JEAN-PIERRE PETIT

DIE ABENTEUER DES ANSELM WÜẞTEGERN

Wissen ohne Grenzen

Gemeinnützige Vereinigung, die 2005 gegründet wurde und von zwei französischen Wissenschaftlern geleitet wird. Ziel: Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse mit Hilfe des Bandes, das durch kostenlos herunterladbare PDFs gezogen wird. Im Jahr 2020: 565 Übersetzungen in 40 Sprachen wurden so erreicht. Mit mehr als 500.000 Downloads.

Jean-Pierre Petit **Gilles d'Agostini**

Die Vereinigung ist vollkommen freiwillig. Das Geld wird vollständig den Übersetzern gespendet.

Um eine Spende zu tätigen, verwenden Sie die PayPal-Schaltfläche auf der Startseite:

http://www.savoir-sans-frontieres.com

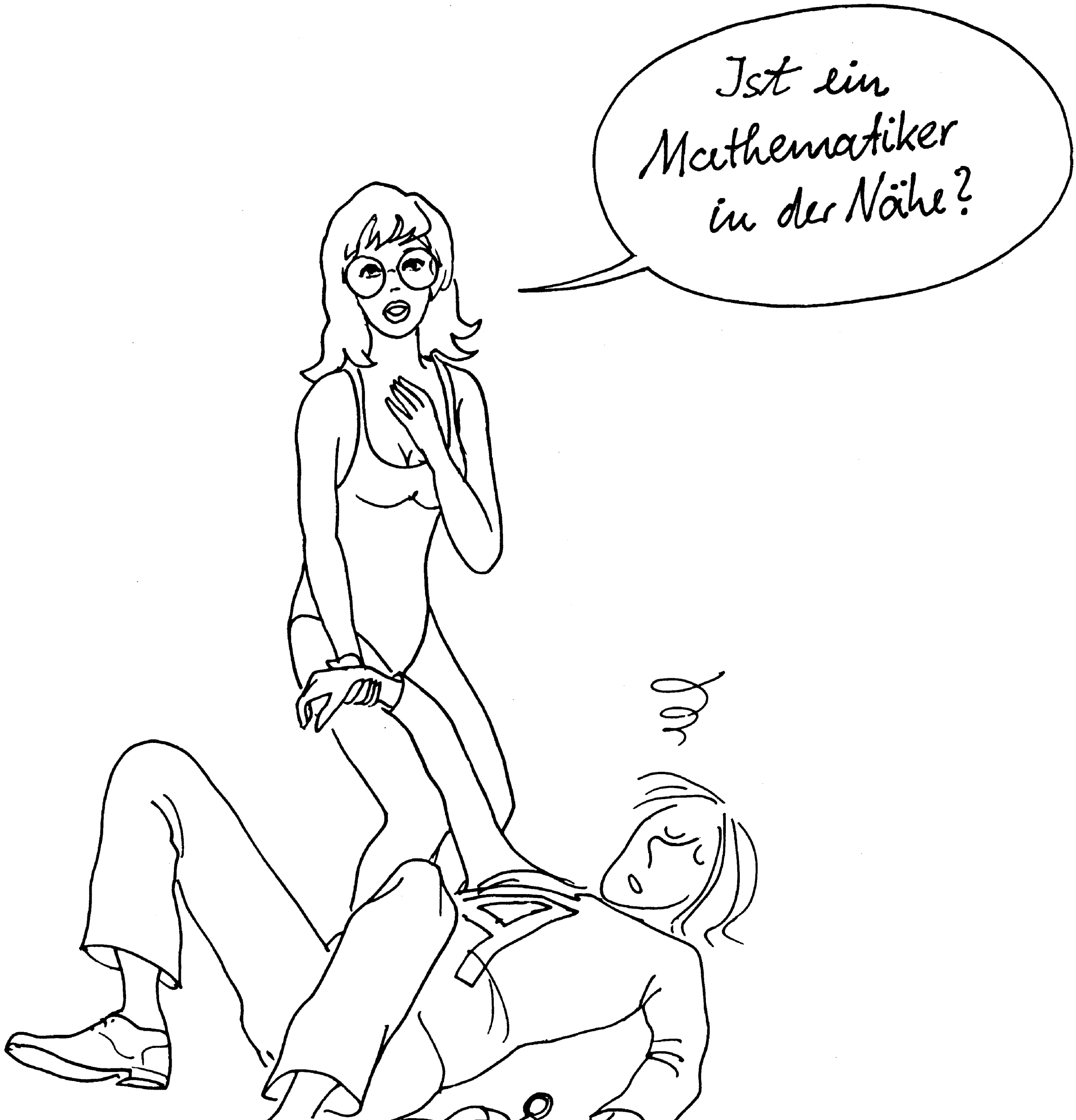
PayPal FAIRE UN DON

Die Vereinigung « Wissen ohne Grenzen », gegründet und unter dem Vorsitz von Professor Jean-Pierre Petit, Astrophysiker, hat zum Ziel, wissenschaftliches und technisches Wissen in der größtmöglichen Zahl von Ländern und Sprachen zu verbreiten. Zu diesem Zweck hat Professor Jean-Pierre Petit sein gesamtes populärwissentschaftliches Werk aus dreissig Jahren, und im besonderen die illustrierten Alben, frei zugänglich gemacht. Dementsprechend ist ein jeder frei, die vorliegende Datei zu vervielfältigen, entweder in digitaler Form oder in Form gedruckter Kopien und sie in Bibliotheken oder im Rahmen von Schule, Universität oder Vereinen zu verbreiten, deren Ziel die gleichen sind wie von « Wissen ohne Grenzen », unter der Bedingung, daraus keinen Profit zu erzielen und ohne dass ihre Verbreitung eine politische, sektiererische oder religiöse Konnotation beinhaltet. Diese Dateien im Format pdf können auch ins Computernetzwerk von Schul- oder Universitätsbibliotheken gestellt werden.

Jean-Pierre Petit plant zahlreiche weitere Werke, zugänglich für ein noch größeres Publikum. Einige werden selbst von Analphabeten gelesen werden können, dadurch, daß die Textepartien "zu sprechen beginnen" sobald ein Klick auf sie erfolgt. Diese Werke werden also als Stütze zur Alphabetisierung verwendet werden können. Andere Alben werden « zweisprachig » sein, indem man durch einen einfachen Klick von einer Sprache zur anderen wechseln kann, nachdem die Sprachkombination zuvor gewählt wurde. So entsteht eine neue Stütze zum Erlernen von Fremdsprachen.

Jean-Pierre Petit ist 1937 geboren. Er hat seine berufliche Laufbahn in der französischen Wissenschaft gemacht. Er ist Plasmaphysiker gewesen (plasma physicist), hat ein Informatikzentrum geleitet, Programme entwickelt, hunderte von Artikeln der unterschiedlichsten Wissensgebiete in wissentschaftlichen Zeitschriften veröffentlicht, von der Mechanik der Flüssigkeiten bis zur theorhetischen Kosmologie reichend. Er hat ungefähr dreissig Werke veröffentlicht, die in eine Vielzahl von Sprachen übersetzt wurden.

Kontakt zu « Wissen ohne Grenzen » kann über die Website http://www.savoir-sans-frontieres.com aufgenommen werden.

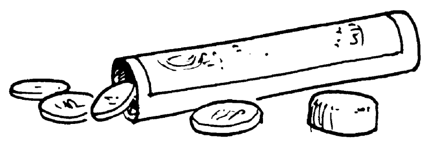

Ist ein Mathematiker in der Nähe?

WARNUNG

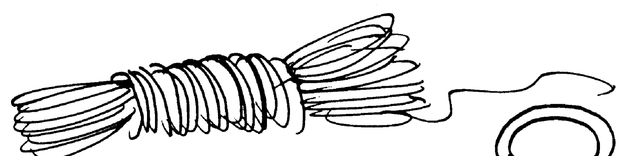
DIESES BUCH IST WEDER EIN LEHRBUCH NOCH EIN KURSBUCH. ES IST EINFACH DIE GESCHICHTE VON ANSELM WÜẞTEGERN UND EINER SEINER REISEN INS LAND DER GEOMETRIE.

AM BESTEN LESEN SIE DIESES BUCH MIT:

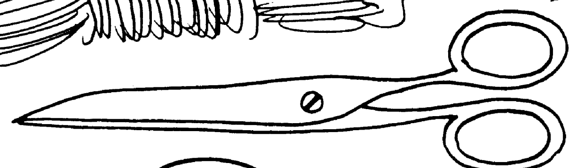
* EINER PACKUNG ASPIRIN,



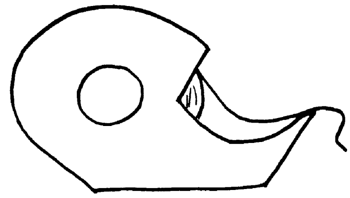
* EINER SCHNUR,



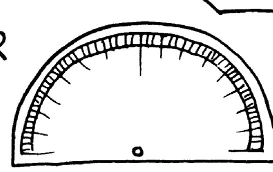
* EINER SCHERE,



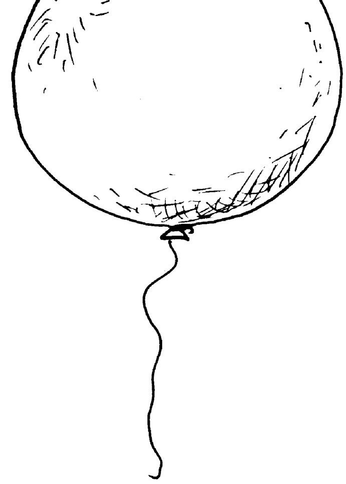
* ETWAS KLEBEBAND,



* EINEM WINKELMESSER



* UND EINEM SCHÖNEN RUNDEN LUFTBALLON



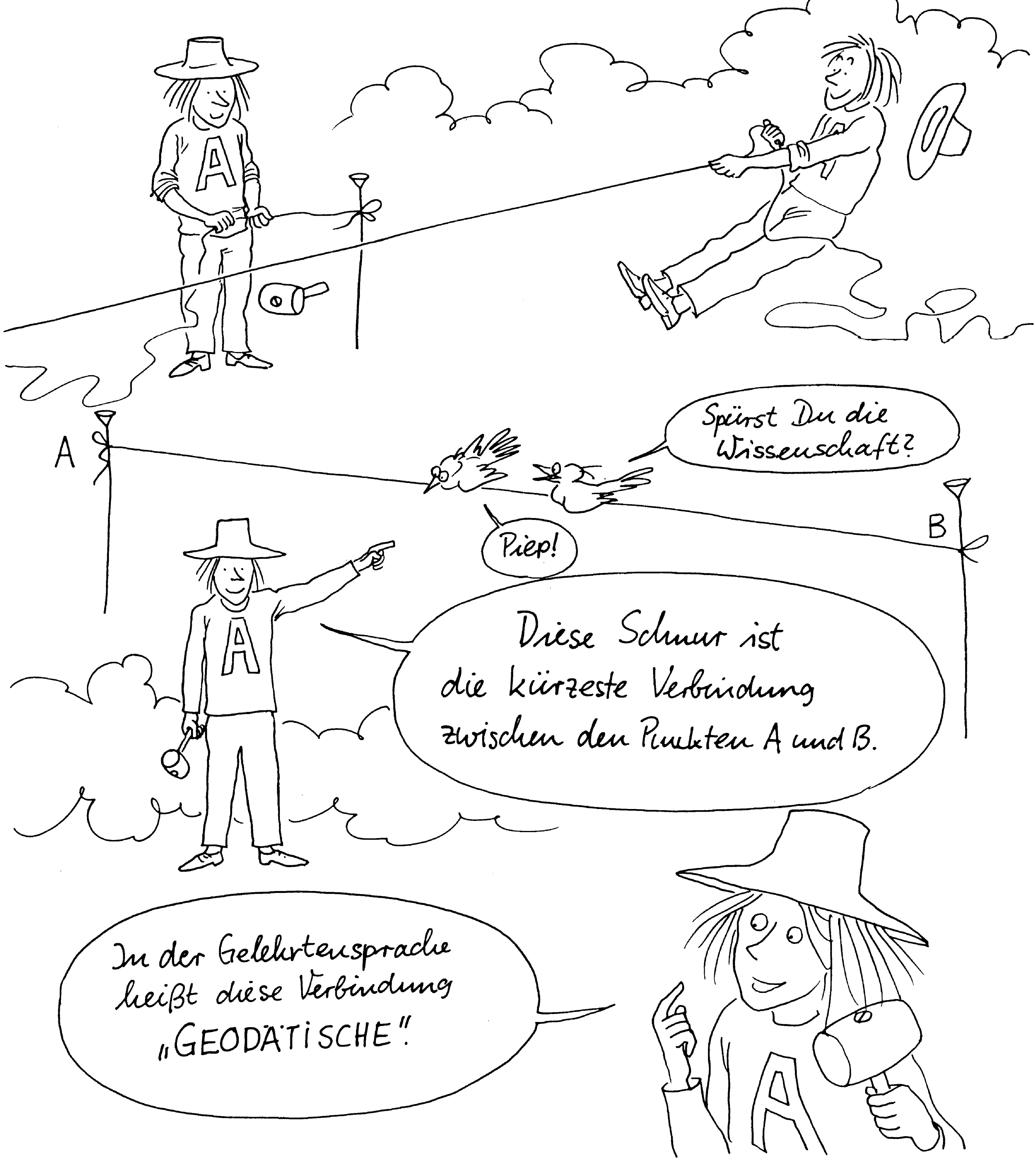
Die Gesellschaft Euklid & Co wurde im dritten Jahrhundert vor Christus in Alexandrien gegründet. Zweitausendzweihundert Jahre lang florierte das Geschäft. Die Produkte wurden überall geschätzt, und die Kundschaft war zufrieden und treu.

Dann aber änderte sich der Geschmack der Kunden. Aufgrund seltsamer Experimente fragten sich zunächst wenige und dann immer mehr, ob die Produkte von Euklid & Co wirklich überall und für alles die besten seien.

Wir erzählen Ihnen hier die Geschichte von einem dieser Zweifler.

VORWORT:

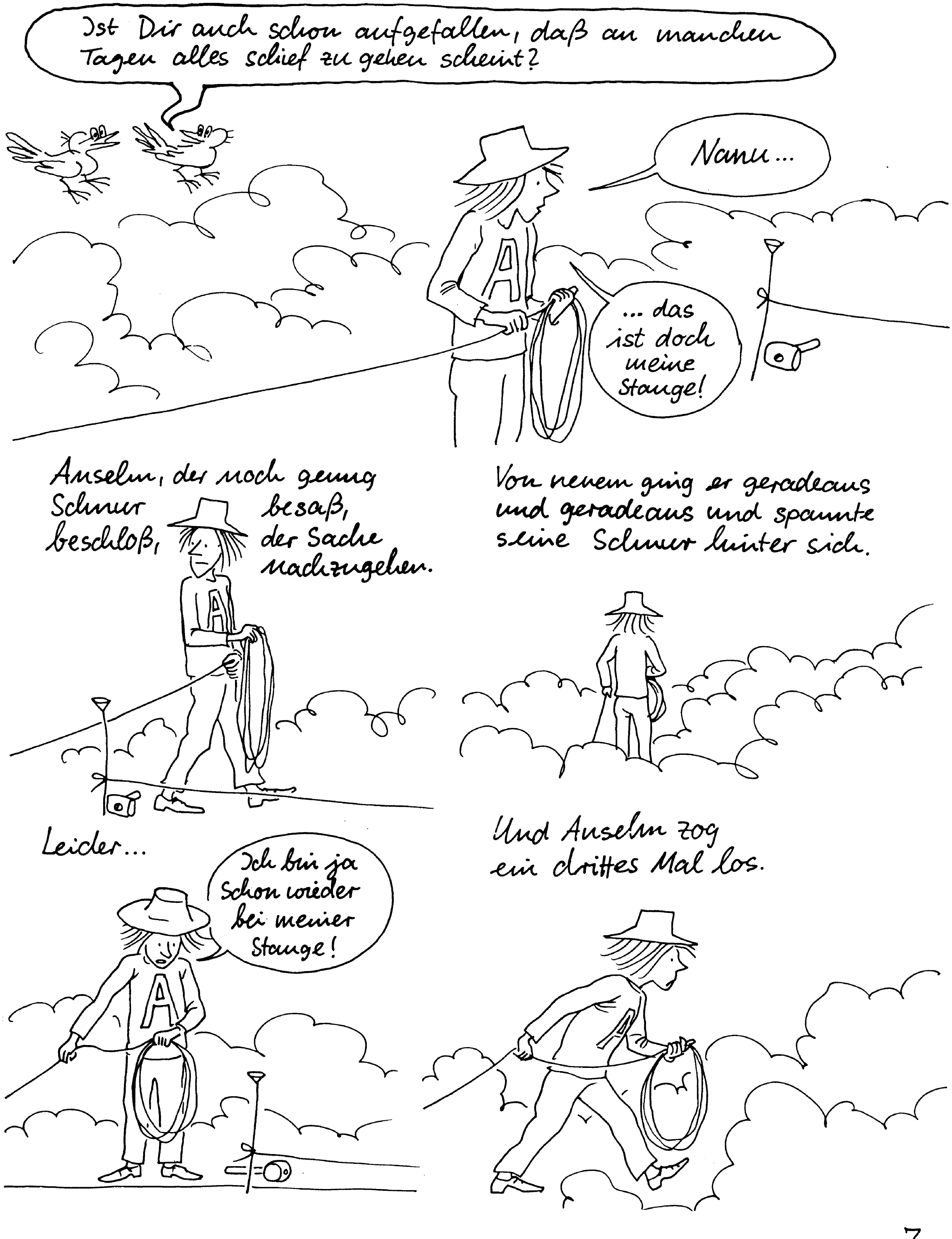
Eines Tages beschloß Anselm, zwischen zwei Stangen eine Schnur zu spannen.




Mit drei gespannten Fäden, das heißt mit drei Geodätischen...
B
A
... erzeugt Anselm ein Dreieck.
Er mißt die Winkel $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$, indem er an jede Spitze des Dreiecks seinen Winkelmesser legt, und bildet die Summe.
Nach einem ausgezeichneten Lehrsatz der Gesellschaft Euklid & Co beträgt die Summe 180°.
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
Ευκλιδ

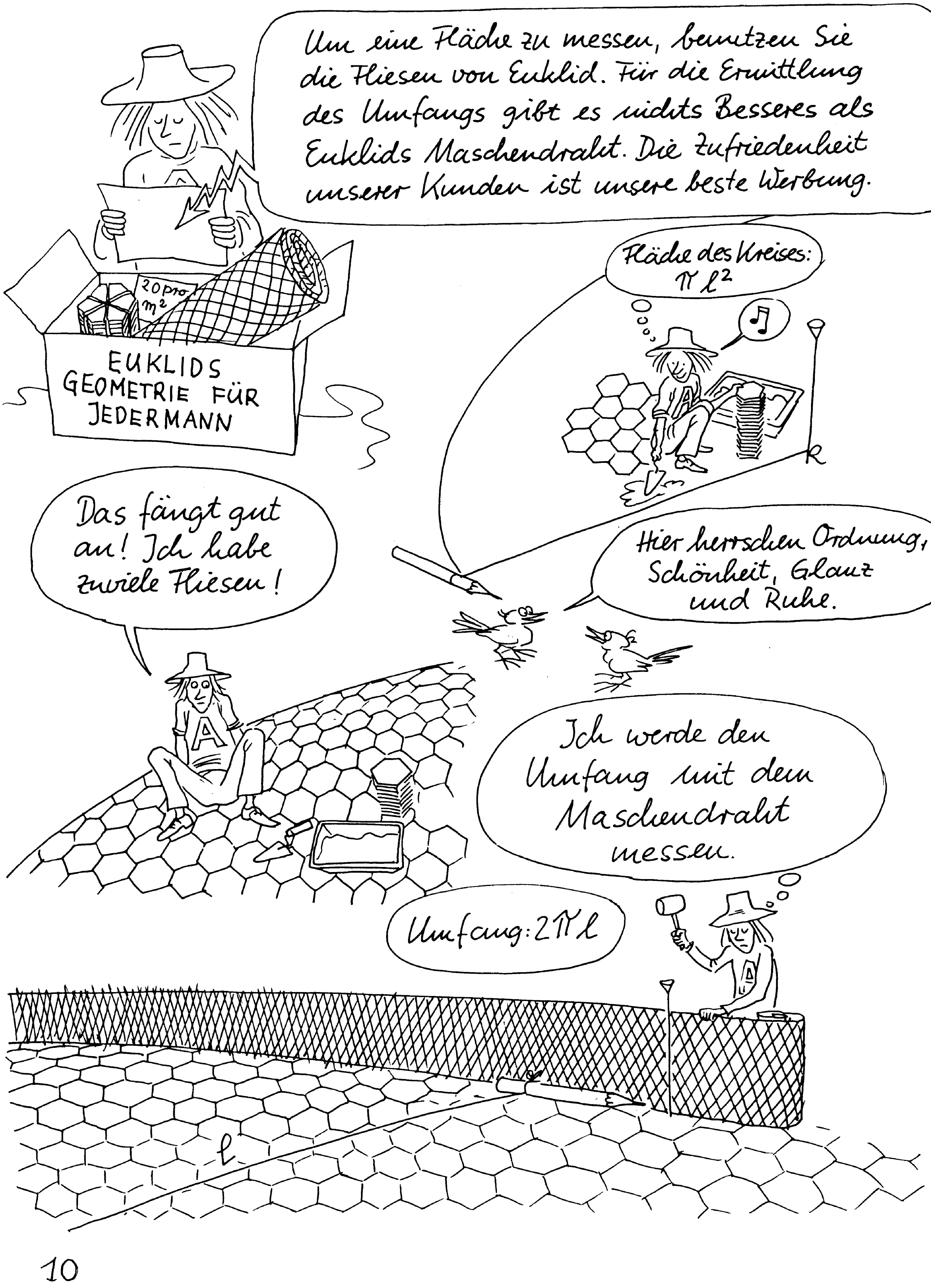
Die Welt, in der Anselm lebte, war nebelig und trüb. Man sah manchmal die Hand vor den Augen nicht.

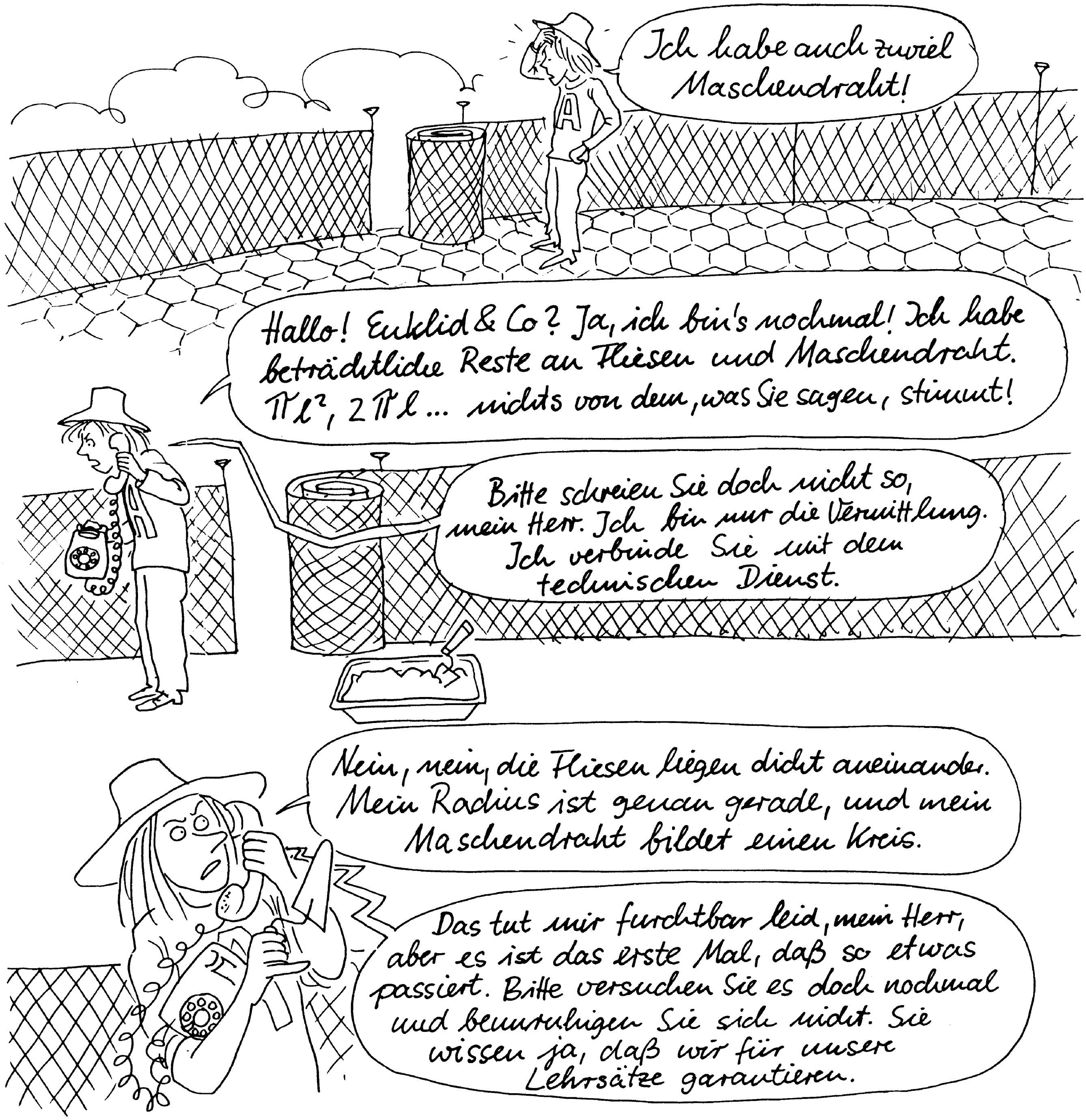
Anselm marschierte und marschierte... Die Schnur hinter ihm spannte sich einwandfrei. Er fabrizierte eine perfekte Geodätische, so daß er sich über die Unsicherheiten seines Marsches im Nebel sogar lustig machen konnte.

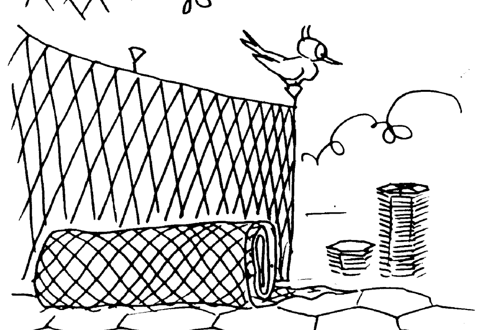

Ist Dir auch schon aufgefallen, daß an manchen Tagen alles schief zu gehen scheint?
Nanu...
... das ist doch meine Stange!
Anselm, der noch genug Schnur besaß, beschloß, der Sache nachzugehen.
Von neuem ging er geradeaus und geradeaus und spannte seine Schnur hinter sich.
Leider...
Ich bin ja schon wieder bei meiner Stange!
Und Anselm zog ein drittes Mal los.


?
Versuchen wir es mal mit einem Lehrsatz von Euklid! Ich werde drei Geodätische gleicher Länge ziehen und so ein Dreieck erhalten, in dem jeder Winkel 60° haben muß. Die Summe der Winkel beträgt 180°. Das entspricht der Vorschrift.
B
60°
A
60°
60°
C
Â + B̂ + Ĉ = 180°
Ich bin gespannt, ob es stimmt.
RATIO OMNIA VINCIT
A
B
A
Hier ist mein zweiter Eckpunkt. Bleiben nur noch zwei Fäden zu ziehen, um den dritten zu finden.
Die Wissenschaft ist schön!
B
A
Oh weh! Die Winkel sind genau gleich, aber sie sind alle größer als 60°.
Hat er ein Problem?
C
A
Die Summe der Winkel ist größer als 180° und darf es nicht sein!
EUKLID
GEOMETRIE DES EUKLID
EUKLID


Meine Fäden sind perfekte Geraden. Das Lineal zeigt es.
EUKLID
Hallo Euklid & Co? Hören Sie! Ich habe Schwierigkeiten mit Ihren Produkten.
Eine Sekunde bitte, ich verbinde Sie mit dem technischen Dienst.
Ärger mit unseren Dreiecken? Erstaunlich! Vielleicht versuchen Sie mal unsere Kreise? Unsere Kunden sind damit sehr zufrieden.
Ein Kreis ist also die Gesamtheit der Punkte, die von einem festgelegten Punkt den Abstand l haben?
Und Sie sagen, der Umfang beträgt 2 π l und der Flächeninhalt π l². Gut, ich habe es notiert.
l
Vielen Dank für Ihren Anruf!


Um eine Fläche zu messen, benutzen Sie die Fliesen von Euklid. Für die Ermittlung des Umfangs gibt es nichts Besseres als Euklids Maschendraht. Die Zufriedenheit unserer Kunden ist unsere beste Werbung.
20 pro m²
EUKLIDS GEOMETRIE FÜR JEDERMANN
Fläche des Kreises: πl^2
R
Das fängt gut an! Ich habe zuviele Fliesen!
Hier herrschen Ordnung, Schönheit, Glanz und Ruhe.
Ich werde den Umfang mit dem Maschendraht messen.
Umfang: $2\pi l$
l

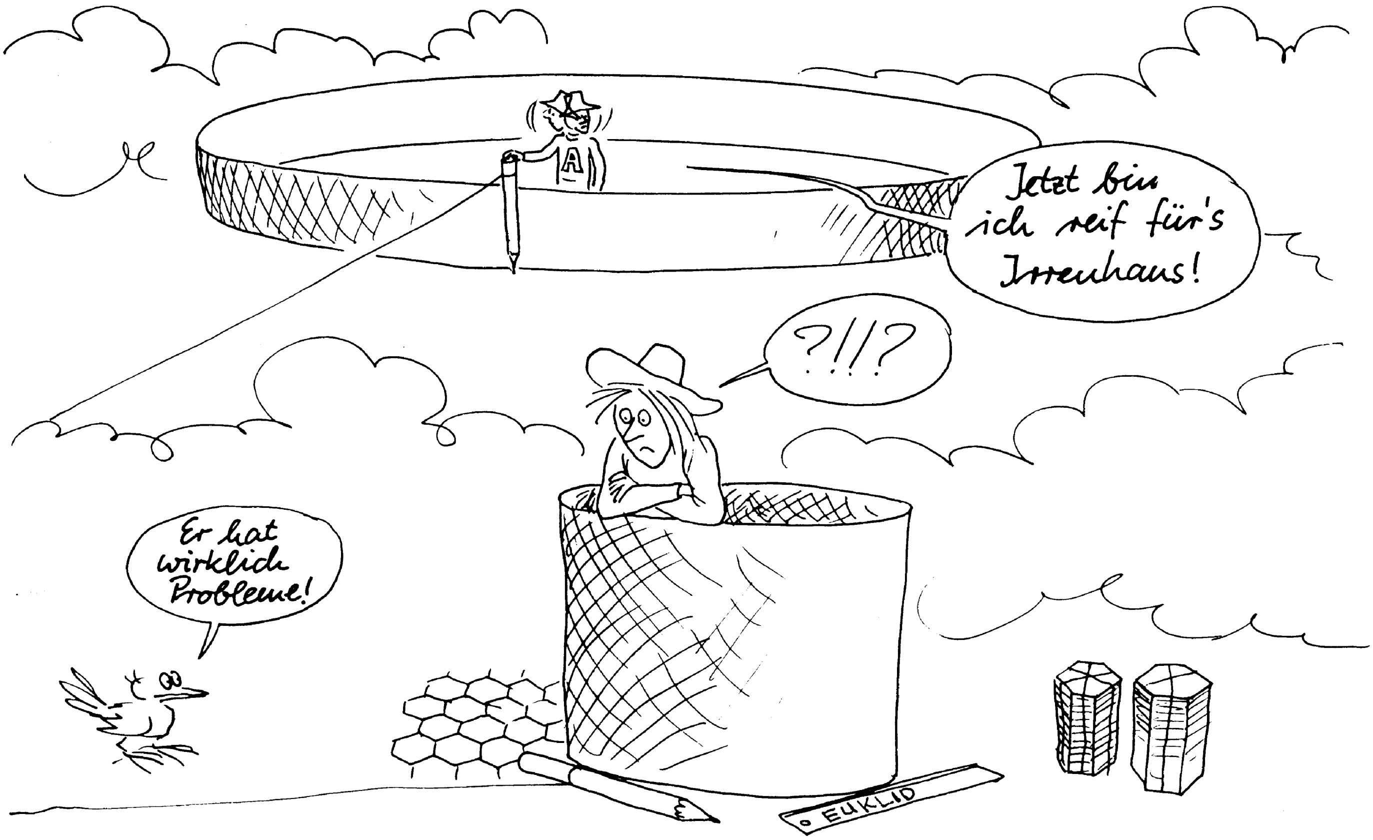




Anselm fuhr fort, mit dem Material von Euklid & Co zu arbeiten, aber je größer er den Radius l seines Kreises wählte, umso weniger stimmte sein Verbrauch an Draht und Fliesen mit dem überein, was die Gebrauchsanweisung vorsah.

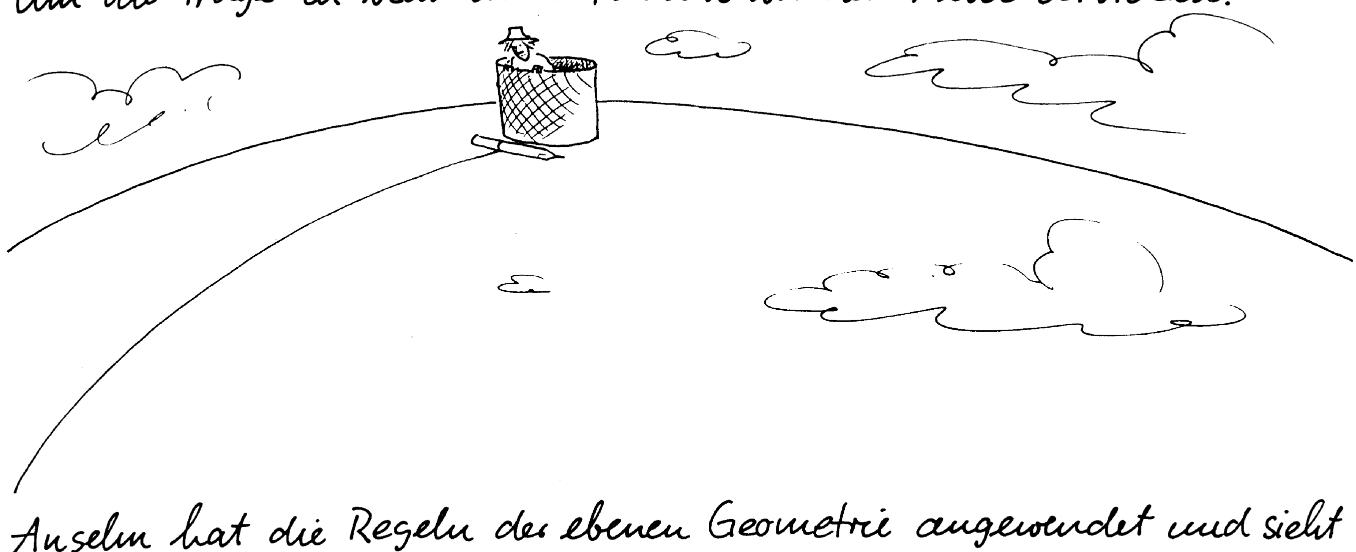

Jetzt habe ich mehr als 36% Maschendraht zuviel, 19% der Fliesen sind übrig, und aus meinem Kreis ist eine Gerade geworden!
Ich glaub' mich tritt ein Pferd!
Das ist die Höhe! Das Lineal ist vollkommen gerade.
EUKLID
Anselm vergrößerte den Radius abermals.
EUKLID
Jetzt ist die Krümmung meines Kreises auf der anderen Seite!
Und wenn ich den Radius vergrößere, nimmt der Umfang ab. Es ist zum Verrücktwerden!

Nach einigen weiteren Versuchen:

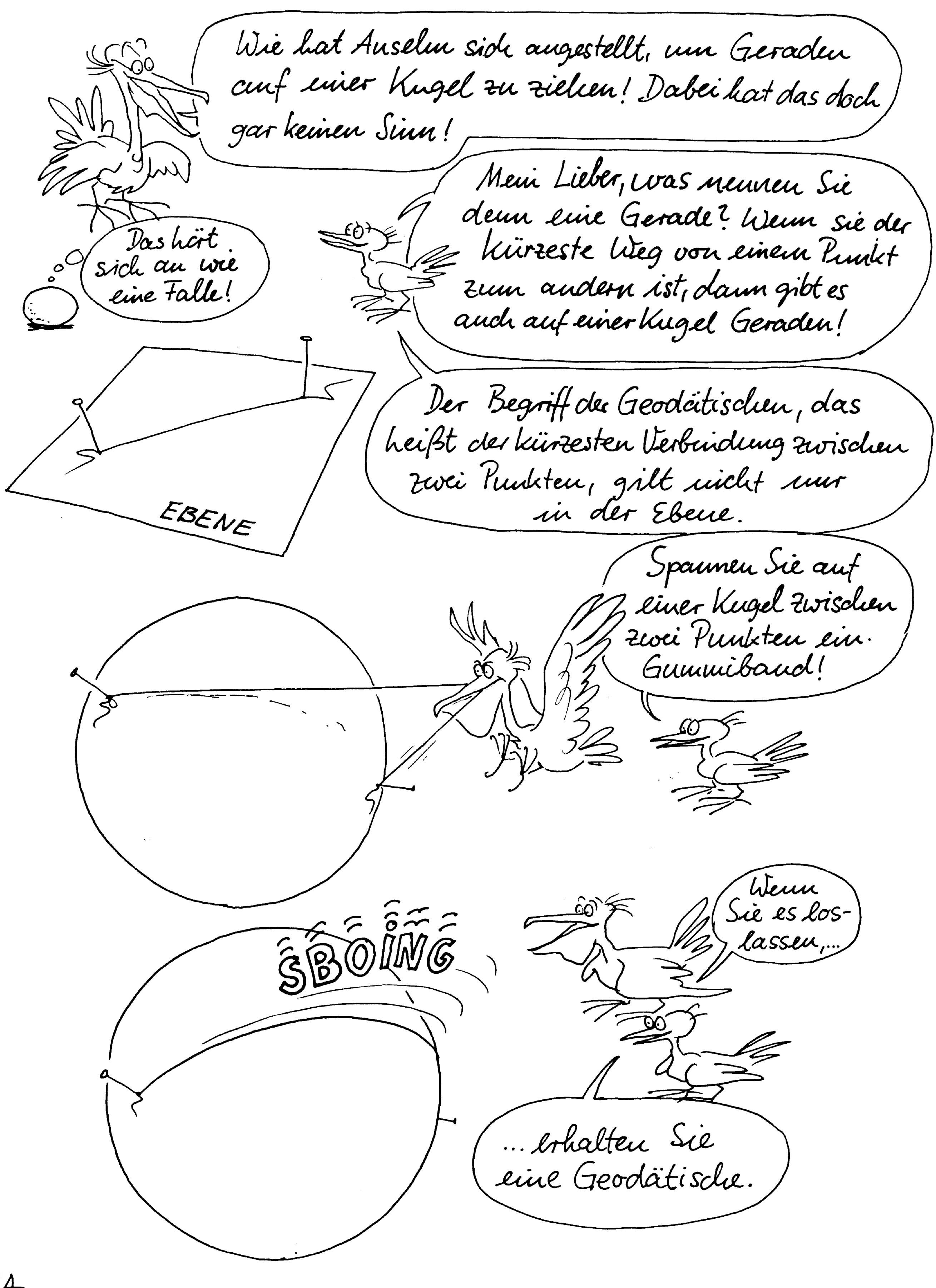


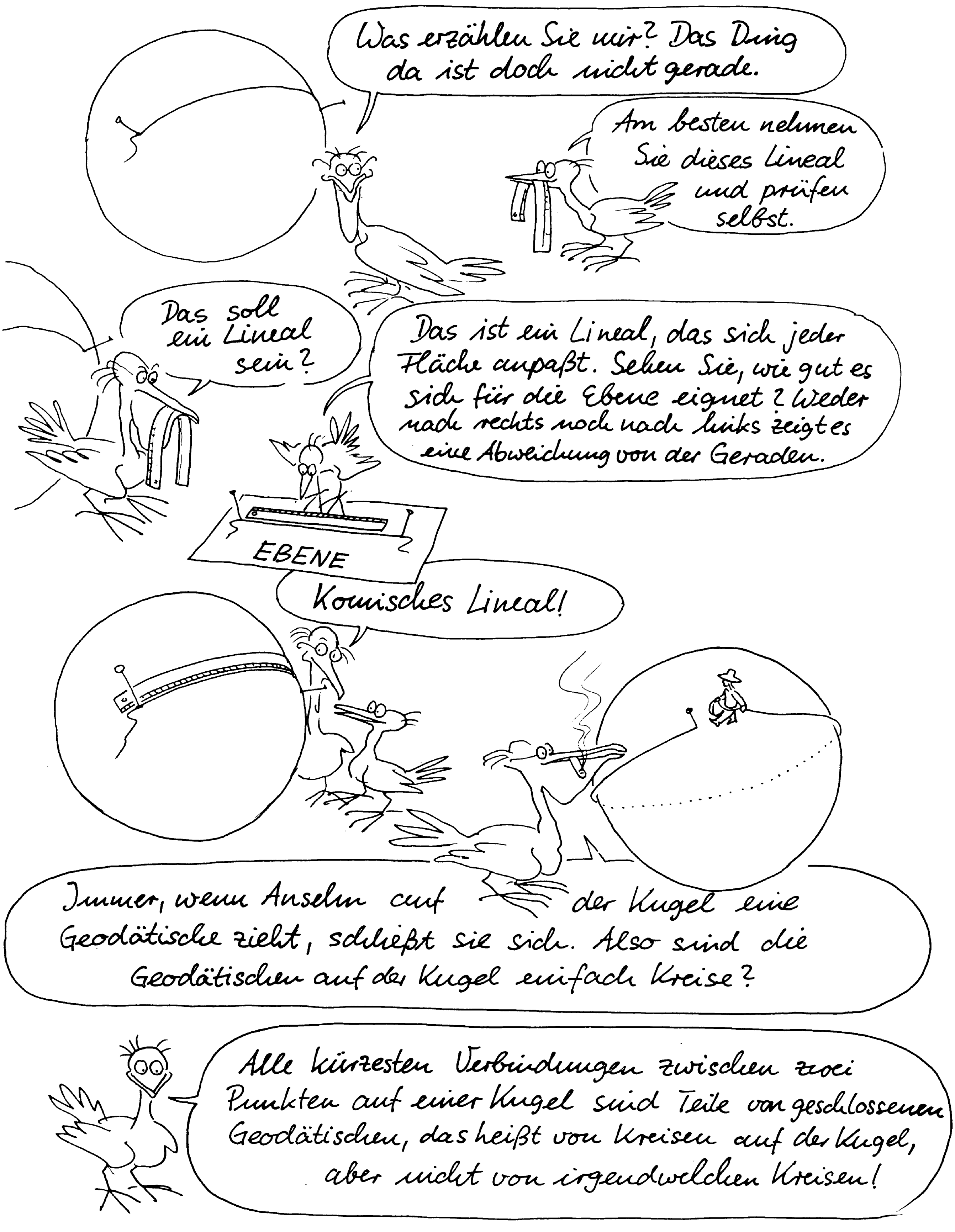
WAS IST PASSIERT?

Um die Frage zu beantworten, wollen wir den Nebel vertreiben.

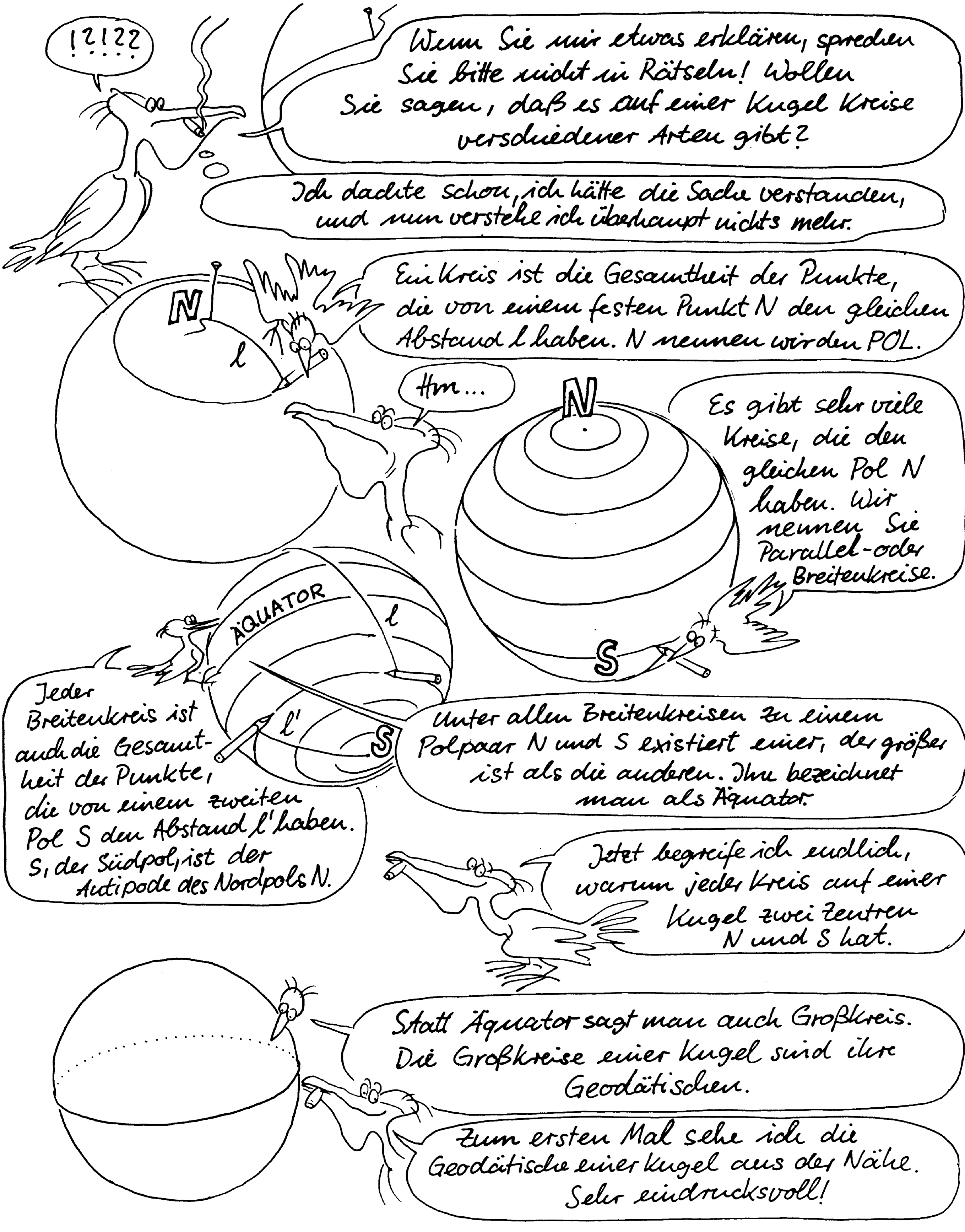


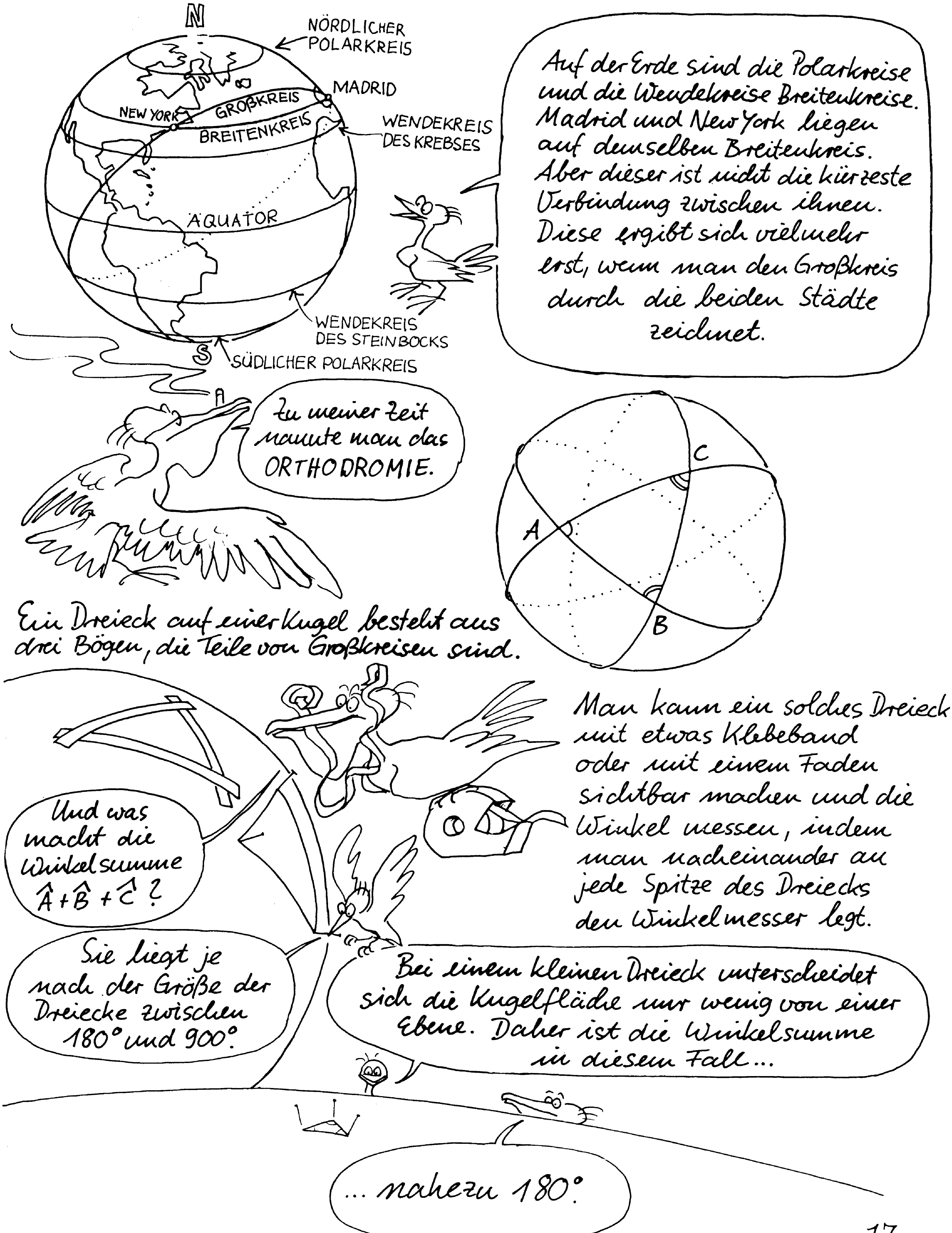
Anselm hat die Regeln der ebenen Geometrie angewendet und sieht nun plötzlich, daß er sich auf einer Kugel befindet.

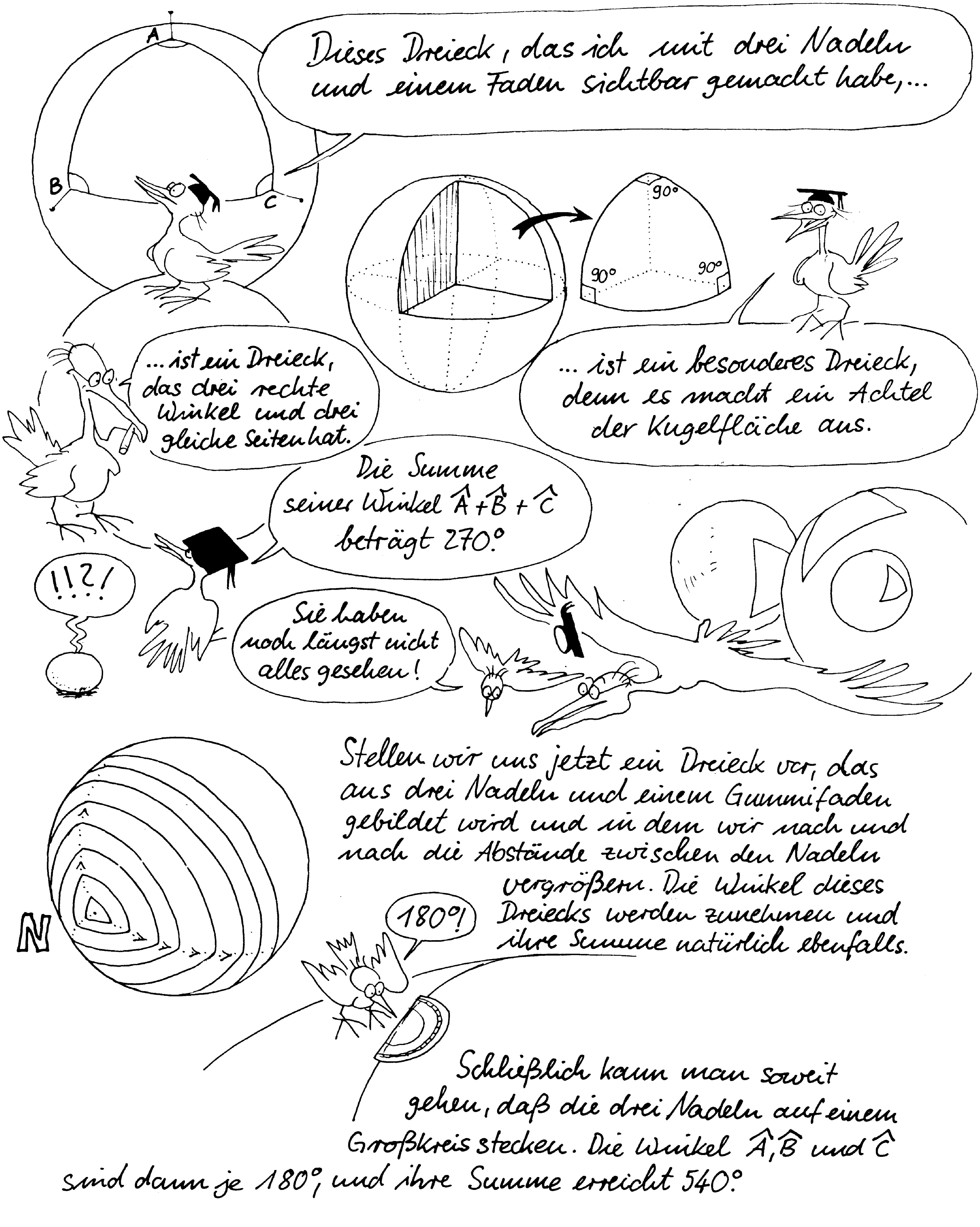

Wie hat Anselm sich angestellt, um Geraden auf einer Kugel zu ziehen! Dabei hat das doch gar keinen Sinn!
Das hört sich an wie eine Falle!
Mein Lieber, was nennen Sie denn eine Gerade? Wenn sie der kürzeste Weg von einem Punkt zum andern ist, dann gibt es auch auf einer Kugel Geraden!
Der Begriff der Geodätischen, das heißt der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten, gilt nicht nur in der Ebene.
EBENE
Spannen Sie auf einer Kugel zwischen zwei Punkten ein Gummiband!
SBOING
Wenn Sie es loslassen,...
...erhalten Sie eine Geodätische.



Was erzählen Sie mir? Das Ding da ist doch nicht gerade.
Am besten nehmen Sie dieses Lineal und prüfen selbst.
Das soll ein Lineal sein?
Das ist ein Lineal, das sich jeder Fläche anpaßt. Sehen Sie, wie gut es sich für die Ebene eignet? Weder nach rechts noch nach links zeigt es eine Abweichung von der Geraden.
EBENE
Komisches Lineal!
Immer, wenn Anselm auf der Kugel eine Geodätische zieht, schließt sie sich. Also sind die Geodätischen auf der Kugel einfach Kreise?
Alle kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten auf einer Kugel sind Teile von geschlossenen Geodätischen, das heißt von Kreisen auf der Kugel, aber nicht von irgendwelchen Kreisen!

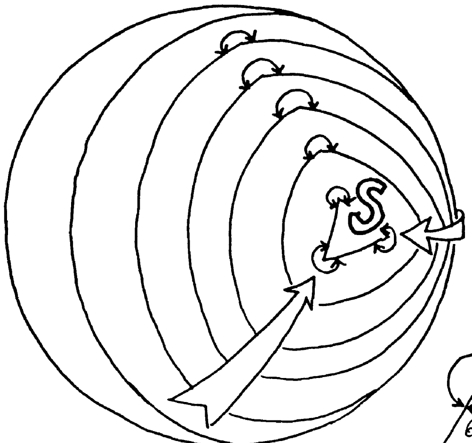

!?!??
Wenn Sie mir etwas erklären, sprechen Sie bitte nicht in Rätseln! Wollen Sie sagen, daß es auf einer Kugel Kreise verschiedener Arten gibt?
Ich dachte schon, ich hätte die Sache verstanden, und nun verstehe ich überhaupt nichts mehr.
N
l
Ein Kreis ist die Gesamtheit der Punkte, die von einem festen Punkt N den gleichen Abstand l haben. N nennen wir den POL.
Hm...
N
Es gibt sehr viele Kreise, die den gleichen Pol N haben. Wir nennen Sie Parallel- oder Breitenkreise.
S
ÄQUATOR
l
l'
S
Jeder Breitenkreis ist auch die Gesamtheit der Punkte, die von einem zweiten Pol S den Abstand l' haben. S, der Südpol, ist der Antipode des Nordpols N.
Unter allen Breitenkreisen zu einem Polpaar N und S existiert einer, der größer ist als die anderen. Ihn bezeichnet man als Äquator.
Jetzt begreife ich endlich, warum jeder Kreis auf einer Kugel zwei Zentren N und S hat.
Statt Äquator sagt man auch Großkreis. Die Großkreise einer Kugel sind ihre Geodätischen.
Zum ersten Mal sehe ich die Geodätische einer Kugel aus der Nähe. Sehr eindrucksvoll!


N
NÖRDLICHER POLARKREIS
MADRID
NEW YORK
GROßKREIS
BREITENKREIS
WENDEKREIS DES KREBSES
ÄQUATOR
WENDEKREIS DES STEINBOCKS
S
SÜDLICHER POLARKREIS
Auf der Erde sind die Polarkreise und die Wendekreise Breitenkreise. Madrid und New York liegen auf demselben Breitenkreis. Aber dieser ist nicht die kürzeste Verbindung zwischen ihnen. Diese ergibt sich vielmehr erst, wenn man den Großkreis durch die beiden Städte zeichnet.
A
Zu meiner Zeit nannte man das ORTHODROMIE.
C
A
B
Ein Dreieck auf einer Kugel besteht aus drei Bögen, die Teile von Großkreisen sind.
Man kann ein solches Dreieck mit etwas Klebeband oder mit einem Faden sichtbar machen und die Winkel messen, indem man nacheinander an jede Spitze des Dreiecks den Winkelmesser legt.
Und was macht die Winkelsumme Â + B̂ + Ĉ ?
Sie liegt je nach der Größe der Dreiecke zwischen 180° und 900°.
Bei einem kleinen Dreieck unterscheidet sich die Kugelfläche nur wenig von einer Ebene. Daher ist die Winkelsumme in diesem Fall ...
... nahezu 180°.

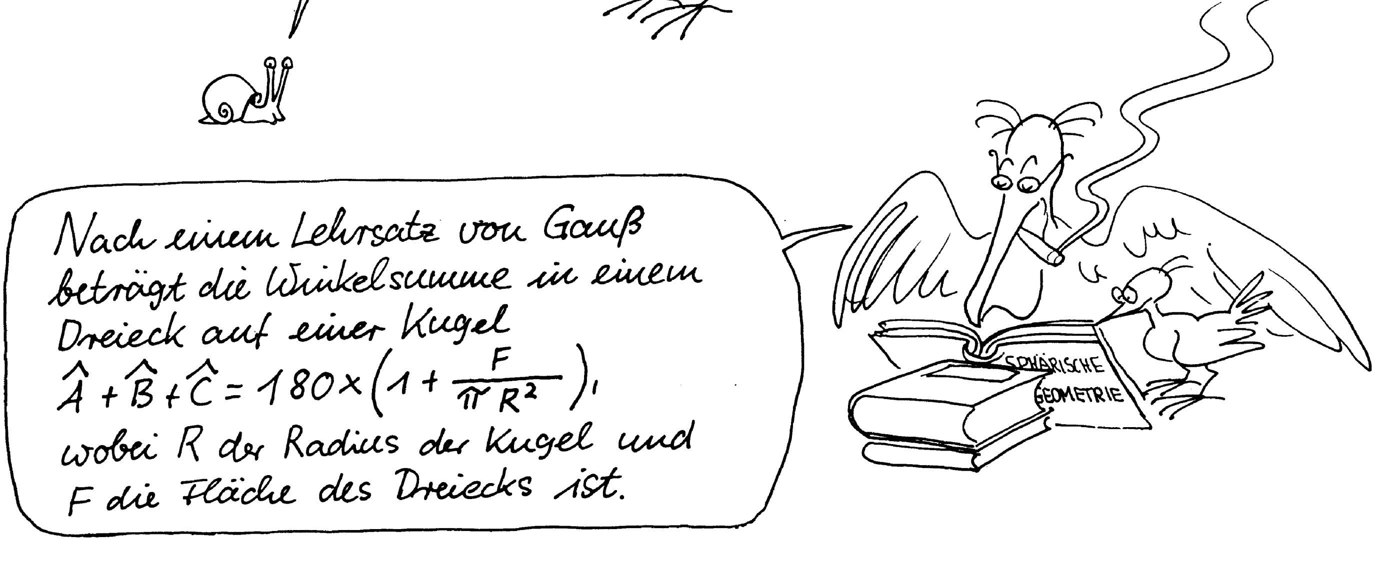

A
B
C
Dieses Dreieck, das ich mit drei Nadeln und einem Faden sichtbar gemacht habe, ...
90°
90°
90°
... ist ein Dreieck, das drei rechte Winkel und drei gleiche Seiten hat.
... ist ein besonderes Dreieck, denn es macht ein Achtel der Kugelfläche aus.
Die Summe seiner Winkel $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ beträgt 270°.
!!?!
Sie haben noch längst nicht alles gesehen!
Stellen wir uns jetzt ein Dreieck vor, das aus drei Nadeln und einem Gummifaden gebildet wird und in dem wir nach und nach die Abstände zwischen den Nadeln vergrößern. Die Winkel dieses Dreiecks werden zunehmen und ihre Summe natürlich ebenfalls.
N
180°!
Schließlich kann man soweit gehen, daß die drei Nadeln auf einem Großkreis stecken. Die Winkel $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ sind dann je 180°, und ihre Summe erreicht 540°.

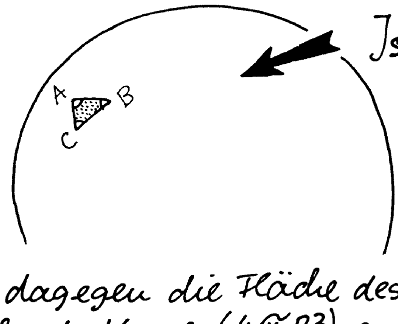
Wandert man mit den Nadeln über den Großkreis hinaus auf die andere Halbkugel, so wird sich das Dreieck zum Pol S hin zusammenziehen. Betrachtet man aber seine Winkel weiterhin vom Pol N aus, so mißt jeder von ihnen mehr als 180°! Ist das Dreieck schließlich wieder so klein, daß seine Fläche praktisch eben ist, so mißt jeder seiner Winkel (vom Pol N aus betrachtet)

$360° - 60° = 300°$

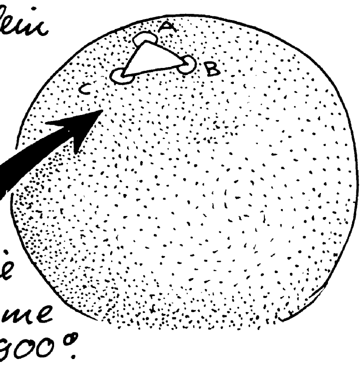


Summe: $300° \times 3 = 900°$

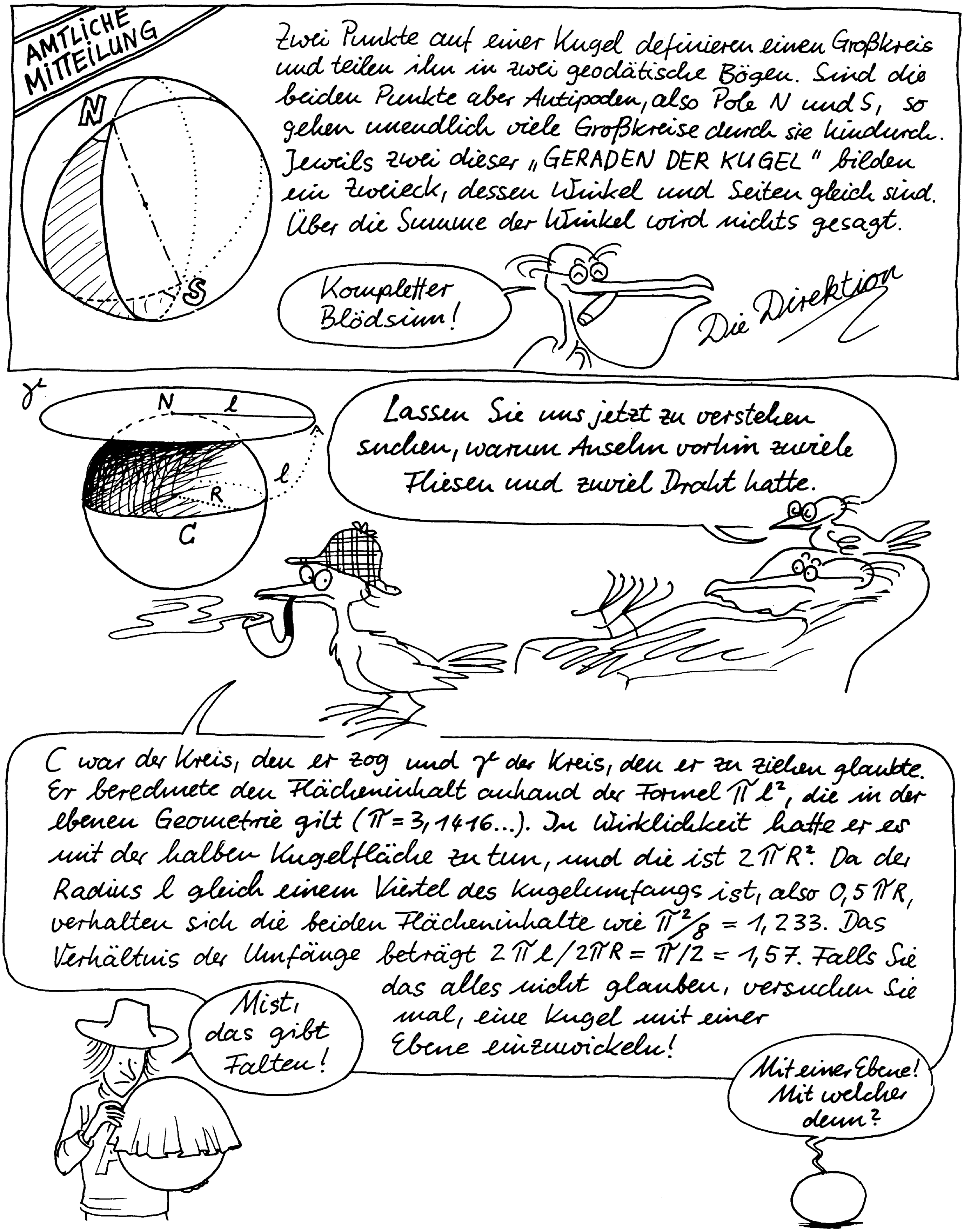


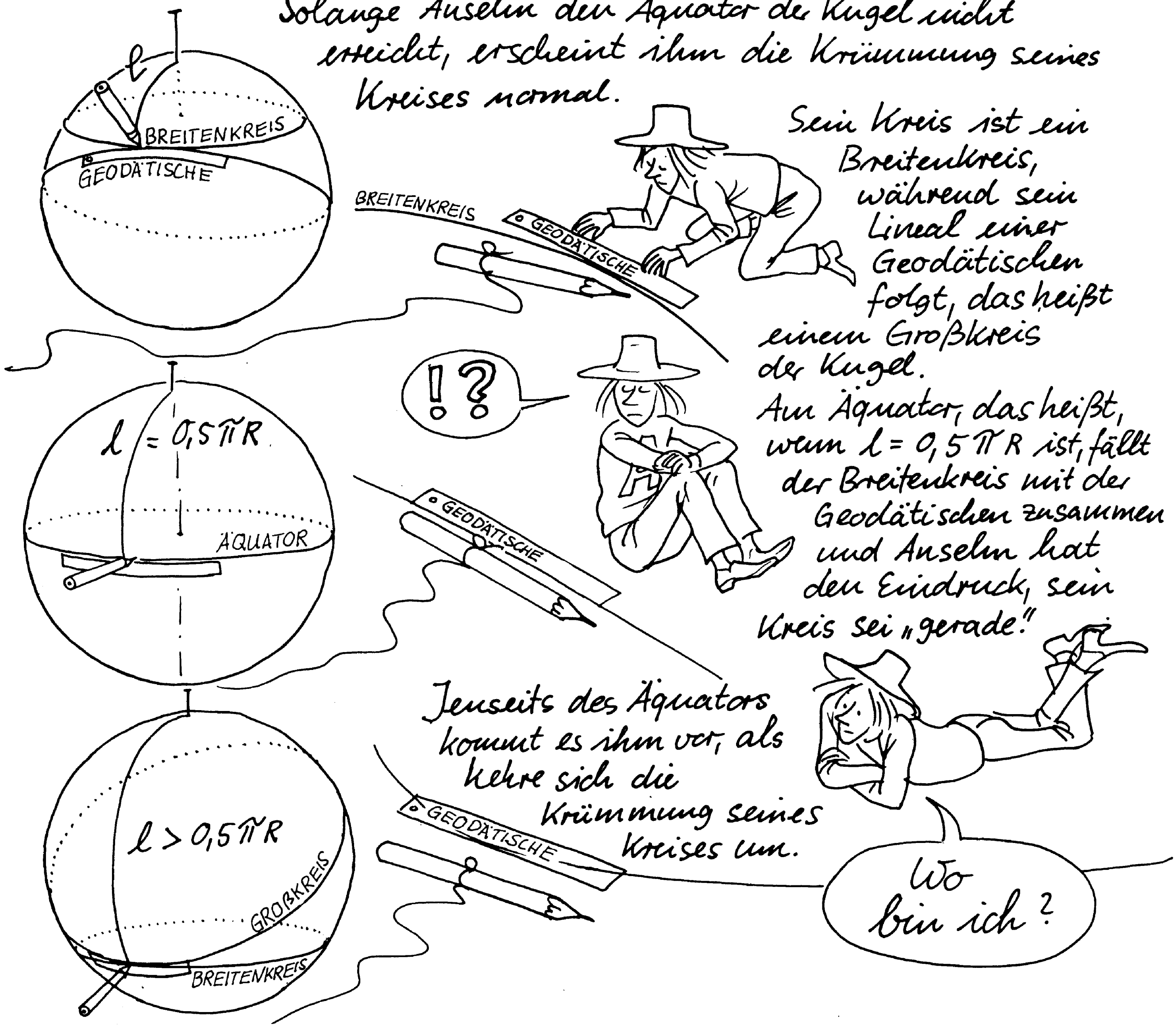


Ist die Fläche des Dreiecks klein verglichen mit der Fläche der Kugel, so kommt man wieder zu Euklid ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$).

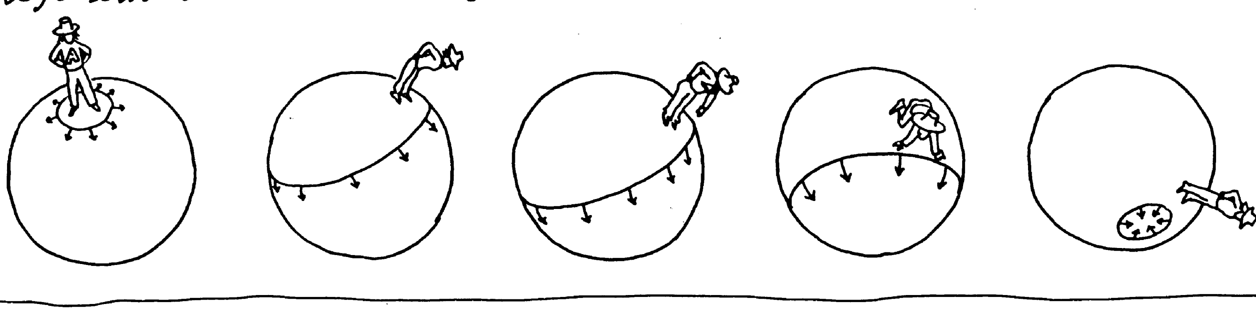


Ist dagegen die Fläche des Dreiecks fast so groß wie die Fläche der Kugel ($4\pi R^2$), so erreicht man die Winkelsumme von 900°.

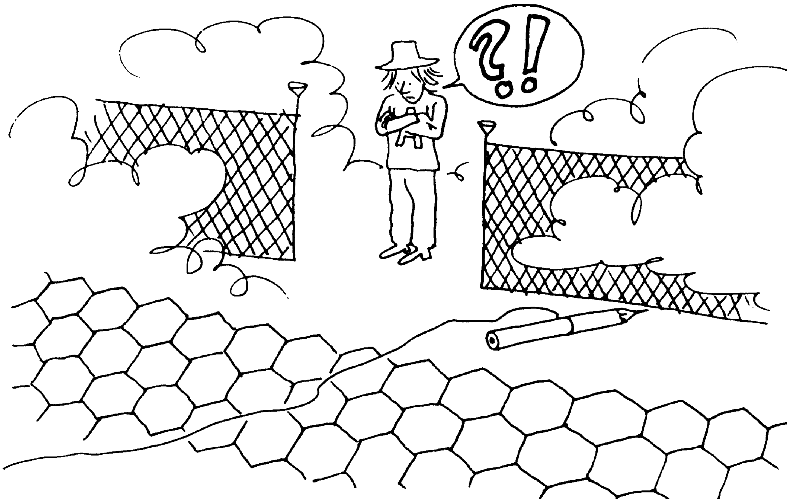

AMTLICHE MITTEILUNG
N
S
Zwei Punkte auf einer Kugel definieren einen Großkreis und teilen ihn in zwei geodätische Bögen. Sind die beiden Punkte aber Antipoden, also Pole N und S, so gehen unendlich viele Großkreise durch sie hindurch. Jeweils zwei dieser „GERADEN DER KUGEL" bilden ein Zweieck, dessen Winkel und Seiten gleich sind. Über die Summe der Winkel wird nichts gesagt.
Kompletter Blödsinn!
Die Direktion
γ
N
l
l
R
C
Lassen Sie uns jetzt zu verstehen suchen, warum Anselm vorhin zuviele Fliesen und zuviel Draht hatte.
C war der Kreis, den er zog und γ der Kreis, den er zu ziehen glaubte. Er berechnete den Flächeninhalt anhand der Formel πl^2, die in der ebenen Geometrie gilt ($\pi = 3{,}1416...$). In Wirklichkeit hatte er es mit der halben Kugelfläche zu tun, und die ist $2\pi R^2$. Da der Radius l gleich einem Viertel des Kugelumfangs ist, also $0{,}5\pi R$, verhalten sich die beiden Flächeninhalte wie $\pi^2/8 = 1{,}233$. Das Verhältnis der Umfänge beträgt $2\pi l / 2\pi R = \pi/2 = 1{,}57$. Falls Sie das alles nicht glauben, versuchen Sie mal, eine Kugel mit einer Ebene einzuwickeln!
Mist, das gibt Falten!
Mit einer Ebene! Mit welcher denn?



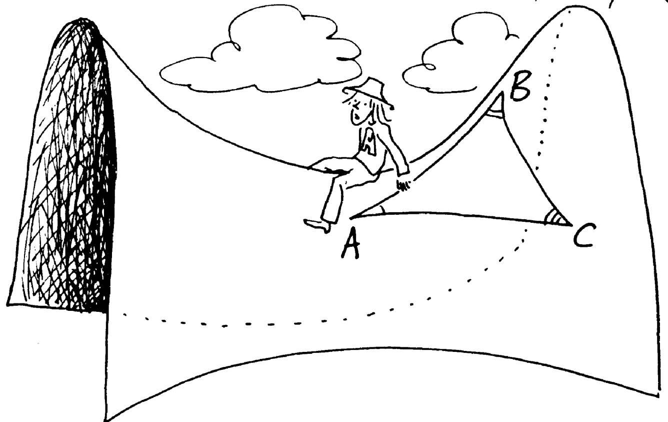
Auf diese Weise wird verständlich, wieso Anselm sich beliebig oft „innerhalb" oder „außerhalb" seines Kreises befinden kann, ohne ihn jemals zu übertreten. Man stecke Anselm als Nadel auf eine Kugel und lege einen elastischen Ring um sie, den man auf der Kugel verschiebt.




Sphärische Geometrie
GAUSS
Anselm brauchte einige Zeit, um diese Verhältnisse, die der Mathematiker Gauß (1777 bis 1855) entdeckte, zu begreifen. Dann beschloß er, die Welt der Fläche zu erkunden.
So jetzt habe ich alles, was ich brauche: ein Lineal, einen Winkelmesser, ein langes Stück Schnur und meinen Holzhammer. Auf geht's...
Manchmal verlangt die Wissenschaft, daß man Risiken eingeht.
... Wissen ist Macht!
Nachdem Anselm in der Welt der Flächen gelandet ist, zieht er zur Sicherheit erst einmal eine Geodätische. Aber diesmal ...
Verflixt, es ist nicht zu sehen, wohin diese Fläche geht.
A
... schließt sie sich nicht.
Was ist denn jetzt los?
Mit drei gut gespannten Fäden baut Anselm ein Dreieck, aber er stellt fest, daß die Summe der Winkel diesmal kleiner als 180° ist.



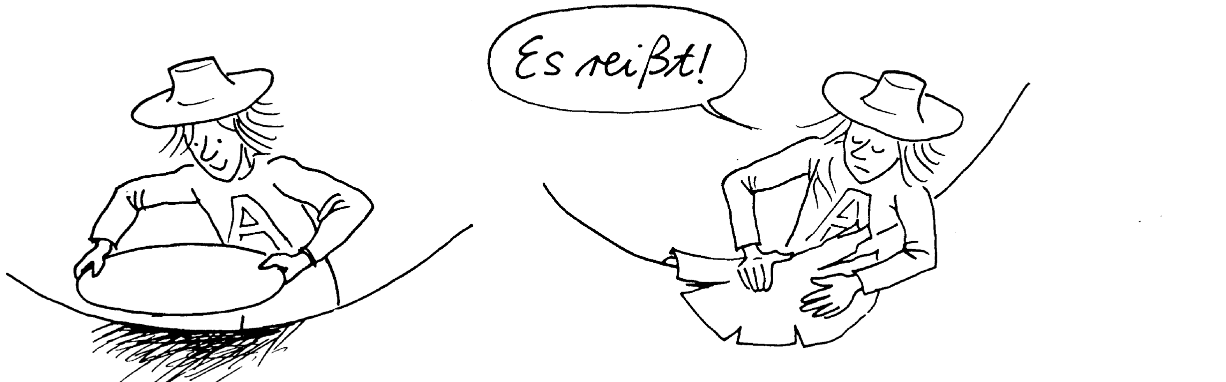
Obwohl Anselm seinen Kreis auch diesmal so konstruiert hat, daß er die Gesamtheit der Punkte bildet, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand l haben, stellt er fest, daß der Kreis auf der neuen Fläche einen größeren Umfang als $2\pi l$ hat, und daß seine Fläche πl^2 übersteigt.



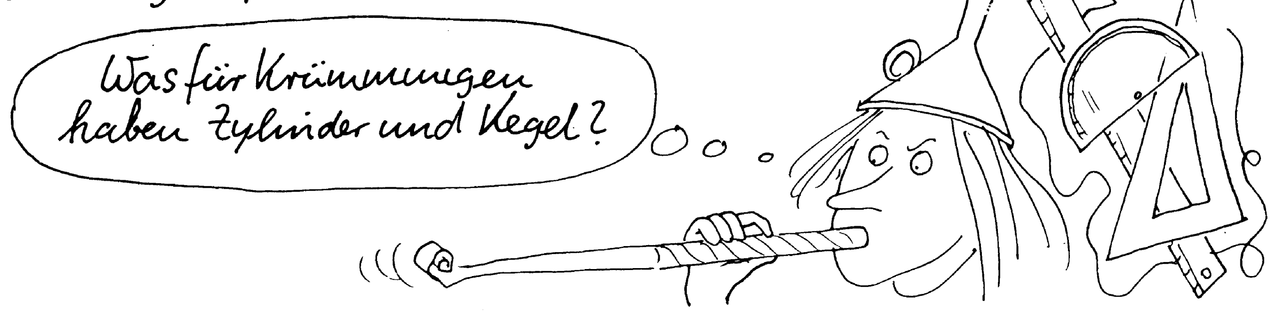
Als sich der Nebel auflöst, sieht Anselm, daß er sich auf einer Fläche befindet, die die Gestalt eines Sattels hat. So geformte Flächen gibt es häufig, wie die Bilder zeigen.

DIE KRÜMMUNG

Auf einer gekrümmten Fläche gelten die Lehrsätze von Euklid nicht. Die Krümmung der Fläche kann positiv oder negativ sein. Auf einer Fläche von positiver Krümmung ist die Winkelsumme im Dreieck größer als 180°. Zieht man einen Kreis mit dem Radius l, so ist seine Fläche kleiner als πl^2 und der Umfang kleiner als $2\pi l$.
Für eine negativ gekrümmte Fläche gelten entgegengesetzte Regeln: Hier ist die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180°, die Fläche eines Kreises mit dem Radius l ist größer als πl^2, und der Umfang ist größer als $2\pi l$.
Als Anselm auf Seite 20 eine Kugel, also eine Fläche von positiver Krümmung, mit einem Stück Ebene einwickeln wollte, stellte er fest, daß sich Falten bildeten. Bei dem Versuch, eine Fläche von negativer Krümmung mit einem Stück Ebene zuzudecken, entstehen Risse. Mit einem Stück Papier läßt sich also besonders einfach prüfen, ob eine Fläche positiv oder negativ gekrümmt ist.



Wie die Bilder auf der vorhergehenden Seite zeigen, kann dieselbe Fläche Regionen mit positiver und Gebiete mit negativer Krümmung aufweisen.

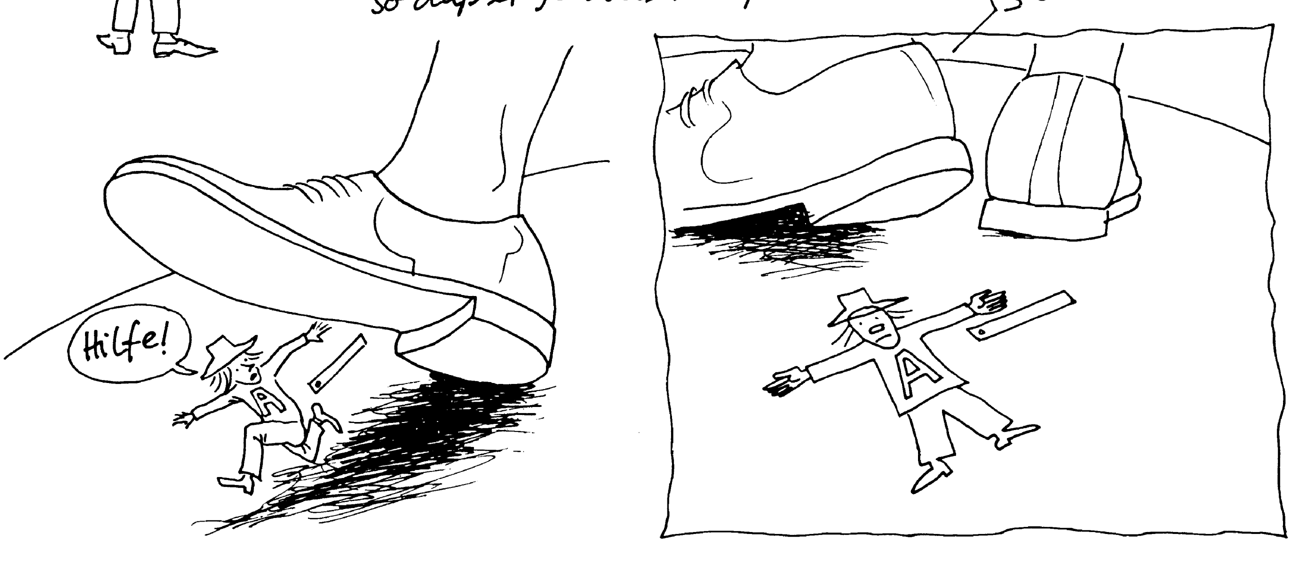



Ich nehme ein Stück Papier...
... und kann Zylinder und Kegel damit mühelos bedecken.
Keine Panik! Ich befestige drei Fäden als Geodätische mit Klebeband auf meinem Zylinder, ...
B
A
C
... zeichne die Geodätischen auf dem Zylinder nach ...
... und schneide den Zylinder auf.
!...
B
A
C
Auf dem Zylinder und auf dem Kegel gelten die Gesetze der euklidischen Geometrie. Sie sind also EBENE FLÄCHEN!

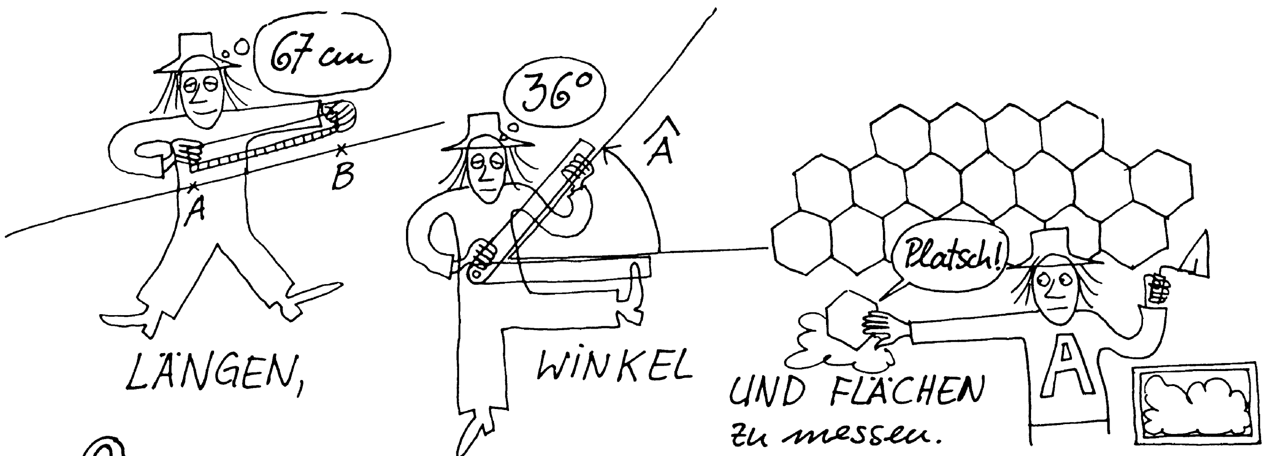
DER BEGRIFF DES RAUMES

Nebel hinderte Anselm vorhin, viel weiter als bis zu seiner Nasenspitze zu sehen. Wäre es nicht so gewesen, so hätte er die Krümmung des sphärischen Raumes bemerkt, in dem er sich jeweils befand.

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, Anselm daran zu hindern, die Krümmung zu sehen: sie besteht darin, ihn in der Fläche leben zu lassen, so daß er gewissermaßen zu ihr gehört.



Man sieht leicht, daß Anselms neue Gestalt ihn nicht daran hindert,



LÄNGEN, WINKEL UND FLÄCHEN zu messen.

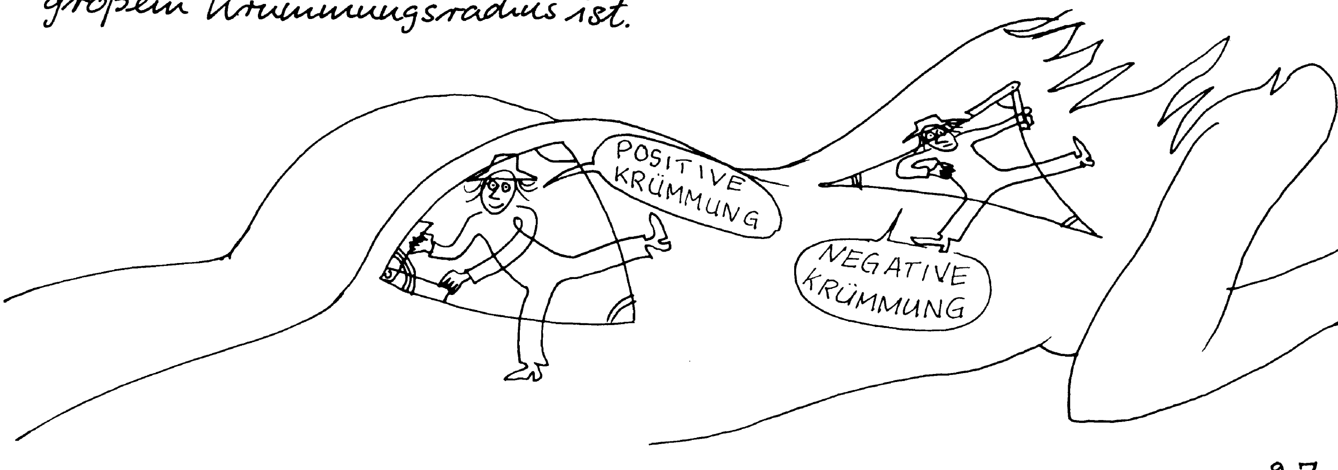
Obwohl Anselm in der Fläche eingesperrt ist und deren Krümmung daher nicht sehen kann, vermag er sie doch festzustellen. Er kann ermitteln, ob sie positiv oder negativ ist, und kann sogar den örtlichen Krümmungsradius R berechnen, denn er vermag Winkel und Flächen zu messen.
Er weiß, daß die Winkelsumme im Dreieck auf einer positiv gekrümmten Fläche 180° übersteigt. Und den örtlichen Krümmungsradius R bekommt er mit der Formel

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \times \left(1 + \frac{F}{\pi R^2}\right),$$

in der F die Fläche des Dreiecks ist. Wenn die Winkelsumme im Dreieck unter 180° bleibt, die Fläche also negativ gekrümmt ist, kann Anselm mit der Formel

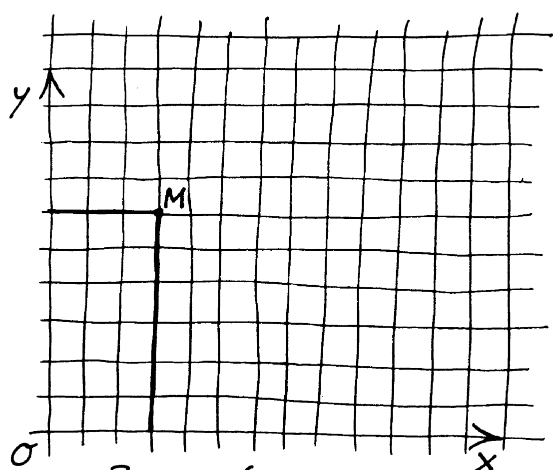
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \times \left(1 - \frac{F}{\pi R^2}\right)$$

einen örtlichen Krümmungsradius berechnen, doch hat dieser dann nicht mehr den gewohnten physikalischen Sinn.
Bleibt zu erwähnen, daß eine Ebene eine Fläche mit unendlich großem Krümmungsradius ist.

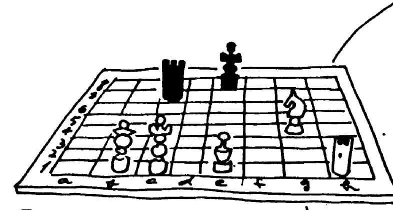


DAS KONZEPT DER DIMENSIONEN

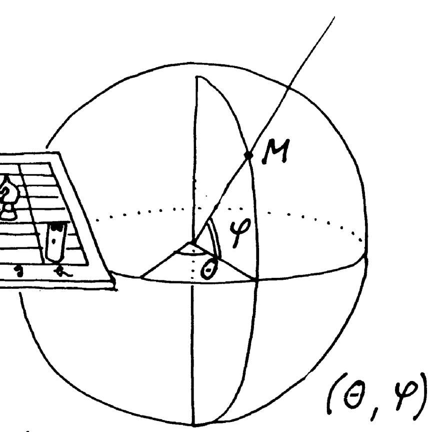
Die Zahl der Dimensionen ist die Zahl der Größen oder Koordinaten, die man festlegen muß, um in irgendeinem Raum einen Punkt zu definieren. Die Größen können beispielsweise Längen, Winkel oder Zeiten sein.
Flächen sind demnach zweidimensionale Räume.



x = 3 ; y = 6

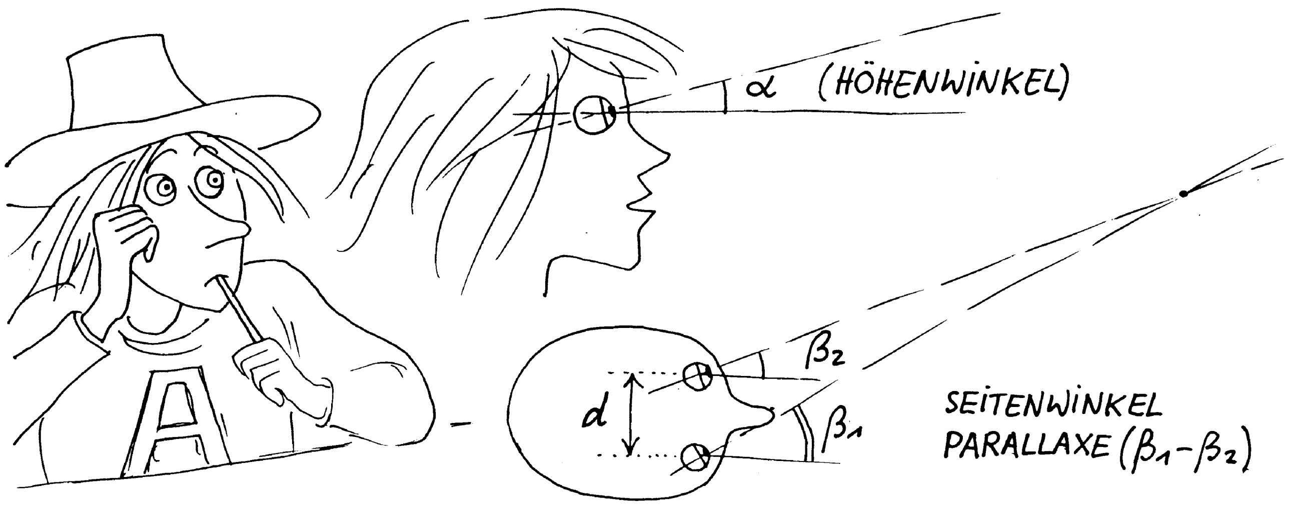


Pferd auf g4



Längengrad, Breitengrad

Wir sind gewöhnt, den Raum, in dem wir leben, als dreidimensional zu bezeichnen, doch gilt das nur, wenn man die Zeit außer Betracht läßt.

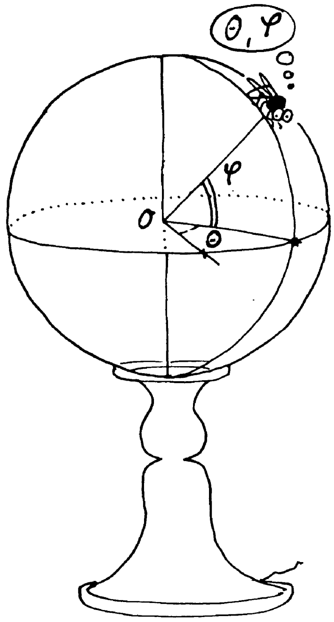


Anselm ortet alle Objekte, die er sieht, relativ zur Position seines Kopfes. Für ihn ergibt sich die Lage eines beliebigen Punktes im Raum aus drei Winkeln:

dem Höhenwinkel α und den beiden Seitenwinkeln β_1 und β_2.

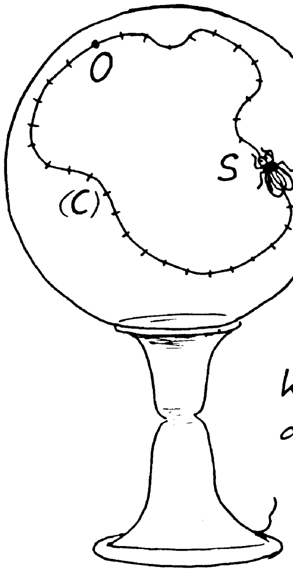
Aus der Differenz $\beta_1 - \beta_2$, die man Parallaxe nennt, ermittelt Anselms Gehirn die Entfernung des Punktes.

EINGETAUCHTE RÄUME



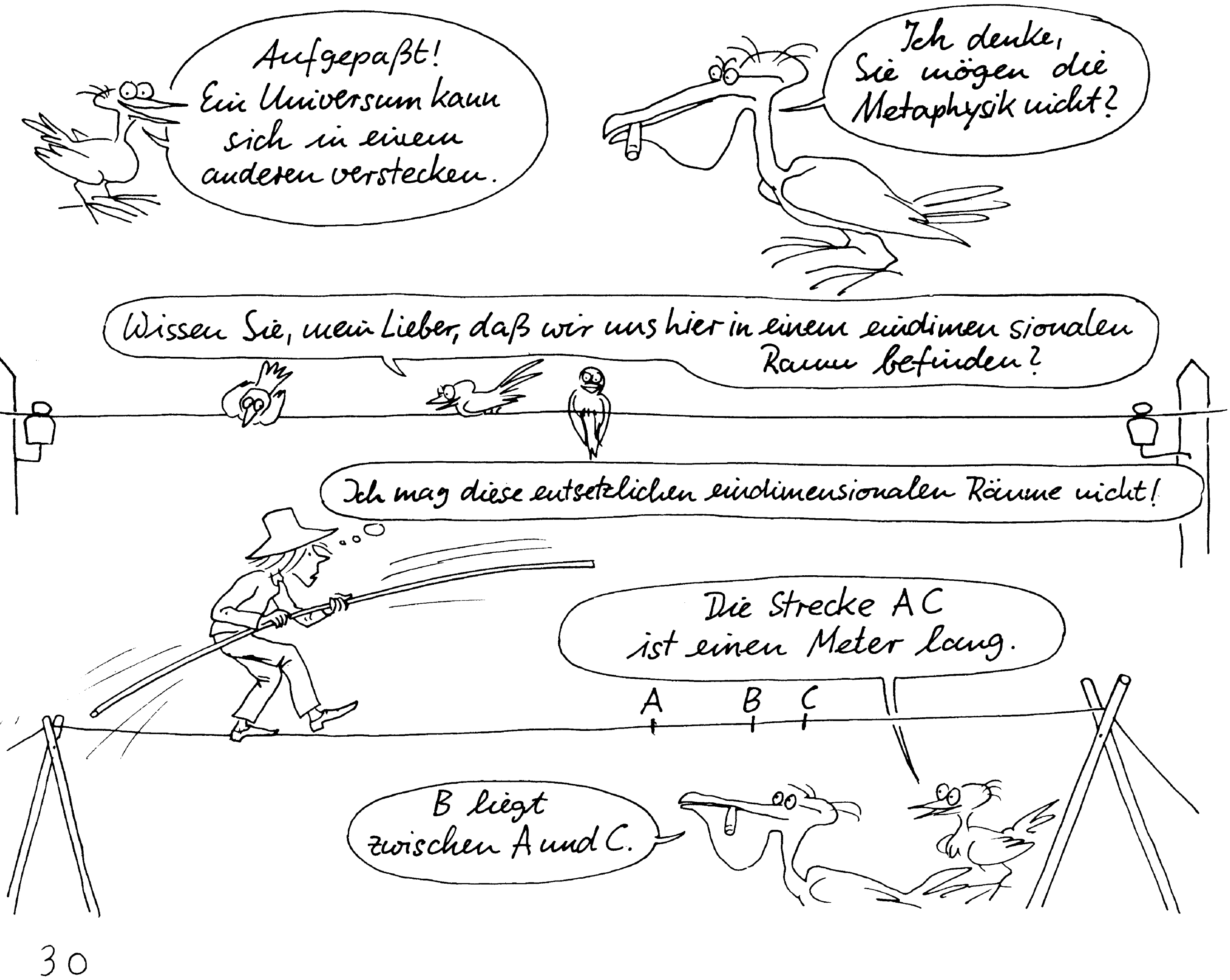
Die Fliege krabbelt auf der Lampenkugel. Deren Oberfläche ist ein zweidimensionaler Raum, das heißt jede Position der Fliege kann mit zwei Winkeln θ und φ (Längengrad und Breitengrad) beschrieben werden.

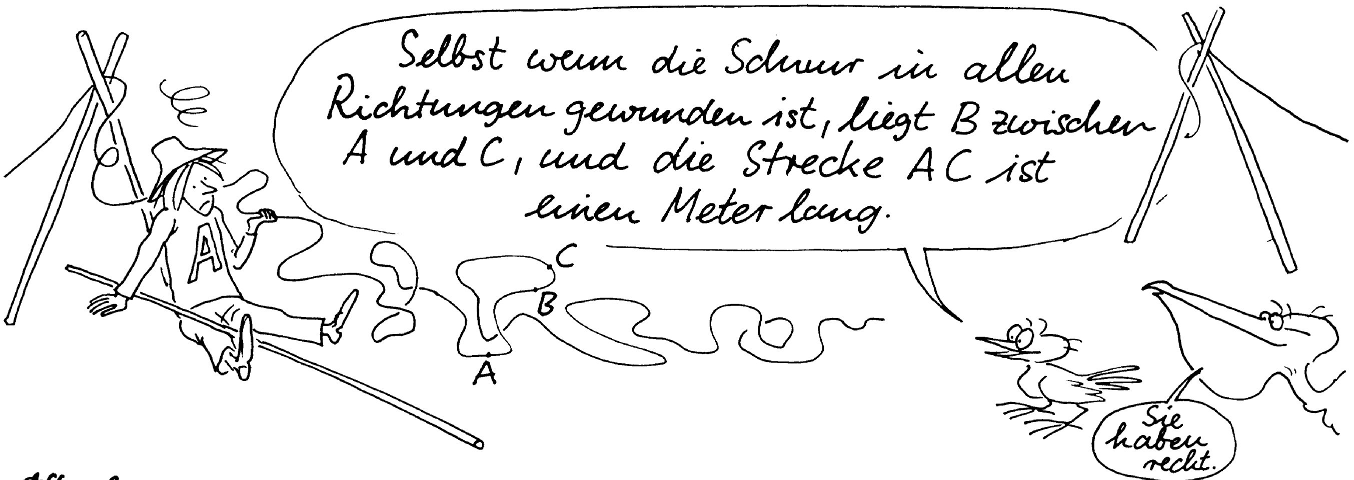
Wir sagen, daß der zweidimensionale Raum der Kugelfläche in unseren dreidimensionalen Raum eingetaucht ist.



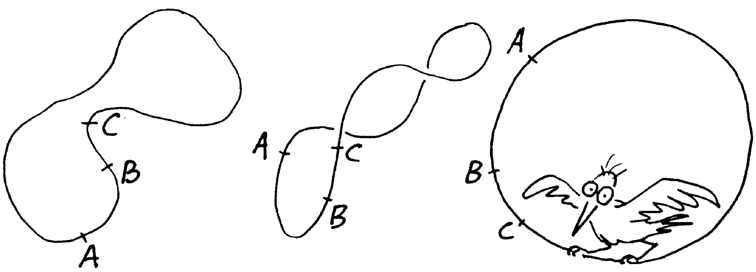
Nehmen wir an, die Fliege folgt auf der Lampe der geschlossenen Kurve C. Dann können wir ihre Position jeweils mit einer einzigen Koordinate angeben: mit ihrer Entfernung S von einem Ursprungspunkt O längs der Kurve gerechnet.

Eine Kurve ist also ein eindimensionaler Raum. Er ist in den zweidimensionalen Raum der Kugeloberfläche eingetaucht, der seinerseits in unseren dreidimensionalen Raum eingetaucht ist. Möglicherweise ist der Raum, in dem wir uns bewegen, in einen vierdimensionalen Raum eingetaucht, ohne daß wir uns dessen bewußt sind?





Offenbar sind einige Eigenschaften eines Raumes unabhängig von der Art, in der er in einen anderen Raum eintaucht. Diese drei Bilder zeigen ein paar Möglichkeiten für das Eintauchen einer geschlossenen Kurve in den gewöhnlichen Raum.



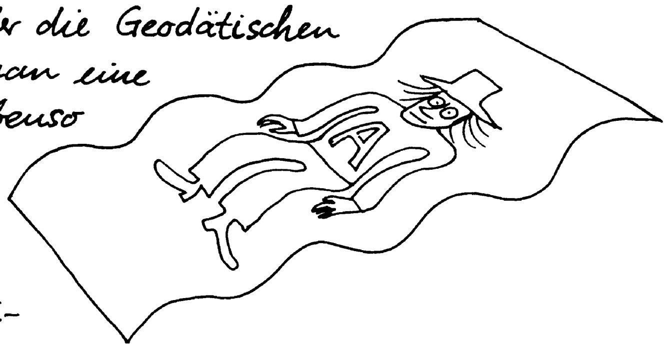
Auch die Geschlossenheit der Kurve ist eine von der Art des Eintauchens unabhängige Eigenschaft.

Natürlich haben wir uns davor gehütet, die Schnur zu verlängern oder zu verkürzen. Wir haben darauf geachtet, daß sich die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Punkten nicht verändern.

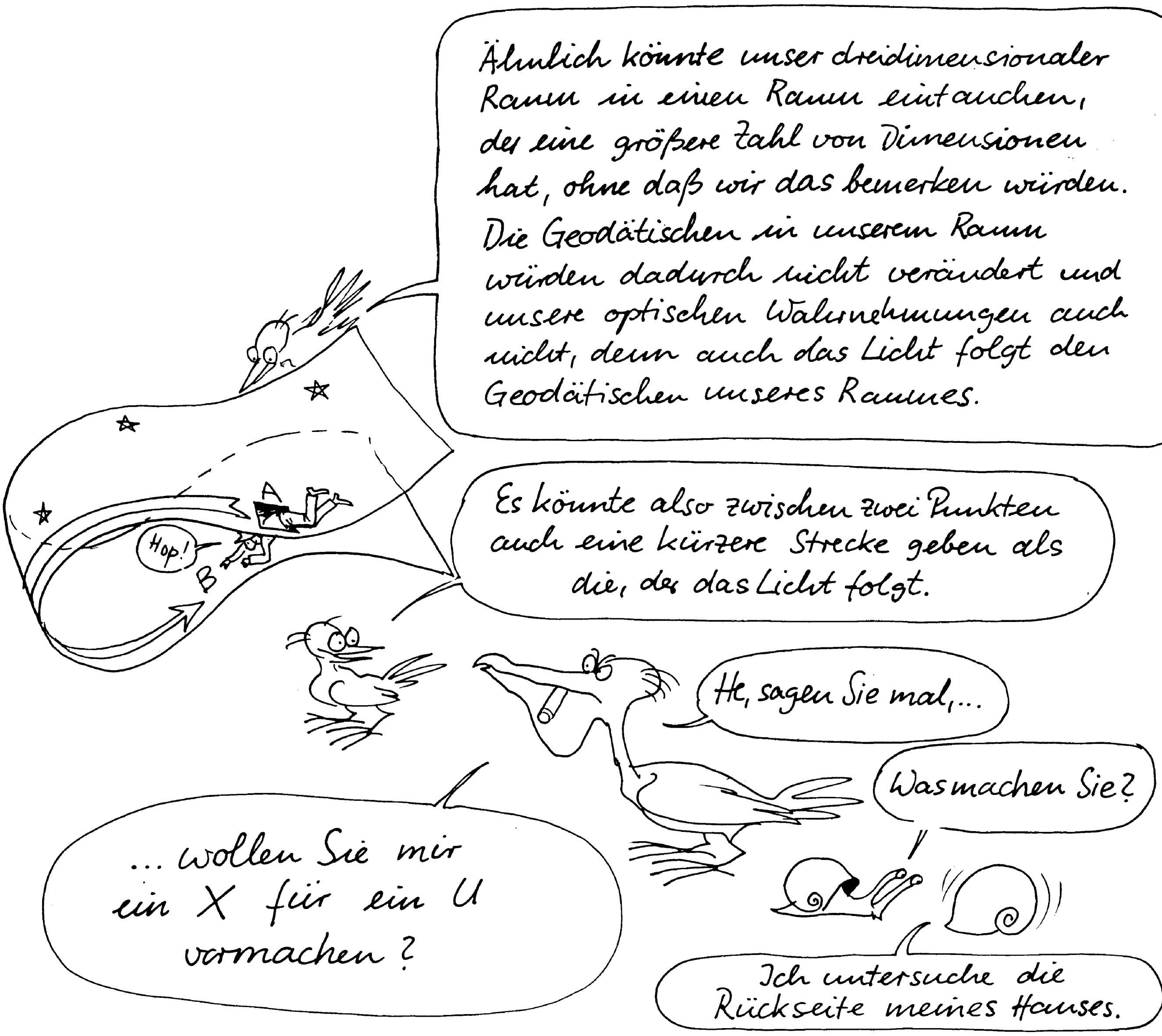
Jetzt wollen wir Flächen in den dreidimensionalen Raum eintauchen.

Tauchen wir eine Ebene in den dreidimensionalen Raum, so können wir sie rollen, drehen und wenden wie wir wollen, ohne ihre Geometrie zu ändern.

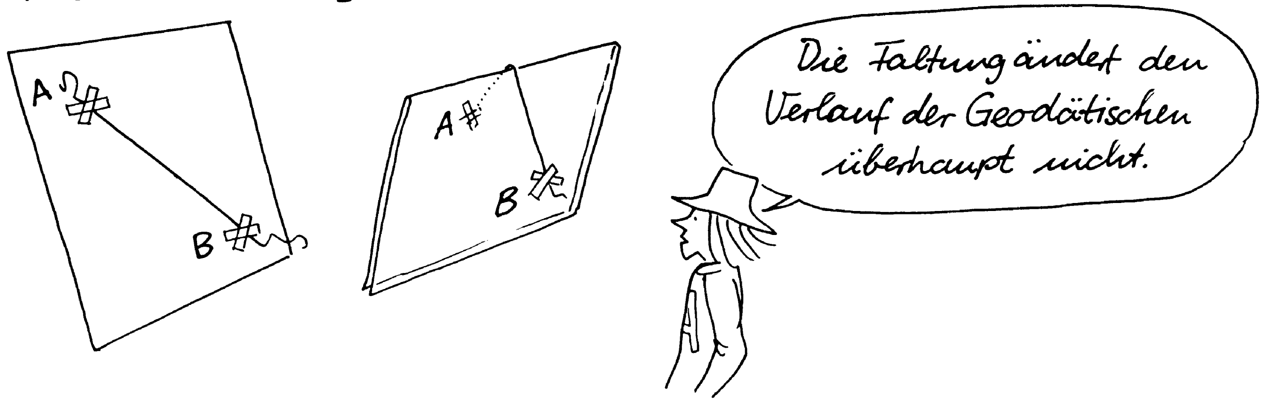
Wir haben gesehen, daß sich weder die Geodätischen noch die Winkel ändern, wenn man eine Ebene zu einem Zylinder rollt. Ebenso besitzt Wellblech immer eine ebene euklidische Geometrie.



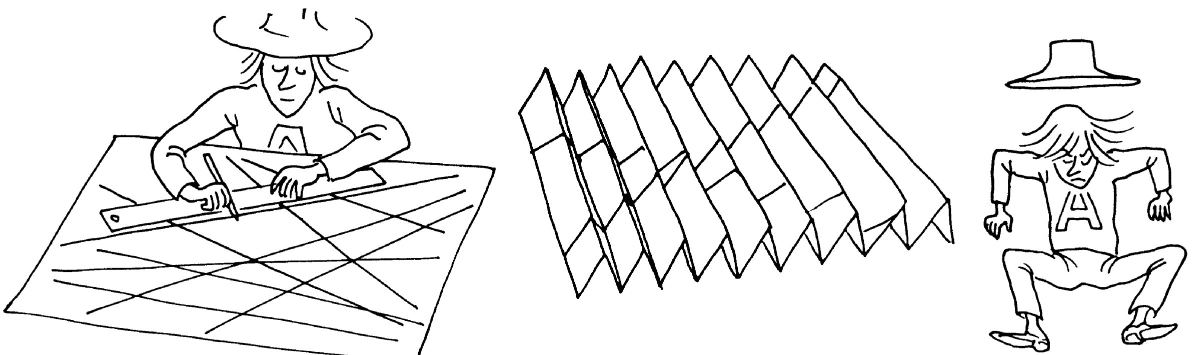
Ein Bewohner eines solchen zweidimensionalen euklidischen Raumes hätte vom gerollten oder gewellten Zustand seines Raumes keine Ahnung, denn diese Zustände ergeben sich nur aus der Art des Eintauchens in den dreidimensionalen Raum.



Nehmen wir ein Stück Ebene,
verbinden A und B durch eine Gerade und falten es.



Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier mit einem Lineal eine Menge Geraden und zerknüllen Sie das Blatt. Die Linien, die Sie sehen, bleiben die Geodätischen der Fläche.



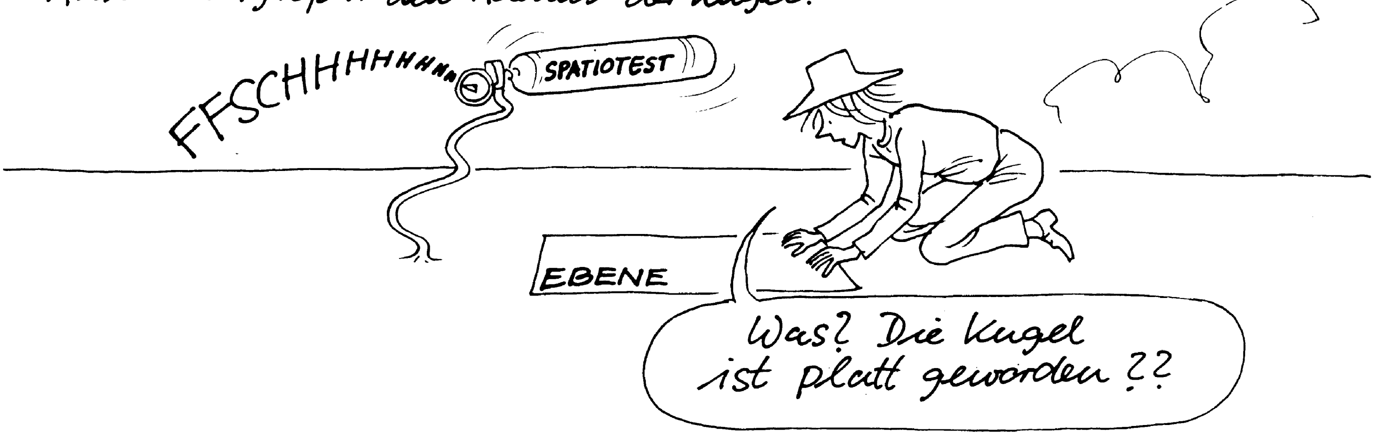

Herr Wüßtegern?
Ich vertrete das Haus Euklid & Co. Sie hatten kürzlich ... äh ... einigen Verdruß mit unserem Material?
EUKLID & CO
Allerdings!
Ich habe hier einen Artikel, der Sie vollkommen zufriedenstellen müßte.
Das interessiert mich.
KOSMISCHES FLUID SPATIOTEST
Die Zukunft gehört dem Dreidimensionalen. Sehen Sie, die Geometrie der zwei Dimensionen ist ein bißchen ... äh ... überholt.
Unser neuer Bausatz für Geodätische ...
... besteht aus starren Stangen, die sich perfekt aneinanderfügen lassen ...
... und Ihnen die Sicherheit geben, weder nach rechts noch nach links, weder nach oben noch nach unten, sondern stets geradeaus zu gehen.

Mit dieser Farbe messen Sie Flächen. Genau hundert Gramm pro Quadratmeter.
Genial!
Und wenn Sie Volumina messen wollen, füllen Sie diese mit Gas. Den Verbrauch lesen Sie direkt an der Meßuhr ab.
Und behalten Sie im Kopf: Oberfläche der Kugel: $4\pi l^2$; Volumen: $\frac{4}{3}\pi l^3$.
Vielen Dank!
EUKLID & CO
Ganz schön mühsam!
Anselm ist diesmal in einem dreidimensionalen Raum gelandet. Wir werden ihn bei seinen Entdeckungen begleiten.

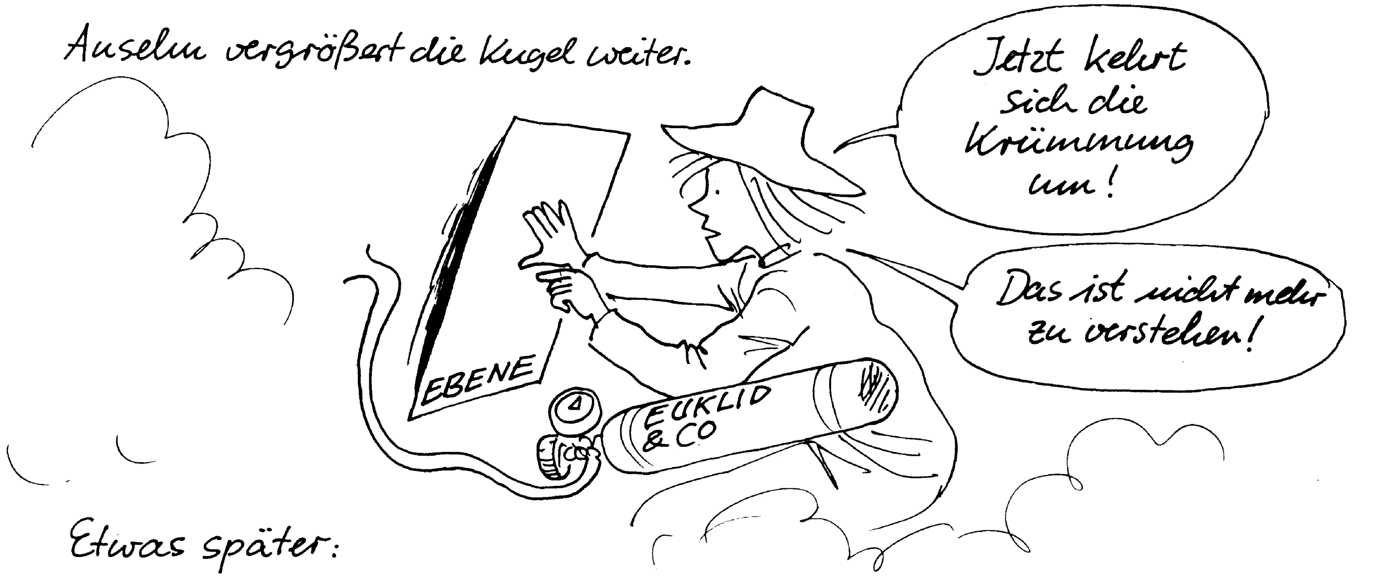
Wirklich bestes Material! Jede Stange ist genau einen Meter lang.
Aber nachdem er etliche Stangen zusammengesteckt hatte:
Da, es ist dasselbe wie vorhin,...
... meine Geodätische schließt sich!
Ein geschlossener dreidimensionaler Raum?
Das ist das Ende!
Anselm, der sich auf einen Asteroiden gesetzt hatte, um etwas zu essen, beschloß zur Methode der Winkelmessung zurückzukehren.
EUKLID & CO
Ich werde wieder drei Geodätische nehmen, um ein Dreieck zu bilden.

!?
Ich habe meine Geodätischen anständig zusammengesteckt und trotzdem ist die Summe der drei Winkel größer als 180°.
Also...
FFSCHHHHH...
... jetzt werde ich eine Kugel fabrizieren und ihr Volumen und ihre Oberfläche messen.
Eine Kugel mit dem Radius l ist die Gesamtheit der Punkte, die von einem festen Punkt den Abstand l haben. Den festen Punkt werde ich mit N bezeichnen.
Und die Fläche ist auch kleiner als $4\pi l^2$.
Da, schon ist das Volumen kleiner als $\frac{4}{3}\pi l^3$.
Die haben mich schon wieder reingelegt.

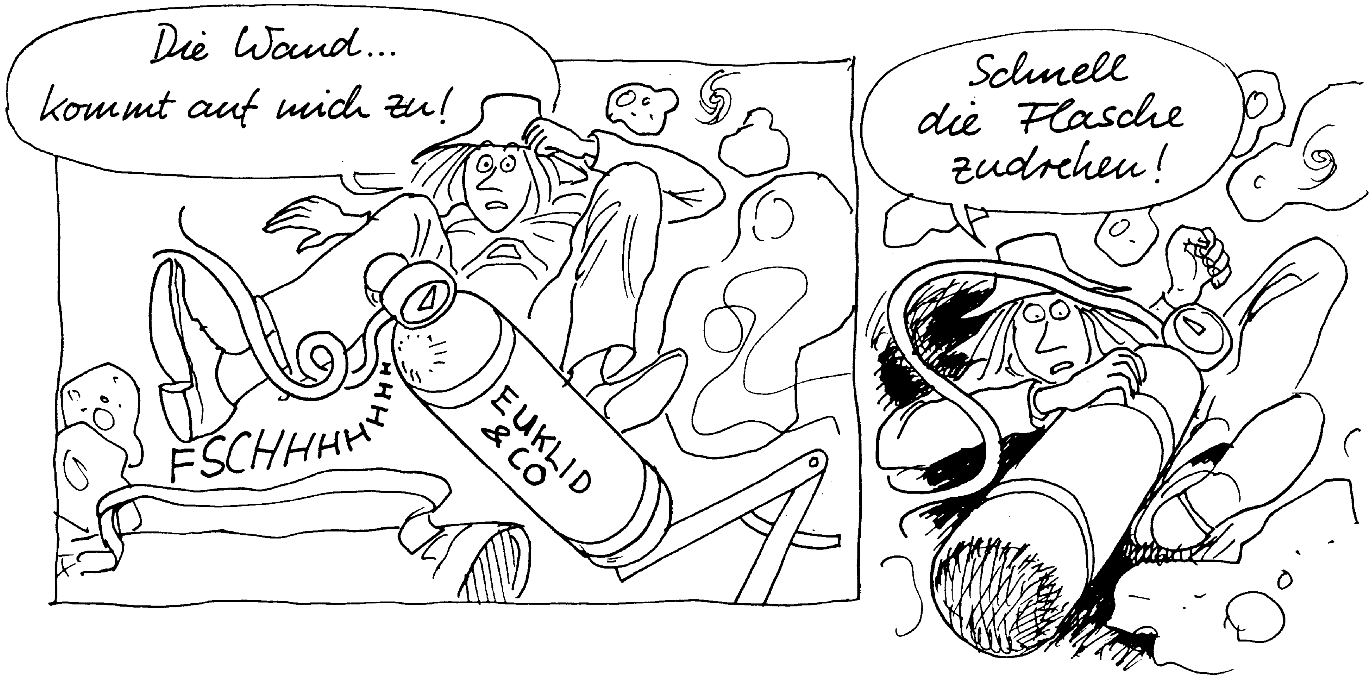
Anselm vergrößert den Radius der Kugel.



Anselm vergrößert die Kugel weiter.



Etwas später:

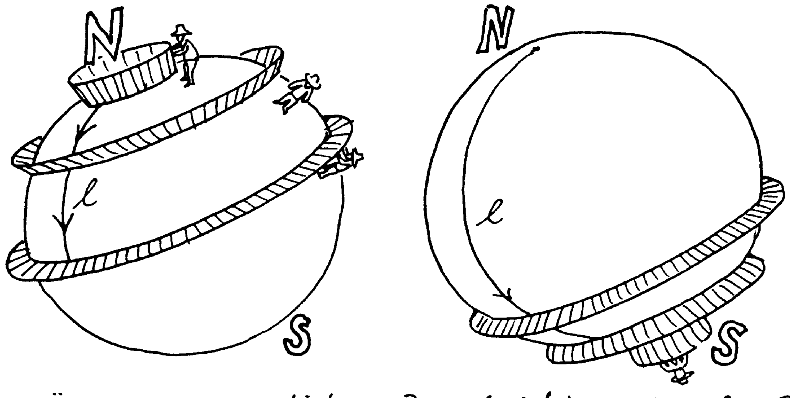


So befindet sich Anselm, der in einem dreidimensionalen Raum einen simplen Luftballon aufblasen wollte, schließlich im Inneren des Ballons.

Hätte er die Gasflasche nicht rechtzeitig zugedreht, so wäre er erdrückt worden, genauso wie er sich auf Seite 13 schließlich in seiner eigenen Umzäunung gefangen hatte.

Leider kann man auch mit dem besten Willen die Krümmung eines dreidimensionalen Raumes nicht mehr bildlich darstellen. Seine Geodätischen schließen sich, und sein Volumen ist begrenzt, so wie die Oberfläche unseres Planeten geschlossen und begrenzt ist. Die Summe der Winkel eines Dreiecks im gekrümmten dreidimensionalen Raum ist größer als 180°. Um die Krümmung zu sehen, müßte man vier Dimensionen wahrnehmen können.

Möglicherweise ist unser dreidimensionales Universum eine Hyperfläche, die in einen Raum von vier Dimensionen eintaucht, der seinerseits vielleicht als Hypersphäre in einen Raum von fünf Dimensionen eintaucht, und so weiter. Aber es gehört heutzutage nicht zum guten Ton, so etwas zu sagen.

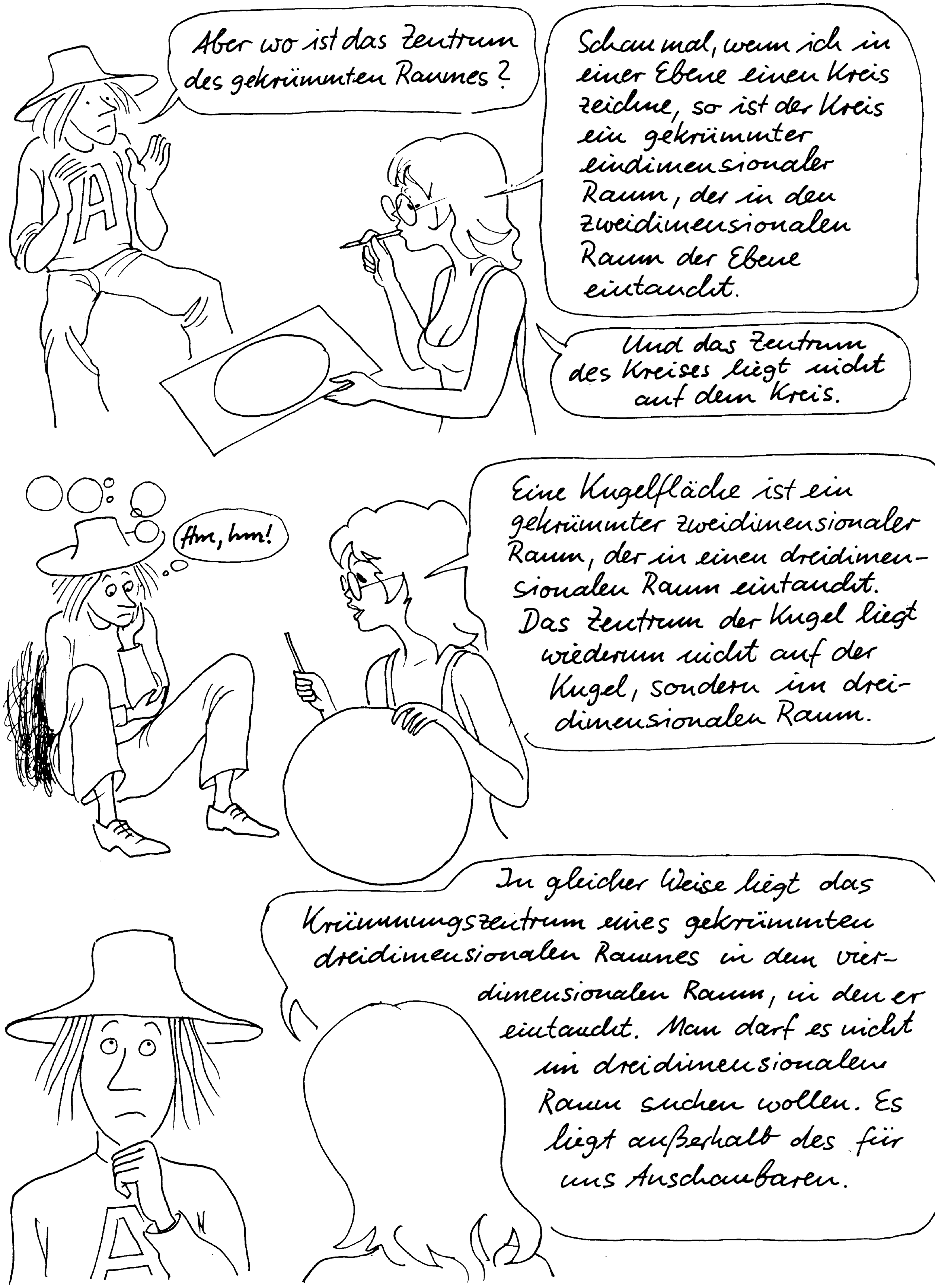


Durch Vergrößerung des Radius l seines Kreises auf der Kugel hatte sich Anselm auf Seite 13 allmählich bis an den Antipoden S des Zentrums seines Kreises herangearbeitet und drohte, in seiner eigenen Umzäunung zu ersticken. Im dreidimensionalen Raum mit positiver Krümmung geschah ihm dasselbe.

Im zweidimensionalen Raum der Kugeloberfläche befand sich Anselm am Äquator, als er die Hälfte der verfügbaren Fläche eingezäunt hatte. Auch im gekrümmten dreidimensionalen Raum gibt es einen Äquator. Anselm erreichte ihn, als sein Ballon die Hälfte des verfügbaren Volumens einnahm. Auf der Kugel erschien ihm der Äquator als eine Gerade. Entsprechend empfand er den „Äquatorballon" als Ebene.

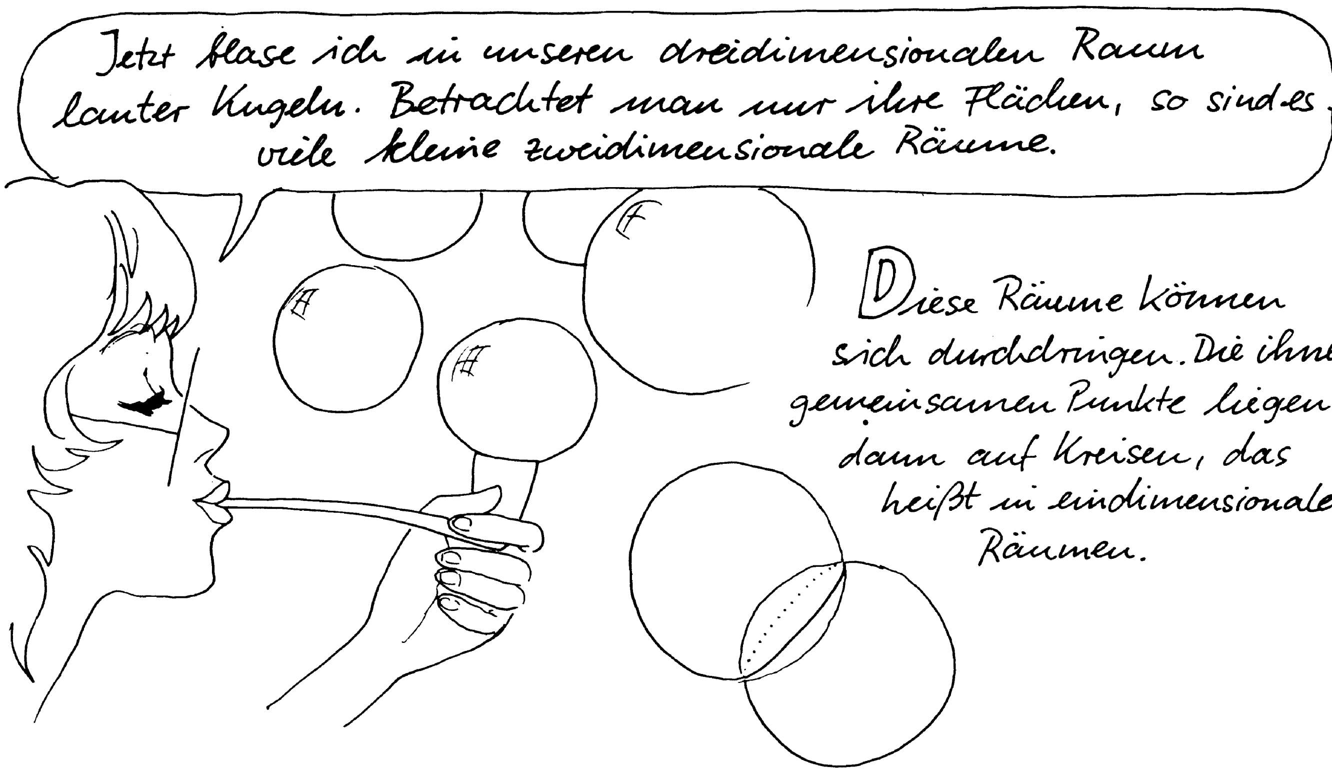
Die Krümmung des Ballons kehrte sich am Äquator um und hatte von da an ihr Zentrum im Punkt S, dem Antipoden zum ursprünglichen Zentrum N des Ballons.

Hast Du Ärger?
Nein, aber in meinem Kopf geht alles durcheinander... Kurven, Flächen, Räume...
Ich heiße Sophie. Kurven und was dazu gehört sind meine Spezialität.
Die Navigation in gekrümmten Räumen ist am Anfang immer ein bißchen überraschend. Man darf sich nur nicht gehemmt fühlen. Dann gewöhnt man sich ziemlich rasch daran.
Jetzt habe ich den Faden verloren...
Macht nichts!

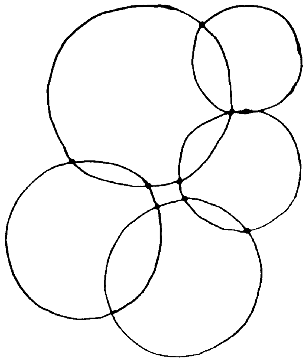

Aber wo ist das Zentrum des gekrümmten Raumes?
Schau mal, wenn ich in einer Ebene einen Kreis zeichne, so ist der Kreis ein gekrümmter eindimensionaler Raum, der in den zweidimensionalen Raum der Ebene eintaucht.
Und das Zentrum des Kreises liegt nicht auf dem Kreis.
Hm, hm!
Eine Kugelfläche ist ein gekrümmter zweidimensionaler Raum, der in einen dreidimensionalen Raum eintaucht. Das Zentrum der Kugel liegt wiederum nicht auf der Kugel, sondern im dreidimensionalen Raum.
In gleicher Weise liegt das Krümmungszentrum eines gekrümmten dreidimensionalen Raumes in dem vierdimensionalen Raum, in den er eintaucht. Man darf es nicht im dreidimensionalen Raum suchen wollen. Es liegt außerhalb des für uns Anschaubaren.


N.
Sieh mal, da bist Du flach wie ein kleines Abziehbild in einer Welt von zwei Dimensionen.
Und nun beginnst Du den Kreis, der sozusagen eine eindimensionale Kugel ist, aufzublasen.
N
Im zweidimensionalen Raum begrenzt eine geschlossene Kurve eine Fläche. Im dreidimensionalen Raum begrenzt eine geschlossene Fläche ein Volumen.
Jetzt bin ich an die Hälfte meines zweidimensionalen Raumes gekommen.
In einem vierdimensionalen Raum hätte eine Grenze drei Dimensionen und würde ein Hypervolumen von vier Dimensionen bestimmen.
Er fängt schon wieder an zu spinnen!
Nichts wie weg!
N
Jetzt nimmt Dein Kreis, Dein „eindimensionaler Ballon", mehr als die Hälfte des verfügbaren Raumes ein. Er beginnt Dich einzuengen, denn seine Grenze nähert sich immer mehr dem antipodischen Punkt S.
S


Entsprechendes geschieht im gekrümmten dreidimensionalen Raum: Wenn ich den Ballon über die Hälfte des verfügbaren Volumens hinaus aufblase, so schließt er sich über mir, und seine Grenze konvergiert zum Antipoden seines Zentrums.
Jetzt habe ich es verstanden!
Die Kugel hat im gekrümmten dreidimensionalen Raum natürlich zwei Zentren, die sich zueinander wie Antipoden verhalten.
?!
Ich weiß zwar nicht genau, was ich verstanden habe, aber ich habe den Eindruck, daß es irgendetwas gewesen ist.
Trotzdem habe ich Angst.
Nicht nötig, Anselm! Wenn es um mehr als drei Dimensionen geht, heißt verstehen immer EXTRAPOLIEREN!
Ich extrapoliere, also verstehe ich.
Das Bild müssen Sie in ihrem Kopf entstehen lassen!



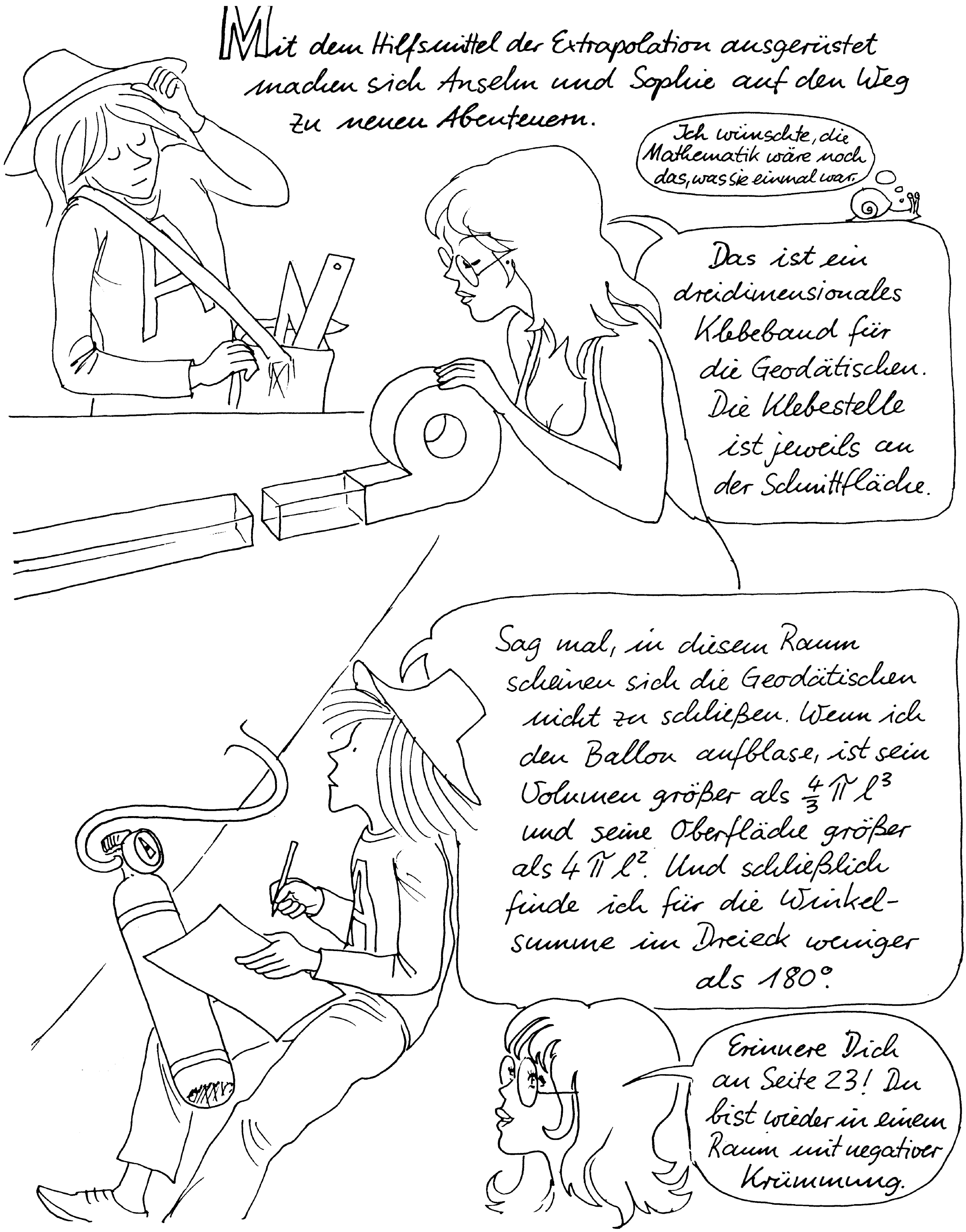
Diese Räume können sich durchdringen. Die ihnen gemeinsamen Punkte liegen dann auf Kreisen, das heißt in eindimensionalen Räumen.



Schneiden sich Kreise, also Räume einer Dimension, auf einem Blatt Papier, so müssen die ihnen gemeinsamen Stellen nulldimensionale Räume sein. Man sagt daher, daß ein Punkt die Dimension Null hat.

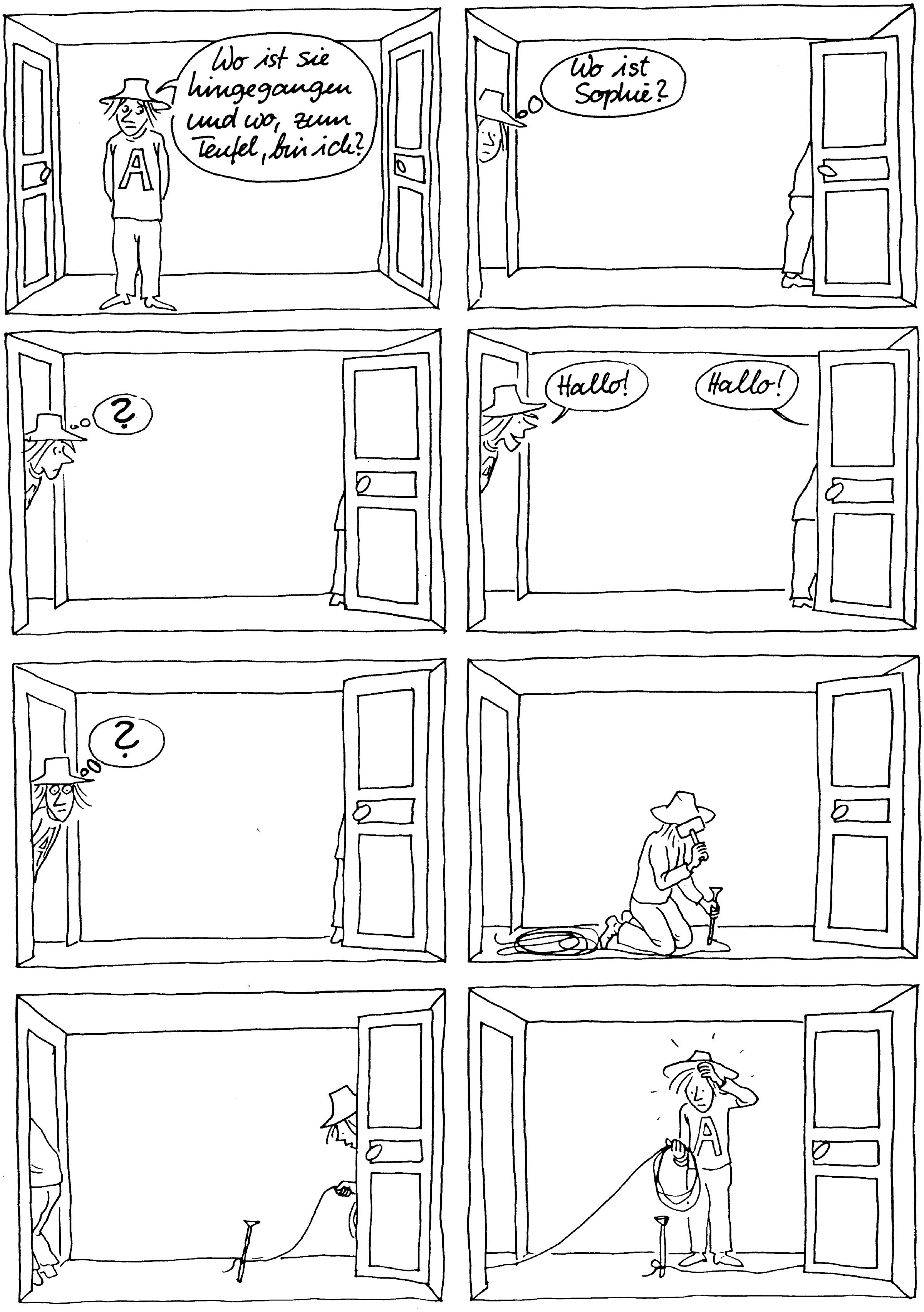
Treibt man dieses Gedankenspiel weiter, so ist eine Kugelfläche ein Bereich, der zu zwei dreidimensionalen Räumen gehört, die sich im vierdimensionalen Raum durchdringen.

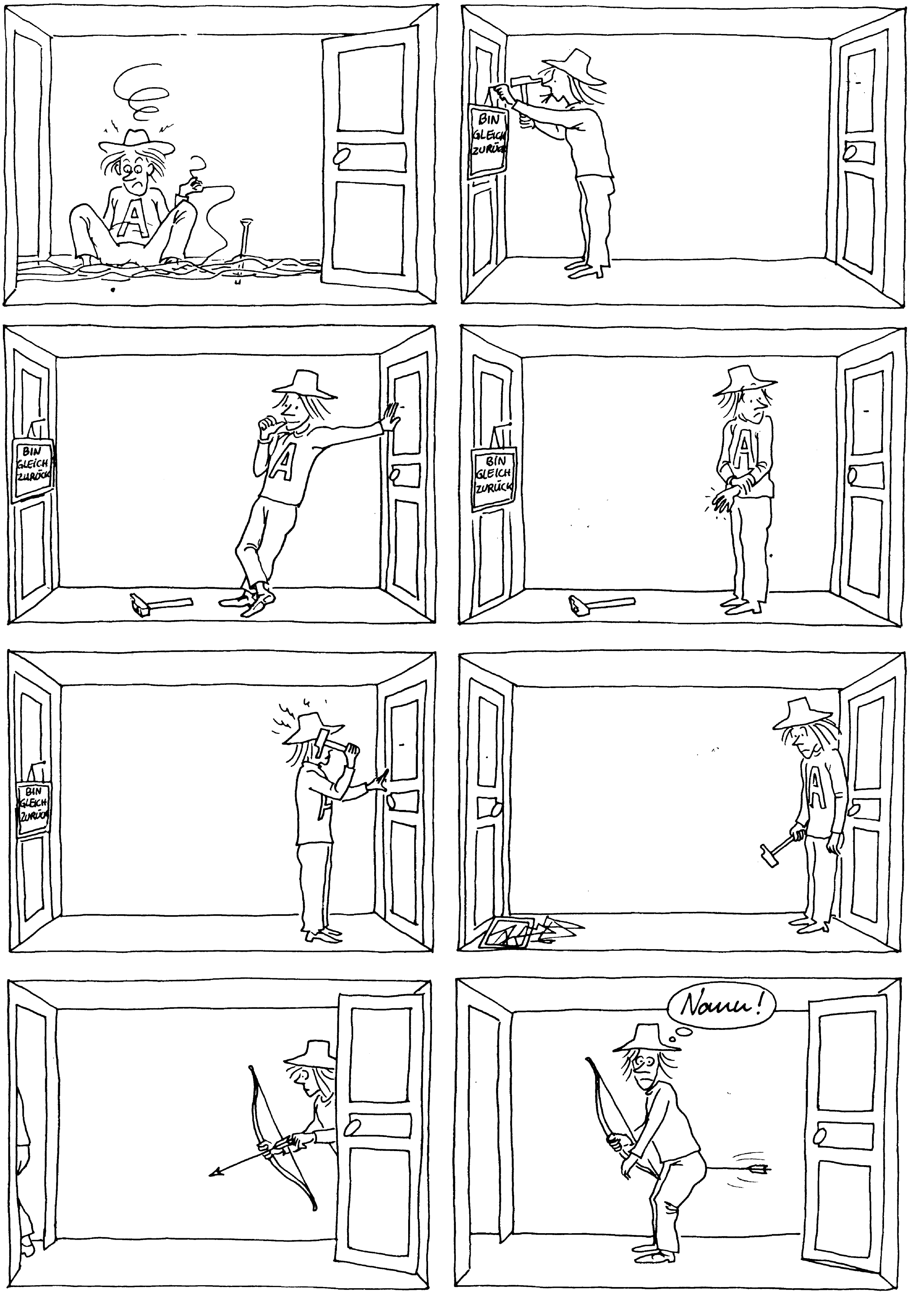
Und weiter enthielte ein gekrümmter dreidimensionaler Raum alle Elemente, die gleichzeitig zu zwei vierdimensionalen Räumen gehören, wenn sich diese in einem Raum von fünf Dimensionen durchdringen.


Mit dem Hilfsmittel der Extrapolation ausgerüstet machen sich Anselm und Sophie auf den Weg zu neuen Abenteuern.
Ich wünschte, die Mathematik wäre noch das, was sie einmal war.
Das ist ein dreidimensionales Klebeband für die Geodätischen. Die Klebestelle ist jeweils an der Schnittfläche.
Sag mal, in diesem Raum scheinen sich die Geodätischen nicht zu schließen. Wenn ich den Ballon aufblase, ist sein Volumen größer als $\frac{4}{3}\pi l^3$ und seine Oberfläche größer als $4\pi l^2$. Und schließlich finde ich für die Winkelsumme im Dreieck weniger als 180°.
Erinnere Dich an Seite 23! Du bist wieder in einem Raum mit negativer Krümmung.

Mit der Krümmung dreidimensionaler Räume verhält es sich ähnlich wie mit der Krümmung von Flächen (die ja zweidimensionale Räume sind). Wenn die Winkelsumme eines Dreiecks im gekrümmten dreidimensionalen Raum größer als 180° ist, hat der Raum eine positive Krümmung. Bildest Du darin eine Kugel vom Radius l, so wirst Du ihr Volumen kleiner als $\frac{4}{3}\pi l^3$ und ihre Oberfläche kleiner als $4\pi l^2$ finden. Dieser Raum, den man auch hypersphärisch nennt, ist in sich geschlossen.
Ist die Winkelsumme eines Dreiecks in einem gekrümmten dreidimensionalen Raum kleiner als 180°, so hat der Raum eine negative Krümmung. In ihm ist das Volumen einer Kugel vom Radius l größer als $\frac{4}{3}\pi l^3$ und ihre Oberfläche größer als $4\pi l^2$. Dieser Raum hat eine unendliche Ausdehnung.
Und wenn die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, so ist der Raum euklidisch!
Ist das ein Umweg!

EIN RAUM KANN OFFEN ODER GESCHLOSSEN SEIN


Wo ist sie hingegangen und wo, zum Teufel, bin ich?
Wo ist Sophie?
?
Hallo!
Hallo!
?

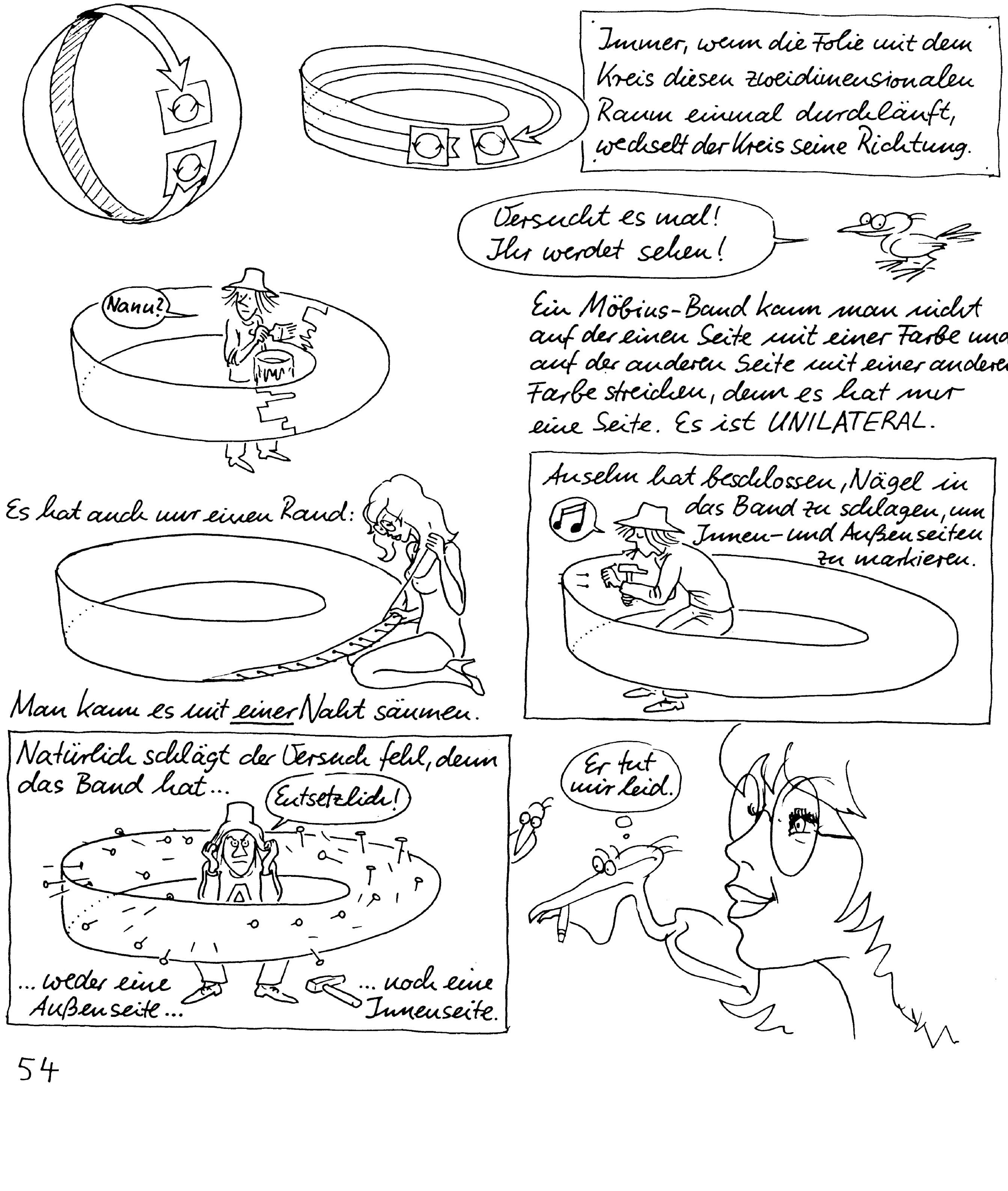

BIN GLEICH ZURÜCK
Nanu!


Ach ja, Anselm war in einen zylindrischen Raum von drei Dimensionen geraten. Obwohl euklidisch (die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt darin 180°), ist dieser Raum geschlossen.
Nanu!
Sei's drum. Aber mit den sphärischen, hyperbolischen und zylindrischen Welten haben wir jetzt doch hoffentlich alles gesehen?
GEOMETRIE
Meint Ihr?
Laßt uns ein bißchen ins Zweidimensionale zurückkehren!
He!
WOLKEN

WEDER OBEN NOCH UNTEN


Sie schließt sich schon wieder!
Summe der Winkel: 180° Das Ding ist euklidisch. Wahrscheinlich wieder der Trick mit dem Zylinder.
!?!
Verdammt! Das ist neu.
AUSGANGS-PUNKT DER GEODÄTISCHEN
Um es Ihnen zu verraten: Anselm befindet sich diesmal in einem zweidimensionalen, nicht orientierbaren Raum. Das bekannteste Bild eines solchen Raumes ist das Möbius-Band. Möbius hatte diese Idee 1830. Erstaunlicherweise war sie den Griechen nicht gekommen, obwohl die sonst an (fast) alles gedacht haben.
AUSGANGS-PUNKT DER GEODÄTISCH
Sophie, hol mich da raus!

Wir wollen auf ein Stück durchsichtige Folie einen Kreis zeichnen und ihm mit zwei Pfeilspitzen eine Richtung geben. Dann legen wir die Folie auf beliebige Flächen und verschieben sie darauf. Bleibt der Kreis dabei mit sich selbst identisch, so nennen wir die Fläche orientierbar. Zylinder und Ebene sind orientierbare Flächen. Verschiebt man die Folie mit dem Kreis jedoch auf einem Möbius-Band, das gleichfalls aus durchsichtiger Folie besteht, so geschieht etwas Merkwürdiges:

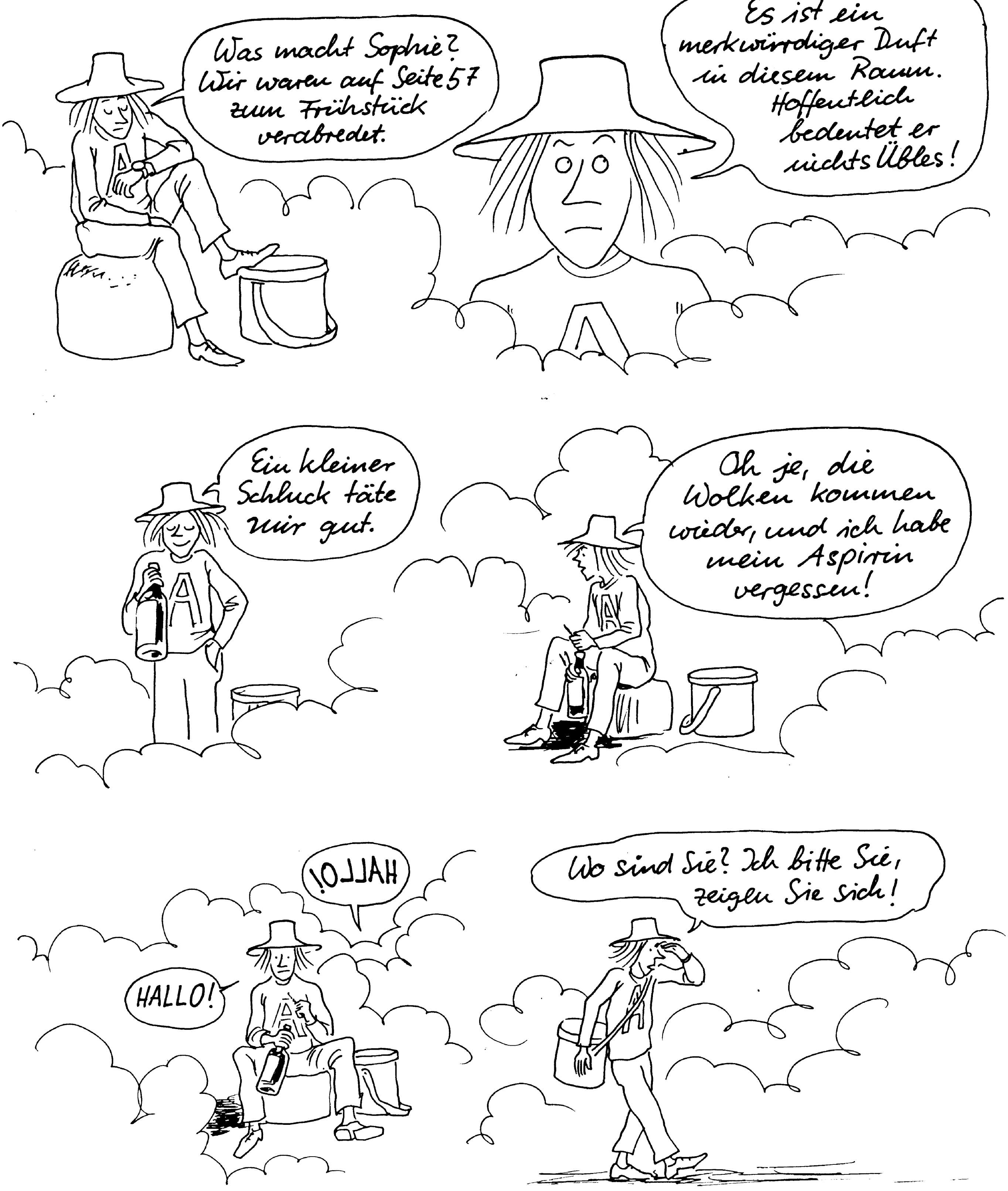


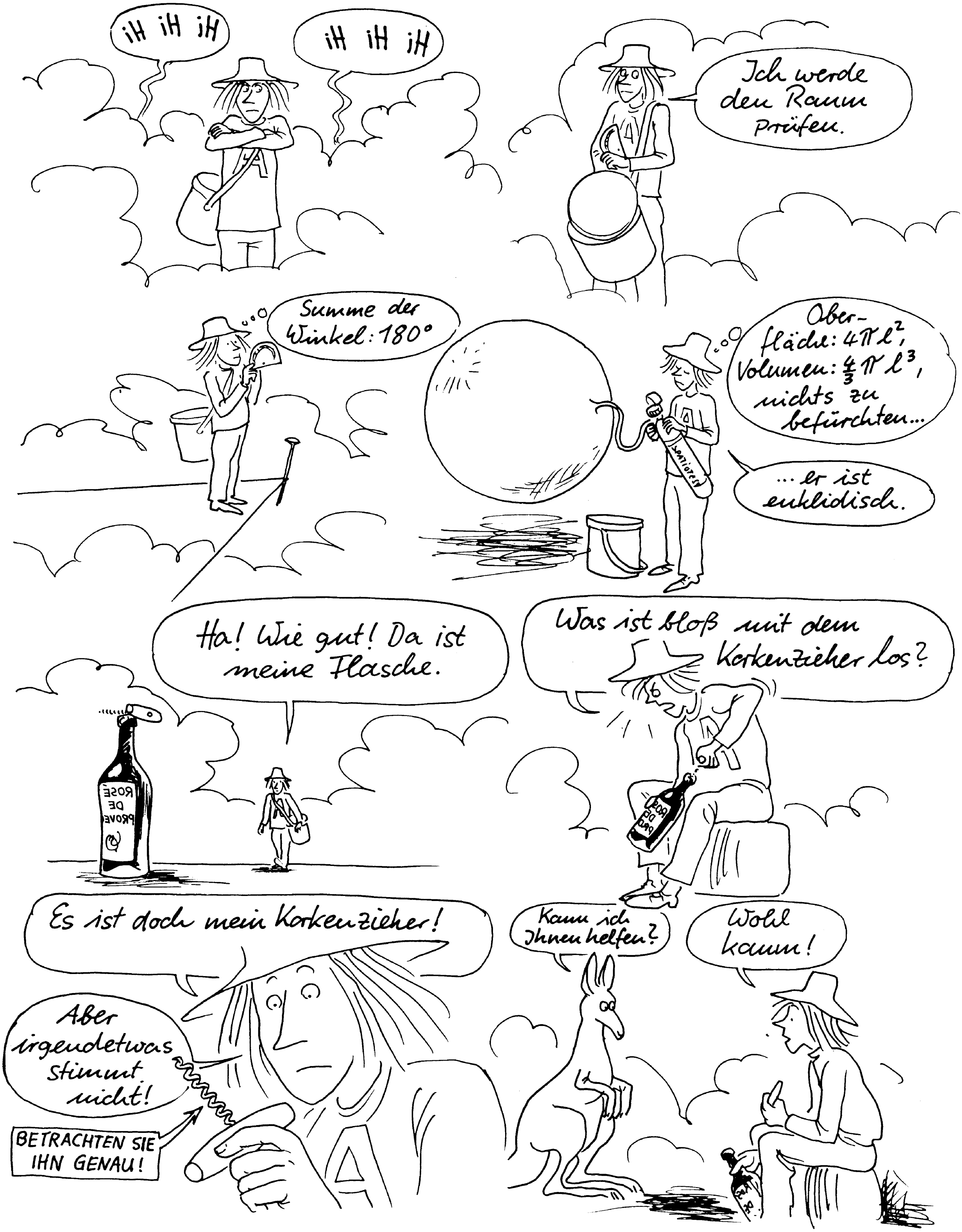

Ich werde es zerschneiden.
Das ist einfacher gesagt als getan, mein Freund!
Aber was muß man denn tun, um das Ding zu zerschneiden?
Ganz einfach! Du schneidest es in drei Teile.
Man beachte, daß das Band durch Anselms Schnitt bilateral geworden ist!
Jetzt bin ich gänzlich desorientiert.
Man beachte, daß jetzt ein unilaterales Band (weiß) von ursprünglicher Länge und ein bilaterales Band (gestrichelt und punktiert) von doppelter Länge vorliegen!

NICHT ORIENTIERBARE RÄUME

Nach diesem Ausflug zum Möbius-Band kehren wir in die ungekrümmten dreidimensionalen Räume zurück.

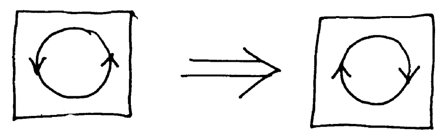
Begleiten wir Anselm bei der Erforschung einer neuen, ungekrümmten dreidimensionalen, euklidischen Welt!

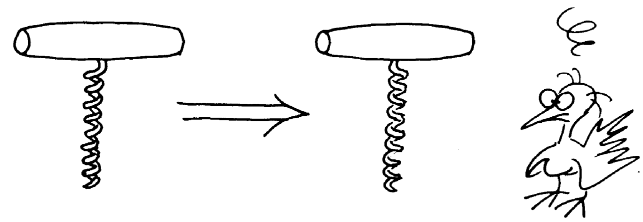



Hi Hi Hi
Hi Hi Hi
Ich werde den Raum prüfen.
Summe der Winkel: 180°
Ober-fläche: $4\pi l^2$, Volumen: $\frac{4}{3}\pi l^3$, nichts zu befürchten...
... er ist euklidisch.
Ha! Wie gut! Da ist meine Flasche.
ROSE DE PROVE
Was ist bloß mit dem Korkenzieher los?
Es ist doch mein Korkenzieher!
Aber irgendetwas stimmt nicht!
BETRACHTEN SIE IHN GENAU!
Kann ich Ihnen helfen?
Wohl kaum!

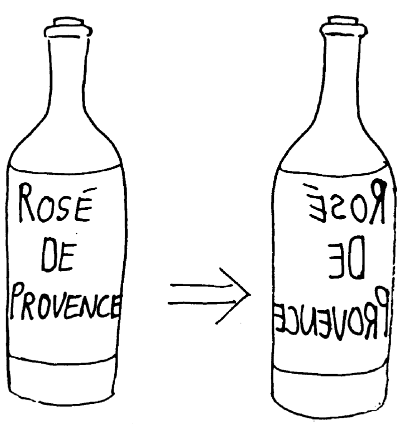
Das ist ein Rosé de Provence von mittlerer Qualität. Nicht schlecht.
ROSÉ DE PROV
Haben Sie einen Korkenzieher?
Ja, natürlich
ROSÉ DE PROV
Wenn alle Känguruhs der Welt in einer Reihe gingen...
BLUB
BLUB
BLUB
Haben Sie nichts Ungewöhnliches bemerkt?
Nein! Sie wirken ein bißchen blaß. Das ist alles.
Nehmen Sie zweimal am Tag etwas Parmesanbisulfit!
Gute Besserung!
HOPP
HOPP
HOPP
HOPP
Jemand hat sich an meinem Korkenzieher zu schaffen gemacht, und ein Känguruh säuft mir meinen Rosé weg. Was soll das Ganze bloß?
Mist!
WIR KÖNNEN IHNEN GAR NICHT OFT GENUG RATEN, DIESEN KORKENZIEHER AUFMERKSAM ZU BETRACHTEN.

Das Möbius-Band als nicht orientierbarer zweidimensionaler Raum hat also ein dreidimensionales Äquivalent. Als die durchsichtige Folie mit dem Kreis auf Seite 54 auf dem durchsichtigen Möbius-Band einmal die Runde machte, wechselte der Kreis seine Richtung:





Man sieht, daß diese Objekte spiegelbildlich sind. Da Anselm im nicht orientierbaren dreidimensionalen Raum einmal die Runde gemacht hat, kommt er als sein eigenes Spiegelbild (und als sein eigener Antipode) an den Ausgangspunkt seines Weges. Kein Wunder, daß er die Flasche spiegelbildlich sieht und daß sich der Korkenzieher für ihn in einem nicht gewohntem Sinn dreht, denn diese Dinge sind ja an ihrem Platz geblieben. Nach einer zweiten Runde durch den Raum würden für Anselm alle Dinge wieder normal erscheinen unter der Bedingung, daß er sie weiterhin an ihrem Platz läßt.



Anselm und das Känguruh von der Gattung der Antipodier bewohnen denselben Raum, aber sie unterscheiden sich in dem Sinn, daß alles, was für das Känguruh die richtige Richtung hat, für Anselm verkehrt ist und umgekehrt.


EPILOG:
Alles geht schief. Es gibt weder rechts noch links, weder verkehrt noch richtig. Wohin führt das, und welchen Weg soll man nehmen?
Folge immer den Geodätischen, Anselm, den Geodätischen Deines Lebens!
Ich werde nie glauben, daß das Universum dermaßen verschroben ist. Das sind alles Spinnereien von Mathematikern...
... oder Zeichentricks!
Warum soll man sich darüber aufregen, da der Raum doch euklidisch ist? (*)
(*) Äußerung von Ostrogradsky, ordentlichem Professor für Mathematik in Petrograd, im Jahr 1830 nach der Lektüre der Arbeiten von Riemann und Lobatschewsky.


Nehmen wir mal an, das Universum wäre wirklich nicht das, was es scheint. Und dann stellen Sie sich vor, das würde in der Schule gelehrt!
Entsetzlich!
Schließlich zählt eben doch nur das Leben. Und zum täglichen Leben braucht man, wenn Sie mir glauben, ...
Aber was steckt hinter alledem?
Die PHYSIK, mein Lieber!
Das muß ich zu verstehen suchen!
Vorwärts ins Konkrete!
Ist da jemand?


... wenn die mittlere Dichte der Materie im Universum kleiner als 10-29 Gramm pro Kubikzentimeter ist...
?
... dann hat das Universum eine negative Krümmung und eine unendliche Größe.
Ist die Dichte dagegen größer als 10-29 Gramm pro Kubikzentimeter, ...
!ooo
... dann ist das Universum hypersphärisch und ein geschlossener Raum.
Ist die Dichte aber gleich 10-29 g/cm3, so muß das Universum euklidisch sein.
Aha!
Doktor Einstein, nehme ich an?
Hm, hm!
ENDE


Jst ein Mathematiker in der Nähe?