NOTE II

Calcul du groupe de Poincaré

Cellules contractiles

Le lecteur pourra exercer sa sagacité en établissant les résultats suivants :

(*a*) Nous dirons qu'un espace E est *décomposable* si E est la réunion d'ouverts connexes deux à deux disjoints U_i.

(1) (*b*) Une telle décomposition est unique ; l'ouvert U_i qui contient un point x de E s'appelle *composante connexe* de x. Parmi les ouverts qui contiennent x, U_i est le plus grand qui soit connexe, le plus petit qui soit fermé.

(*c*) Pour qu'un espace E soit décomposable, il faut et il suffit que chaque point de E soit contenu dans un ouvert connexe.

(2) — On dit qu'un espace E est *localement connexe* si tout ouvert de E est décomposable ; c'est le cas notamment pour les variétés, puisque tout ouvert d'une variété est une réunion de *morceaux*, qui sont connexes.

Théorème :

Soit E un espace *connexe*.

On suppose qu'il existe un ensemble C de parties de E, que nous appellerons *chambres* de E, doué des propriétés suivantes :

(3) Chaque point de E appartient à une chambre ;
Les chambres sont des ouverts simplement connexes ;
L'intersection de deux chambres est décomposable.

Alors E possède un revêtement universel.

(4) — Ces conditions sont vérifiées si E est une variété connexe : il suffit de prendre pour C un recouvrement de E par des morceaux. Donc toute variété connexe possède un revêtement universel.

Pour construire effectivement le revêtement universel indiqué dans ce théorème (3), on peut procéder de la façon suivante :

u et v étant deux chambres, désignons par A_{uv} l'ensemble des composantes connexes de $u \cap v$; les éléments de A_{uv} s'appelleront des *antichambres*.

On appellera *portes* les symboles

$$(u, a, v) \qquad [u, v \in C, \; a \in A_{uv}].$$

monade ?

On désignera par M le *monoïde libre engendré par les portes ;* on suppose M muni d'un élément neutre $\mathbb{1}_M$ (voir la note I).

Nous dirons qu'un mot de M est un *passage* (de la chambre u à la chambre z) s'il est de la forme

$$(u, a, v)(v, b, w) \ldots (y, e, z)$$

(5) chaque porte partant de la chambre où conduit la chambre précédente ; un passage d'une chambre u à la même chambre s'appellera un *circuit ;* un circuit

$$(u, a, v)\,(v, b, w) \ldots (y, e, u)$$

sera dit *trivial* si l'intersection de ses antichambres $a, b, \ldots e$ n'est pas vide.

On choisit une chambre u_0 (l'*entrée*) ; pour toute autre chambre u, on peut choisir un passage m_u de u_0 à u, que l'on appellera *passage balisé* (¹).

Soit K la partie de M^2 composée des couples

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_M \\ m \end{pmatrix}$$

m étant un *circuit trivial* ou un *passage balisé* quelconque.

(¹) Cette propriété est équivalente au fait que E soit *connexe*.

Désignons par G le monoïde quotient M/K ; par $\{u, a, v\}$ l'image de la porte (u, a, v) par l'homomorphisme canonique de M sur G (voir la note I) ; par $[u, g, v]$ la réunion des antichambres a telles que $\{u, a, v\} = g$.

(5) Alors G est un *groupe ;* on a notamment $\{u, a, v\}^{-1} = \{v, a, u\}$; les ensembles $[u, g, v]$ vérifient les axiomes ♡ du théorème (10.16) ; le revêtement E' construit à partir de ces ensembles par la méthode du théorème (10.17) est un *revêtement universel* de E ; G est donc le *groupe de Poincaré* de E.

Exemples :

— On considère la sphère S_n, variété de dimension n plongée dans l'espace euclidien R^{n+1}, d'équation $|x| = 1$; l'ouvert u_0 obtenu en privant S_n d'un point x_0 est simplement connexe (en effet, une projection stéréographique est un homéomorphisme de u_0 avec R^n) ; de même u_1 obtenu en privant S_n du point opposé $-x_0$.

On peut donc prendre u_0 et u_1 comme chambres ; l'intersection $u_0 \cap u_1$ (que la projection stéréographique envoie sur R^n privé d'un point) est connexe si $n \geqslant 2$; en appliquant la construction (5), on constate que le groupe G est réduit à l'élément neutre ; donc :

(6) La sphère S_n est simplement connexe si $n \geqslant 2$.

(7) — Dans le cas $n = 1$, l'intersection $u_0 \cap u_1$ se compose de deux antichambres ; on en déduit que le groupe de Poincaré de S_1 est Z ; ce résultat a déjà été trouvé par une autre méthode (10.35).

(8) — Si E est le plan privé d'un point, deux demi droites issues de ce point déterminent deux chambres u_0 et u_1 dont l'intersection se compose de deux antichambres ; le groupe de Poincaré est donc le même que pour S_1, c'est -à-dire Z.

(9) — Soit E le plan privé de deux points A et B ; en privant E de la droite AB, elle-même privée de l'un des intervalles limités par A et B, on construit trois chambres qui recouvrent E ; il y a deux

antichambres dans leurs intersections mutuelles ; on en déduit le groupe de Poincaré : c'est le *groupe libre* à deux générateurs (voir la note I).

— En partant de la remarque que le produit direct de plusieurs morceaux de variété est un morceau de la variété produit, donc simplement connexe, la construction (5) permet d'établir le théorème :

(10) Soient $V_1, V_2, \ldots V_n$ des variétés connexes.
Le groupe de Poincaré de la variété produit $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ est le produit direct des groupes de Poincaré de ces variétés.

(11) — En particulier, le produit direct de n variétés simplement connexes est une variété simplement connexe.