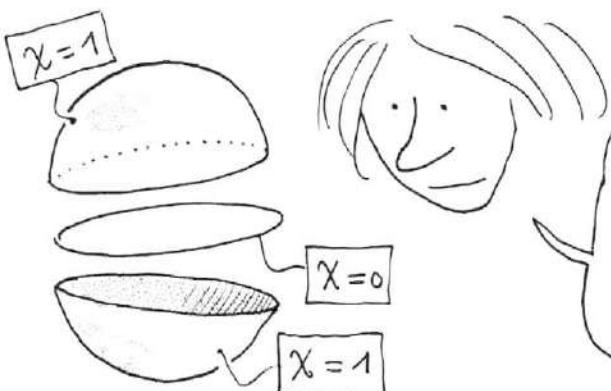
Donc la caractéristique de la FOUGASSE-SURFACE est égale à 2 moins deux fois le nombre de trous !

La SURFACE d'un morceau de gruyère à N trous est constituée de N sphères-surface plus la sphère extérieure. Donc sa caractéristique est $X = 2(1 + N)$

Alors que pour construire le GRUYÈRE-VOLUME, on part d'une sphère pleine ($X = -1$) et on enlève N ensembles SPHERE-VOLUME + SPHERE-SURFACE ($X = 2 - 1 = 1$). La caractéristique du GRUYÈRE-VOLUME est donc égale à $-(1 + N)$.

Croyez-vous qu'avec de telles âneries nous arriverons à guérir ce pauvre Amundsen de sa géonévrose ?!!

CE MONDE OÙ NOUS VIVONS



On peut calculer la caractéristique d'une sphère S^2 en la considérant comme l'union de deux hémisphères et d'un équateur, ce qui donne une valeur $X = 1 + 1 + 0 = 2$

Dans le **GÉOMÉTRICON**,
on avait présenté le
concept d'**HYPERSPHÈRE S^3** ,
à trois dimensions, espace
tridimensionnel totalement
FERMÉ SUR LUI-MÊME

Nous allons calculer la
caractéristique de cette hypersphère S^3 . Comme on l'a déjà
vu, toujours dans le **GÉOMÉTRICON**
l'équateur^(*) est une sphère S^2
dont la caractéristique vaut 2.



Notre hypersphère S^3 est donc constituée
de deux volumes contractiles, qui
comptent chacun pour -1

$$X = -1 - 1 + 2 = 0$$



* Qui partage
l'objet en 2
éléments
semblables

Alors la caractéristique d'une hypersphère S^3 est nulle!

Passons à une hypersphère S^4 , à quatre dimensions



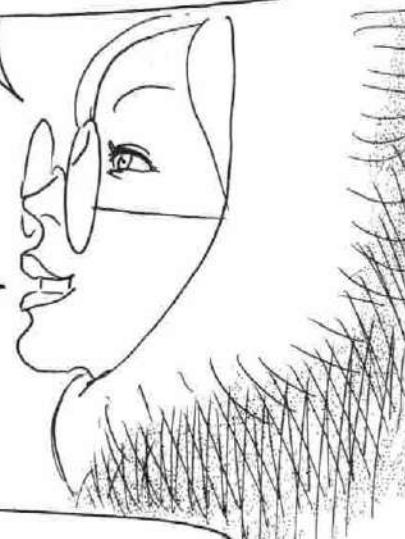
c'est-à-dire un espace hypersphérique S^3 évoluant cycliquement dans le temps (*). Cette hypersphère S^4 aura pour équateur une hypersphère S^3 , et les deux hémisphères compteront chacun pour 1.

Donc la caractéristique X de cet espace-temps, de cette hypersphère S^4 , sera de nouveau égale à $1+1+0=2$.



Si tu prenais une hypersphère S^5 à cinq dimensions, sa caractéristique serait de nouveau nulle et son équateur serait une hypersphère S^4 .

Et ainsi de suite...
La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une hypersphère S^N est 2 si N est PAIR et 0 si N est IMPAIR.



Dites, si ça continue, moi je vais faire comme Amundsen



(*) Voir BIG BANG (BELIN) et les modèles de FRIEDMANN page 64

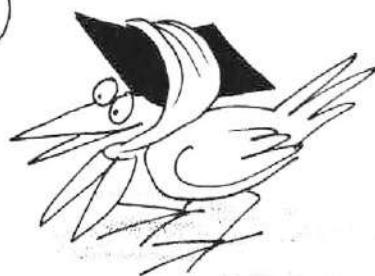
Bon, cette caractéristique d'Euler-Poincaré nous a permis de mettre un peu d'ordre dans cette jungle des objets géométriques.



Ainsi ce bout de cylindre est topologiquement identique à un disque percé d'un trou, et sa caractéristique est nulle.

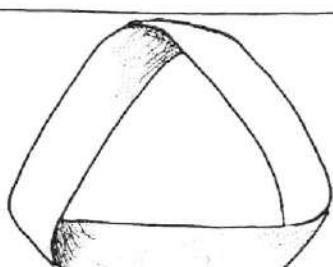
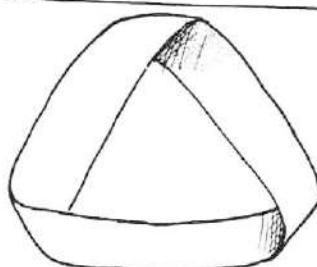


Mais, que penses-tu de cet objet-là ?



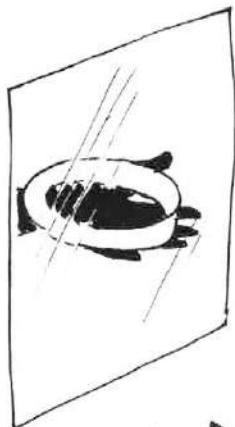
C'est le **RUBAN DE MÖBIUS**, qui n'a qu'un seul côté. Comme on ne peut lui assigner ni **RECTO**, ni **VERSO**, on dit qu'il est **INORIENTABLE**.

En fait, tous les rubans qui présentent un nombre **IMPARI** de **DEMI-TOURS** sont des rubans de **MÖBIUS**, **INORIENTABLES**. Mais ces deux rubans ont l'air différents ...



J'ai beau les tortiller en tous sens, je n'arrive pas à les rendre identiques

Ils ne sont pas **TORDUS** dans le même **SENS**. En fait l'un est l'image en miroir de l'autre; on dit qu'ils sont **ÉNANTIOMORPHES**.



Comme ma main gauche est l'image en miroir de ma main droite

Tous ces rubans, qui peuvent se contracter selon une courbe fermée, ont une caractéristique égale à 0



Bien sûr, il existe des **ESPACES INORIENTABLES** à N dimensions (*)

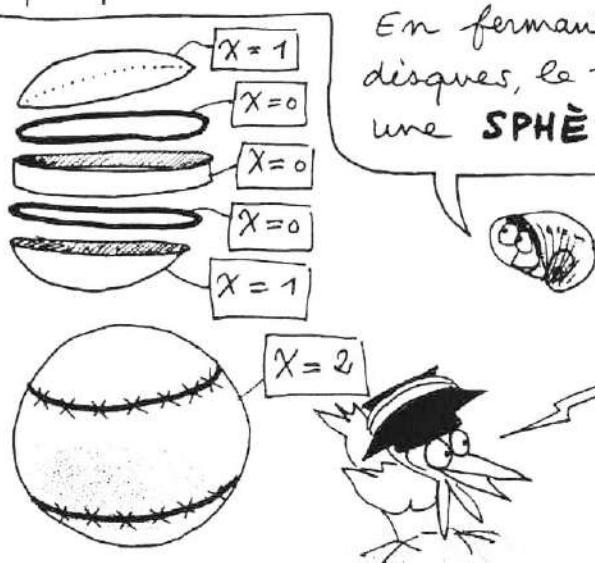
Le **RUBAN DE MÖBIUS** est une surface **INORIENTABLE**, qui possède un **BORD**. Existe-t-il des **SURFACES INORIENTABLES, SANS BORD, FERMÉES SUR ELLES-MÊMES**?

Réponse dans le chapitre suivant

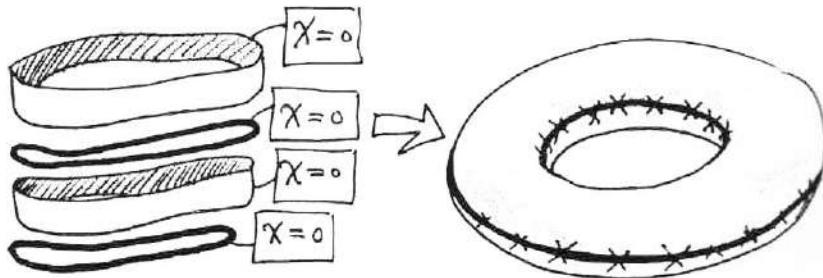
BORD SUR BORD

Une COURBE FERMÉE (décomposable selon un segment et un point) a une caractéristique nulle. Même chose pour une BANDE, bilatérale ou unilatérale, qui peut être contractée selon une courbe fermée (voir théorème page 17).

En fermant une bande bilatérale à l'aide de deux disques, le long de deux courbes fermées, on fabriquera une SPHÈRE-SURFACE S^2 (à deux dimensions)



On peut aussi coudre deux bandes bilatérales l'une sur l'autre, le long de deux courbes fermées et on obtiendra un TORE-SURFACE T^2 .

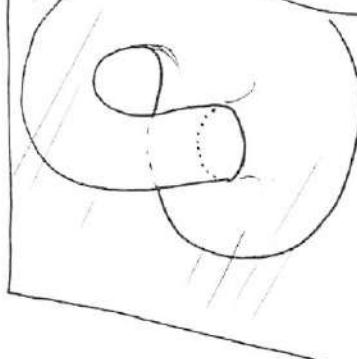
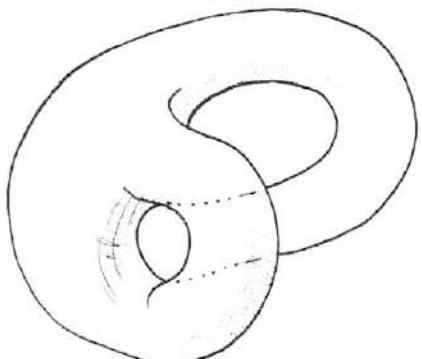
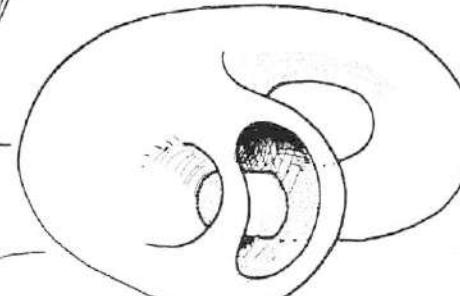
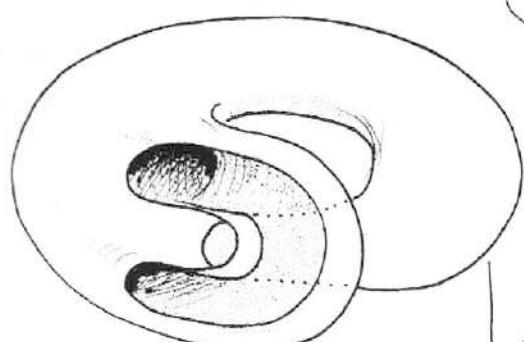
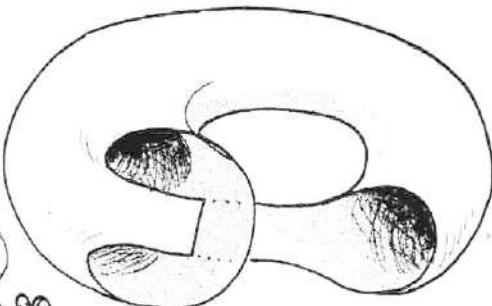
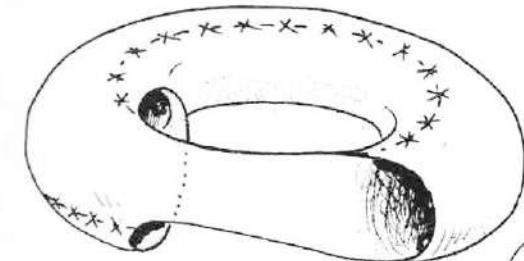


A priori je devrais pouvoir recoudre deux rubans de Möbius le long d'UNE SEULE COURBE FERMÉE

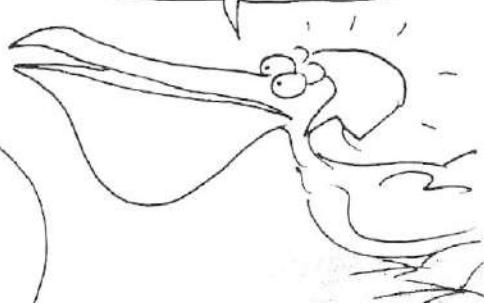


(*) La TRAVERSINE est extraite des coquilles des HOMOTAUPES

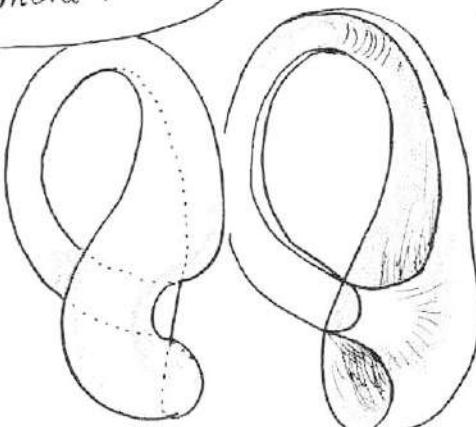
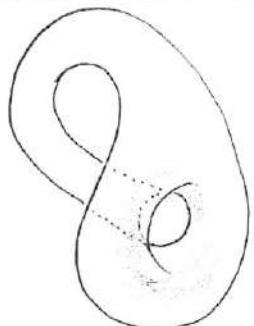
Si on enduit de **TRAVERSINE** une coquille , elle se met à pousser , à croître , selon son **BORD** , en tendant à former une surface fermée , tout en donnant à la surface le pouvoir **DE SE TRAVERSER ELLE-MÊME !**



Le bord a disparu .
Mais alors , qu'est - ce
que c'est que ce
cercle - là ?

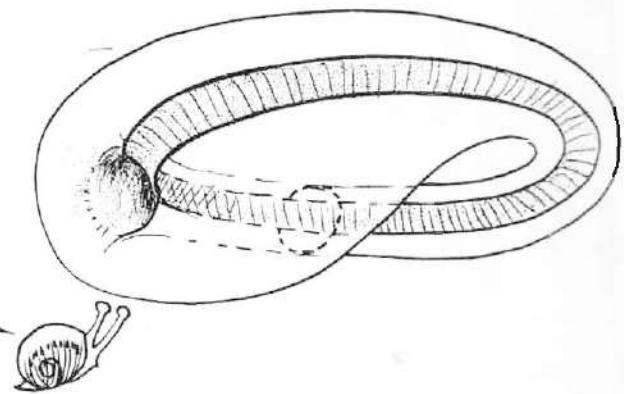


C'est la **COURBE D'AUTO-INTERSECTION** ,
qui n'est pas un **BORD** . Tu peux vérifier
que dans cette **BOUTEILLE DE KLEIN**
la surface évolue partout continûment .



deux
demi
coupes

Sa caractéristique est nulle puisqu'elle a été fabriquée à partir de deux rubans de Möbius ($X=0$) et d'une courbe fermée ($X=0$). On n'a d'ailleurs aucun mal à y retrouver l'un de ces rubans.



Bien sûr, dès qu'on peut trouver un ruban de Möbius sur une surface, c'est qu'elle n'a qu'un côté.

Au fait, Tirésias, est-ce que on ne pourrait pas trouver un ruban de Möbius sur votre coquille, par hasard ?



Ah, vous deux ne commencez pas !



Quand même, c'est une drôle de surface, ça ...



Jusqu'ici, tu n'avais connu que des surfaces qui ne se recoupaient pas, comme la SPHERE, ou le TORE, sous leur forme standard. Les surfaces qui se recoupent dans notre espace sont appelées des IMMERSIONS.

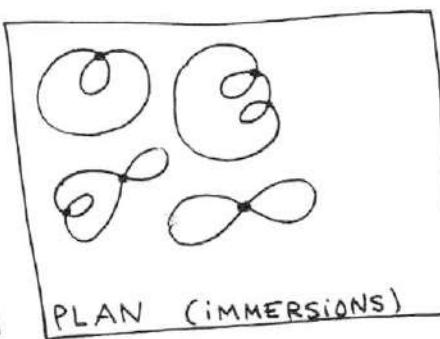
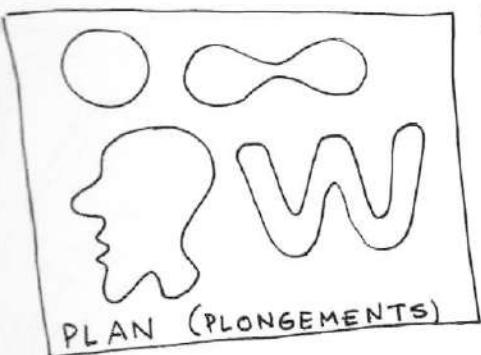


des... immersions ?



PLONGEMENTS ET IMMERSIONS

Une courbe fermée, c'est un être géométrique unidimensionnel, sans accident de parcours et dont la seule caractéristique est de n'avoir ni commencement, ni fin. Eh bien il existe une infinité de façons de la situer dans un plan.

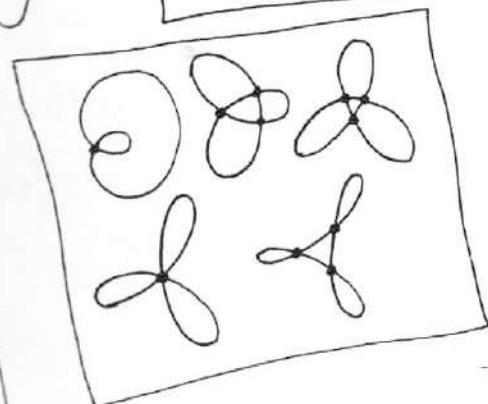


quand elle ne se recoupe pas, je dirai qu'elle est **PLONGÉE DANS LE PLAN** sinon, je dirai qu'elle y est **IMMERGÉE**(*)

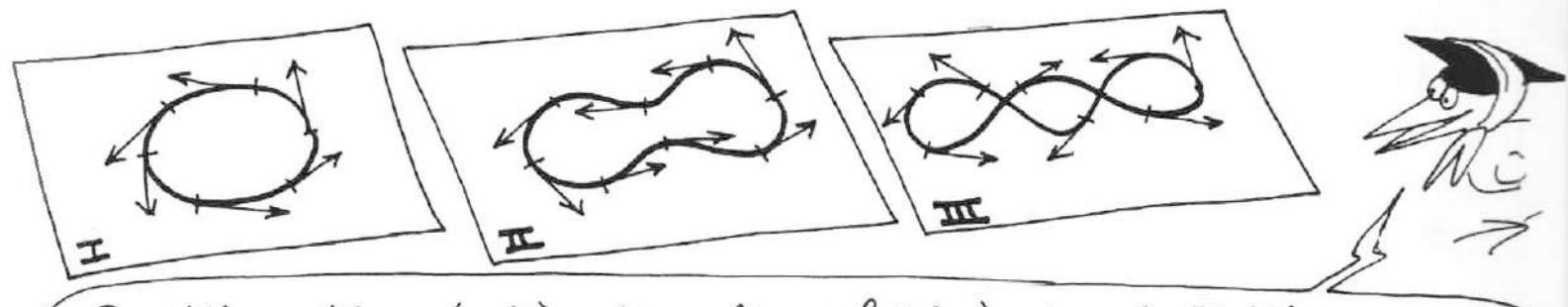
je suppose que ce qui les caractérise, c'est leur nombre de points d'intersection ?

Non, puisque si je déforme en continu ces courbes, je peux

faire apparaître ou disparaître des **COUPLES DE POINTS**. Mais, ce qui restera invariant c'est le **NOMBRE DE TOURS**



Regarde :
j'assujets un vecteur
à rester tangent
à la courbe



Par déformation régulière (sans lignes brisées), dans le **PLAN**, je peux passer de la courbe **I** à la courbe **III**. En faisant, nous avons conservé la rotation totale de la flèche (360°) lors du parcours de chaque courbe.

Ceci est une **HOMOTOPIE RÉGULIÈRE**

dans un **PLAN**. Elle conserve ce nombre de tours de la flèche tangente à la courbe.

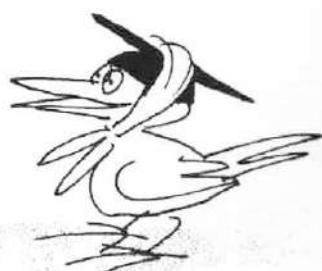
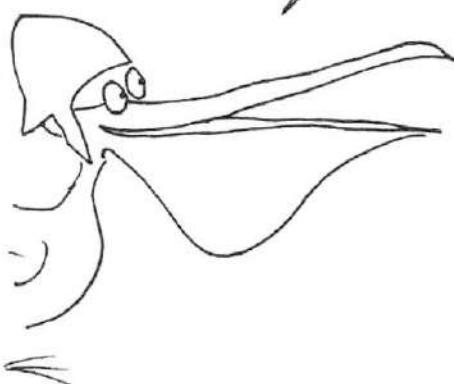
J'ai beau tout essayer,
je n'arrive pas à transformer
ce **HUIT** en **CERCLE** !...

c'est normal. La flèche
n'y fait pas le même nombre de
tours. Sur le **HUIT**, la somme
algébrique des rotations est nulle !

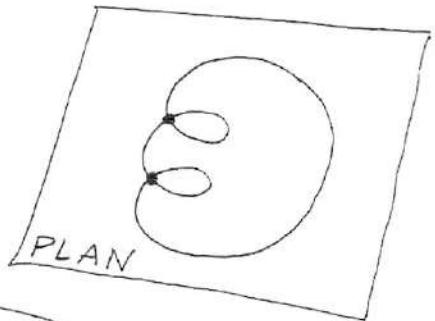


Compte tenu de cette règle de déformation de courbes fermées (continuité, régularité), dans une surface, il y a des choses qui sont **POSSIBLES** et d'autres à jamais **IMPOSSIBLES**.

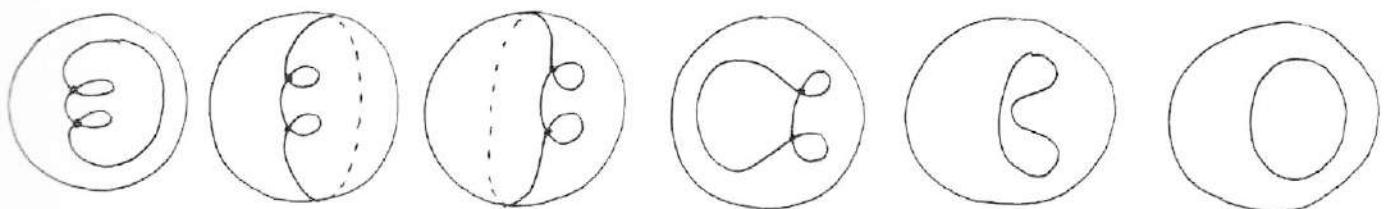
Pas si simple !



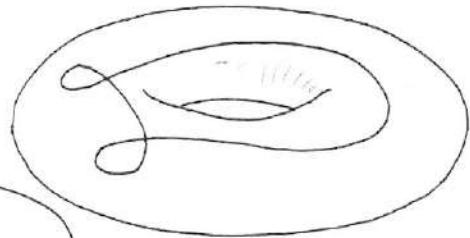
Ça dépend de l'**ESPACE** dans lequel l'objet est représenté. Tiens, regarde par exemple cette courbe. Sur un **PLAN**, pas moyen de faire disparaître ses deux points doubles.



Par contre, sur une **SPHÈRE**:

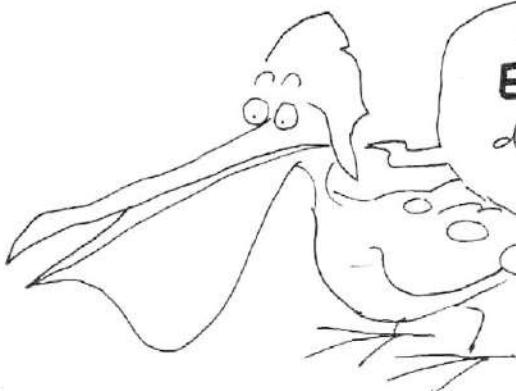


Ainsi certaines choses qui apparaissent impossibles dans tel **ESPACE DE PRÉSENTATION** (ici le **PLAN**) deviennent possibles en changeant cet espace, doté d'une topologie différente. Et vice versa.



Dans le plan, cette courbe se dénoue aisément, alors qu'on ne peut le faire si elle est représentée sur un tore

Mais enfin, Tirésias, dans notre **ESPACE-TEMPS**, il y a des choses définitivement **POSSIBLES** ou **IMPOSSIBLES**, non ?



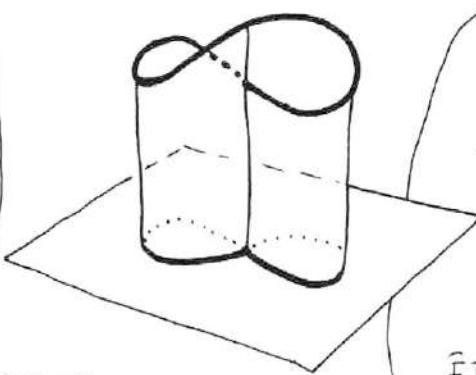
l'angoisse...

Tu connais, toi, la topologie de notre espace - temps ?

Nous ne vivons que d'apparences...
... et encore !

Euh ... non ...

Les points d'intersection de la courbe fermée ne tiennent qu'au mode de représentation dans une surface. L'image bidimensionnelle n'étant qu'une projection



Il n'y a fondamentalement dans tout ceci qu'un seul objet : **LA COURBE FERMÉE**

ÊTRE UNIDIMENSIONNEL

Dans un espace de représentation à **4** dimensions, la bouteille de **KLEIN** ne se recoupe plus !

Mais alors, en changeant d'espace de représentation, je peux **TOUT** faire. Par exemple changer une bouteille de Klein en sphère ?

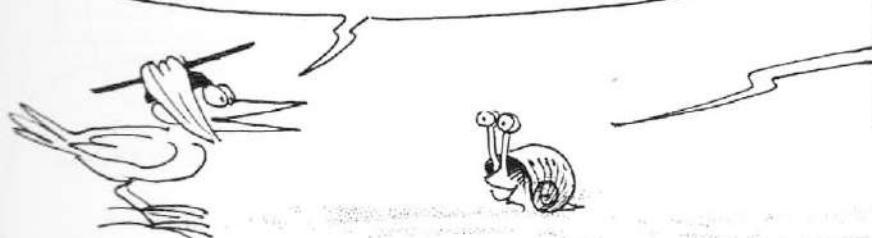
Non, il y a des caractéristiques qui restent **INDÉPENDANTES DE L'ESPACE DE PRÉSENTATION**

LA TOPOLOGIE

Par exemple :

La caractéristique d'Euler-Poincaré
l'orientabilité, la fermeture.

Pour les objets à une dimension, tout se résume à :
**IL FAUT QU'UNE COURBE
SOIT OUVERTE OU FERMÉE**



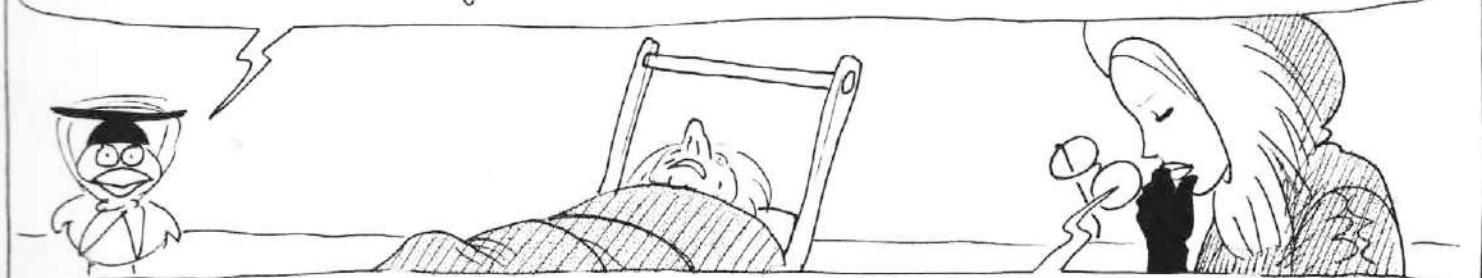
Alors, comment va Amundsen ?

Rien, toujours pareil ...

GÉONÉVROSE? moi je
pencherais plutôt pour
une **TOPONÉVROSE**.



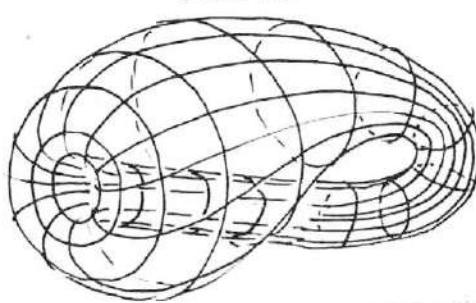
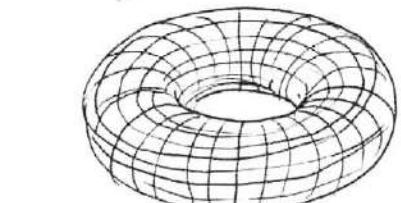
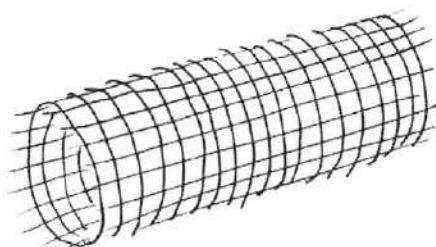
Nos structures mentales, notre **LOGIQUE**, notre perception du monde, reposent sur des bases géométriques, qui peuvent à tout moment se fissurer.



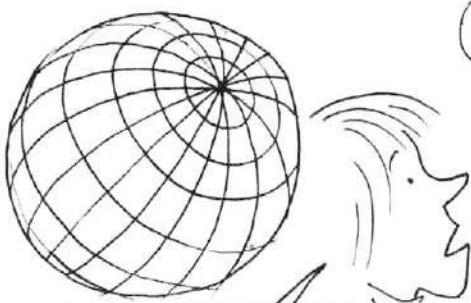
Si nous n'arrivons pas à rétablir un minimum de cohérence dans la vision que notre ami a des choses, il risque de persister dans son refus du monde sensible.

MAILLAGES

J'ai trouvé une autre façon de représenter
commodelement les surfaces : **LA VANNERIE**

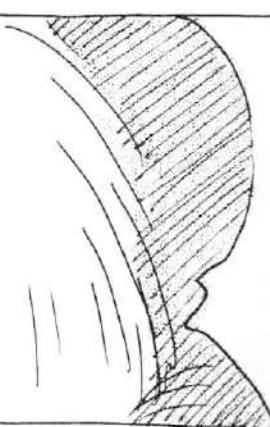


Pour la SPHÈRE, tu dois introduire **2 PÔLES**.



Mais... je ne comprends
pas. Pour le TORUS ou
la bouteille de KLEIN,
je n'en ai pas
en besoin ...

La caractéristique d'Euler-Poincaré te donne
le nombre de **PÔLES** nécessaires pour **MAILLER**
ta surface. Pour le TORUS ou la bouteille de
KLEIN, c'est zéro. Mais pour la SPHÈRE c'est **2**.



Ce concept peut, bien entendu,
être étendu aux **HYPERSURFACES**,
aux espaces à 3, 4, ... N dimensions

Sauf erreur l'Univers est,
suivant le modèle cyclique
de **FRIEDMANN**(*) , une
hypersphère **S⁴**. Je conçois
que l'on puisse **PAVER** un
espace tridimensionnel à
l'aide de structures cubiques.
Mais, à quatre dimensions ?

Simple, tu paves avec
des **HYPERCUBES**

Mais, attendez voir...
La caractéristique d'une
hypersphère **S⁴** est **2**.
Donc notre espace - temps devrait
présenter au minimum une
sorte de singularité, un pôle ?

des hypercubes?
Ah bon...

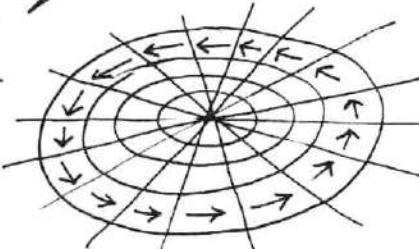
Et le **BIG BANG**
c'est quoi !?!

Ainsi des considérations
purement géométriques auraient
permis de prévoir un des aspects
les plus fantastiques de l'histoire
du monde, découvert en même temps
que le phénomène d'expansion
de l'Univers.

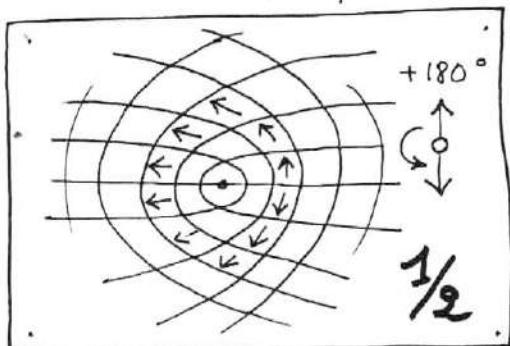
(*) Voir **BIG BANG** (Éditions BELIN).

SiNGULARiTÉS

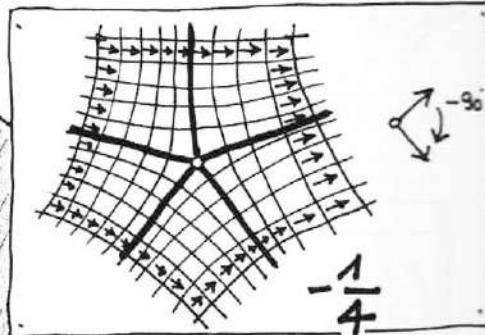
L'ORDRE D'UNE SiNGULARiTÉ DE MAILLAGE est égal à l'angle dont la flèche tourne, positif ou négatif, divisé par 360° (2π).



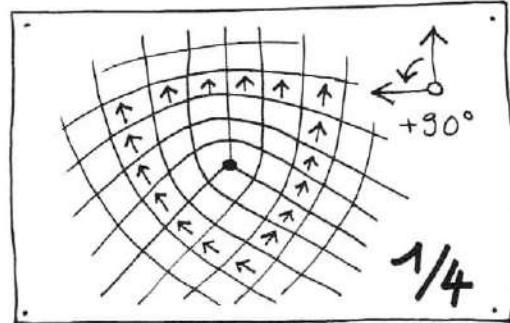
le PÔLE c'est 1.



$\frac{1}{2}$

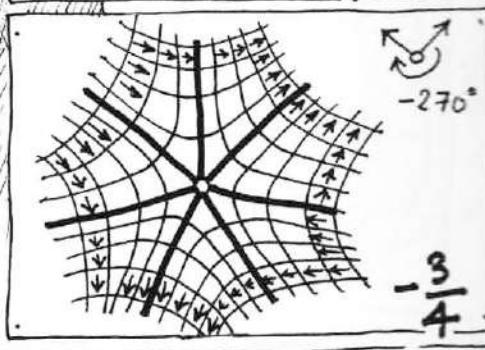


$-\frac{1}{4}$

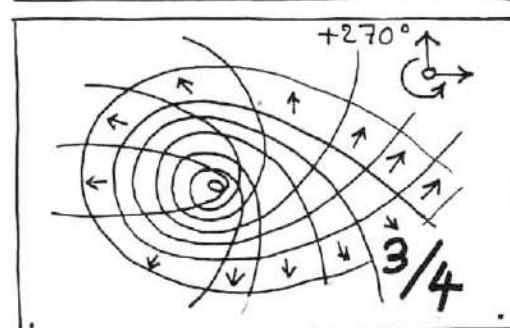


$\frac{1}{4}$

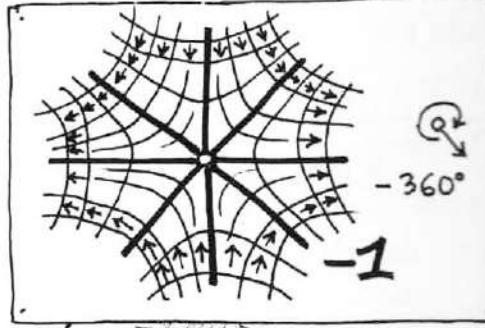
Voici des singularités d'ordre positif (à gauche) et négatif (à droite)



$-\frac{3}{4}$

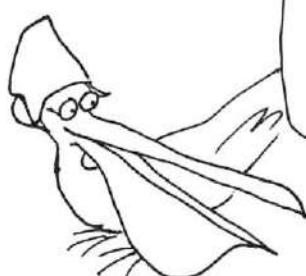


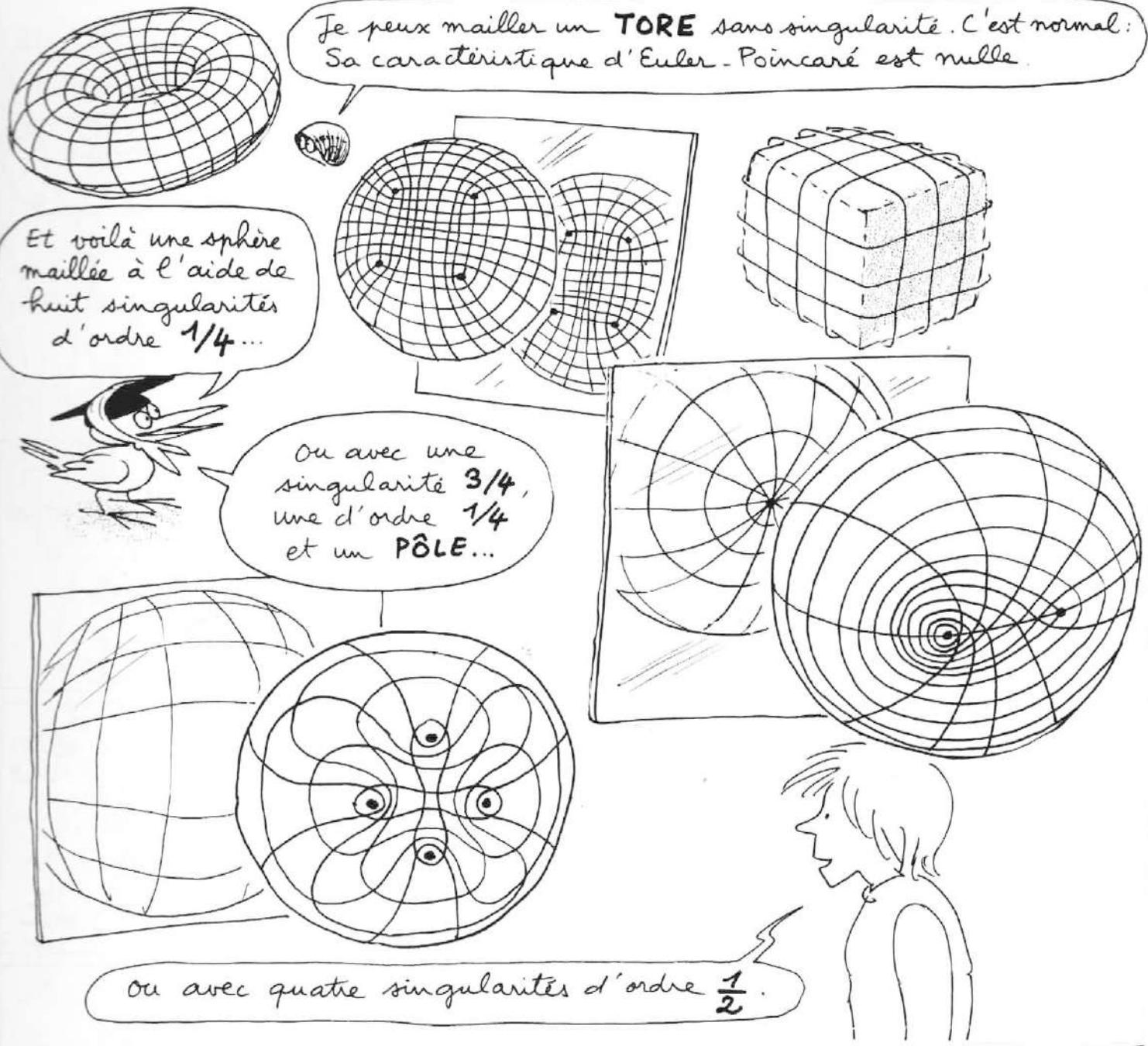
$\frac{3}{4}$



-1

Si tu mailles une surface fermée, tu auras éventuellement des singularités. Eh bien la caractéristique d'Euler-Poincaré sera égale à la somme algébrique des ordres des singularités.



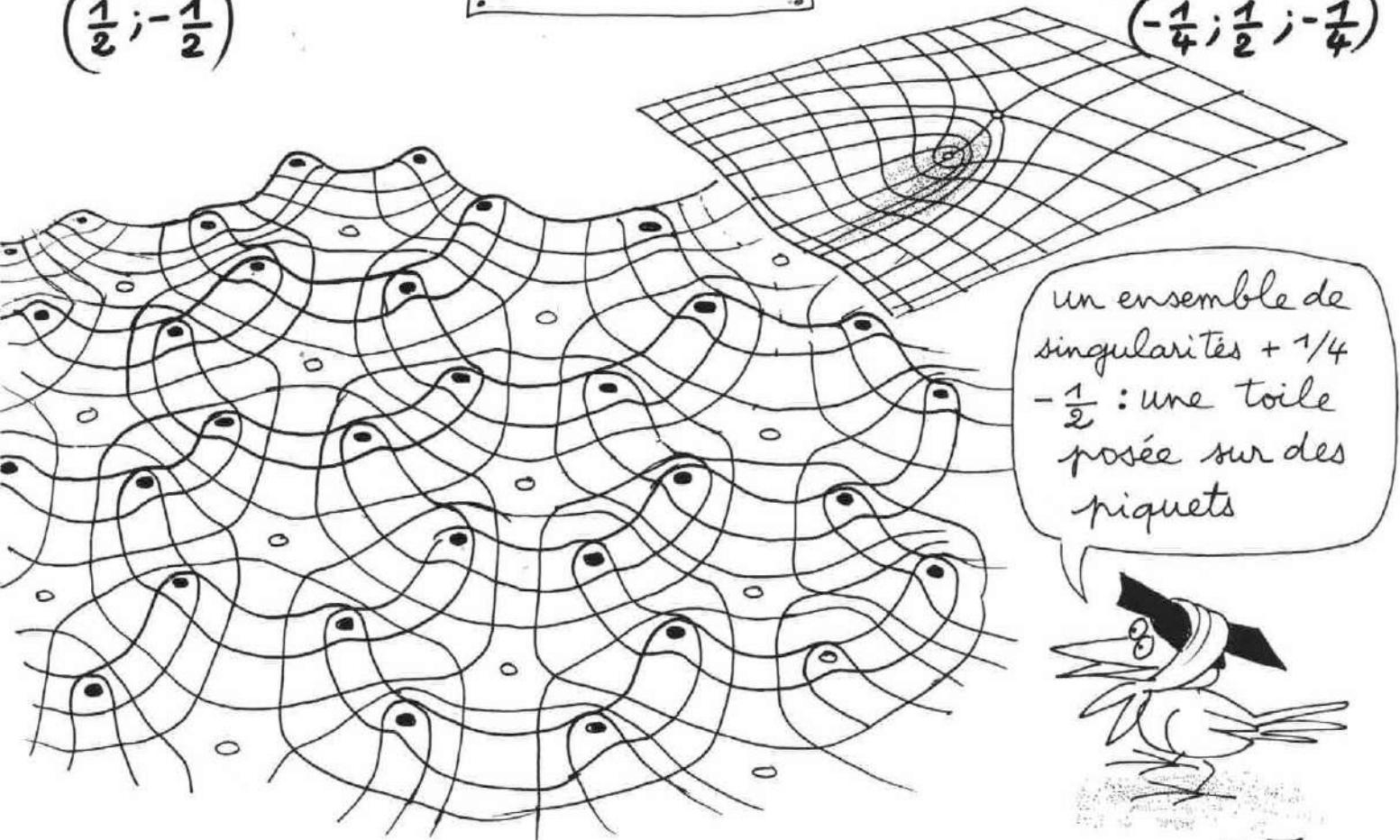
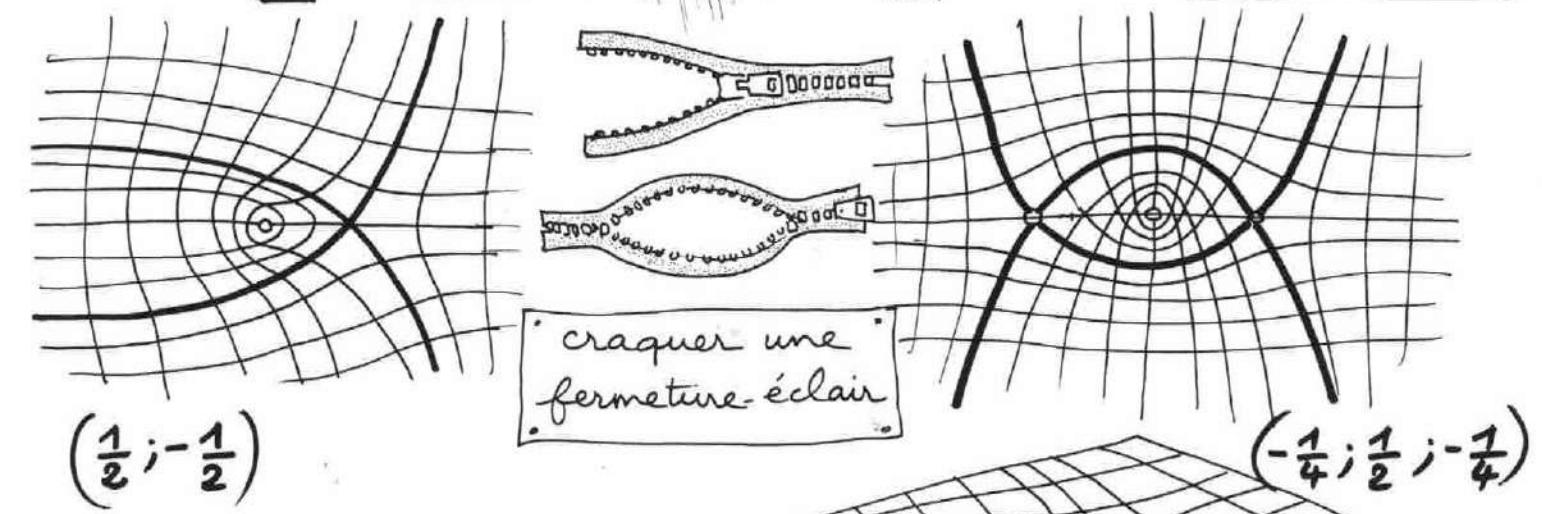


Remarque :

Le lecteur qui aura lu **LE TROU NOIR** (éditions BELIN), pages 14 à 36 aura sans doute remarqué la similitude entre les dessins des singularités de maillage et ce qui se rapportait, dans cet ouvrage, aux POSICÔNES, aux NÉGACÔNES et à la courbure. Toutes ces notions, essentiellement **ANGULAIRES** sont étroitement liées. La COURBURE TOTALE d'une surface, représentée dans notre espace à trois dimensions, est précisément égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré, multipliée par 360° (ou par 2π).

La Direction

Dommage que de telles choses ne servent strictement à rien,
comme le grec ou le latin ...

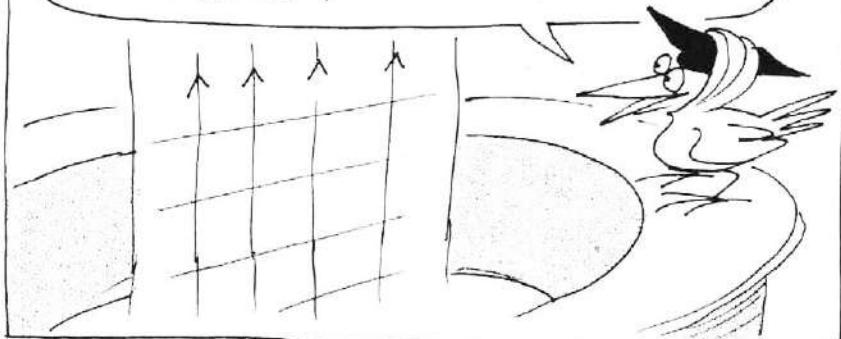


et que fabriquez-vous, maintenant ?

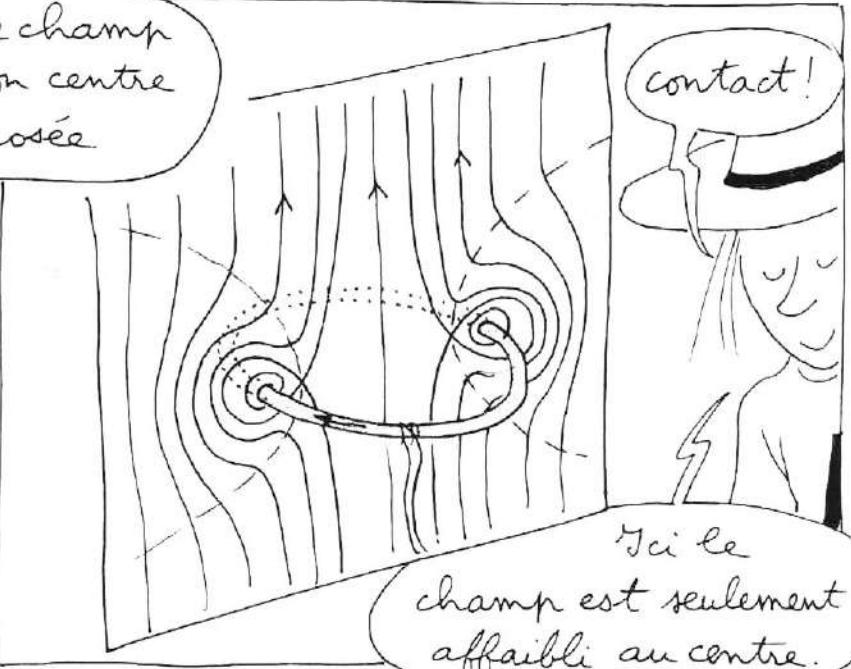
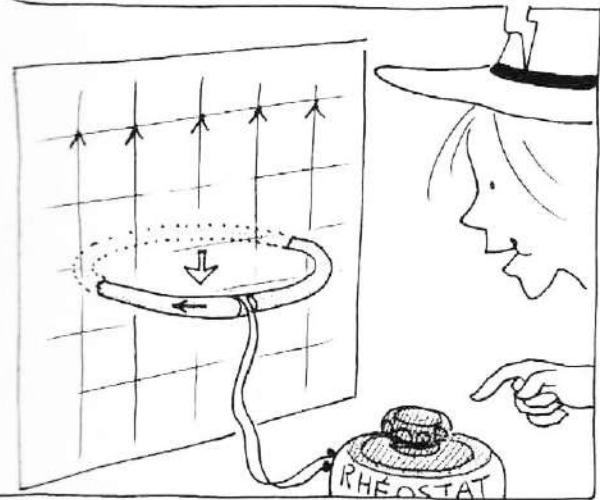


Des CHAMPS MAGNÉTIQUES.

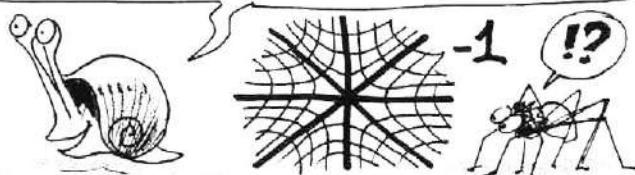
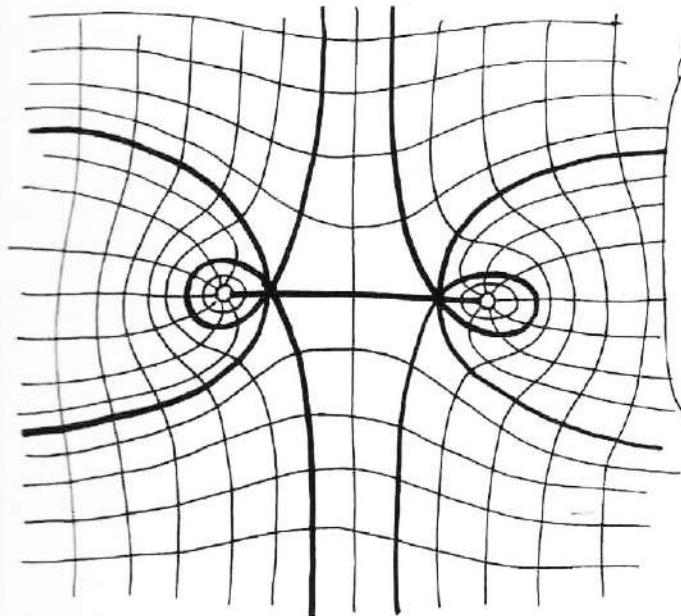
Ce système fabrique un champ magnétique **UNIFORME** et les lignes de champ sont alors de simples droites parallèles



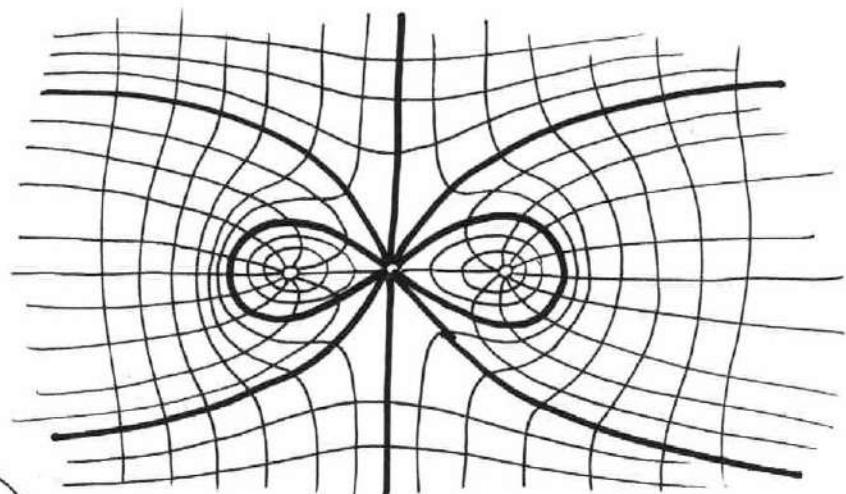
maintenant j'ajoute dans ce champ une spire qui va créer en son centre un champ de direction opposée



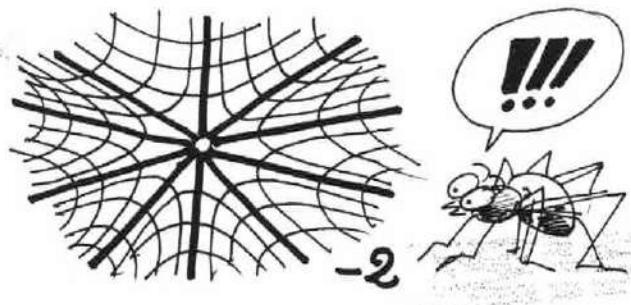
Mince ! tu as fait apparaître deux **PÔLES** (les traces du solénoïde dans le plan de figure) et deux singularités d'ordre **-1**. La somme faisant zéro, les singularités négatives apparaissent là où le champ B s'annule.



En fait, le système a une symétrie de révolution et nous avons un exemple de maillage avec des lignes de singularité.



les deux points de champ nul, dans le plan de figure, se sont maintenant fondus en un seul, d'ordre -2 (exemple de CONFLUENCES DE SINGULARITÉS)



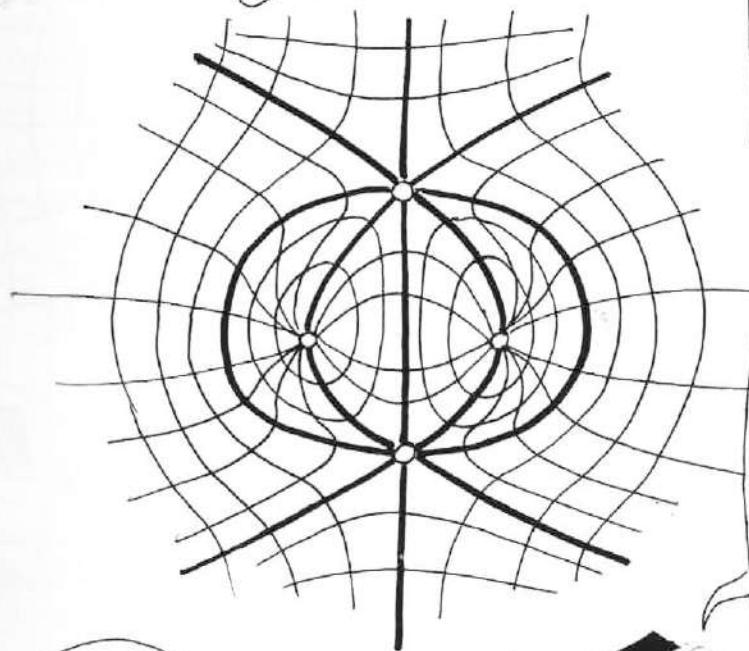
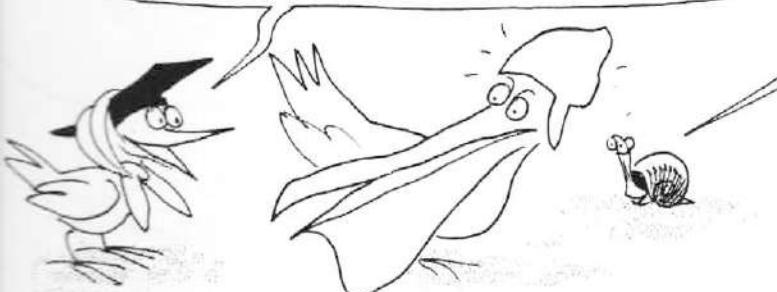
c'est marrant, ce truc.
On pousse encore le champ ?



Est-ce que ça ne risque pas de devenir dangereux ?

qui'est-ce que tu redoutes, Léon ?
qui'on crée des altérations
irréversibles dans l'espace-temps ?
Il n'y a que cent gauss, mon vieux...

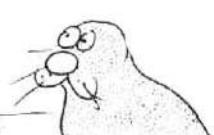
Depuis **LE MUR DU SILENCE**, Léon fait une véritable fixation sur les champs magnétiques !



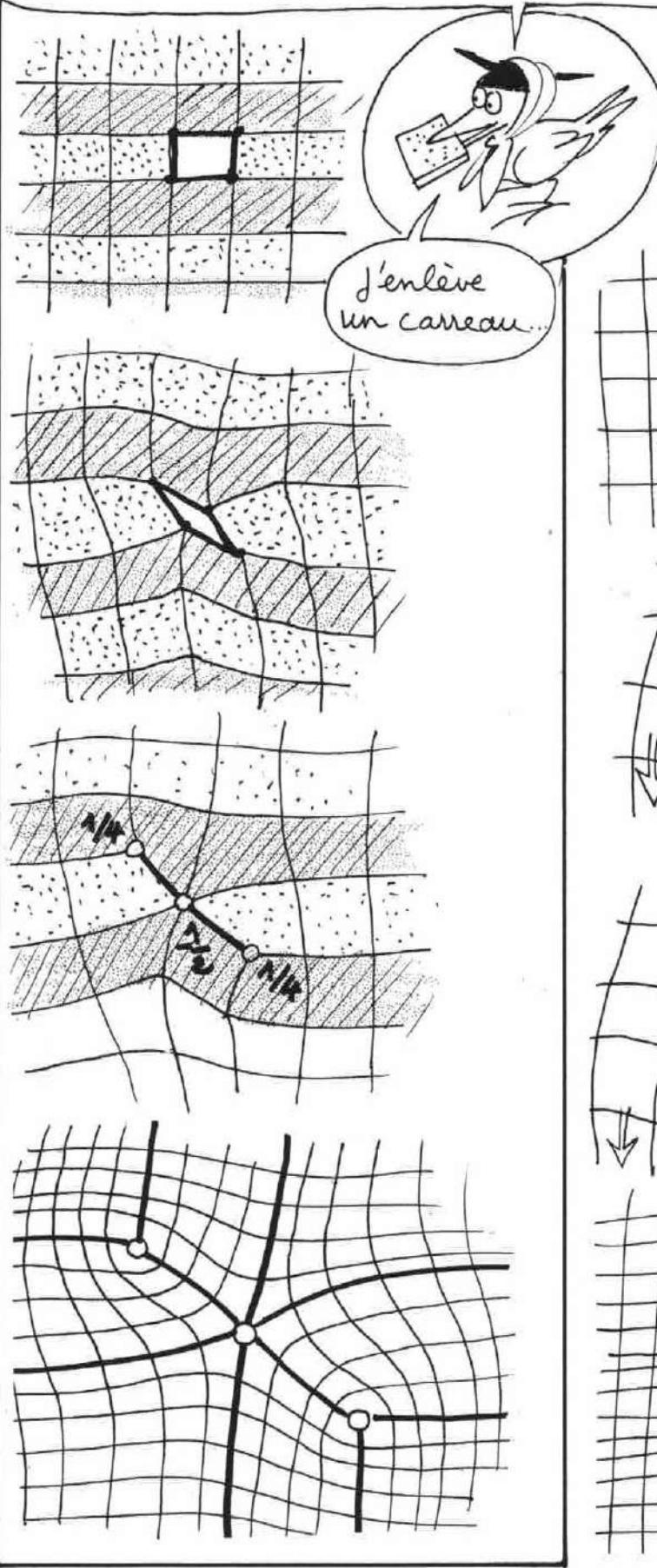
le champ magnétique **B**
s'est inversé au centre de
la spire. La singularité
s'est dédoublée en deux
singularités d'ordre -1.
On a créé un VORTEX
magnétique à géométrie
torique.



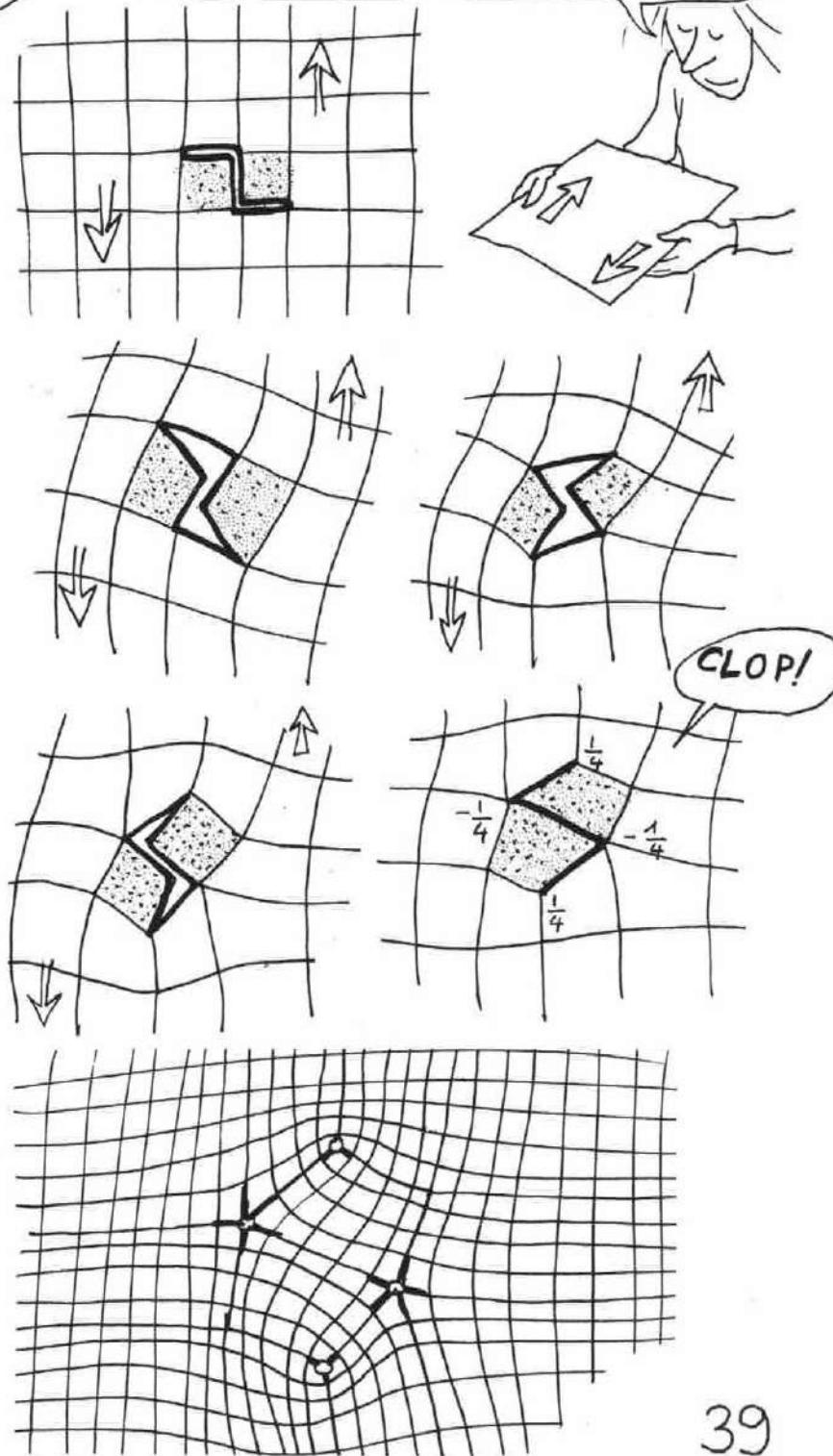
les maillages, les singularités
sont à tous les carrefours
de la physique...



les **CRISTAUX** sont des mines de singularités. Dans ce cristal plan à maille carrée, si on crée un **DÉFAUT** en enlevant un élément, le comblement du vide se fera au prix d'une singularité $-\frac{1}{2}$ et de deux singularités $\frac{1}{4}$



Ici un effort de **CISAILLEMENT** va entraîner un réarrangement dans le maillage plan au prix de deux singularités d'ordre $\frac{1}{4}$ et de deux singularités d'ordre $-\frac{1}{4}$



ça me fait penser
à un truc

Supposons que l'Univers
soit une sorte de ...

Mais, à quoi,
mon cher Tirésias ?

...de cristal ?

Si l'Univers était fait de sortes de cases, les **PARTICULES ÉLÉMENTAIRES** pourraient être des défauts ou des dislocations, combinaisons de singularités de **PAVAGE** (*) - le mouvement, ou les interactions correspondraient à des réarrangements dans tout cela ...

je ... euh ...

Pour une belle idée,
c'est une belle idée !



40 (*) Le **MAILLAGE** se réfère aux objets à 2 dimensions. Le **PAVAGE** en est l'équivalent, mais pour un nombre de dimensions supérieur.

Tout ce qui va suivre va être maintenant illustré à l'aide de **DESSINS ANIMÉS FEUILLETABLES** repérés par les lettres A, B, C, D.

la direction

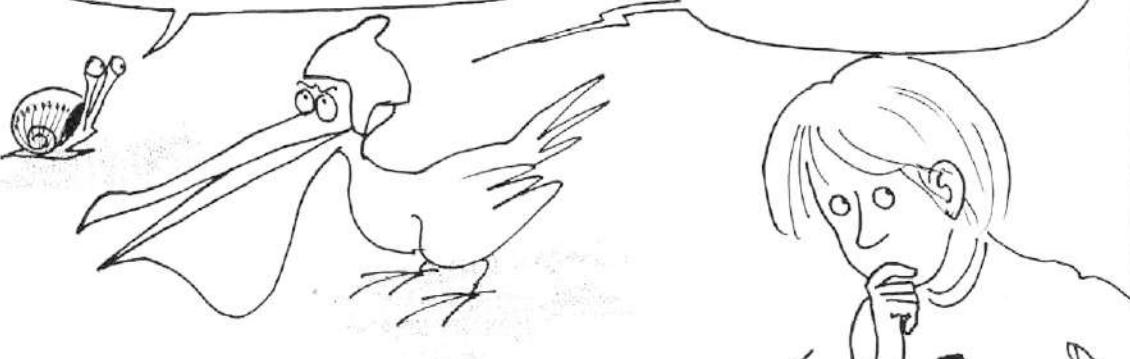
A

TRANSFORMATION
DU RUBAN DE
MÖBIUS EN
SURFACE DE BOY

LA SURFACE DE BOY

Bon, on s'est bien amusé, mais, en attendant, ce pauvre Amundsen est toujours dans le potage...

Et on ne sait toujours pas ce qu'est cette fichue planète sans pôle Sud !



Attendez... pour qu'elle n'ait qu'un pôle, il faut que sa caractéristique d'Euler-Poincaré soit égale à 1. Par ailleurs elle semble être UNILATÈRE...

B

IDEM :
COURBE-BORD
ET ENSEMBLE
D'AUTO-INTERSECTION

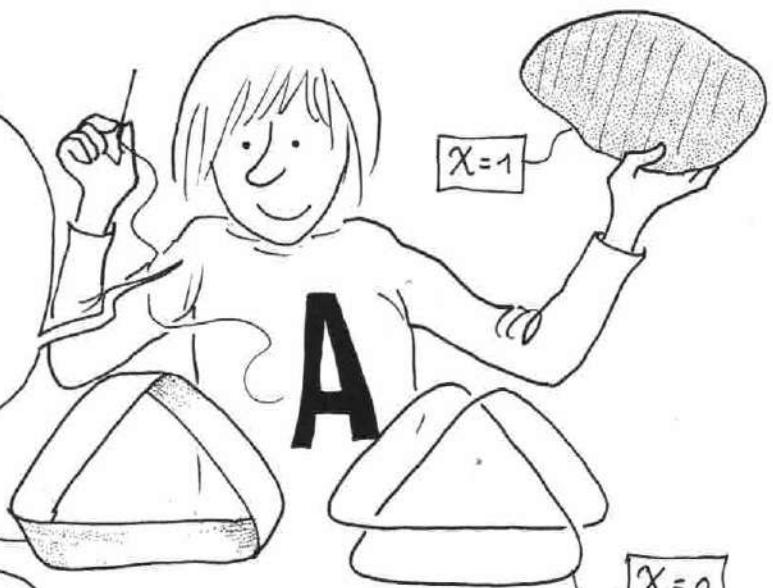
C

MISE EN
CONJONCTION
DES POINTS
ANTIPODAUX

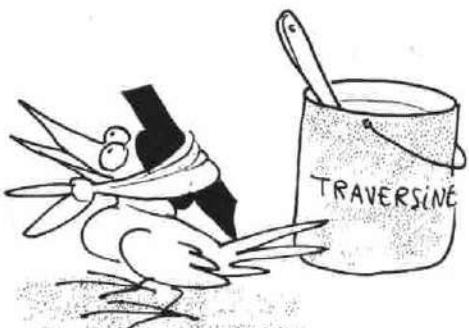
D

INVERSION
APPARENTE
DU TEMPS

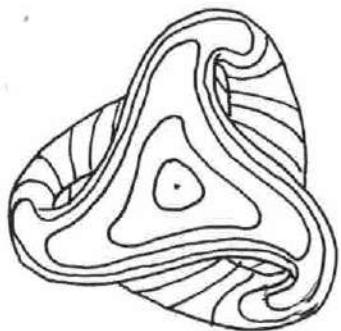
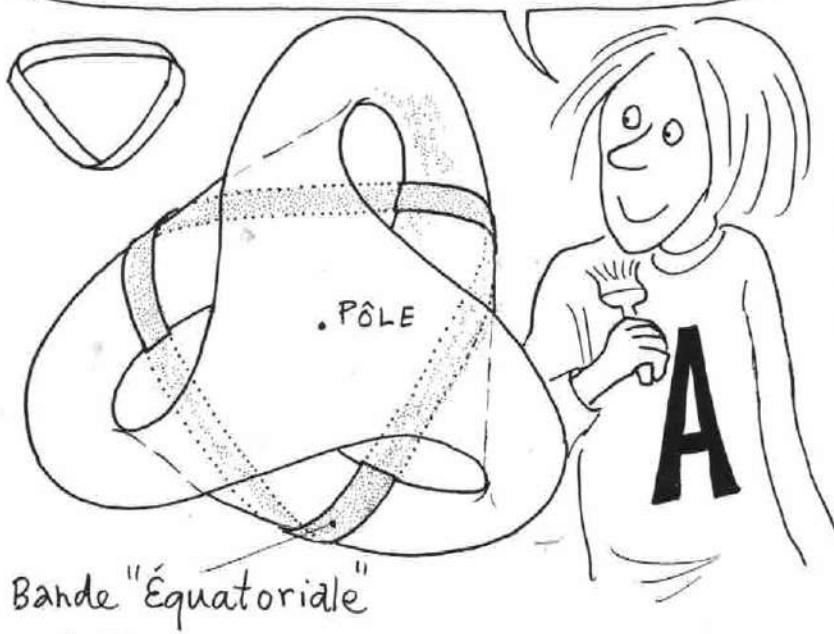
un ruban de Möbius a une caractéristique nulle. Je pourrais coudre le long d'une courbe fermée, qui a aussi une caractéristique zéro, un simple disque par exemple ...



L'ensemble aurait effectivement une caractéristique unité, et cela serait une surface fermée unilatérale. Mais, au lieu de coudre, pourquoi n'utilises-tu pas la **TRAVERSINE** ?



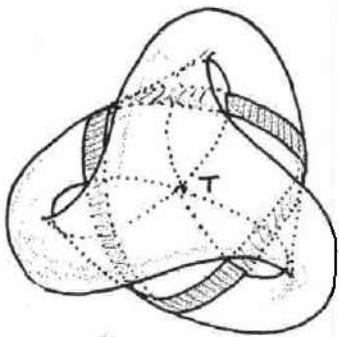
L'histoire du ruban de Möbius qui se transforme en Surface de **BOY** est à voir sur les dessins animés **A** et **B**. Voici l'objet final :



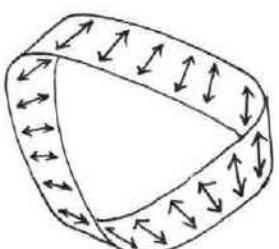
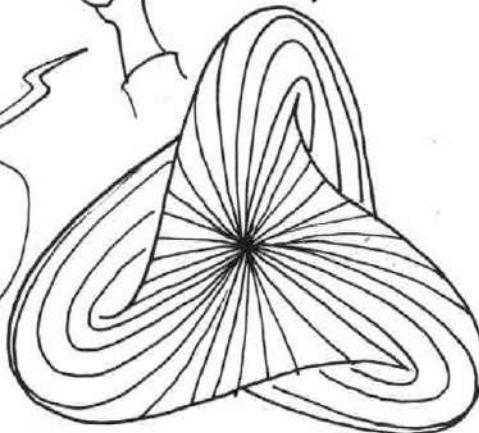
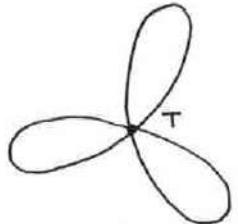
voici les
"PARALLÈLES"
de la surface de
BOY. C'est aussi
l'évolution du
BORD du ruban
de Möbius corres-
pondant à la
séquence **A**

Drôles de
parallèles..

c'est un travail de **VANNERIE**, Léon. Il faut simplement prolonger les "méridiens" du ruban de Möbius en les amenant jusqu'au fond du panier, jusqu'au pôle.

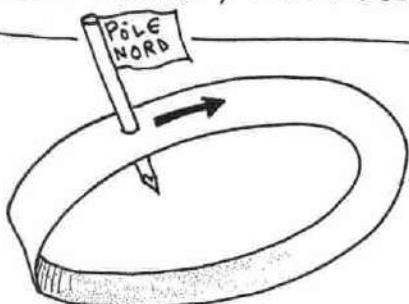


SURFACE DE BOY
AVEC RUBAN DE
MÖBIUS INITIAL

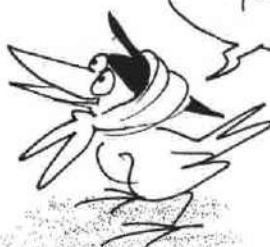


LE PREMIER MODÈLE DE LA SURFACE DE BOY AVEC SON ENSEMBLE "MÉRIDIENS" + "PARALLÈLES" A ÉTÉ IMAGINÉ PAR L'AUTEUR. UNE BELLE MAQUETTE, RÉALISÉE PAR LA SUITE PAR LE SCULPTEUR MAX SAUZE, EST VISIBLE DANS LA "SALLE π " DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE DE PARIS. *La Direction*

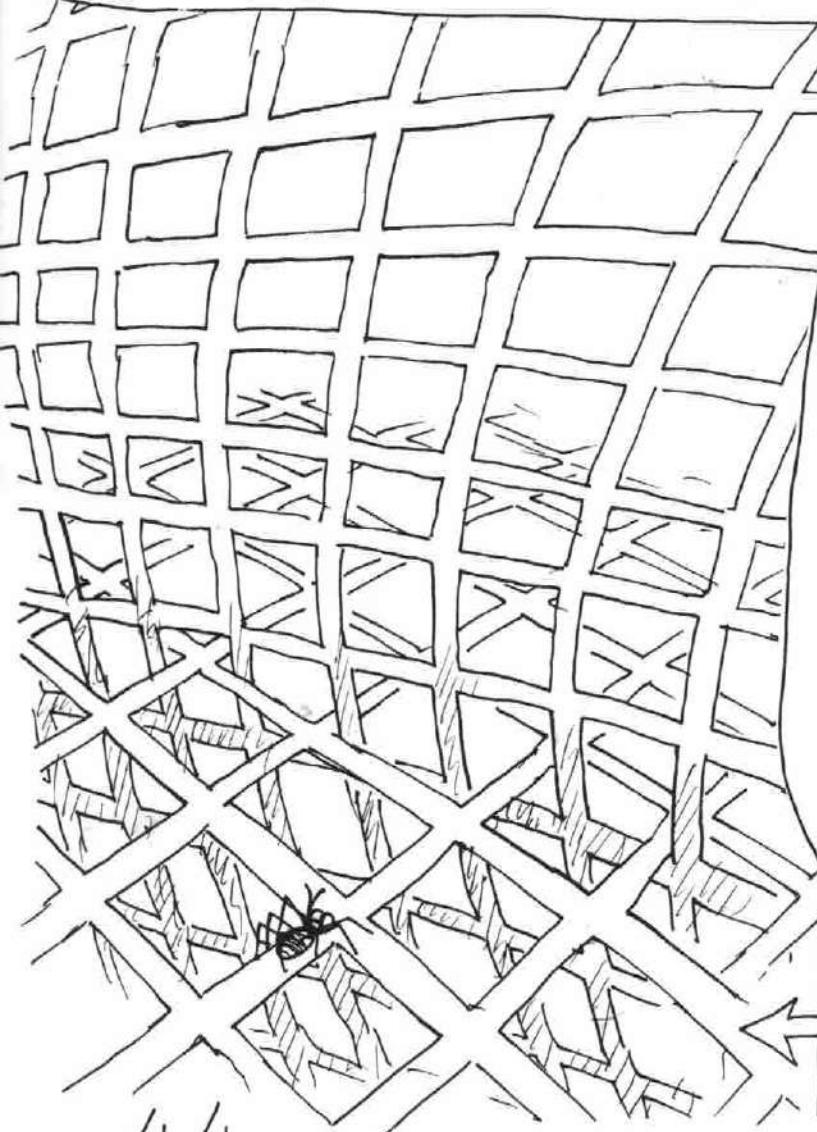
Nous avons cheminé sur un de ces rubans lorsque, partant du "PÔLE NORD", nous étions allés à la recherche du "PÔLE SUD".



Et comme de bien entendu, nous sommes retombés sur la pointe du piquet de Perry !



Mais si nous avons cheminé sur une surface de Boy, comment se fait-il que nous n'ayons pas décelé les régions d'auto-intersection ?



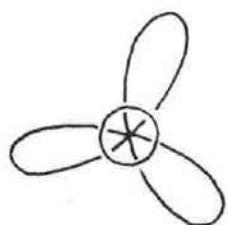
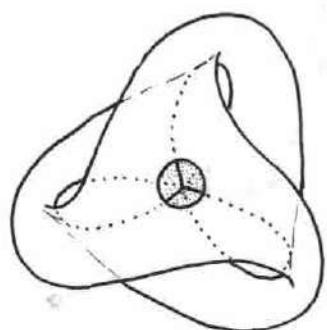
Tu sais bien que cette **IMAGE** d'auto-intersection n'est qu'un effet de l'immersion de la **SURFACE DE BOY** dans l'**ESPACE DE PRÉSENTATION TRIDIMENSIONNEL**. En fait la surface de BOY et la Bouteille de KLEIN EXISTENT EN TANT QU'OBJETS À 2 DIMENSIONS INDEPENDAMMENT DE L'ESPACE DANS LEQUEL ON LES PRÉSENTE.

Voici un bon moyen de faire abstraction de cette auto intersection.

Bon, une chose est claire : la planète est en surface de Boy et il n'y a qu'un seul pôle.

Le n'est pas moi qui irais annoncer cela à ce pauvre monsieur Amundsen

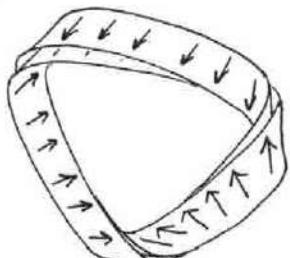
Il est toujours en état de choc,



LA BOY CUBE

Eh bien moi ...

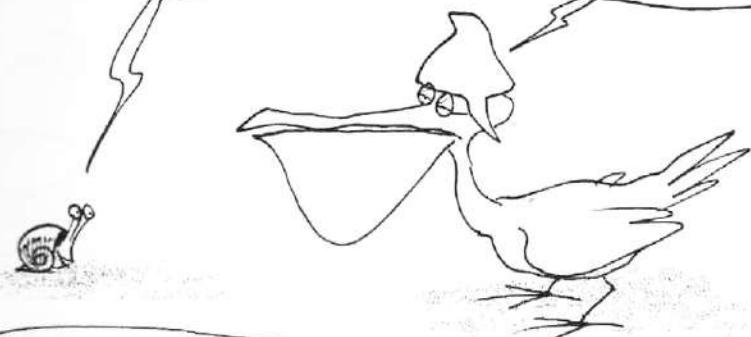
Je vais peut-être vous paraître un peu demeuré, mais j'avoue que, même avec ces dessins, ces coupes, ces vues diverses, je n'ai pas compris la surface de Boy ...



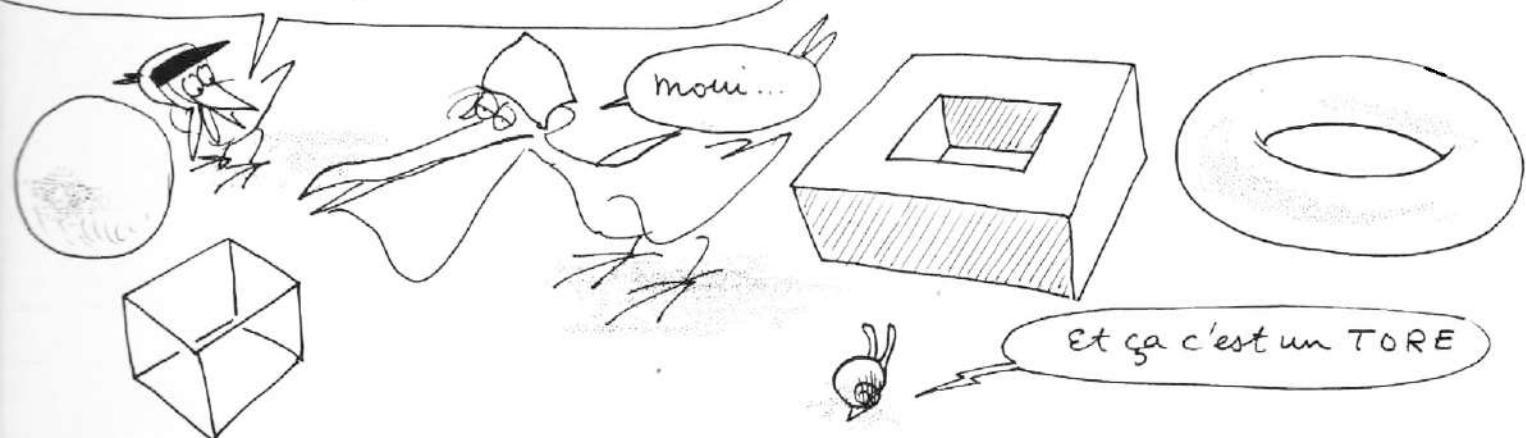
Tu as du mal à saisir
sa topologie ?

sa ? ... euh ... oui ...
ça doit être cela.

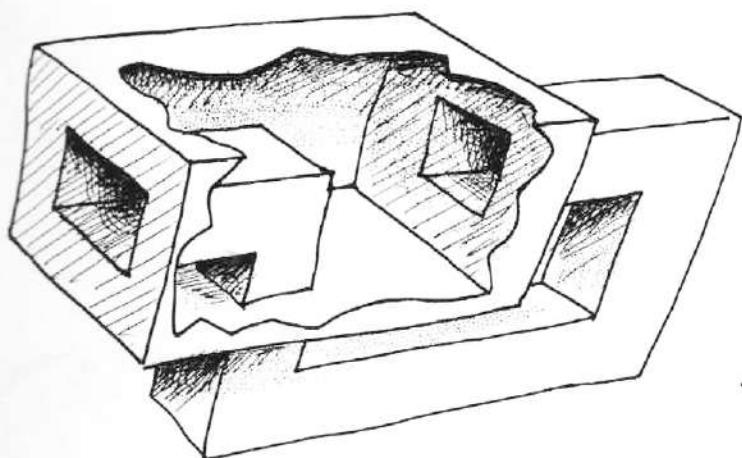
attends, l'én ...,
j'ai trouvé quelque
chose qui va t'aider



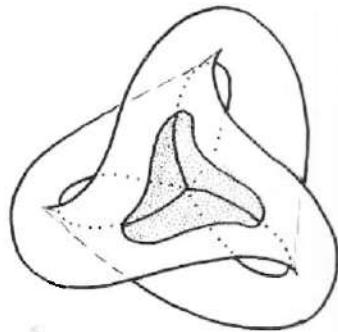
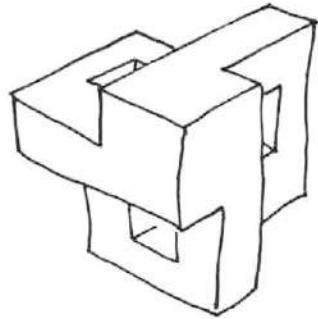
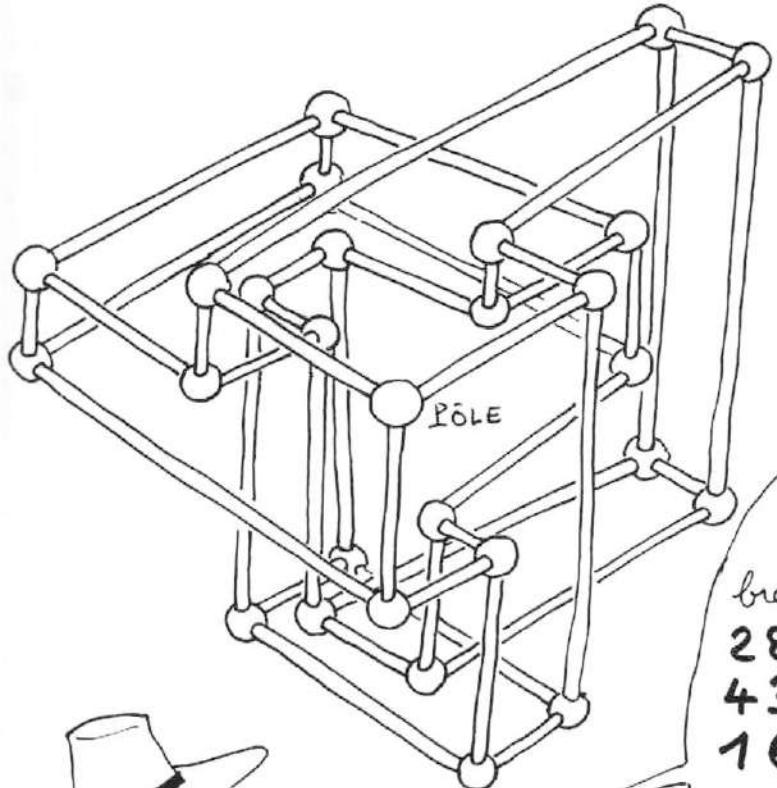
l'én ..., une sphère ou
un cube, c'est pareil !
même topologie, même caractéristique
d'Euler-Poincaré, même courbure totale.



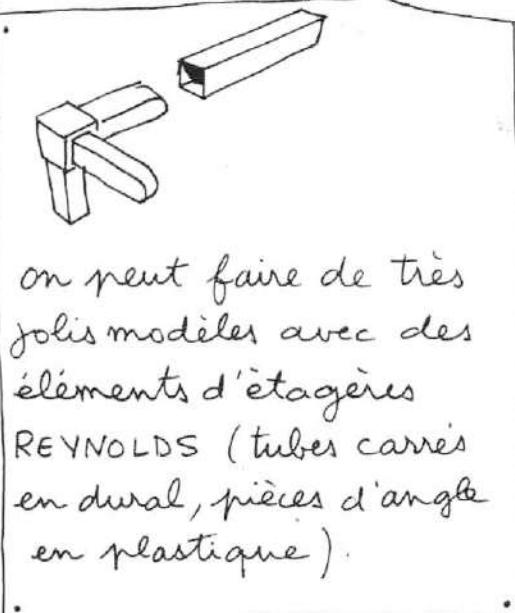
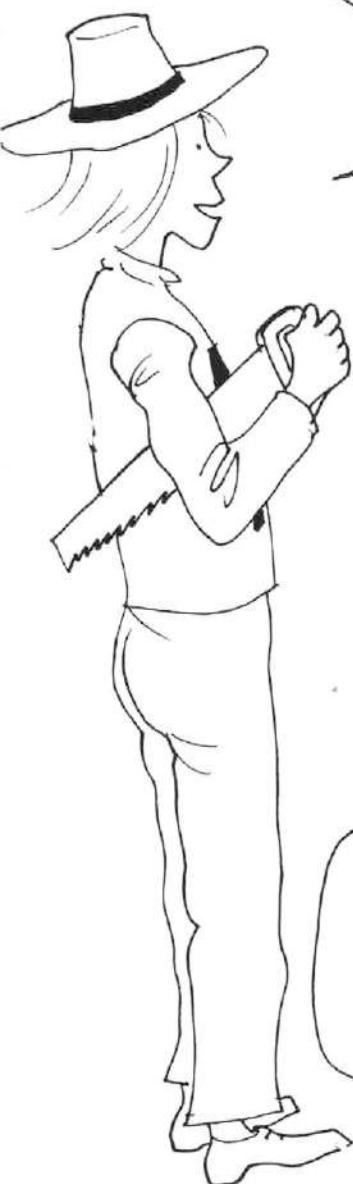
Et alors, ça, c'est
une **KLEIN-CUBE** ?



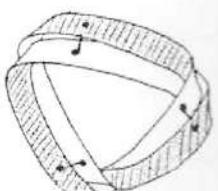
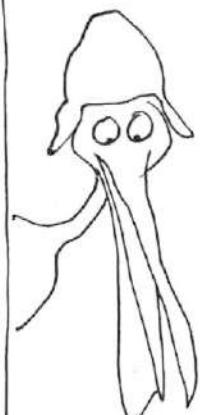
tout juste



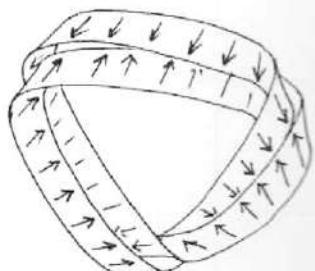
Et voilà la
BOY-CUBE
brevetée Lanturlu :
28 sommets
43 arêtes
16 faces
 $X = 28 - 43 + 16 = 1$

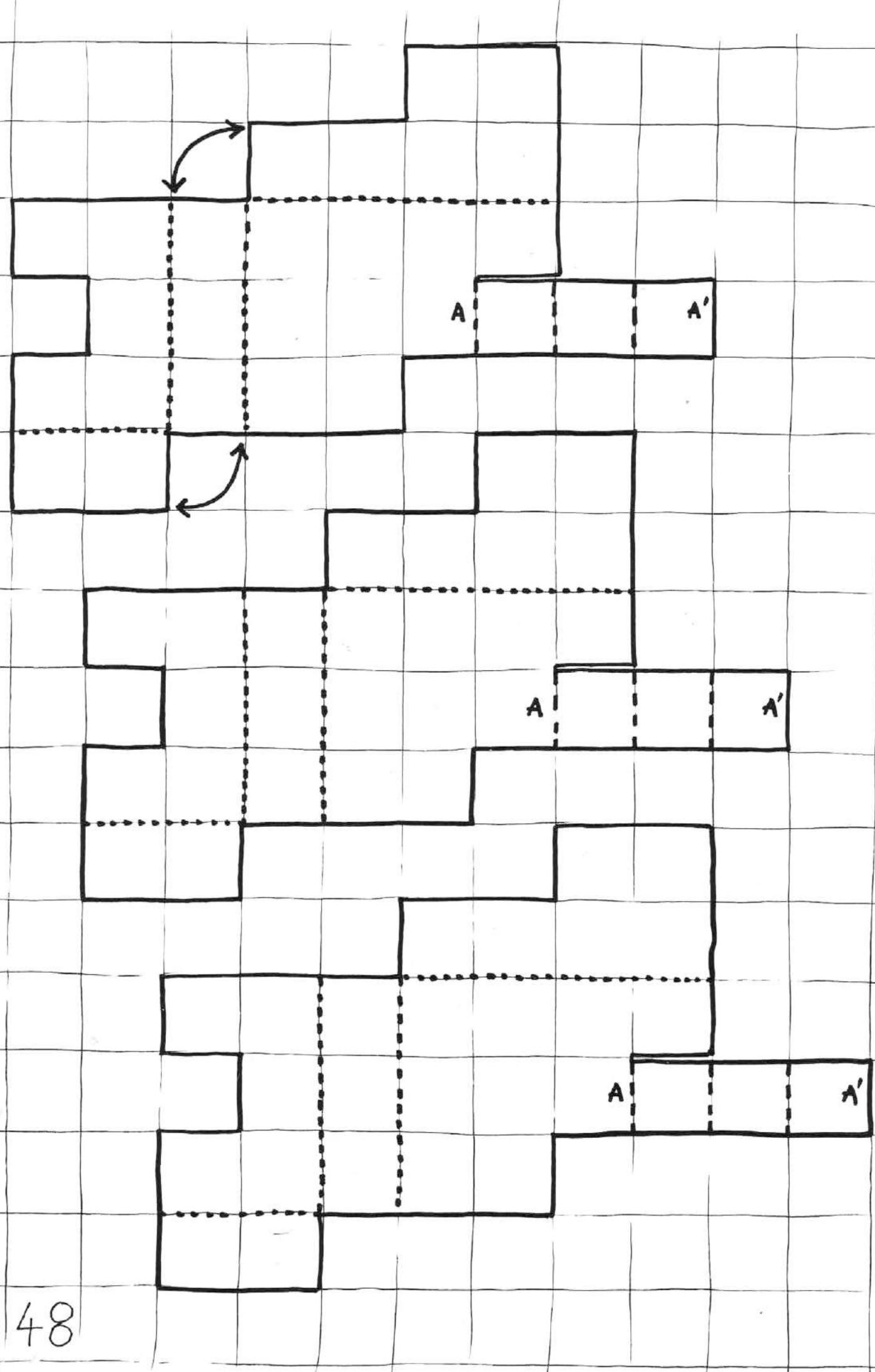


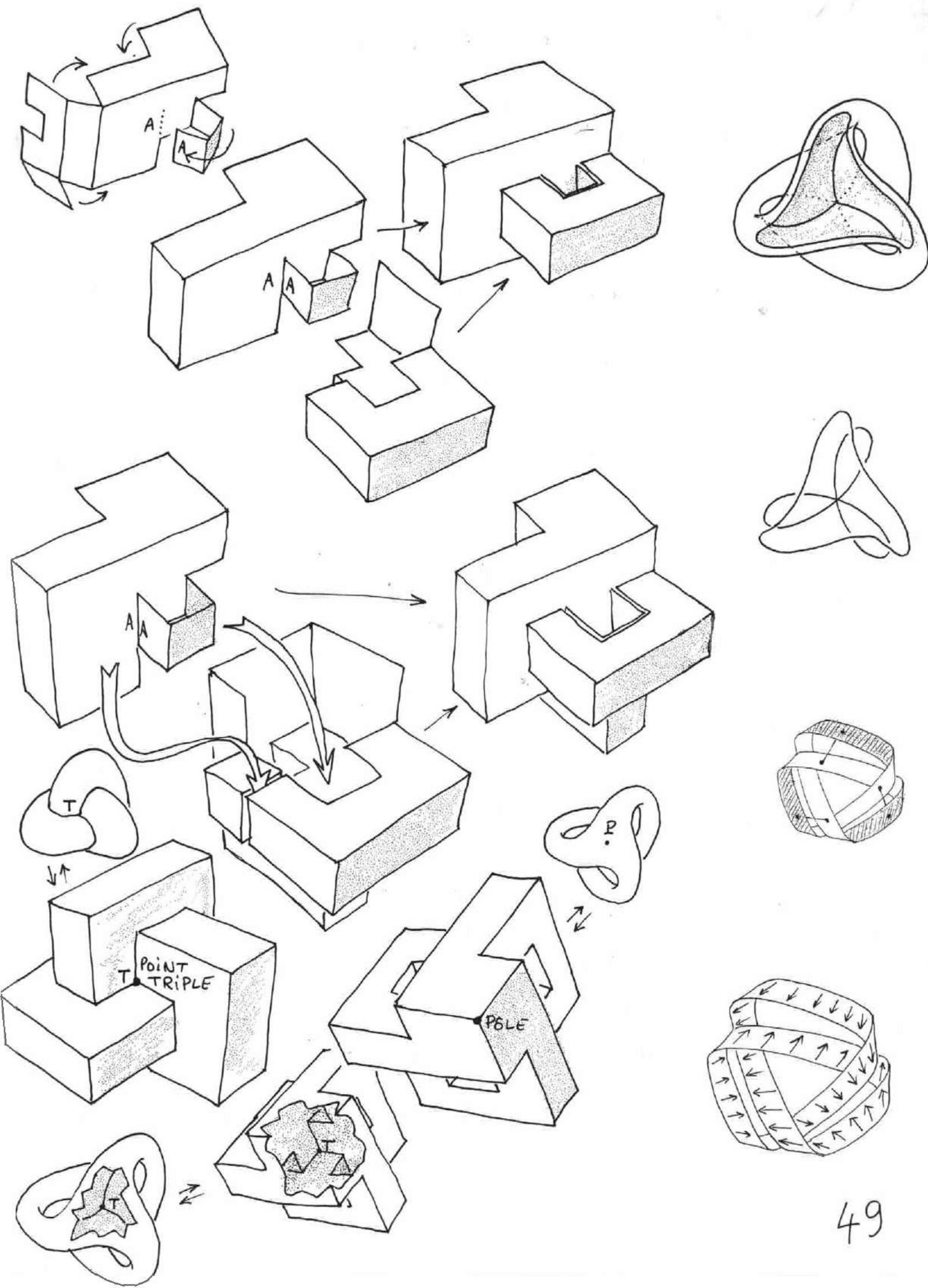
on peut faire de très
jolis modèles avec des
éléments d'étagères
REYNOLDS (tubes carrés
en dural, pièces d'angle
en plastique).



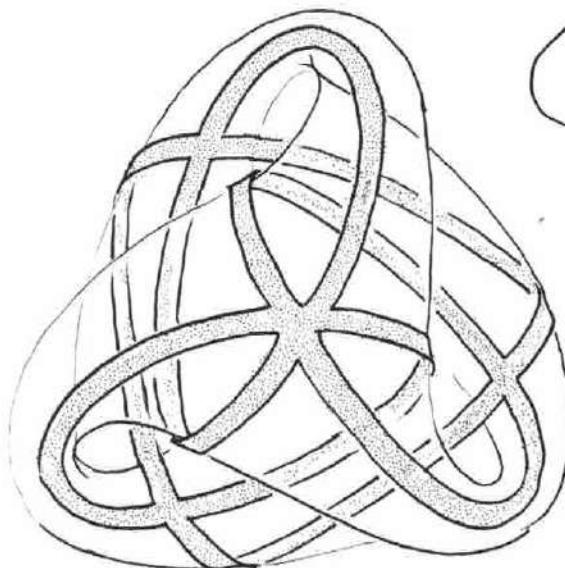
Page suivante, un
découpage qui vous
permet de monter vous
même votre **BOY-CUBE**







REVÊTEMENTS



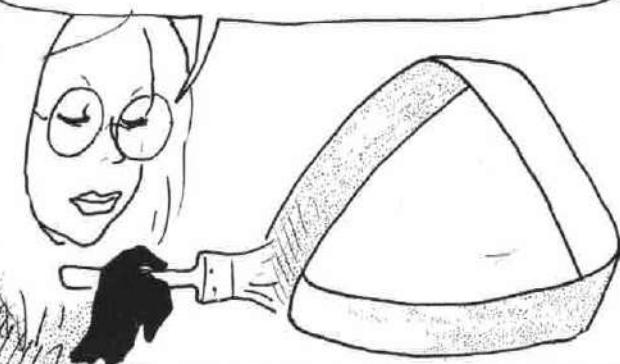
Alors, c'est la fin de l'histoire ?

Non. Je vois un rebondissement imprévu ...

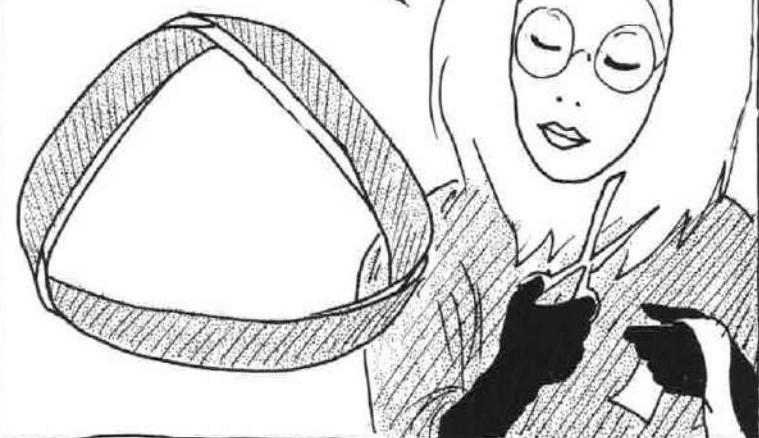
Le REVÊTEMENT À DEUX FEUILLETS d'un objet UNILATÈRE, INORIENTABLE est BILATÈRE, ORIENTABLE, et a une caractéristique double

qu'est-ce que c'est que ce charabia ?

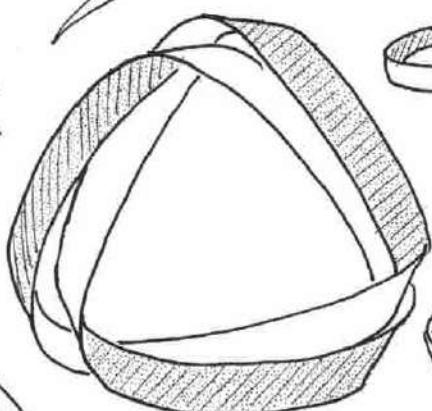
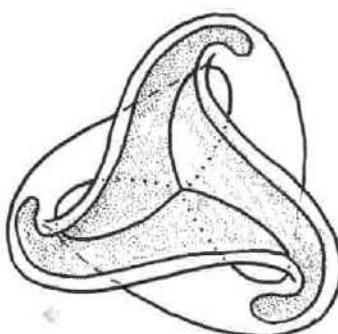
C'est simple : prends un ruban de Möbius et recouvre-le de peinture sur son **UNIQUE** côté, puis enlève le ruban...



...en me gardant que la peinture !



Cette nouvelle bande, fermée sur elle-même, a deux faces, puisque l'une d'elle était en contact avec le ruban de Möbius. Mais tu peux aussi explorer la séquence d'images G :

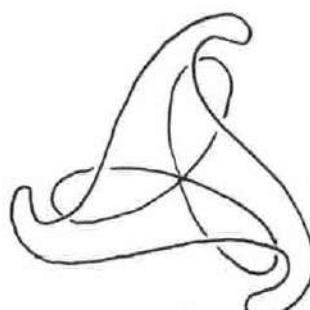


$$= \text{ring} + \text{segment}$$

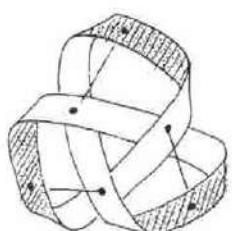
$$= \text{cone} + \text{segment}$$

$$= \text{torus} + \text{segment}$$

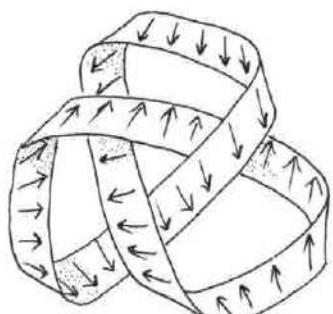
Sa caractéristique et celle du ruban de Möbius sont nulles.



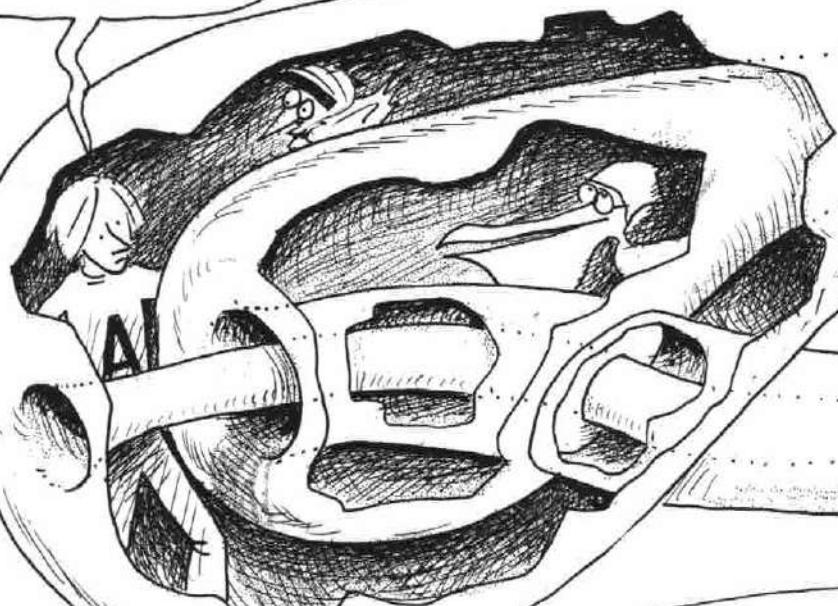
Attends voir... si je peins... une **BOUTEILLE DE KLEIN** sur son **UNIQUE FACE** et que j'enlève la bouteille en conservant la peinture, j'obtiens une surface **FERMÉE, BIEN RÉGULIÈRE**, avec **DEUX FACES** et possédant une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à $2 \times 0 = \text{ZÉRO}$.



c'est-à-dire une immersion du **TORE** !



Tirésias, où es-tu ?

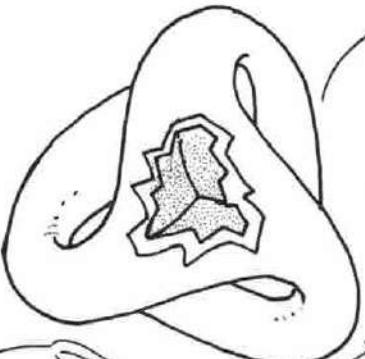


ici !

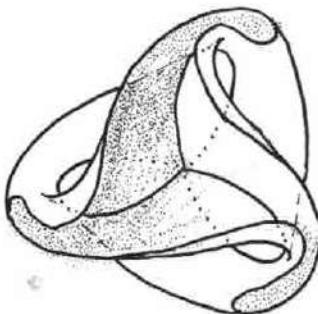
De la même façon, si je prends une surface de Boy et que je l'enduis de peinture, si j'enlève la BOY et que je conserve la peinture, j'obtiendrai une surface **FERMÉE, BIEN RÉGULIÈRE, AVEC 2 FACES**, et possédant une caractéristique d'Euler Poincaré égale à $2 \times 1 = 2 \dots$

A

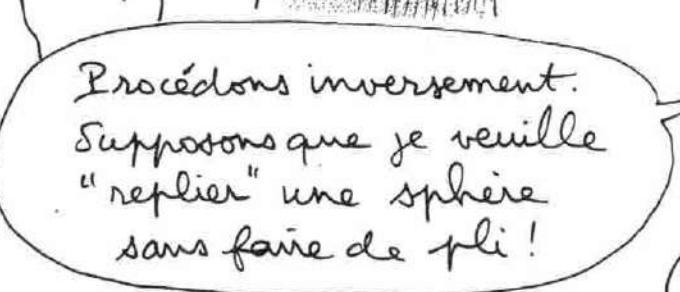
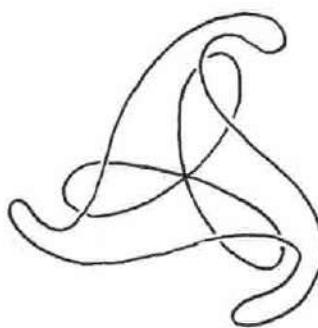
... c'est-à-dire une
IMMERSION DE LA SPHERE !



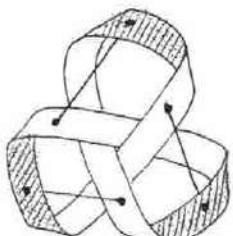
Est-ce que je peux
RÉELLEMENT "déplier"
cette bizarre sphère et
la transformer en
sphère "ordinaire" ?



Avec de la
TRAVERSINE, pas de problème
et c'est la même
chose pour le TORE



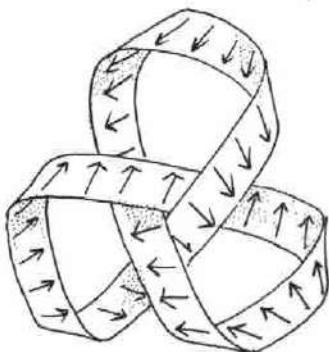
Procémons inversement.
Supposons que je veuille
"replier" une sphère
sans faire de pli !

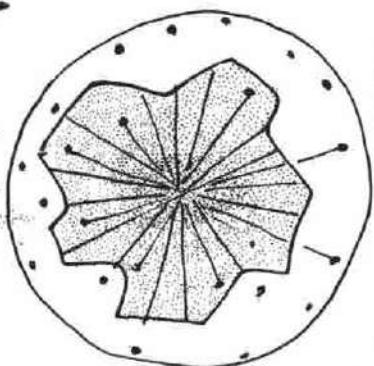


CROISEMENT
DES NAPPES
TERMINÉ



Il faut utiliser
du **RETRECISOL**





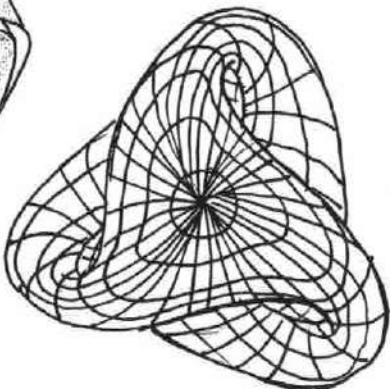
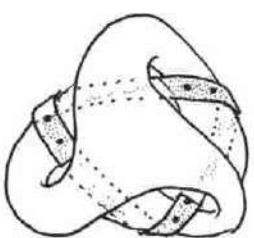
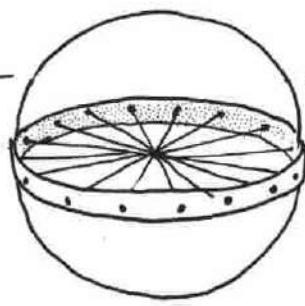
On commence par relier chaque point de la sphère avec son **ANTIPODE** à l'aide de fils trempés dans du **RÉTRÉCISSOL**.



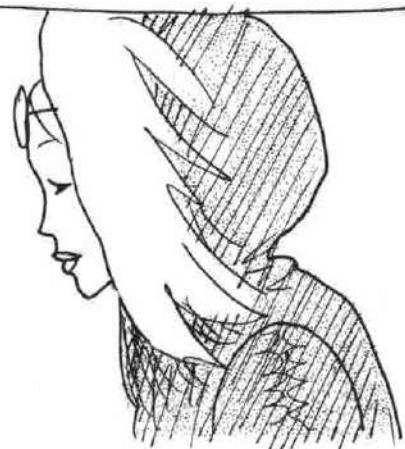
Ces fils se contractent jusqu'à devenir de longueur nulle, tandis que la surface de la sphère reste constante. On amène ainsi chaque point en **CONJONCTION** avec son **ANTIPODAL**.

Mais vous verrez cela dans un autre album, consacré au **RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE**. En attendant, la série d'images du film G montre comment l'**ÉQUATEUR** de la SPHÈRE se replie, en devenant l'**ÉQUATEUR** de la BOY. Le pôle NORD vient évidemment se mettre contre le pôle SUD.

La Direction



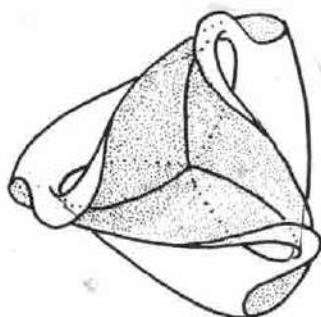
Tous les méridiens et les parallèles de la sphère viennent se recouvrir les uns les autres.



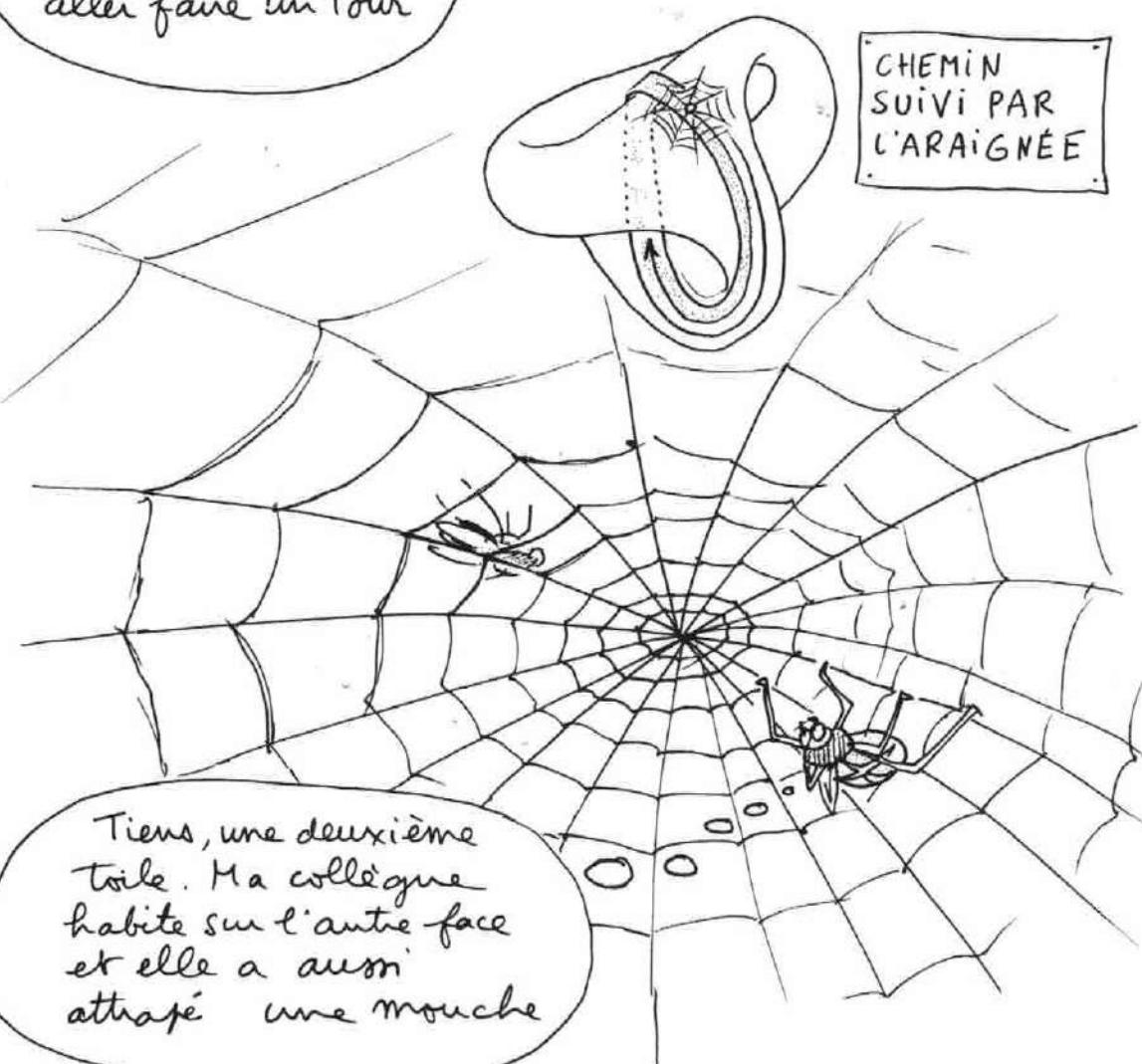
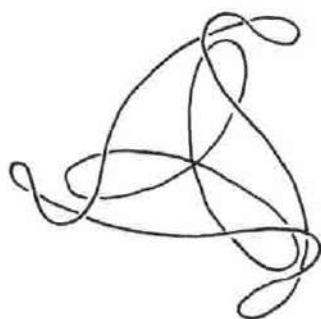
Imagine une araignée qui vit sur une surface de BOY dont le maillage est constitué par ses parallèles et ses méridiens. Elle croirait vivre sur une sphère !



Bon,
maintenant que
le déjeuner est
assuré, je vais
aller faire un tour

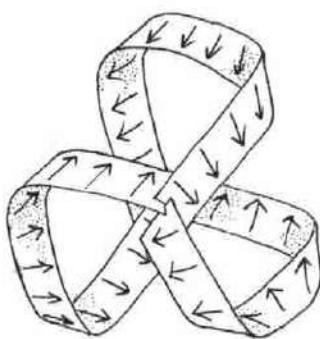
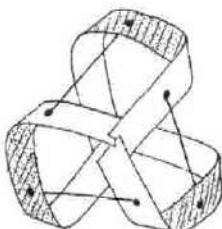


FERMETURE DES
TROIS "TYMPANS"



Tiens, une deuxième
toile. Ma collègue
habite sur l'autre face
et elle a aussi
attrapé une mouche

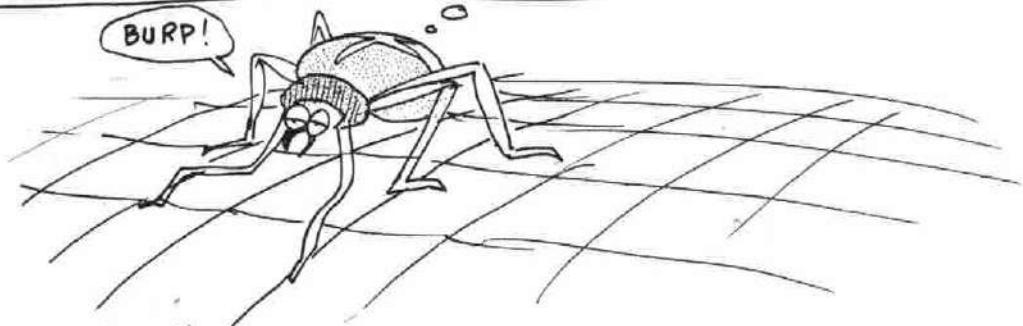
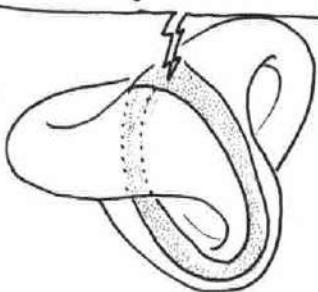
CHEMIN
SUIVI PAR
L'ARAIGNÉE



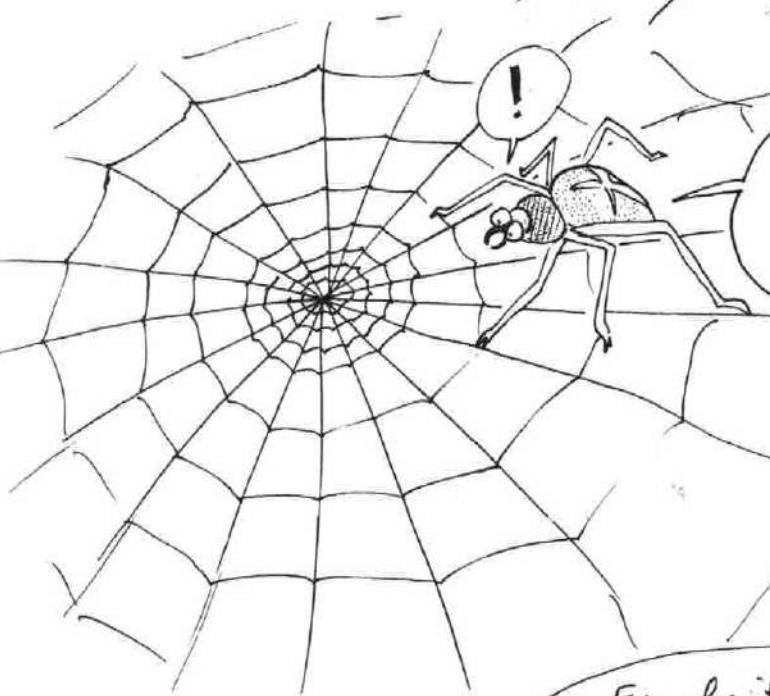
Personne en vue ?

Bon ... je lui mange sa mouche

Bon ... rentrons



Ah la vache ! Pendant que j'étais partie, l'autre araignée est venue et a dévoré MA mouche !



Hi Hi Hi



En fait il n'y avait qu'une seule araignée et qu'une seule mouche

je vais l'attendre. Et quand elle se pointera, je lui ferai sa fête ...



Mais... l'histoire de l'araignée... ça me donne une idée. Pour Amundsen, nous avons la solution



Comment cela ?

monsieur Amundsen,
tout est arrangé !
on a retrouvé
votre pôle Sud..



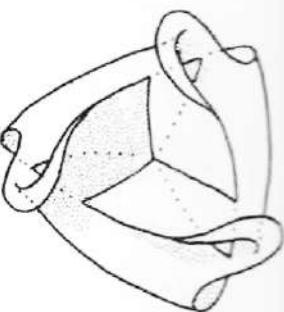
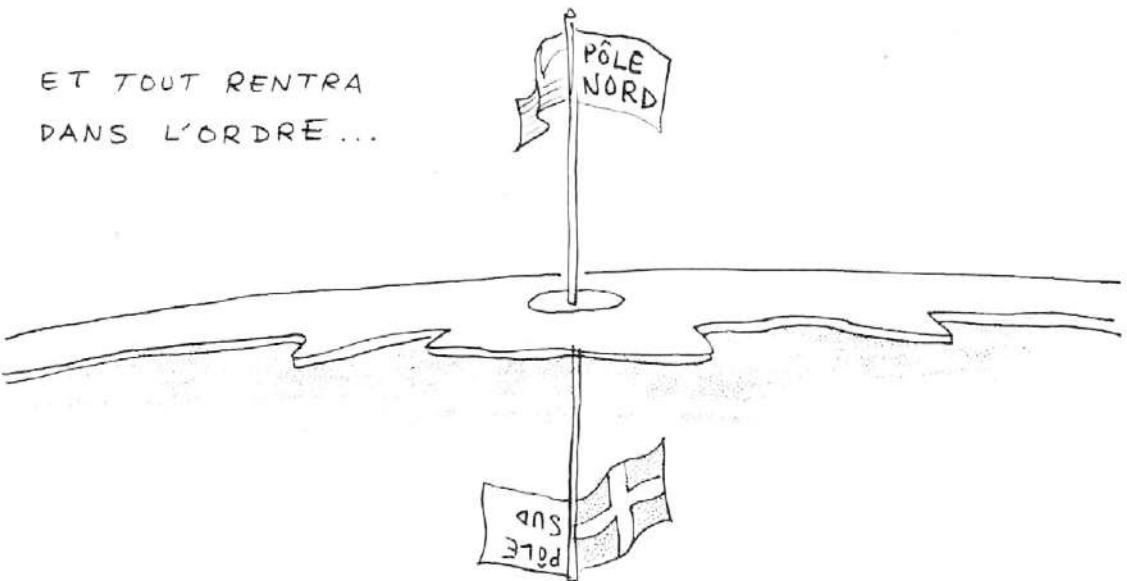
Vous repartez
mais avec ça...



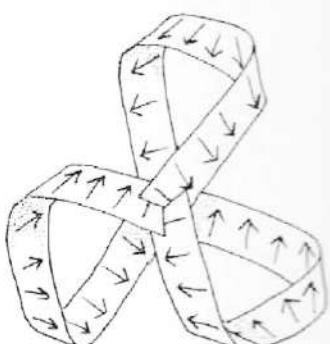
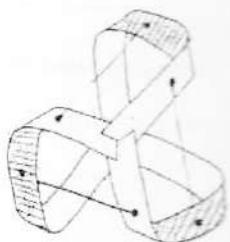
Ah...

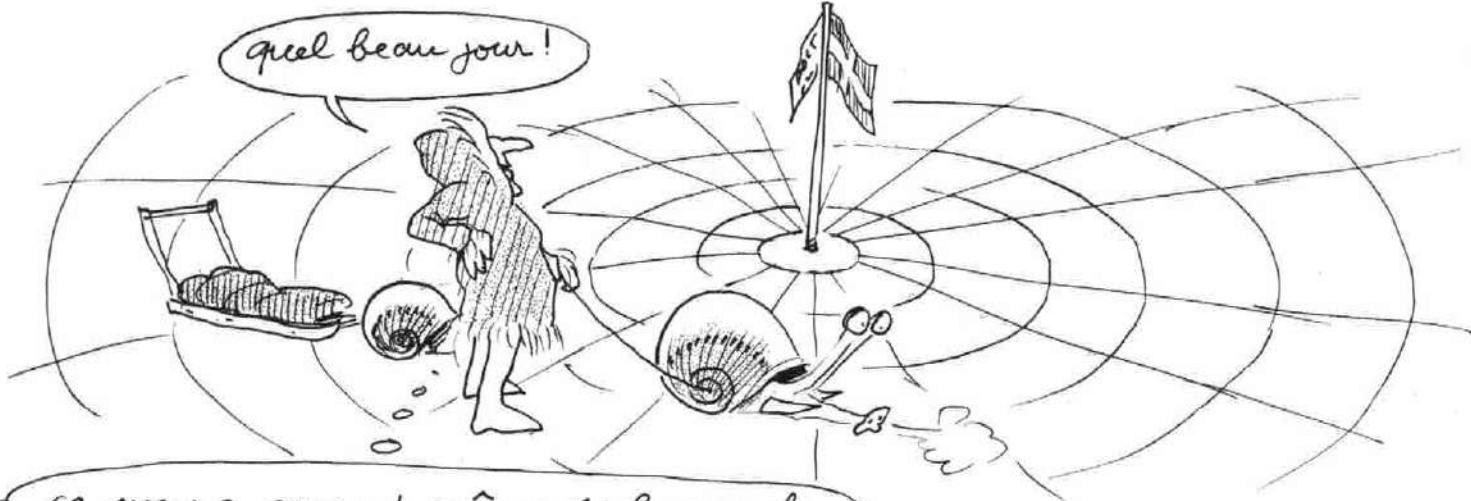


ET TOUT RENTRA
DANS L'ORDRE ...



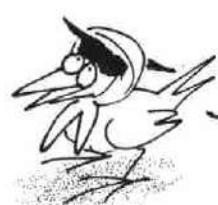
AMORCE DES
"OREILLES"





En science, c'est comme pour tout. Quelques fois, il vaut mieux ne pas trop creuser...

...chaque pôle a sa place et les vaches seront bien gardées...

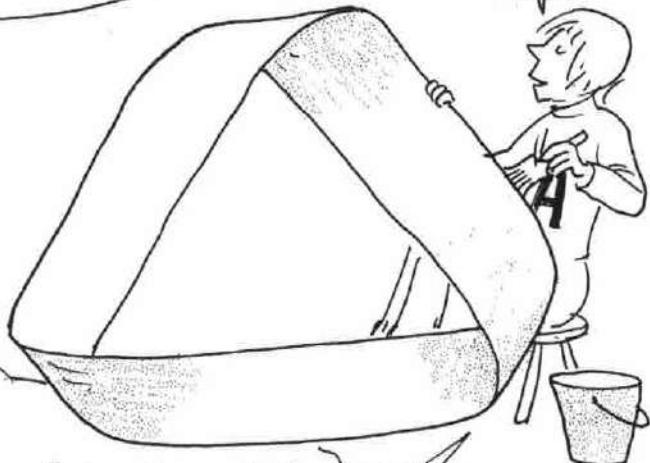


Et d'ailleurs, si on creusait, sous le pôle Nord, on aurait peut-être des surprises.

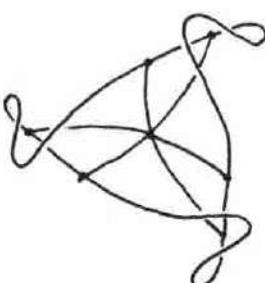
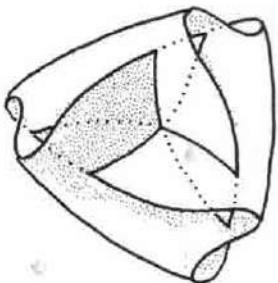


Et il y en a qui déchanterraient, allez

Bon, voilà une affaire réglée.
Mais que fait Lanturle ?

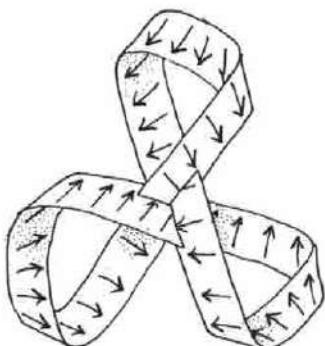
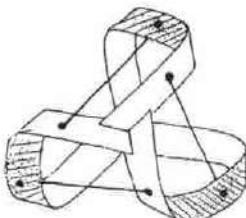
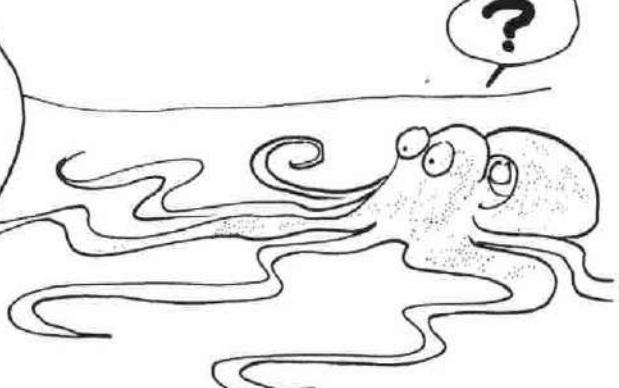
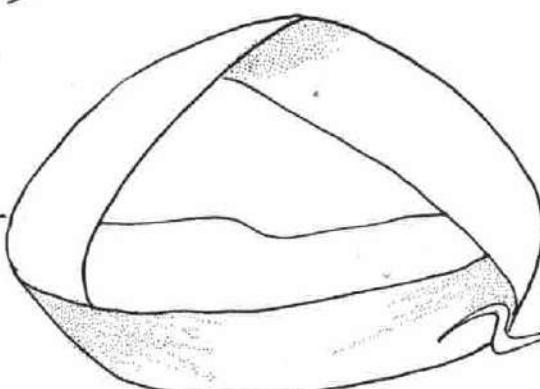


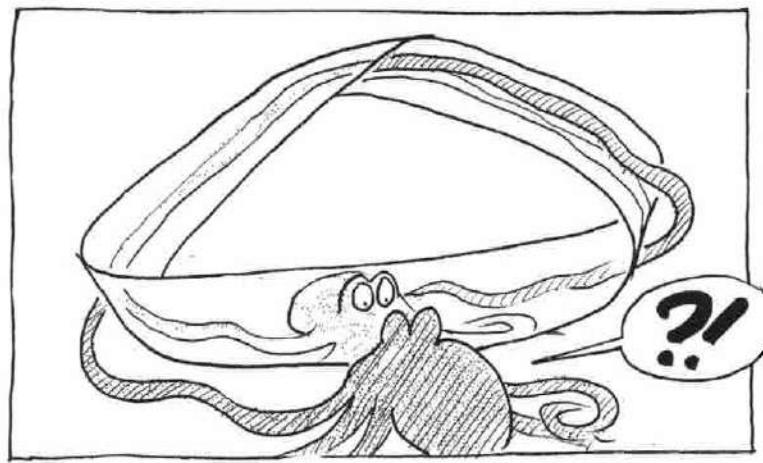
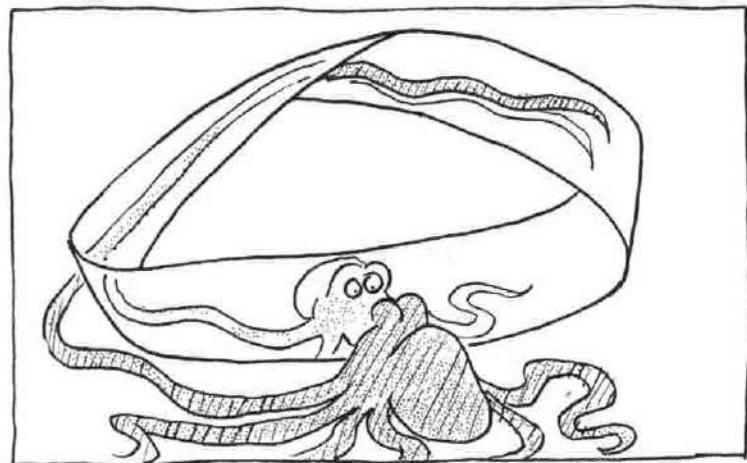
Tu sais ce que
c'est qu'une glace
sans tain. On voit à la fois le reflet
et au travers. Eh bien, je suis en train de
transformer ce ruban de Möbius en glace sans tain.



LE STADE DU MIROIR

Pour attraper des pieuvres





qu'est-ce qui se passe ?! la pieuvre a l'air saisie de stupeur.

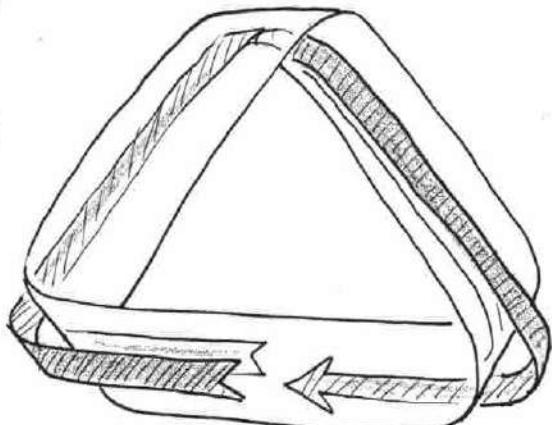


Elle se gratte désespérément la tête

Et elle ne sent RIEN, parce que son vrai bras gratte l'image de sa tête alors que le "bras image" gratte sa vraie tête !

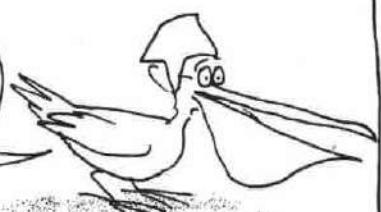


Comme le miroir est unilatéral, en faisant le tour, son bras est passé "de l'autre côté".



Et comme le miroir est parfaitement semi-transparent elle n'est pas fichue de s'en apercevoir !!!

ça a l'air de drôlement la paniquer !



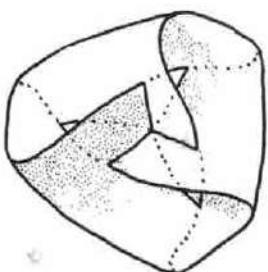
met-toi à sa place!



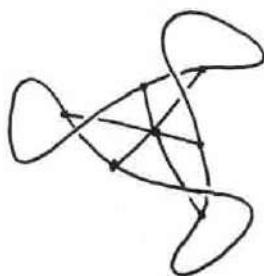
Tu vois, si un jour tu te grattes l'oreille devant un miroir et que tu ne sens rien c'est que ce miroir est unilatéral (*)



Si on transformait une surface de BOY en glace sans tain, l'Univers serait indissociable de sa propre image.

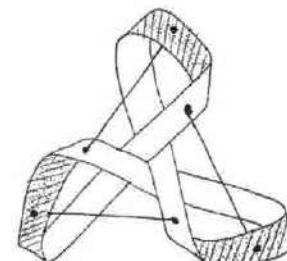


Mais, est-ce que ça ne risquerait pas d'être dangereux ? Je ne sais pas... mais par une sorte de contradiction logique, l'Univers ne risquerait-il pas de disparaître ? (*)

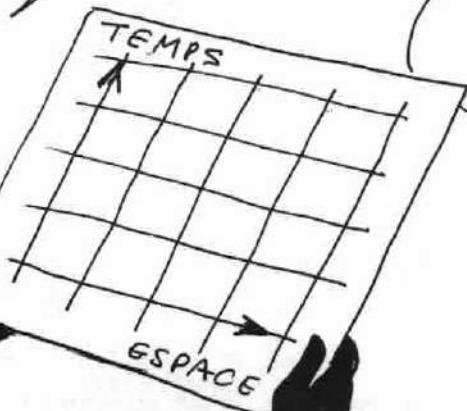


L'ESPACE-TEMPS EN FOLiE

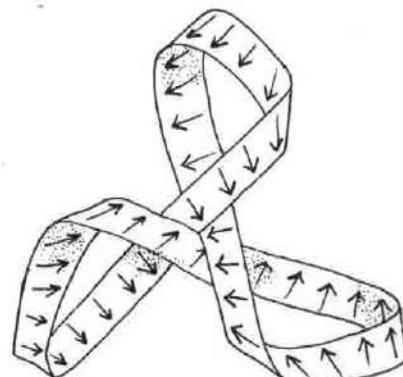
On peut étudier la topologie de l'espace-temps grâce à des modèles à deux dimensions, une pour l'espace et une pour le temps.



CRÉATION D'UN POINT TRIPLE

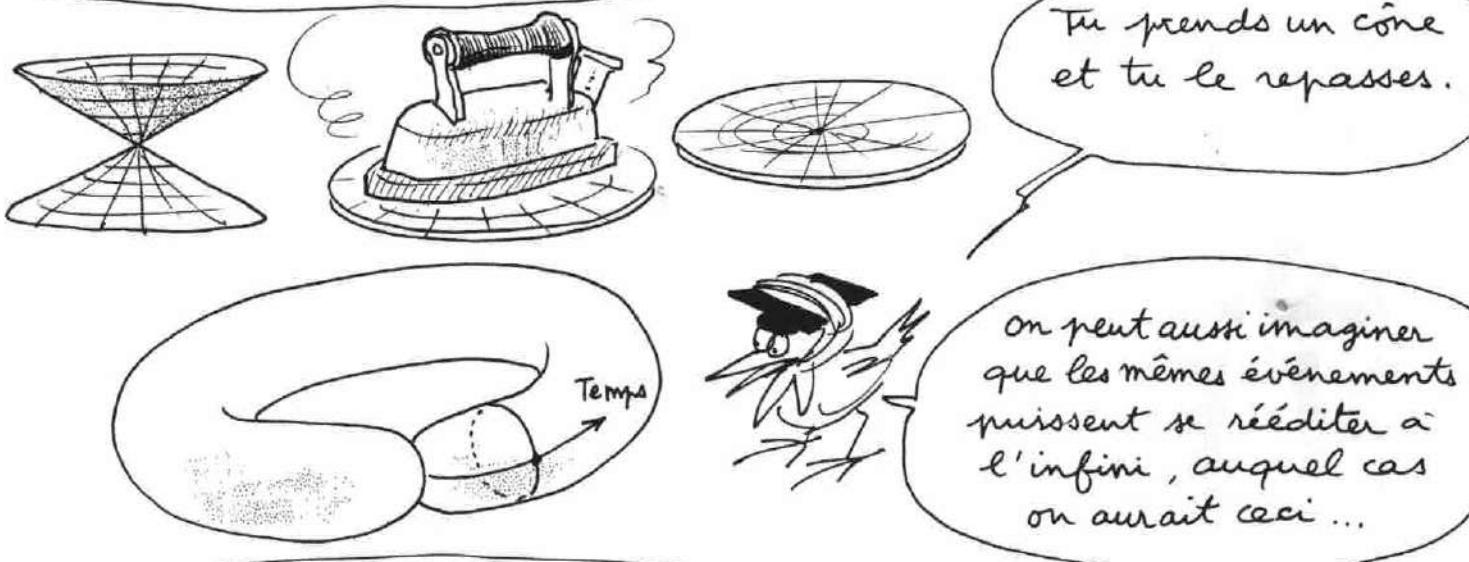
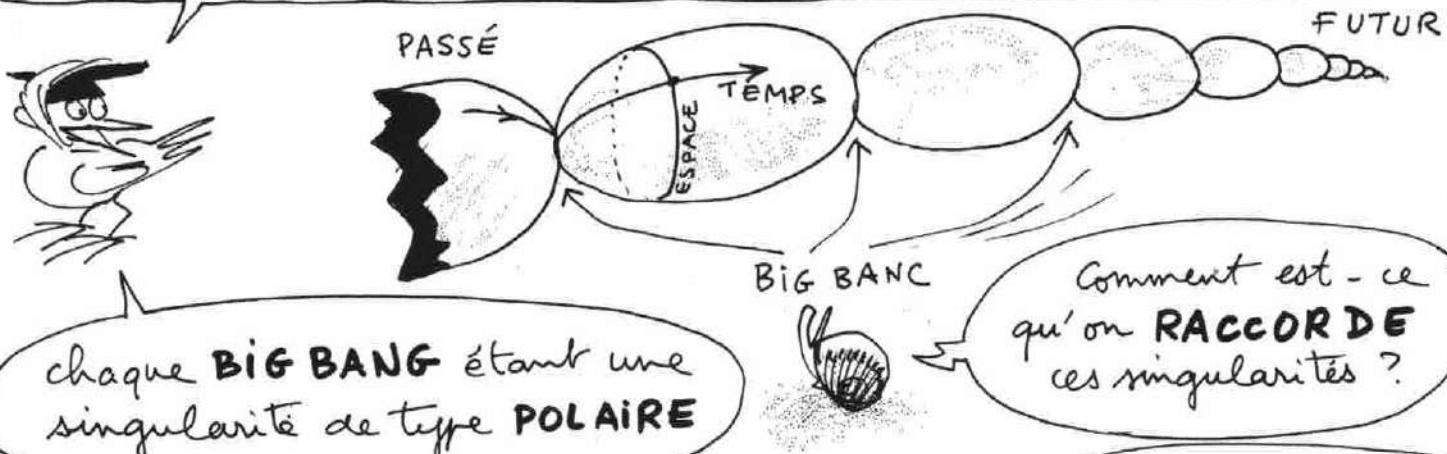


ça fait un maillage.

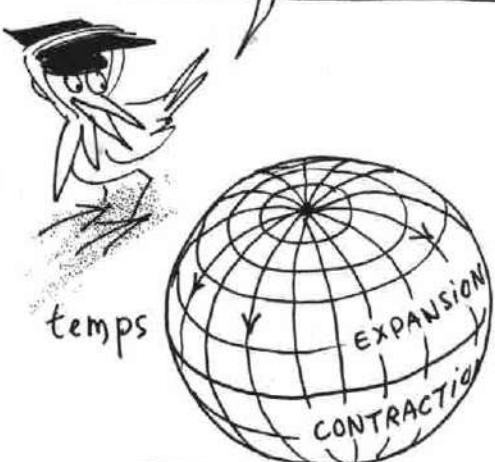


(*) L'EXPÉRIENCE N'A JAMAIS ÉTÉ TENTÉE

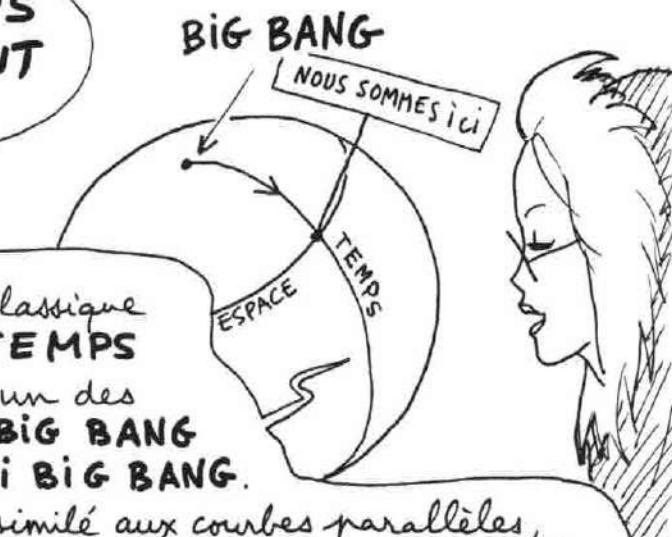
On a vu dans le **BIG BANG** que le modèle d'Univers **CYCLIQUE** de **FRIEDMANN** pouvait être représenté par une image en chapelet de saucisses infini, chaque étranglement étant un nouveau **BIG BANG**.

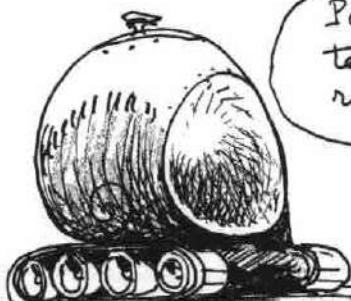


On peut supposer que le **TEMPS** a simplement un **COMMENCEMENT** et une **FIN**, comme ceci

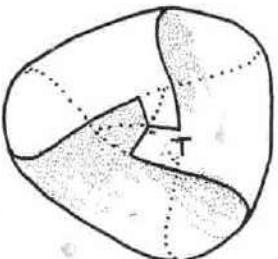


Dans ce modèle classique d'**ESPACE-TEMPS SPHÉRIQUE**, un des pôles est le **BIG BANG** et l'autre l'**ANTI BIG BANG**.
l'espace est assimilé aux courbes parallèles, l'équateur figurant l'état d'extension maximale.
les "lignes de temps" correspondent aux méridiens.



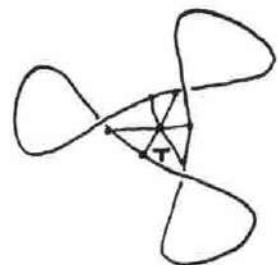
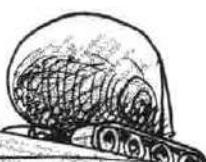


Pour parcourir ces méridiens du temps, ces **LIGNES D'UNIVERS**, rien ne vaut un bon **CHRONOSCAPHE**



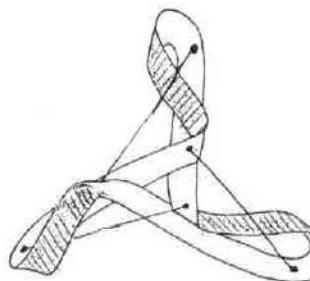
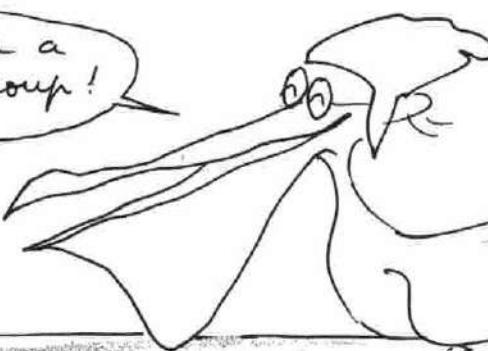
On pourrait emprunter une de ces machines. Cela ne me déplairait pas d'explorer cet espace-temps

CRÉATION DU POINT TRIPLE

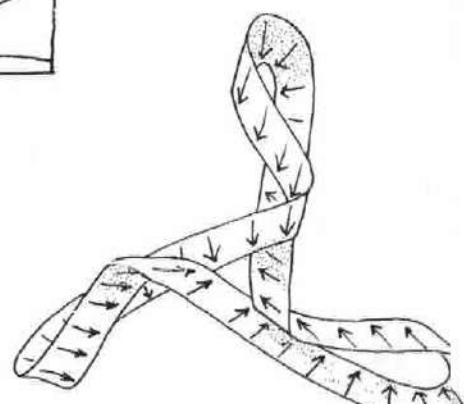
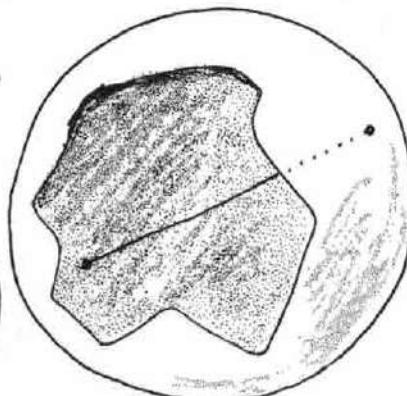


où sont passés Léon et Tirésias ?

Avec Tirésias, on a fait un excellent coup !

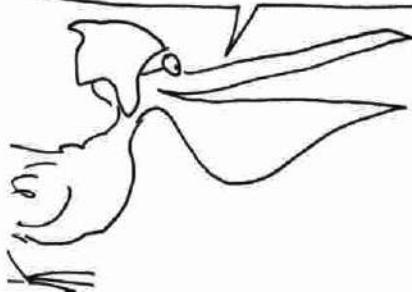


On a pris tous les points de cet espace-temps et on les a joints aux **ANTIPODAUX** avec des fils ...

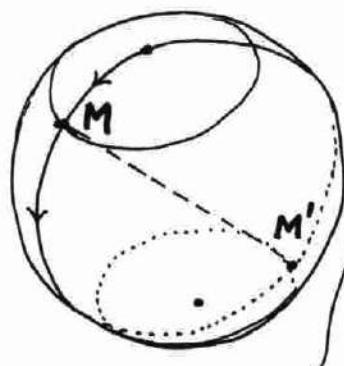


... puis on a trempé tous les fils dans du **RÉTRÉCISSOL**. Tirésias a dit que cela pourrait faire une chouette expérience spatiotemporelle

Vous êtes complètement frappés, tous les deux. Vous ne mesurez pas les conséquences !!!



et que va-t-il se passer ?



A cause de cet animal de Tirésias, l'**ESPACE-TEMPS** est en train de se replier sur lui-même. Tous les **ÉVÉNEMENTS** correspondant à la phase d'**EXPANSION**, c'est-à-dire depuis le **BIG BANG** jusqu'à la situation d'**EXTENSION MAXIMALE**, vont

se retrouver en **CONJONCTION** avec les événements correspondants de la phase de **CONTRACTION**, par mise en coïncidence des **RÉGIONS ANTIPODALES**.

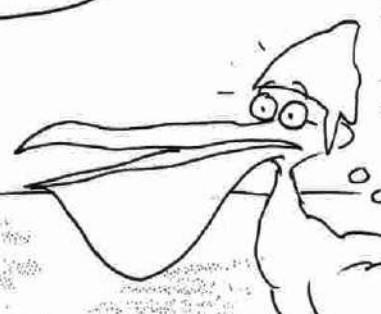


Le **BIG BANG** et l'**ANTI BIG BANG** vont se trouver confondus, non ?



Comme c'est bizarre,
Comme c'est étrange
et quelle coïncidence !

Je suppose que cela a déjà été envisagé ? (*)



Je n'aurais jamais dû écouter Tirésias.



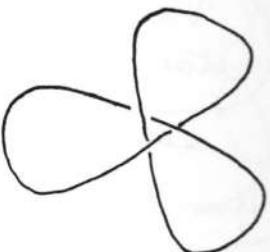
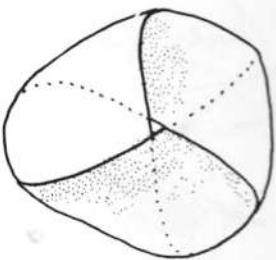
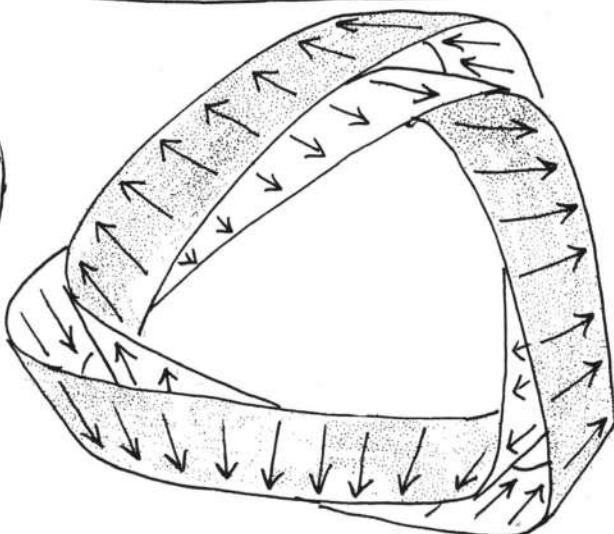
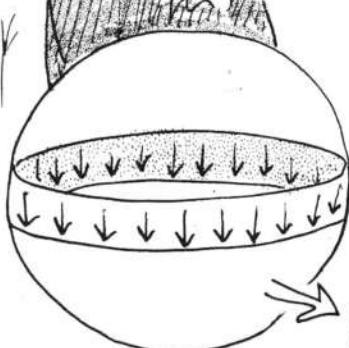
Mais ce phénomène de congonction va faire que des régions de l'espace-temps, confrontées à leurs antipodes vont se retrouver vis à vis de celles-ci en **OPPOSITION TEMPORELLE**.

Impossible !

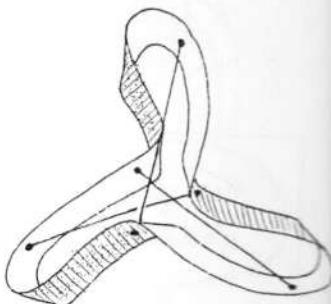
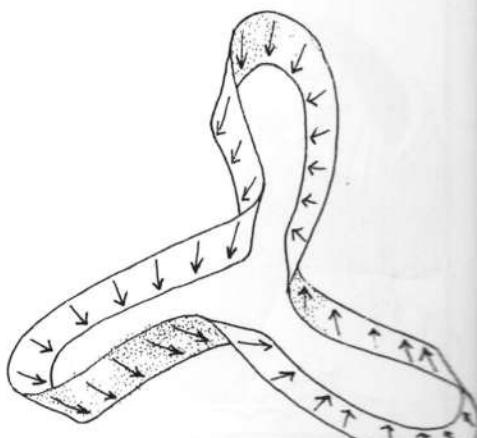


Pas du tout ! Prends par exemple la région située au voisinage de l'équateur de cet espace-temps sphérique, et qui correspond à l'état d'extension maximale. On la voit très bien se replier sur elle même dans le film D

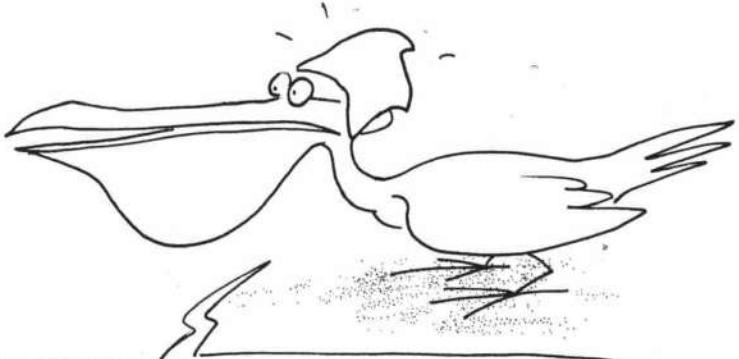
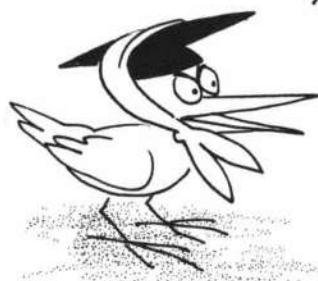
les **FLÈCHES DU TEMPS**
se mettent en **OPPOSITION**



Tu veux dire que ce qui serait le **PASSÉ** pour certains pourrait s'appeler **FUTUR** pour leurs **ANTIPODIENS** ?

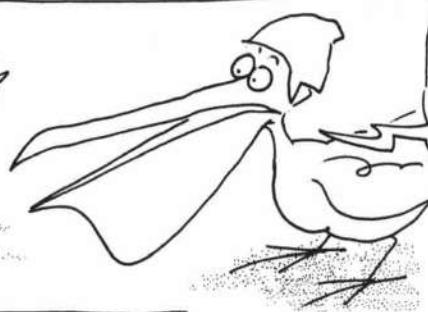


mon cher Léon, vous
avez fait du beau travail



Vous voulez dire que ceci risque de plonger l'Univers
dans une situation de contradiction insoutenable ?

Une sorte d'impassé logique

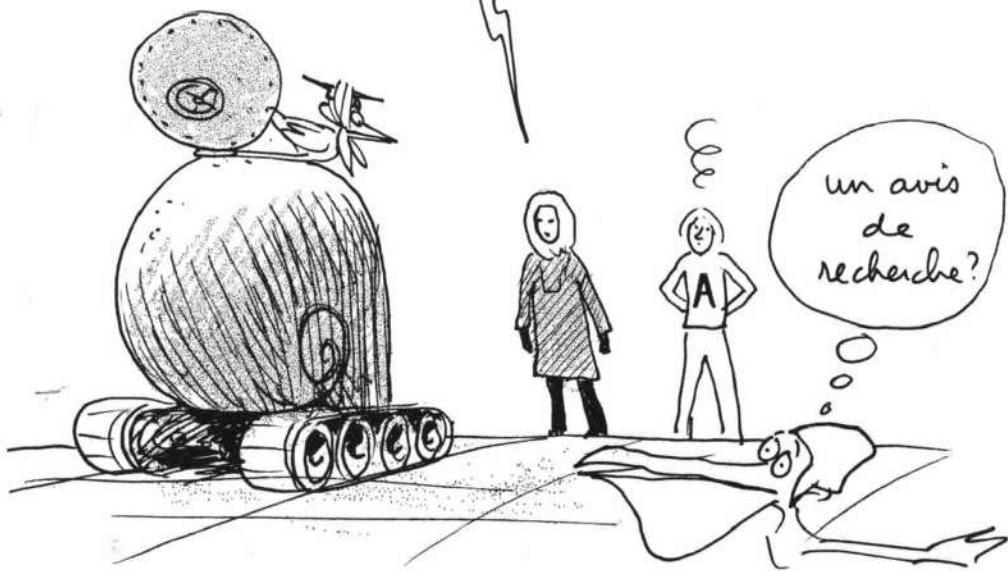


Lorsque le RÉTRÉCISSOL
aura fait son effet, l'Univers
va se télescopier lui-même et
nous allons prendre le temps
à rebrousse-poil de plein fouet

Au fait, où est
passé Tièresias ?



Montons dans le chronoscaphe. On
peut essayer de lui lancer un appel.





Attends, si Tirésias est
pour nous **RÉTROCHRONÉ**
et si on réussit à entrer en
contact avec lui, il saura
tout ce qu'on va lui dire

Pire, en fait, ce message,
dans son **TEMPS PROPRE**
c'est lui qui l'émettra !!

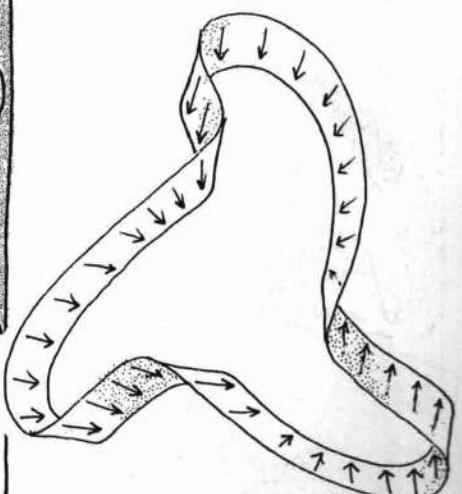
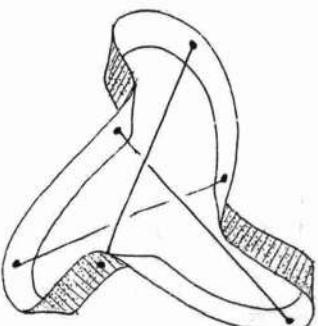
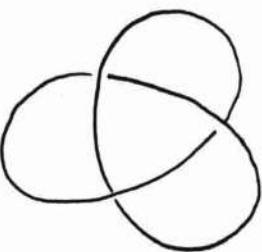
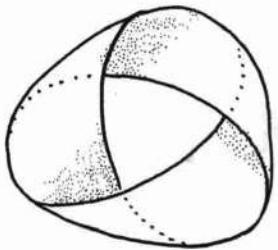


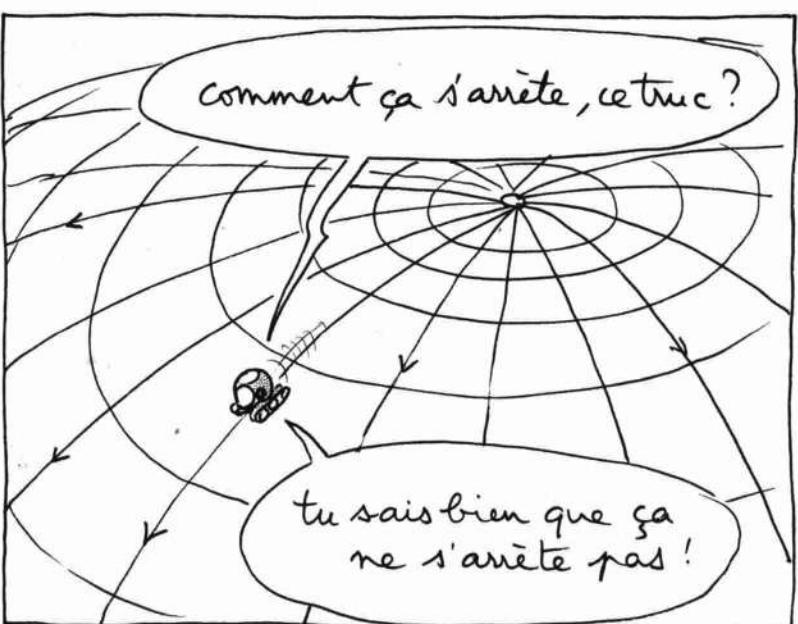
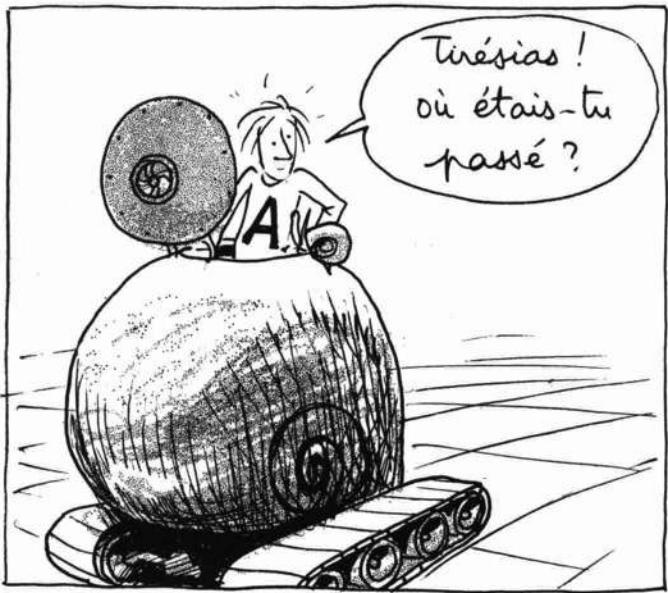
Et, de toute façon, si
on le croise, ça sera bien
pire !

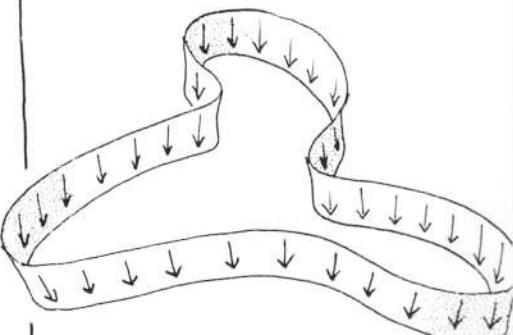
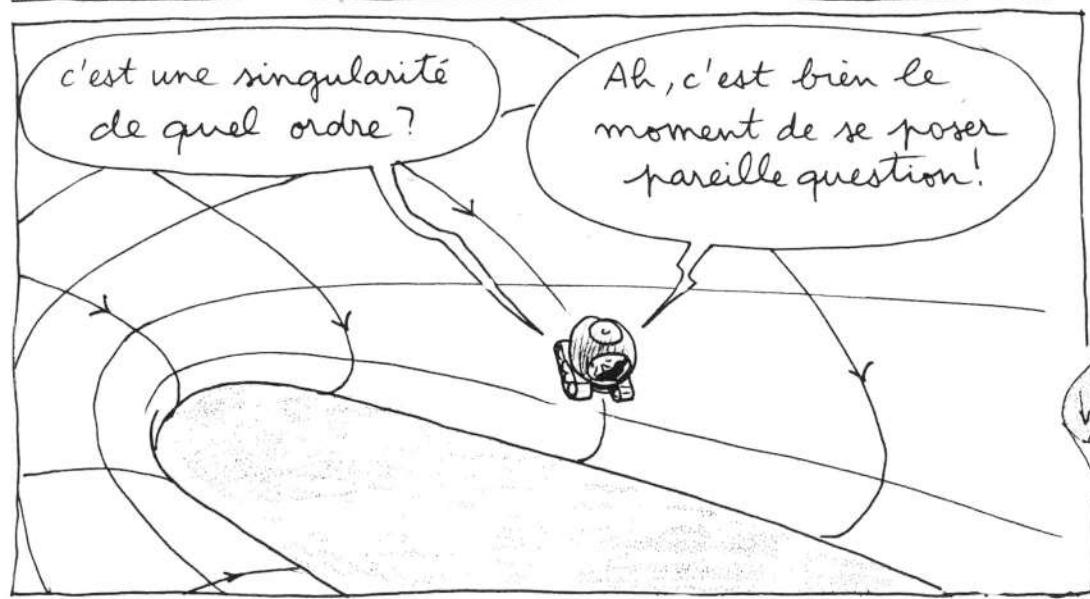
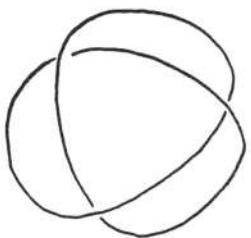
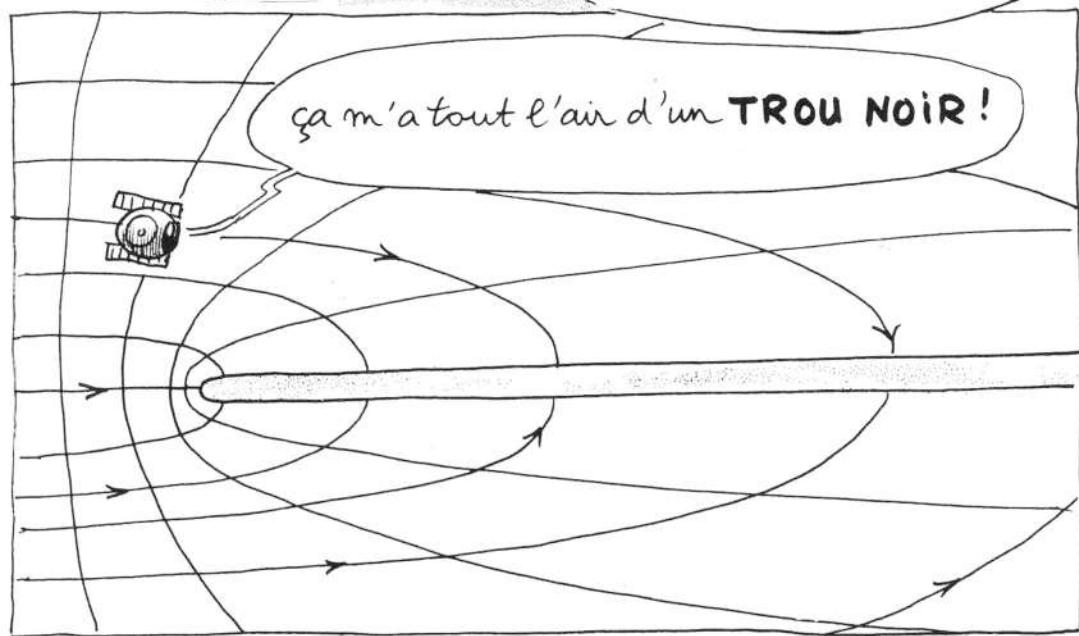
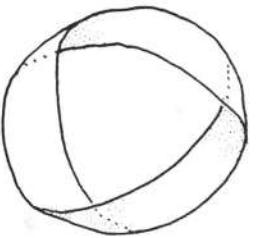
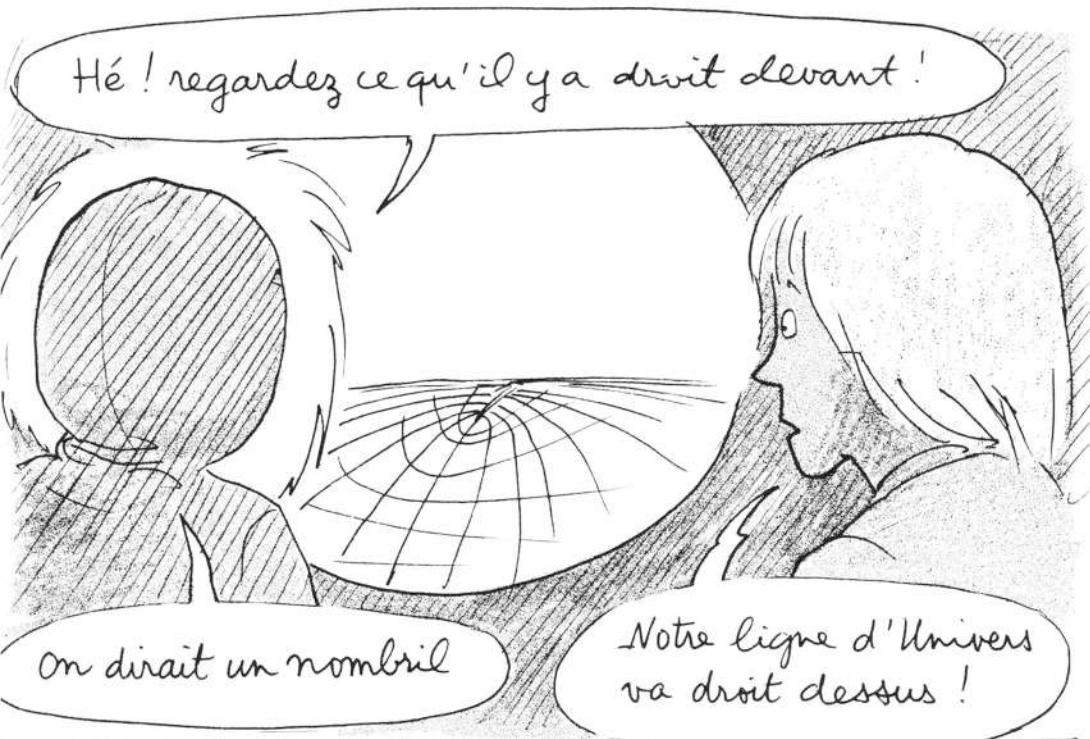
Feynmann pensait que
l'antimatière vivait le
temps à l'envers !



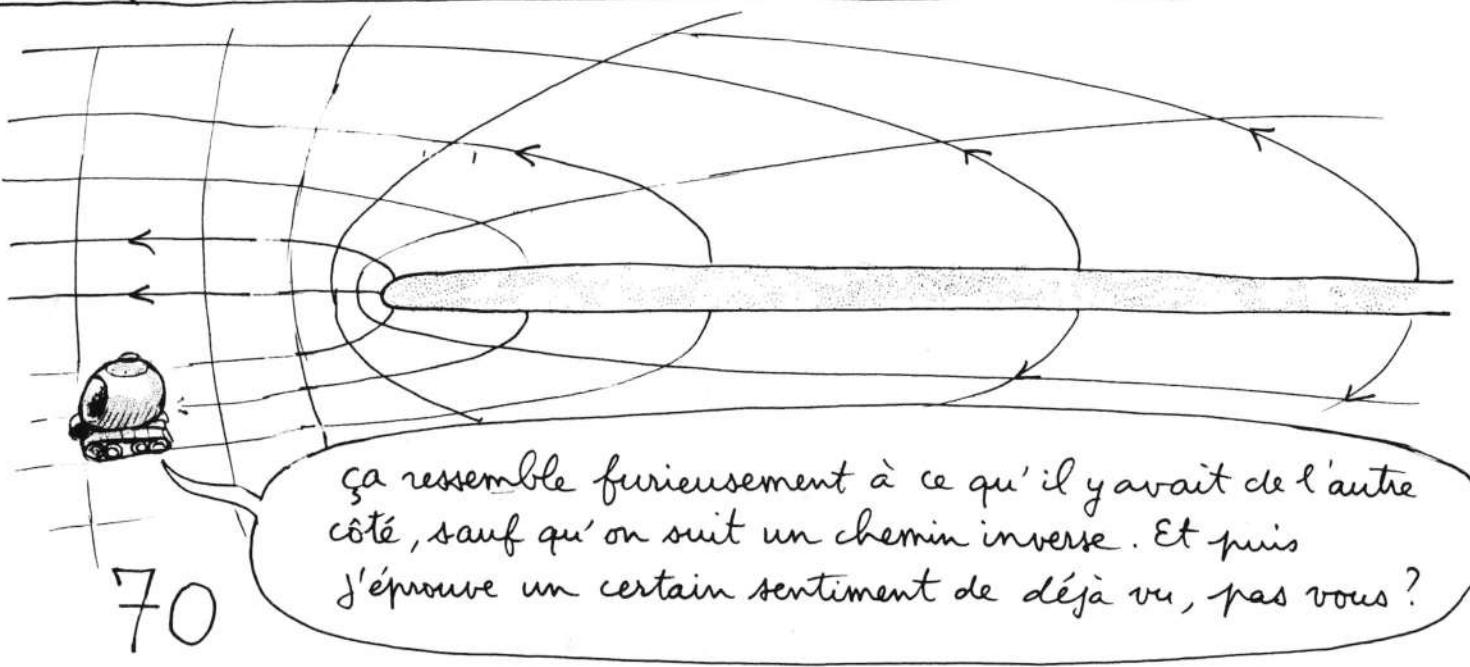
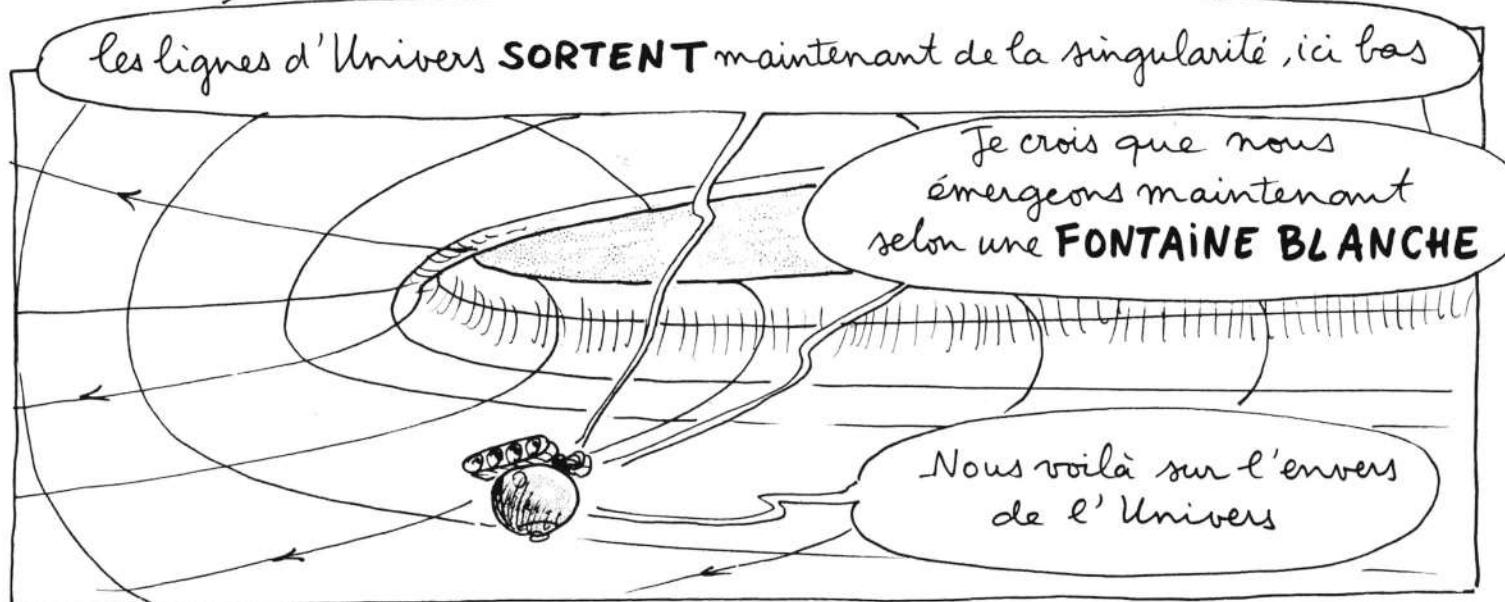
alors, si par malheur
on croisait Tirésias,
il serait devenu un
ANTI-TIRÉSIAS







On dirait une sorte de boutonnière de l'espace - temps



Mais, ça y est, j'y suis!
le **MIROIR!**...

quel miroir?

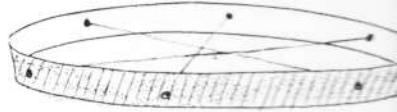


Ces deux moitiés d'Univers sont en miroir l'une par rapport à l'autre. Mais c'est un **MIROIR SPATIO-TEMPOREL**. De l'autre côté du trou noir, tout est inversé par rapport au temps. les lois de la physique paraissent inversées : la singularité repousse la matière au lieu de l'attirer !! (*)

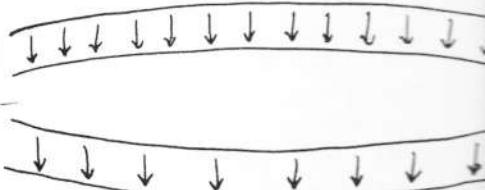
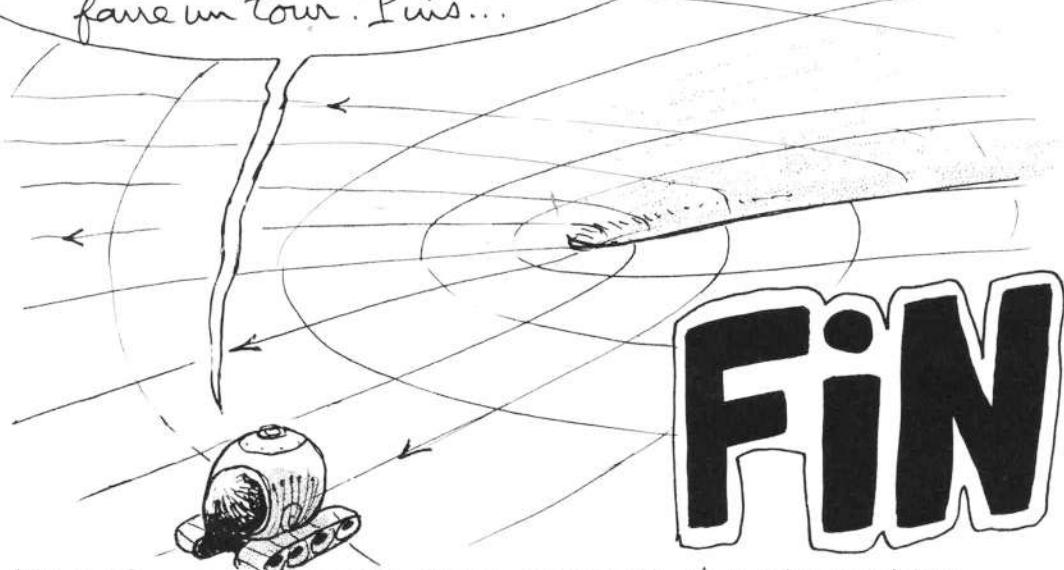


Alors cela signifie que nous allons revivre cette bande dessinée à rebours

Eh oui. Le CHRONOSCAPHE va s'amener, puis Anselme ouvrira la porte et Tirésias ira faire un tour. Puis...



BANDE BILATÉRE
POINTS ANTIPODAUX LI



(*) LA MÊME STRUCTURE PEUT EXISTER À 4 DIMENSIONS

ANNEXE SCIENTIFIQUE

BOY, élève de Hilbert, découvrit sa surface en 1902. La première représentation analytique en fut donnée en 1981 par Jérôme SORIAU (fils du mathématicien J.M. SORIAU) et l'auteur. La méthode, semi-empirique, consiste à assimiler les méridiens de la surface à des ellipses, qui sont ensuite paramétrées. Le point courant est donné par :

$$\begin{cases} x = X_1 \cos \mu - Z_1 \sin \alpha \sin \mu \\ y = X_1 \sin \mu + Z_1 \sin \alpha \cos \mu \\ z = Z_1 \cos \alpha \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{A^2 - B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + A \cos \theta - B \sin \theta \\ Z_1 = \frac{B^2 - A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + A \cos \theta + B \sin \theta \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \sin 3\mu \quad \begin{cases} A(\mu) = 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) + 1,98 \sin(3\mu - \pi/6) \\ B(\mu) = 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) - 1,98 \sin(3\mu - \pi/6) \end{cases}$$

Méridiens : courbes $\mu = \text{cte}$; θ variant de 0 à 2π , μ variant de 0 à π .
Le programme BASIC ci-après donne le tracé figuré sur les pages de garde :

```

1 REM TRACE MERIDIENS DE LA SURFACE DE BOY
3 HOME : TEXT
50 PI = 3.141592:P3 = PI / 3:P6 = PI / 8:P8 = PI / 8
60 HGR : HCOLOR= 3
90 FOR MU = 0 TO PI STEP 0.1
95 P = P + 1
100 D = 34 + 4.794 * SIN (6 * MU - P3)
110 E = 6.732 * SIN (3 * MU - P6)
120 A = D + E:B = D - E
130 SA = SIN (P8 * SIN (3 * MU))
140 C2 = SQR (A * A + B * B):C3 = (4 * D * E) / C2
160 CM = COS (MU):SM = SIN (MU)
180 FOR TE = 0 TO 6.288 STEP .06
190 TC = A * COS (TE):TS = B * SIN (TE)
200 X1 = C3 + TC - TS
210 Z1 = C2 + TC + TS
250 REM VOICI LES 3 COORDONNEES
300 X = X1 * CM - Z1 * SA * SM
310 Y = X1 * SM + Z1 * SA * CM
350 REM PROGRAMME DE DESSIN
360 HPLOT 130 + X,80 + Y
400 NEXT TE: NEXT MU

```

