NOTE III

Particules vectorielles chargées

Étudions, en relativité à 5 dimensions, un champ de covecteurs Φ ; nous désignerons par Φ_j les composantes de Φ dans une carte standard.

Comme dans le cas quadridimensionnel (voir (37.1) à (37.14)), on est amené à introduire la 2-forme

$$\Psi = \nabla\Phi \tag{1}$$

et on est conduit à l'équation de champ

$$\operatorname{div}\Psi + a\,\Phi = 0 \qquad (a \in \mathrm{R}). \tag{2}$$

Le système (1), (2) entraîne les équations

$$\operatorname{div}\Phi = 0\,;\ \pentagon\Phi + a\Phi = 0\,;\ \nabla\Psi = 0\,;\ \pentagon\Psi + a\Psi = 0 \tag{3}$$

en désignant par $\pentagon$ le laplacien penta-dimensionnel sur les formes (30.49) [on suppose $a \neq 0$].

Décomposons Φ et Ψ en série de Fourier suivant x^5 :

$$\Phi = \sum_n \Phi_n\, e^{inx^5} \qquad \Psi = \sum_n \Psi_n\, e^{inx^5} \tag{4}$$

Φ_n et Ψ_n ne dépendant que des x^λ (indices grecs $= 1,2,3,4$).

Introduisons les variables quadridimensionnelles complexes

(5) $$\boldsymbol{\Phi}_\mu = [\widehat{\Phi_n}]_\mu \, ; \; \boldsymbol{\Psi}_{\mu\nu} = [\widehat{\Psi_n}]_{\mu\nu} \, ; \; \varphi = \frac{1}{\xi^2}[\widehat{\Phi_n}]_5 \, ; \; \theta_\mu = \frac{1}{\xi^2}\{[\widehat{\Psi_n}]_{\mu 5} + \mathrm{in}\, \boldsymbol{\Phi}_\mu\}$$

le signe $\wedge$ désignant les composantes transverses. Les formules du § 41 permettant de calculer

(6) $$\begin{cases} \Phi_\mu = \boldsymbol{\Phi}_\mu + \xi^2 \varphi \mathcal{A}_\mu \\ \Phi_5 = \xi^2 \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi_{\mu\nu} = \boldsymbol{\Psi}_{\mu\nu} + [\xi^2\theta_\mu - \mathrm{in}\, \boldsymbol{\Phi}_\mu]\mathcal{A}_\nu - [\xi^2\theta_\nu - \mathrm{in}\, \boldsymbol{\Phi}_\nu]\mathcal{A}_\mu \\ \Psi_{\mu 5} = -\Psi_{5\mu} = \xi^2\theta_\mu - \mathrm{in}\, \boldsymbol{\Phi}_\mu \\ \Psi_{55} = 0 \end{cases}$$

(on a sous-entendu l'indice n).

En portant dans le système (1), (2), et en supposant ξ constant, il vient

(7) $$\begin{gathered} \boldsymbol{\Psi} - \mathrm{Ext}\,(\mathcal{A})(\xi^2\theta - \mathrm{in}\, \boldsymbol{\Phi}) = \nabla\boldsymbol{\Phi} + \xi^2\nabla[\varphi\mathcal{A}] \\ \theta = \nabla\varphi - \mathrm{in}\, \varphi\mathcal{A} \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{\Psi} - \mathrm{in}\, \mathrm{Int}\,(\bar{\mathcal{A}})\boldsymbol{\Psi} + \mathrm{in}\, \theta + \left[a + \frac{n^2}{\xi^2}\right]\boldsymbol{\Phi} = 0 \end{gathered}$$

et une équation scalaire ; Si $n \neq 0$, on peut la remplacer par la première des équations (3), qui s'écrit :

(8) $$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\Phi} - \mathrm{in}\, \mathrm{Int}\,(\bar{\mathcal{A}})\boldsymbol{\Phi} - \mathrm{in}\, \varphi = 0.$$

Posons :

(9) A, F : potentiel et champ électromagnétiques ;

$$\tilde{\nabla} = \nabla - \frac{\mathrm{in}\, e}{\hbar}\mathrm{Ext}\,(\mathrm{A}) \, ; \; \widetilde{\mathrm{div}} = \mathrm{div} - \frac{\mathrm{in}\, e}{\hbar}\mathrm{Int}\,(\bar{\mathrm{A}}) \, ;$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{in}\, \varphi \, ; \qquad \frac{m^2}{\hbar^2} = a + \frac{n^2}{\xi^2} \qquad \text{(cf. (42.13))}$$

alors le système (7) (8) s'écrit :

(10) $$\begin{gathered} \boldsymbol{\Psi} = \tilde{\nabla}\boldsymbol{\Phi} + \frac{\xi^2 e}{\mathrm{in}\, \hbar}\varphi \mathrm{F} \\ \boldsymbol{\varphi} = \widetilde{\mathrm{div}}\, \boldsymbol{\Phi} \end{gathered}$$

(11) $$\widetilde{\mathrm{div}}\, \boldsymbol{\Psi} + \tilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi} + \frac{m^2}{\hbar^2}\boldsymbol{\Phi} = 0$$

(12) $$\theta = \frac{1}{\mathrm{in}}\tilde{\nabla}\boldsymbol{\varphi}$$

On voit que l'on peut supprimer la variable θ et l'équation (12) ; on peut aussi tirer $\boldsymbol{\Psi}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ de (10) et porter dans (11) ; indiquons le résultat de cette élimination dans deux cas :

a) *Absence de champ* (A $= 0$).

Il vient

(13) $$\Box\boldsymbol{\Phi} + \frac{m^2}{\hbar^2}\boldsymbol{\Phi} = 0.$$

Cette équation se décompose canoniquement en

(14) $$\begin{gathered} \Box\boldsymbol{\Phi}_1 + \frac{m^2}{\hbar_2}\boldsymbol{\Phi}_1 = 0, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{\Phi}_1 = 0 \, ; \quad \Box\boldsymbol{\varphi}_2 + \frac{m^2}{\hbar_2}\boldsymbol{\varphi}_2 = 0 \quad [\boldsymbol{\varphi}_2 \in \mathrm{C}], \\ \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \nabla\boldsymbol{\varphi}_2 \end{gathered}$$

b) *Relativité restreinte.*

En faisant les approximations de la relativité restreinte, et en négligeant le dernier terme de la première équation (10) (¹), on trouve l'équation

(15) $$g_{\mu\nu}\left[\partial_\mu - \frac{\mathrm{in}\, e}{\hbar}\mathrm{A}_\mu\right]\left[\partial_\nu - \frac{\mathrm{in}\, e}{\hbar}\mathrm{A}_\nu\right]\boldsymbol{\Phi}_\rho + \frac{m^2}{\hbar^2}\boldsymbol{\Phi}_\rho + \frac{\mathrm{in}\, e}{\hbar}\mathrm{F}_{\mu\rho}\boldsymbol{\Phi}^\mu = 0 \, ;$$

(¹) Dans les unités quantiques usuelles, $\frac{\xi^2 e}{\hbar} \# 10^{-45}$ cm².

c'est l'équation d'onde d'une particule de masse m, de spin 1, de charge ne, de coefficient gyromagnétique $g = 1$ (la décomposition (14) disparaît en présence du champ).

On a effectivement observé des particules de spin 1, de charge $\pm e$, ayant des masses diverses ; leur durée de vie est trop brève pour qu'on ait pu mesurer g ; mais la valeur $g = 1$ prévue par la présente théorie semble naturelle, si on considère une telle particule comme la fusion de deux particules de Dirac, l'une chargée (pour laquelle $g = 2$), l'autre neutre.

Il semble en particulier que les *interactions faibles des leptons* et la *radioactivité* β peuvent se décrire au moyen d'un lagrangien d'interaction faisant intervenir les fonctions d'onde d'un lepton chargé (un électron par exemple), d'un lepton neutre (neutrino) et d'une particule vectorielle chargée ; soit ψ_e, ψ_ν et Φ respectivement (ν est mis ici pour *neutrino*).

ψ_e et ψ_ν sont des spineurs de l'univers U à 5 dimensions ; Φ un (co)vecteur ; il est donc naturel de proposer comme lagrangien d'interaction l'expression

(16) $$l = \Re(b\,\bar{\psi}_e.\gamma(\Phi).\psi_\nu) \qquad [b \in \mathrm{R}]$$

qui est invariante à la fois dans les glissements de U et dans la transformation de jauge des leptons

$$\psi_e \to \psi_e q,\ \psi_\nu \to \psi_\nu q \qquad (q = \text{quaternion de norme } 1).$$

En exprimant l au moyen des grandeurs quadridimensionnelles (formules (6) ; formules 56, 57, 68, 74, 77, 78 du § 45), il vient :

$$l = \Re\left(b\bar{\bar{\tilde{\psi}}}_e.\left[\mathrm{P}' - \frac{\mathrm{P}''}{i\lambda}\right].[\hat{\gamma}^\rho\,\mathbf{\Phi}_\rho - \beta\xi\varphi].\psi_\nu\right),$$

ξ est très petit, λ très petit ou très grand (voir (45.78)) ; en réduisant l au terme prépondérant, il reste

$$l = \Re(g\bar{\bar{\tilde{\psi}}}_e\,\hat{\gamma}^\rho\,\mathbf{\Phi}_\rho[1 \pm i\beta]\psi_\nu)$$

g étant une constante de couplage réelle ou imaginaire pure ; ou, en notations classiques

(17) $$l = g\mathbf{\Phi}_\rho\,\bar{\psi}_e\,\gamma^\rho\,\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\,\psi_\nu \qquad + \text{herm. conj.}$$

Or c'est précisément cette expression (17) que l'expérience a conduit à adopter pour rendre compte des diverses particularités des désintégrations leptoniques : non-conservation de la parité, émission d'électrons polarisés et de neutrinos à deux composantes, etc.

Tous ces phénomènes apparaissent donc comme directement liés au principe de relativité à cinq dimensions.