

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUE
Dirigé par le Professeur P. LELONG

STRUCTURE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Maîtrises de mathématiques

J.-M. SOURIAU

*Professeur de Physique Mathématique
à la Faculté des Sciences de Marseille*

DUNOD
PARIS
197C

COLLECTION DUNOD UNIVERSITÉ

Maîtrise de mathématiques, maîtrise de mathématiques et applications fondamentales

- L. CHAMBADAL et J. L. OVAERT, *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle.*
P. KRÉE, *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales.*
M. MÉTIVIER, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités.*
J.-M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques.*
G. GONTIER, *Mécanique des milieux déformables.*

© DUNOD, 1969

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographique, microfilm, bande magnétique, disque optique, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

Courageusement scanné par
Myriame Belmihoub, nov 2006

Table des matières

J'adresse des remerciements sincères à ceux qui m'ont aidé dans la conception et la rédaction de ce livre par leurs remarques, leurs discussions et leurs conseils ; notamment H. Bacry, P. Casal, R. Haag, F. Halbwachs, D. Kastler, A. A. Kirillov, L. Michel, M. Zerner ; à J. Breuneval, J. Elhadad et H. H. Fliche qui ont, à l'occasion d'un séminaire à la Faculté des Sciences de Marseille, vérifié une grande partie des calculs et des raisonnements ; et à P. Lelong, qui a bien voulu accueillir ce livre dans la collection Dunod-Université. Que tous ceux que je n'ai pas cités veuillent bien me le pardonner.

Jean-Marie SOURIAU

Notre-Dame de Vaulx,
septembre 1968.

Introduction, XIII

Chapitre I. Géométrie différentielle

§ 1 Variétés.

- 3 Définition des variétés.
- 6 Ouverts. Applications différentiables.
- 7 Espace vectoriel tangent.
- 11 Variétés plongées.
- 14 Revêtements.
- 15 Connexité.
- 16 Homotopie.

§ 2 Dérivations.

- 19 Variables.
- 20 Champs de vecteurs. Dérivations.
- 24 Images d'un champ de vecteurs.
- 26 Crochet de Lie.

§ 3 Equations différentielles.

- 28 Exponentielle d'un champ de vecteurs.
- 29 Image d'une équation différentielle.

§ 4 Formes différentielles.

- 32 Champs covariants.
- 34 Dérivée de Lie.
- 35 Champs de tenseurs covariants.
- 36 p -formes.
- 37 Dérivée extérieure.

§ 5 Variétés feuilletées.

- 40 Feuilletages.
- 44 Quotient d'une variété par un feuilletage.
- 45 Invariants intégraux.
- 46 Feuilletage caractéristique d'une forme.

§ 6 *Groupes de Lie.*

- 47 Définition.
- 48 Groupe de Lie opérant sur une variété.
- 50 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie.
- 51 Orbites.
- 52 Représentation adjointe.
- 53 Sous-algèbres et sous-groupes de Lie.
- 56 Stabilisateur.
- 56 Exemples classiques de groupes de Lie.

§ 7 *Calcul des variations.*

- 65 Problèmes variationnels classiques.
- 66 Variables canoniques.
- 68 Formalisme hamiltonien.
- 69 Interprétation géométrique des équations canoniques.
- 71 Transformations d'un problème variationnel.
- 72 Théorème de Noether.

Chapitre II. Géométrie symplectique

§ 8 *2-formes.*

- 75 Orthogonalité.
- 76 Bases canoniques.
- 79 Groupe symplectique.

§ 9 *Variétés symplectiques.*

- 83 Variétés symplectiques et pré-symplectiques.
- 86 Structures symplectiques définies par une 1-forme.
- 87 Crochets de Poisson.
- 89 Structures symplectiques induites.

§ 10 *Transformations canoniques (symplectomorphismes).*

- 93 Cartes canoniques.
- 96 Transformations canoniques.
- 98 Similitudes canoniques.
- 100 Revêtements de variétés symplectiques.
- 101 Transformations canoniques infinitésimales.

§ 11 *Groupes dynamiques.*

- 104 Définition d'un groupe dynamique.
- 108 Cohomologie d'un groupe dynamique.
- 112 Cohomologie d'un groupe de Lie.
- 112 Cohomologie d'une algèbre de Lie.
- 115 Variétés symplectiques définies par un groupe de Lie.

Chapitre III. Mécanique

§ 12 *Structure géométrique de la mécanique classique.*

- 123 Point matériel.
- 124 Systèmes de points matériels.
- 125 Liaisons.
- 128 Expression des forces.
- 128 Espace d'évolution.
- 130 Espace de phases et espace des mouvements.
- 132 Forme de Lagrange.
- 134 Forme de Lagrange pour les systèmes liés.
- 136 Changement de référentiel.
- 138 Principe de relativité galiléenne.
- 141 Principe de Maxwell.
- 143 Potentiels et formalisme variationnel.
- 145 Conséquences géométriques du principe de Maxwell.
- 147 Application : variation des constantes.
- 148 Moments galiléens.
- 154 Exemples de groupes dynamiques.

§ 13 *Principes de la mécanique symplectique.*

- 159 Mécanique symplectique non relativiste.
- 160 Moments, masse et barycentre.
- 162 Décomposition barycentrique.
- 168 Espace de Minkowski et groupe de Poincaré.
- 172 Mécanique relativiste.

§ 14 *Description mécaniste des particules élémentaires.*

- 180 Systèmes élémentaires.
- 181 Cas I : particules à spin.
- 187 Cas II : particules sans spin.
- 189 Cas III : particules de masse nulle.
- 192 Particules non relativistes.
- 196 Masse et barycentre d'un système relativiste.
- 197 Inversions d'espace et de temps.

§ 15 *Dynamique des particules.*

- 201 Point matériel dans un champ électromagnétique.
- 205 Particule à spin dans un champ électromagnétique.
- 207 Systèmes de particules sans interactions.
- 210 Interactions.
- 213 Théorie de la diffusion.
- 218 Diffuseurs bornés.
- 220 Optique géométrique.
- 222 Miroir plan.
- 225 Collisions de particules libres.

Chapitre IV. Mécanique statistique

§ 16 *Mesures sur une variété.*

- 231 Variétés composées.
- 233 Ensembles compacts.
- 235 Espaces de Riesz.
- 237 Mesures.
- 240 Produit tensoriel de mesures.
- 242 Exemples de mesures.
- 244 Mesures complètement continues.
- 249 Support d'une mesure.
- 250 Mesures bornées.
- 255 Fonctions intégrables.
- 258 Images d'une mesure. Exemples.
- 265 Variables aléatoires.
- 267 Valeurs moyennes.
- 269 Entropie. Loi de Gibbs.
- 275 Ensemble de Gibbs d'un groupe dynamique.

§ 17 *Les principes de la mécanique statistique.*

- 281 Etats statistiques.
- 281 Hypothèses de la théorie cinétique des gaz.
- 283 Equilibres d'un système conservatif.
- 289 Gaz parfaits.
- 291 Thermomètre à gaz parfait.
- 293 Chaleur et travail.
- 295 Chaleurs spécifiques.
- 297 Mécanique statistique covariante.
- 304 Equilibre statistique d'un système isolé.
- 305 Mécanique statistique relativiste.
- 306 Gaz parfait relativiste.
- 308 Equilibres statistiques de photons.

Chapitre V. Une méthode de quantification

§ 18 *Quantification géométrique.*

- 317 Variétés quantiques.
- 319 Quantification d'une variété symplectique.
- 323 Quantification d'une variété potentielle.
- 324 Quantification d'une sphère S_2 .
- 326 Quantification par fusion.
- 327 Quantification d'un produit direct.
- 329 Quantification de la particule relativiste de spin 1/2.
- 333 Quantification de la particule de masse nulle (spin 1/2).
- 335 Quantification de la particule de masse nulle (spin 1).
- 337 Variétés de Planck.
- 338 Quantomorphismes.

- 340 Homotopie et quantification.
- 343 Quantomorphismes infinitésimaux.
- 346 Quantification des groupes dynamiques.
- 351 Espace de Hilbert d'une variété quantique.

§ 19 *Quantification de systèmes dynamiques.*

- 358 Le principe de correspondance.
- 360 Vecteurs d'état ; observables.
- 362 Formulation de la condition de Planck.
- 363 Etats stationnaires.
- 364 Formation des équations d'onde.
- 365 Point matériel non relativiste.
- 371 Point matériel relativiste.
- 373 Particule non relativiste de spin 1/2.
- 375 Particule relativiste de spin 1/2.
- 377 Particule de masse nulle, de spin 1/2.
- 379 Particule de masse nulle, de spin 1.
- 383 Assemblées de particules.
- 386 Créateurs et annihilateurs.
- 392 Etats quantiques.
- 399 Exemples.
- 403 Index.
- 413 Notations.