JEAN-PIERRE PETIT

DIE ABENTEUER DES ANSELM WÜẞTEGERN

DAS TOPOLOGIKON

Warnung

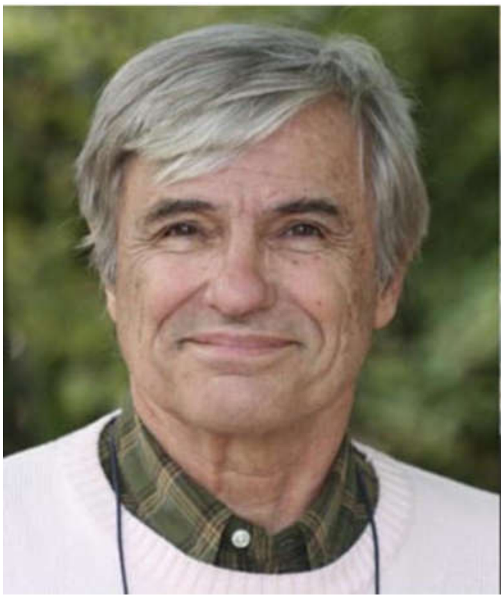
Es wird empfohlen, dieses Buch nicht zu lesen:

- abends bevor Sie zu Bett gehen,
- nach einer reichen Mahlzeit,
- wenn Sie irgendwelche Zweifel haben, denn dieses Buch wird die Zweifel nur verschlimmern.

Der Autor

Wissen ohne Grenzen

Gemeinnützige Vereinigung, die 2005 gegründet wurde und von zwei französischen Wissenschaftlern geleitet wird. Ziel: Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse mit Hilfe des Bandes, das durch kostenlos herunterladbare PDFs gezogen wird. Im Jahr 2020: 565 Übersetzungen in 40 Sprachen wurden so erreicht. Mit mehr als 500.000 Downloads.



Jean-Pierre Petit

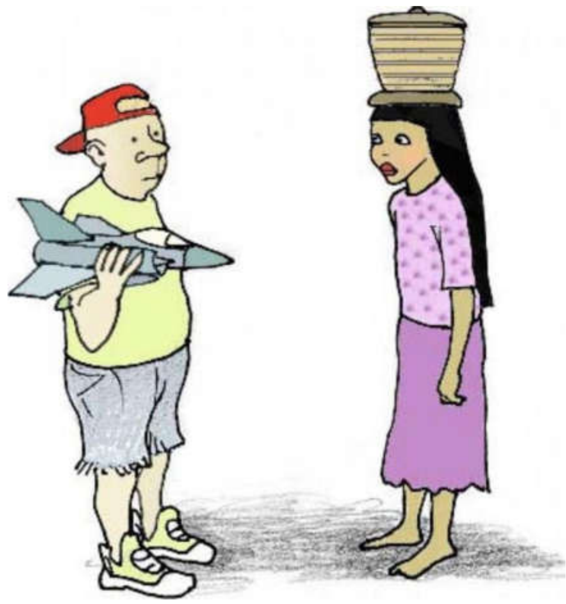
Gilles d'Agostini

Die Vereinigung ist vollkommen freiwillig. Das Geld wird vollständig den Übersetzern gespendet.

Um eine Spende zu tätigen, verwenden Sie die PayPal-Schaltfläche auf der Startseite:

http://www.savoir-sans-frontieres.com

PayPal
FAIRE UN DON

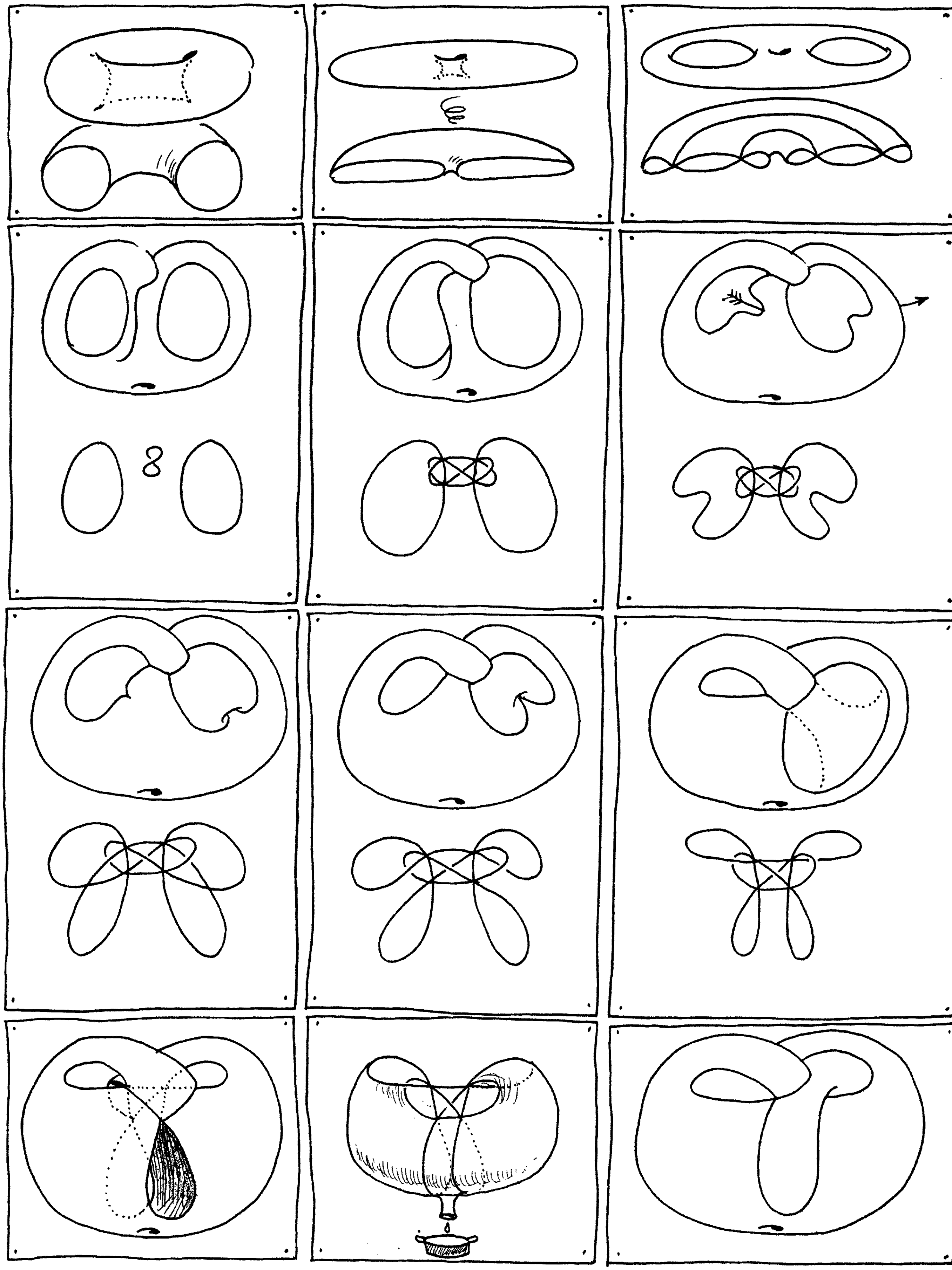


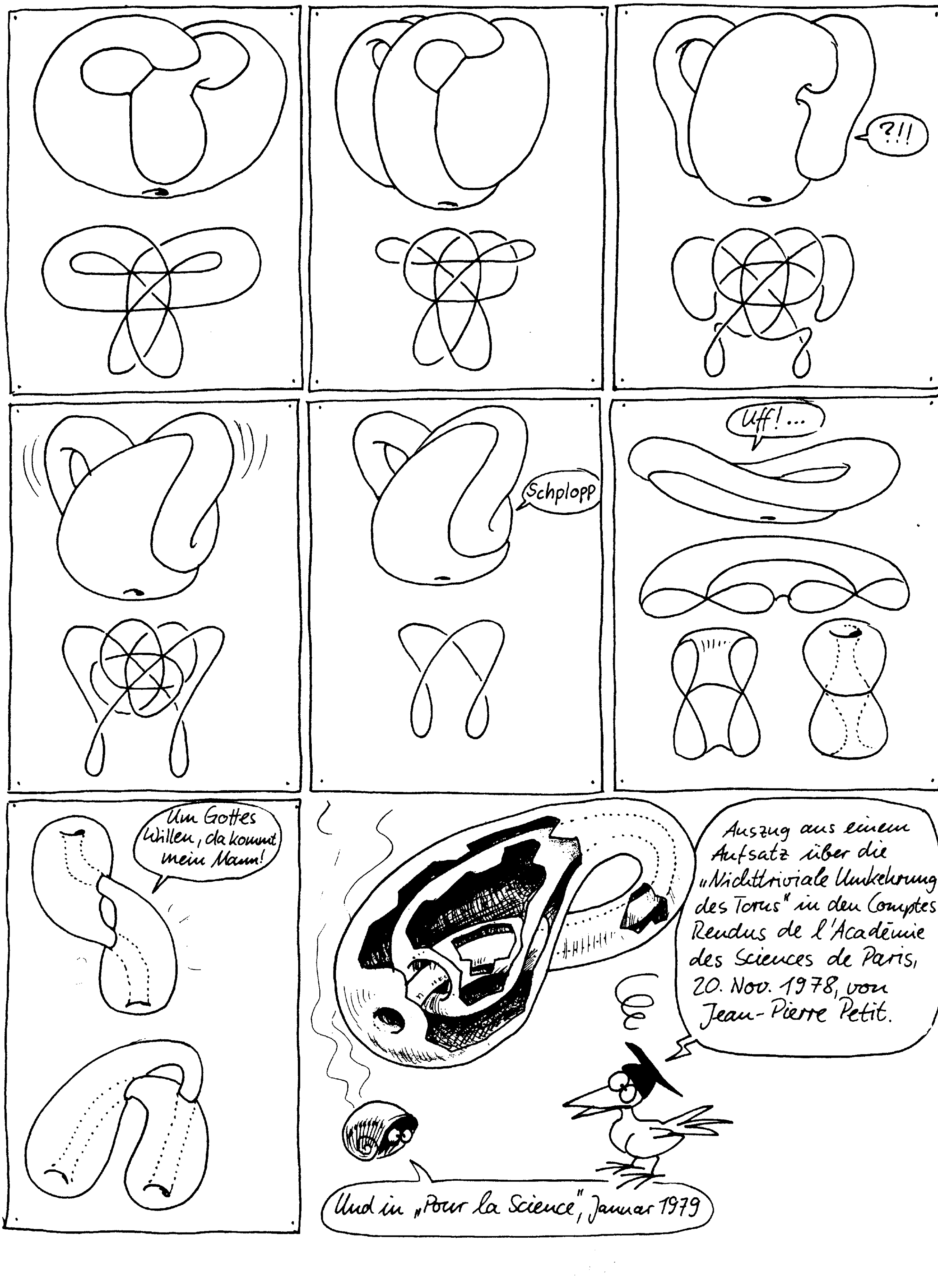
Die Vereinigung « Wissen ohne Grenzen », gegründet und unter dem Vorsitz von Professor Jean-Pierre Petit, Astrophysiker, hat zum Ziel, wissenschaftliches und technisches Wissen in der größtmöglichen Zahl von Ländern und Sprachen zu verbreiten. Zu diesem Zweck hat Professor Jean-Pierre Petit sein gesamtes populärwissentschaftliches Werk aus dreissig Jahren, und im besonderen die illustrierten Alben, frei zugänglich gemacht. Dementsprechend ist ein jeder frei, die vorliegende Datei zu vervielfältigen, entweder in digitaler Form oder in Form gedruckter Kopien und sie in Bibliotheken oder im Rahmen von Schule, Universität oder Vereinen zu verbreiten, deren Ziel die gleichen sind wie von « Wissen ohne Grenzen », unter der Bedingung, daraus keinen Profit zu erzielen und ohne dass ihre Verbreitung eine politische, sektiererische oder religiöse Konnotation beinhaltet. Diese Dateien im Format pdf können auch ins Computernetzwerk von Schul- oder Universitätsbibliotheken gestellt werden.

Jean-Pierre Petit plant zahlreiche weitere Werke, zugänglich für ein noch größeres Publikum. Einige werden selbst von Analphabeten gelesen werden können, dadurch, daß die Textepartien "zu sprechen beginnen" sobald ein Klick auf sie erfolgt. Diese Werke werden also als Stütze zur Alphabetisierung verwendet werden können. Andere Alben werden « zweisprachig » sein, indem man durch einen einfachen Klick von einer Sprache zur anderen wechseln kann, nachdem die Sprachkombination zuvor gewählt wurde. So entsteht eine neue Stütze zum Erlernen von Fremdsprachen.

Jean-Pierre Petit ist 1937 geboren. Er hat seine berufliche Laufbahn in der französischen Wissenschaft gemacht. Er ist Plasmaphysiker gewesen (plasma physicist), hat ein Informatikzentrum geleitet, Programme entwickelt, hunderte von Artikeln der unterschiedlichsten Wissensgebiete in wissentschaftlichen Zeitschriften veröffentlicht, von der Mechanik der Flüssigkeiten bis zur theorhetischen Kosmologie reichend. Er hat ungefähr dreissig Werke veröffentlicht, die in eine Vielzahl von Sprachen übersetzt wurden.

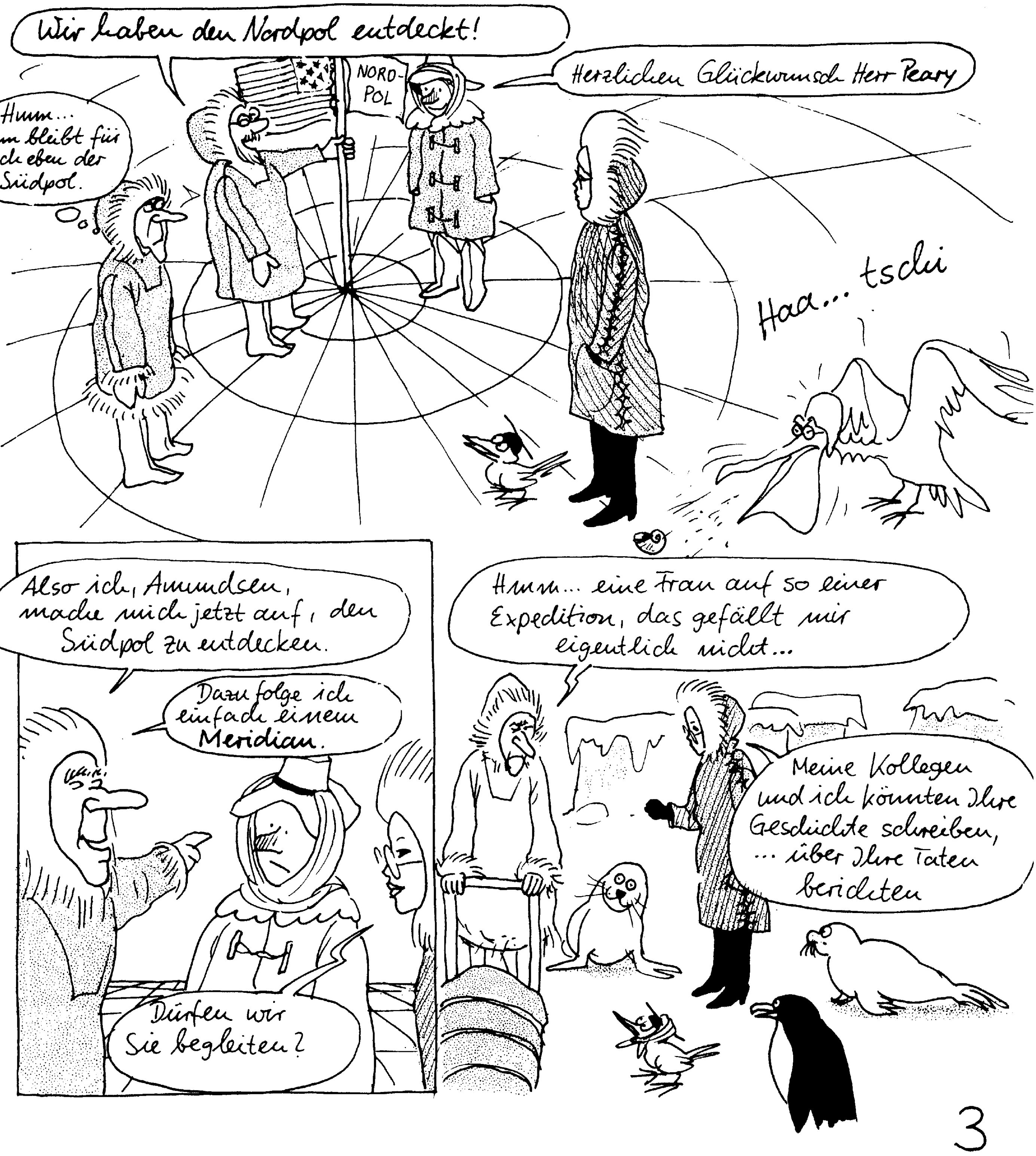
Kontakt zu « Wissen ohne Grenzen » kann über die Website http://www.savoir-sans-frontieres.com aufgenommen werden.

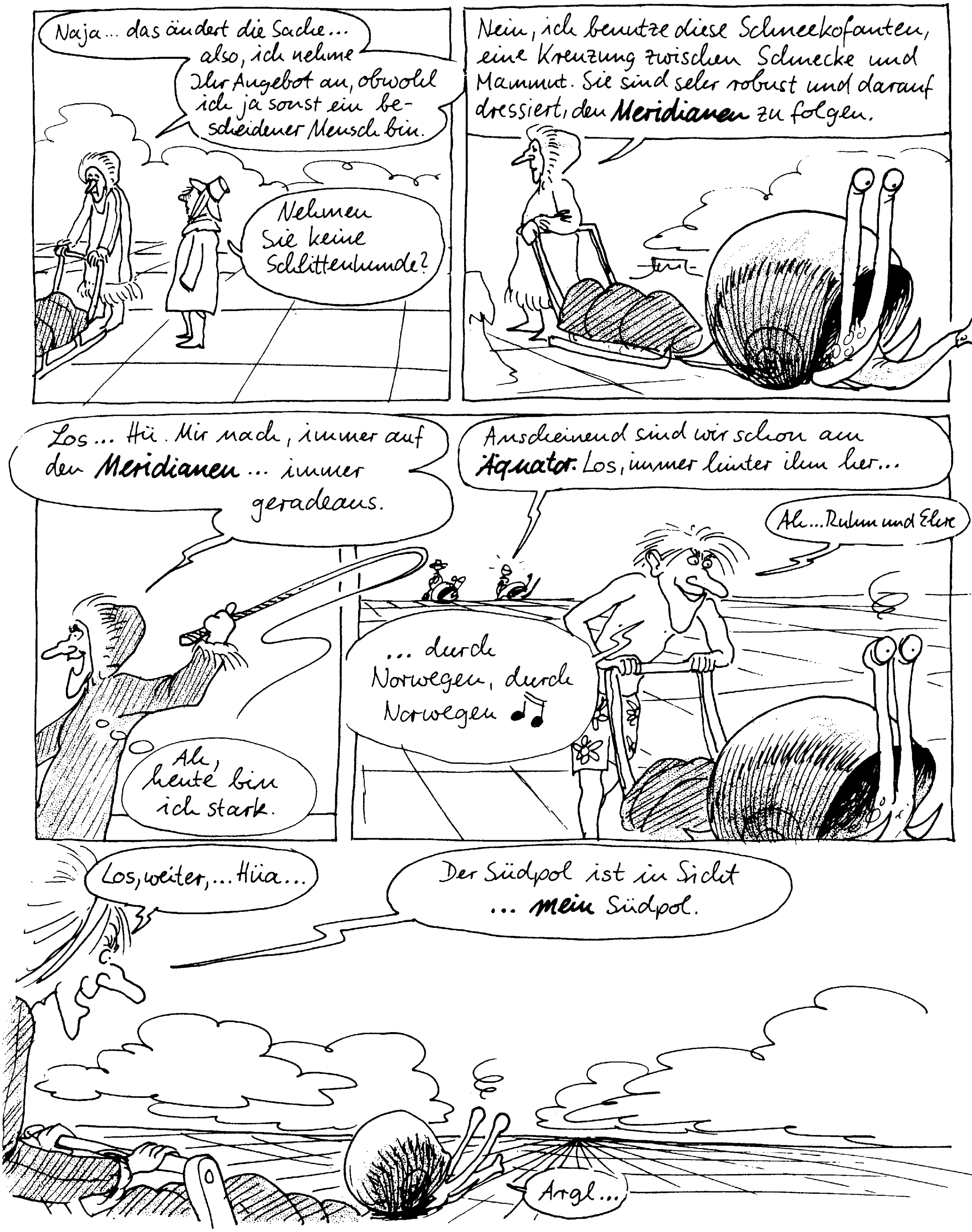




?!!
Schplopp
Uff!...
Um Gottes Willen, da kommt mein Mann!
Auszug aus einem Aufsatz über die „Nichttriviale Umkehrung des Torus" in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 20. Nov. 1978, von Jean-Pierre Petit.
Und in „Pour la Science", Januar 1979

DER PLANET OHNE SÜDPOL




Naja... das ändert die Sache... also, ich nehme Ihr Angebot an, obwohl ich ja sonst ein bescheidener Mensch bin.
Nehmen Sie keine Schlittenhunde?
Nein, ich benutze diese Schneekofanten, eine Kreuzung zwischen Schnecke und Mammut. Sie sind sehr robust und darauf dressiert, den **Meridianen** zu folgen.
Los... Hü. Mir nach, immer auf den **Meridianen**... immer geradeaus.
Ah, heute bin ich stark.
Anscheinend sind wir schon am **Äquator**. Los, immer hinter ihm her...
Ah... Ruhm und Ehre
... durch Norwegen, durch Norwegen
Los, weiter,... Hüa...
Der Südpol ist in Sicht ... **mein** Südpol.
Argl...


Ich bin der erste.
Ruhm!
Nanu!? Was ist denn das??
Was soll denn das für ein Scherz sein?
He!
Sowas!
NORD-POL
Ahhrrr!
Krack
So! Hat noch jemand was zu bemerken?
SÜDPOL


Und kein Wort darüber, was Ihr gesehen habt!
Oh, seht mal da!
Beruhigen Sie sich doch, Herr Amundsen.
Meine Fahne! Sie verschwindet!
SÜD-POL
Was!?!
Hört dieser Unsinn bald auf?
Komisch ... hört sich an wie die Stimme von Herrn Peary...
Tock, Tock, Tock
Kommen Sie, Herr Amundsen, wir gehen zurück.
Was für ein Schock!
Wir werden die Sache klären.
Argl...


Wie steht's?
Er ist immer noch im Delirium; ich habe ihn angeschnallt.
Geräuschlos gleiten die Schneckofanten über den vereisten Meridian.
Na, schon wieder zurück?
NORD POL
Während Ihrer Abwesenheit ist etwas Merkwürdiges passiert. Meine Fahne ist plötzlich verschwunden und eine andere Fahne mit der Aufschrift „Südpol" ist aufgetaucht.
Das alles ist völlig unverständlich
Nein, wartet mal ... ist die Südpol-Fahne vielleicht mit der Spitze zuerst aufgetaucht?
Ja, richtig. Woher wissen Sie denn das?
Ich glaube, ich fange an zu verstehen.


Alles ist klar, wenn man annimmt, daß die **Umgebung** des Meridians, dem wir gefolgt sind eine **einseitige Fläche** (*) darstellt, ein **Möbiusband** (siehe „**Das Geometrikon**", S. 54)
PÔL
TOD
EINE HALBE DREHUNG
Meinst Du etwa, der Südpol, wo wir vorhin waren, ist nichts weiter als die Rückseite des Nordpols?
Aber **wo** ist dann der **richtige** Südpol?
Das ist alles etwas verwirrend.
Nun, was ist los?
Wir haben angeblich den Südpol verloren.
Das ist der Gipfel!
Ich muß erstmal nachdenken.
Was erzählen die?
Sophie zufolge befinden wir uns auf einer Art Kugelfläche, die nur eine Seite hat.
Das entbehrt doch jeglicher Vernunft!
Na, wie gehts da unten?
Oh, weißt Du, auch nicht anders als hier oben.
(*) Ein Band, das man um eine halbe Drehung verdrillt und dann zusammenklebt, hat nur eine einzige Seite.

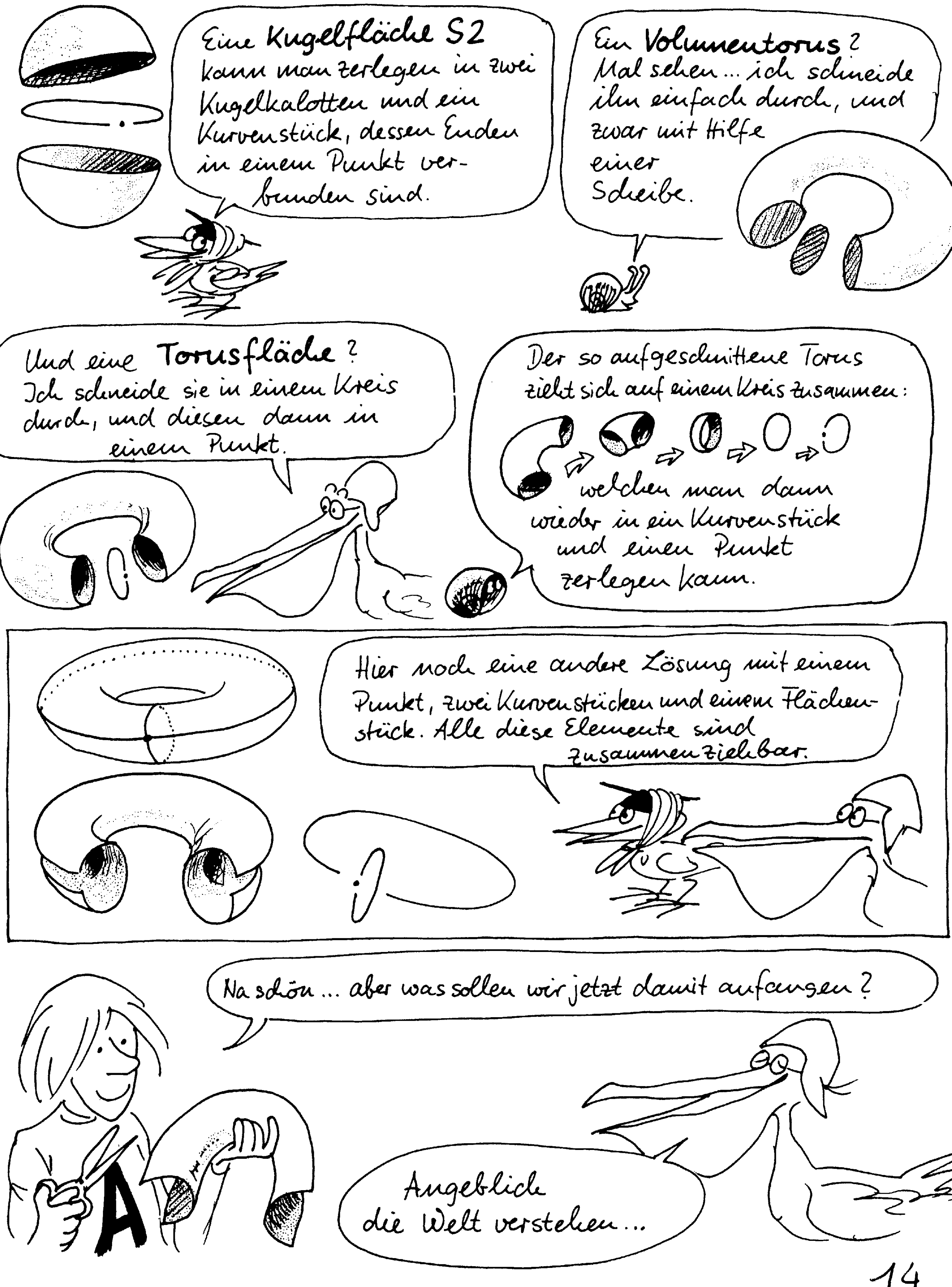

Wenn wir Herrn Amundsen aus seinem schlimmen Zustand befreien wollen, müssen wir vor allem versuchen zu verstehen, welche Form dieser merkwürdige Planet hat. Wir müssen einige Grundprinzipien der Topologie anwenden, indem wir jedes Objekt zerlegen in:
ZUSAMMEN-ZIEHBARE ZELLEN
Das einzig unzerlegbare Objekt scheint der Punkt zu sein...
Aber was soll man mit einem Punkt anstellen?
Ein Objekt kann als eine Menge von Punkten betrachtet werden. Es nimmt im Raum einen gewissen Platz ein. Wir nennen das Objekt zusammenziehbar, wenn es bis auf einen Punkt zusammenschrumpfen kann. Dabei dürfen aber alle seine Punkte nur den Raum durchlaufen, den das Objekt einnimmt.
Sieh mal hier dieses Kurvenstück: Das ist ein Objekt mit einer räumlichen Dimension.
B
A
Aha. Die Position eines Punktes auf der Kurve kann mit Hilfe einer einzigen Zahl festgelegt werden: eine krummlinige Abszisse, oder die Länge eines Fadens, der von dem betrachteten Punkt bis zu einem Nullpunkt auf der Kurve reicht.

Ich kann dieses Kurvenstück in eine Art Makkaroninudel hineinschieben, in der es sich dann zusammenziehen darf, immer weiter, immer weiter...
... wie das Quecksilber in einem Thermometer.
A
B
Heißt das, daß jede Kurve zusammenziehbar ist?
Nein! **Geschlossene** Kurven sind nicht zusammenziehbar.
Aber... man könnte die Kurve doch einfach durchschneiden.
Dann würde sie aber zu einem Kurven**stück**, sie wäre nicht mehr **geschlossen**.
Wenn ich nun einen Kreis nehme, hier, siehst Du? Den kann ich doch bis auf einen Punkt zusammenziehen, nicht wahr?
Nein, das geht nicht! Dabei durchläuft die Kurve ja nicht sich selbst! Sie durchläuft Raumbereiche, die sie zu Anfang nicht eingenommen hatte.
Ein **Kreis** ist also nicht **zusammenziehbar** - und das gilt auch für jede andere geschlossene Kurve, ob sie eben ist oder nicht.
Eine **Scheibe** dagegen, d. h. ein **Flächenelement**, ist zusammenziehbar.

(*) Siehe „**Das Geometrikon**" aus dieser Reihe.

Gibt es denn auch „Volumen"-Objekte die nicht zusammenziehbar sind?
Natürlich, der „Volumentorus" zum Beispiel.
Ah ja! Wenn ich ihn nicht durchschneide, kann ich ihn höchstens zu einem Kreis zusammenziehen.
Der „Flächentorus" ist auch nicht zusammenziehbar.
Sag mal, was macht Ihr denn für Spielchen?
Lassen Sie doch!
Ich weiß nicht, ob Euch klar ist, daß wir es mit einem von der Starrsucht Befallenen zu tun haben.
Glaubt Ihr etwa, daß Ihr ihm mit Euren Haarspaltereien helft?
Seine **Geoneurose** ist geometrischen Ursprungs. Ein Heilmittel können wir nur finden, wenn wir unsere Vorstellungen von der Geometrie vertiefen.
Sein ganzes Trachten richtete sich auf die Entdeckung des **Südpols**, er hatte sich dieser Idee verschrieben auf persönlicher und auf sozialer Ebene.

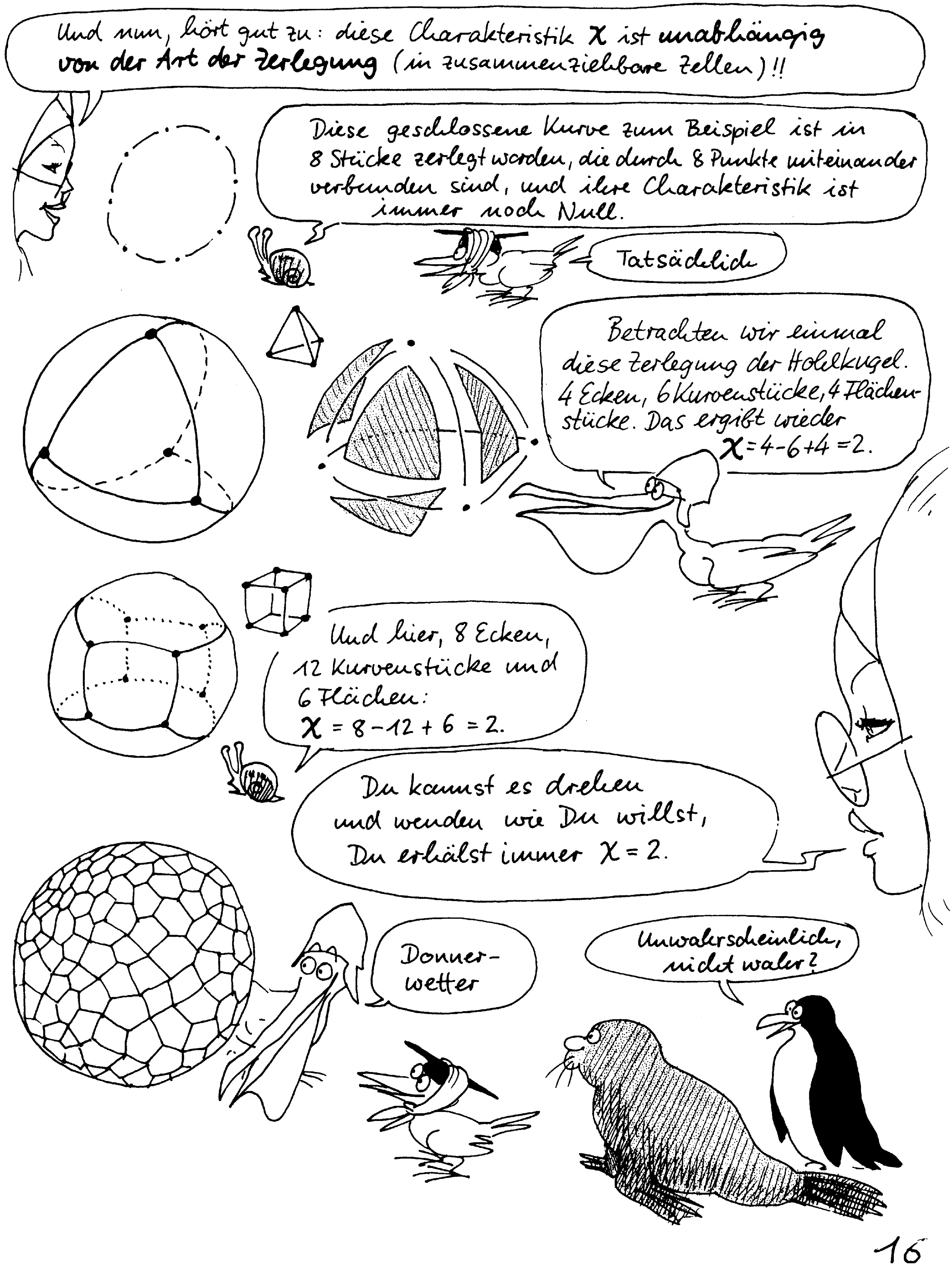

Sein Mißgeschick hat ihn in eine Situation gebracht, der er nicht mehr gewachsen war.
Ja ja, eine totale Verunsicherung seines Ichs.
Das heißt, die einzige Lösung des Problems besteht darin, diesen verdammten Südpol zu finden.
ZERLEGUNG IN ZELLEN
Jedes geometrische Objekt läßt sich in Elemente zerlegen, in **zusammenziehbare** Zellen jeder Dimension: **Punkte, Kurvenstücke, Flächen, Volumen, usw. ...**
Welche Dimension hat denn der **Punkt**?
Der **Punkt** hat die Dimension **Null**.
Um zum Beispiel einen Kreis zu zerlegen, braucht man ihn nur aufzufassen als ein Kurvenstück, dessen Enden in einem **Punkt** miteinander verbunden sind. Wenn ich den Punkt wegnehme, bleibt das Kurvenstück übrig.



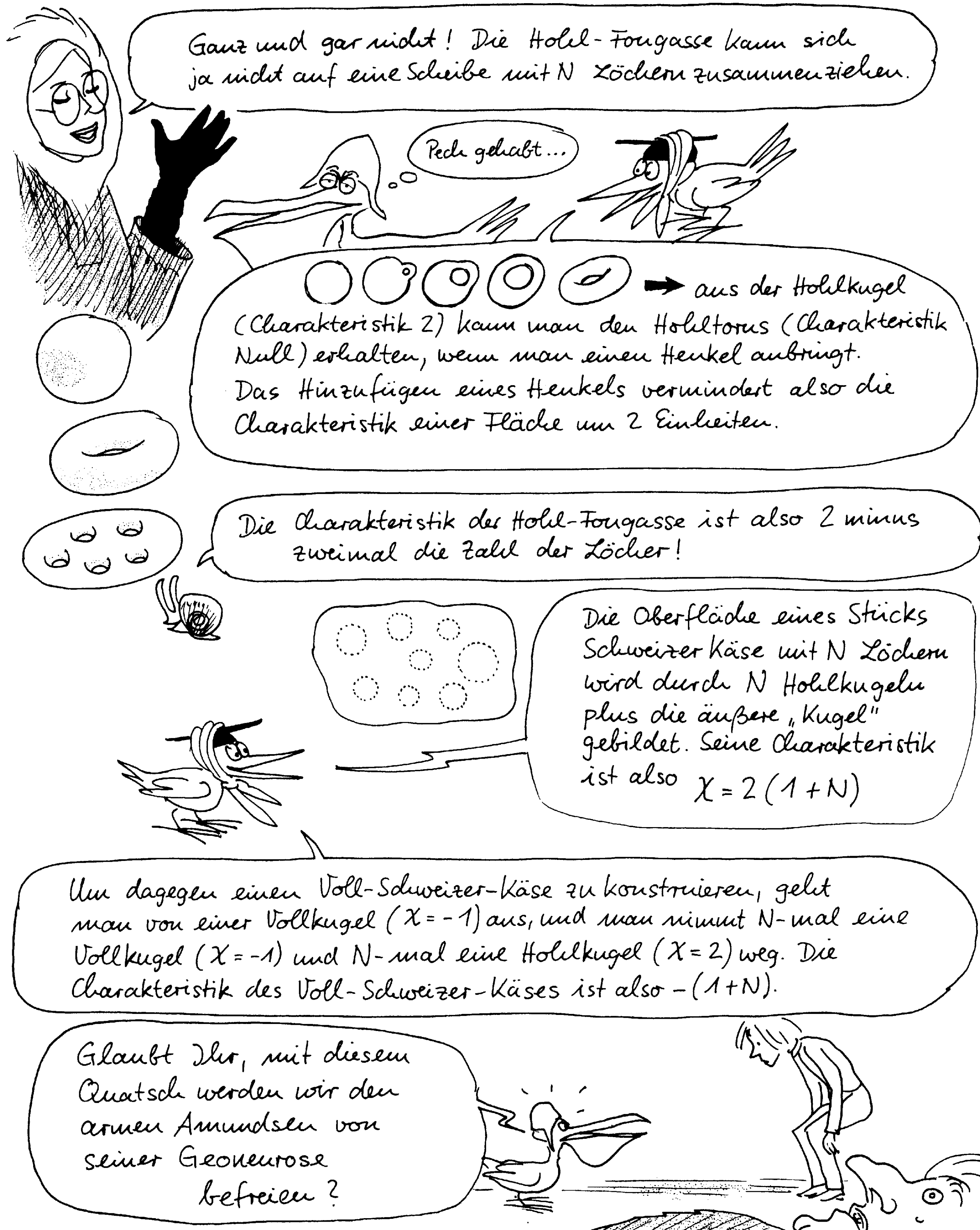
Eine Kugelfläche S2 kann man zerlegen in zwei Kugelkalotten und ein Kurvenstück, dessen Enden in einem Punkt verbunden sind.
Ein Volumentorus? Mal sehen... ich schneide ihn einfach durch, und zwar mit Hilfe einer Scheibe.
Und eine Torusfläche? Ich schneide sie in einem Kreis durch, und diesen dann in einem Punkt.
Der so aufgeschnittene Torus zieht sich auf einen Kreis zusammen:
welchen man dann wieder in ein Kurvenstück und einen Punkt zerlegen kann.
Hier noch eine andere Lösung mit einem Punkt, zwei Kurvenstücken und einem Flächenstück. Alle diese Elemente sind zusammenziehbar.
Na schön ... aber was sollen wir jetzt damit anfangen?
Angeblich die Welt verstehen...
A

DIE EULERSCHE CHARAKTERISTIK

(*) Diese Definition läßt sich leicht auf mehr als drei Dimensionen verallgemeinern (Summe mit alternierenden Vorzeichen).


Und nun, hört gut zu: diese Charakteristik χ ist unabhängig von der Art der Zerlegung (in zusammenziehbare Zellen)!!
Diese geschlossene Kurve zum Beispiel ist in 8 Stücke zerlegt worden, die durch 8 Punkte miteinander verbunden sind, und ihre Charakteristik ist immer noch Null.
Tatsächlich
Betrachten wir einmal diese Zerlegung der Hohlkugel. 4 Ecken, 6 Kurvenstücke, 4 Flächenstücke. Das ergibt wieder χ = 4 - 6 + 4 = 2.
Und hier, 8 Ecken, 12 Kurvenstücke und 6 Flächen: χ = 8 - 12 + 6 = 2.
Du kannst es drehen und wenden wie Du willst, Du erhälst immer χ = 2.
Donnerwetter
Unwahrscheinlich, nicht wahr?

* Eine Brotsorte aus Mittelfrankreich


Ganz und gar nicht! Die Hohl-Fougasse kann sich ja nicht auf eine Scheibe mit N Löchern zusammenziehen.
Pech gehabt ...
aus der Hohlkugel (Charakteristik 2) kann man den Hohltorus (Charakteristik Null) erhalten, wenn man einen Henkel anbringt. Das Hinzufügen eines Henkels vermindert also die Charakteristik einer Fläche um 2 Einheiten.
Die Charakteristik der Hohl-Fougasse ist also 2 minus zweimal die Zahl der Löcher!
Die Oberfläche eines Stücks Schweizer Käse mit N Löchern wird durch N Hohlkugeln plus die äußere „Kugel" gebildet. Seine Charakteristik ist also $\chi = 2(1+N)$
Um dagegen einen Voll-Schweizer-Käse zu konstruieren, geht man von einer Vollkugel ($\chi = -1$) aus, und man nimmt N-mal eine Vollkugel ($\chi = -1$) und N-mal eine Hohlkugel ($\chi = 2$) weg. Die Charakteristik des Voll-Schweizer-Käses ist also $-(1+N)$.
Glaubt Ihr, mit diesem Quatsch werden wir den armen Amundsen von seiner Geoneurose befreien?

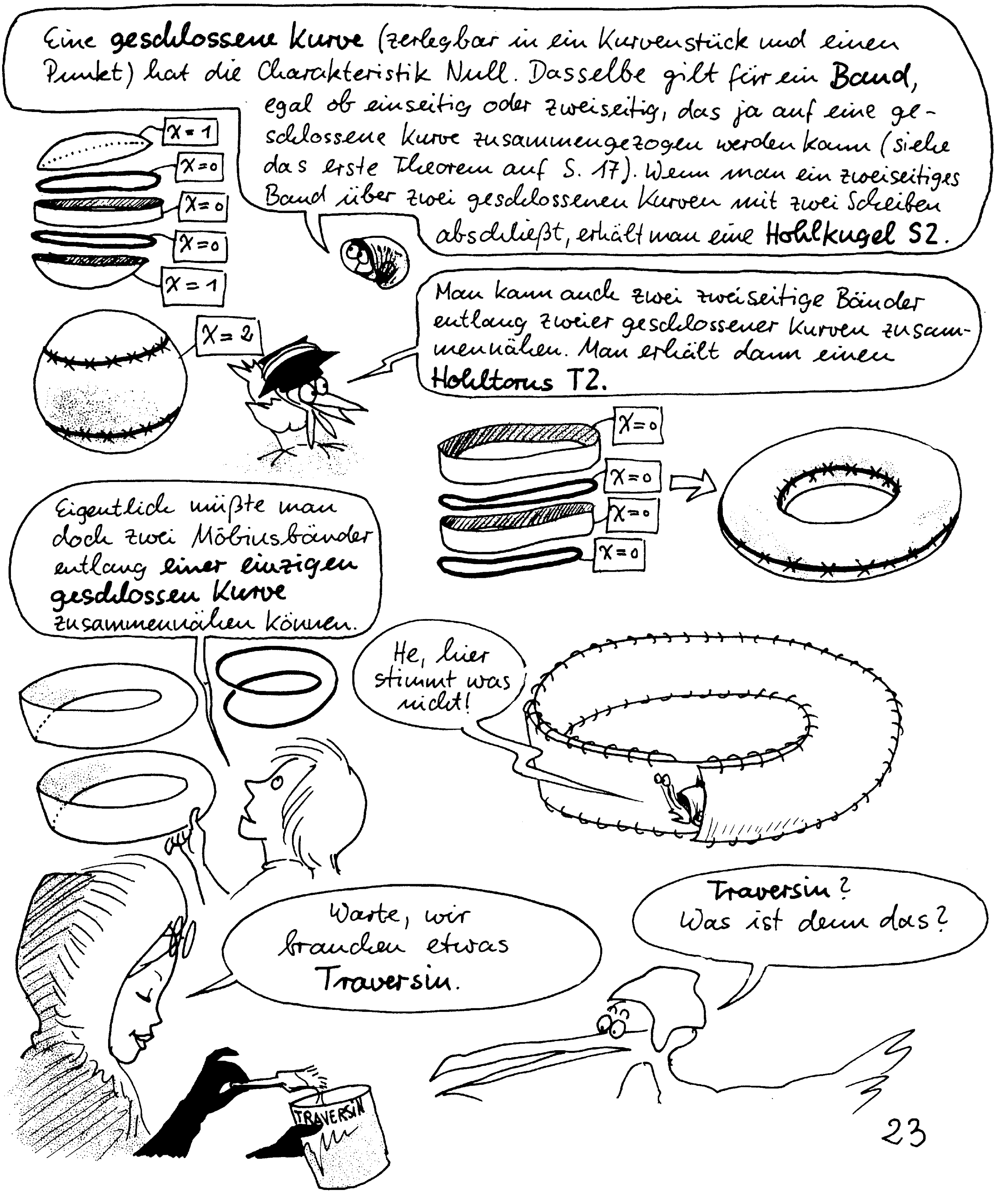
DIE WELT, IN DER WIR LEBEN

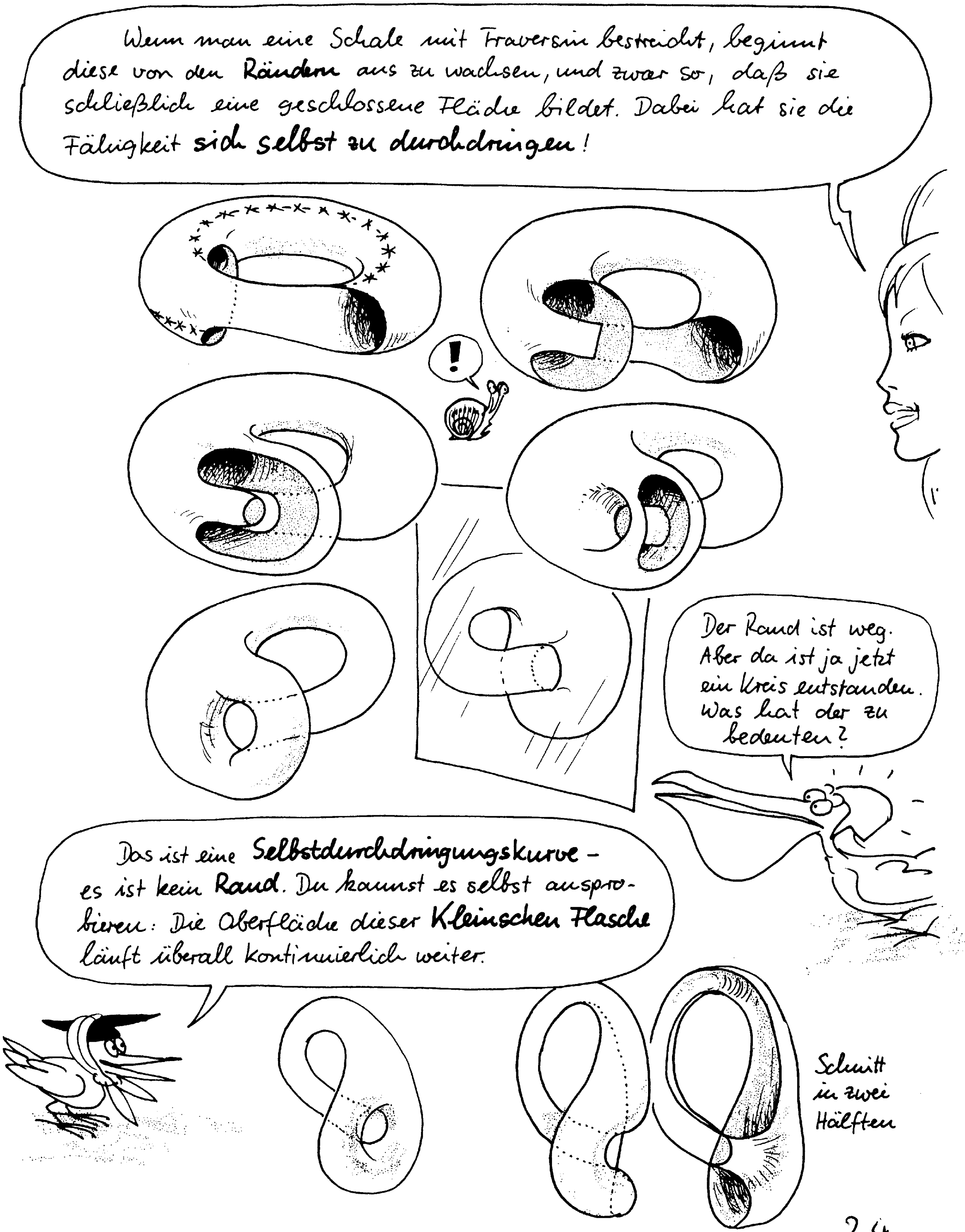
(*) Siehe „**Der Urknall**" in dieser Reihe, S. 64.

Mit der Eulerschen Charakteristik haben wir jetzt etwas Ordnung in diesen Dschungel geometrischer Objekte gebracht.
Dieses Zylinderstück ist topologisch identisch mit einer durchbohrten Scheibe, und seine Charakteristik ist Null.
Und was hälst Du von diesem Objekt?
Das ist ein **Möbiusband**, es hat nur eine einzige Seite. Da man ihm weder eine **Vorder**- noch eine **Rückseite** zuordnen kann, sagt man es ist **nichtorientierbar**.
Jedes Band, das um eine **ungerade** Zahl von **halben Drehungen** verdrillt ist, ist **nicht-orientierbar**. Aber diese beiden Bänder hier sehen doch irgendwie verschieden aus... .

(*) Siehe „Das Geometrikon", S. 59

RAND AUF RAND



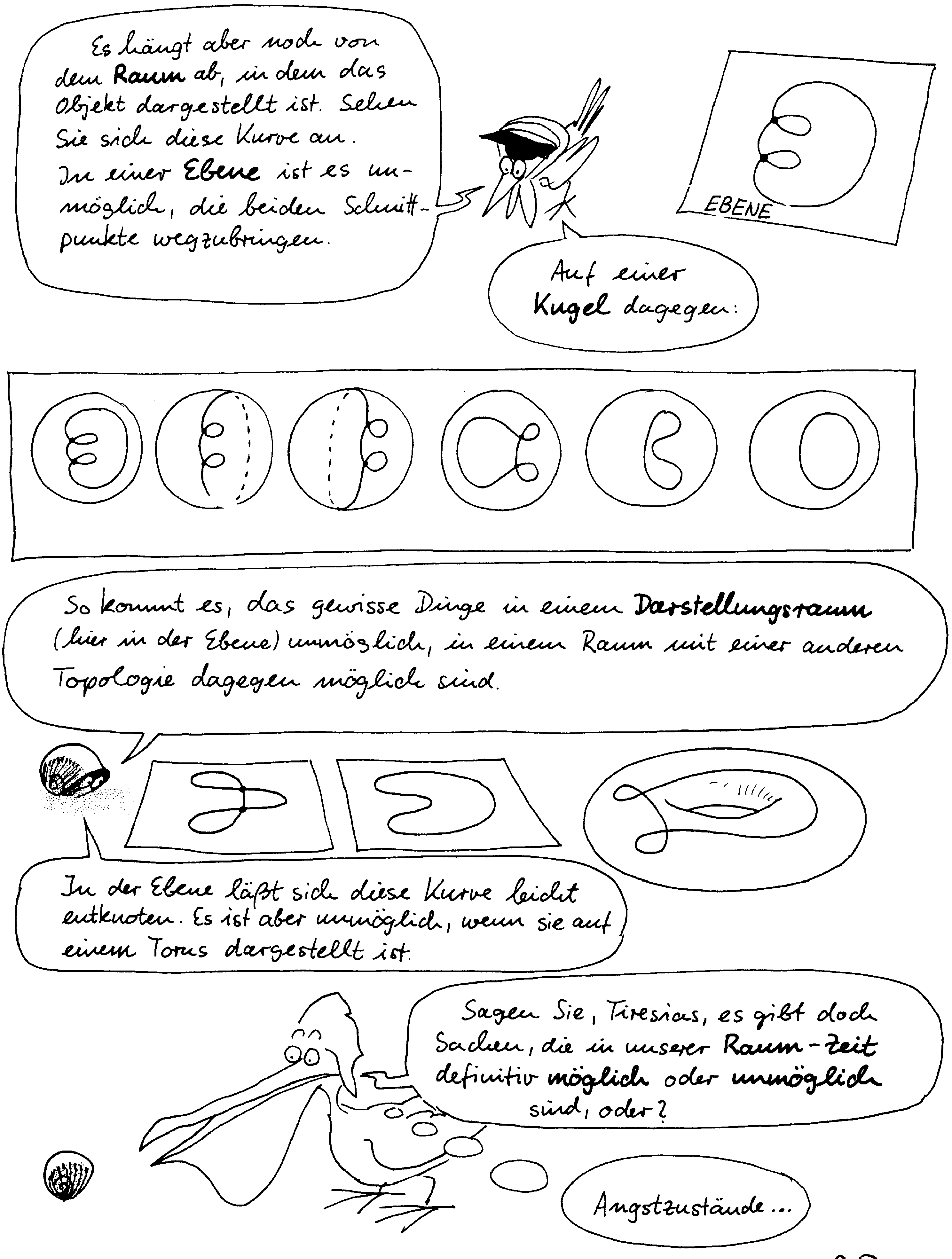


Wenn man eine Schale mit Traversin bestreicht, beginnt diese von den Rändern aus zu wachsen, und zwar so, daß sie schließlich eine geschlossene Fläche bildet. Dabei hat sie die Fähigkeit sich selbst zu durchdringen!
!
Der Rand ist weg. Aber da ist ja jetzt ein Kreis entstanden. Was hat der zu bedeuten?
Das ist eine Selbstdurchdringungskurve – es ist kein Rand. Du kannst es selbst ausprobieren: Die Oberfläche dieser Kleinschen Flasche läuft überall kontinuierlich weiter.
Schnitt in zwei Hälften


Ihre Charakteristik ist Null- sie wurde aus zwei Möbiusbändern ($\chi=0$) und einer geschlossenen Kurve ($\chi=0$) hergestellt. Man erkennt hier übrigens ohne Schwierigkeiten eines der Bänder wieder.
Natürlich! Sobald man auf einer Fläche ein Möbiusband findet, ist man sicher, daß die Fläche nur eine Seite hat.
Übrigens, Tiresias, meinen Sie nicht, man könnte zufälligerweise ein Möbiusband auf Ihrem Schneckenhaus finden?
Fangt nur nicht schon wieder an!
Mi!
Eine komische Fläche...
Du kanntest eben bisher nur Flächen, die sich nicht selbst durchdringen: die **Kugel** oder den **Torus**, in ihrer Standardform. Flächen, die sich in unseren Raum selbst durchdringen nennt man **Einbettungen**.
Einbettungen?

EINBETTUNGEN


I
II
III
In der Ebene kann ich durch kontinuierliche Verformung (ohne eine Linie zu durchtrennen) von Kurve I zu Kurve III gelangen. Die Gesamtrotation des Pfeils beim Durchlaufen aller drei Kurven ist aber dieselbe, nämlich 360°.
Man nennt das eine reguläre Homotopie in der Ebene. Bei ihr bleibt die Zahl der Drehungen des Tangentenpfeils erhalten.
Ich habe alles versucht. Eine Acht läßt sich anscheinend nicht in einen Kreis verwandeln! ...
Das ist doch ganz normal! Der Pfeil macht nicht dieselbe Zahl von Drehungen. Bei der Acht ist die Gesamtrotation Null.
Respektiert man die Regeln über die Verformung von geschlossenen Kurven, die innerhalb einer Fläche liegen, so gibt es Dinge, die möglich sind, und andere die völlig unmöglich sind.
Gar nicht einfach!

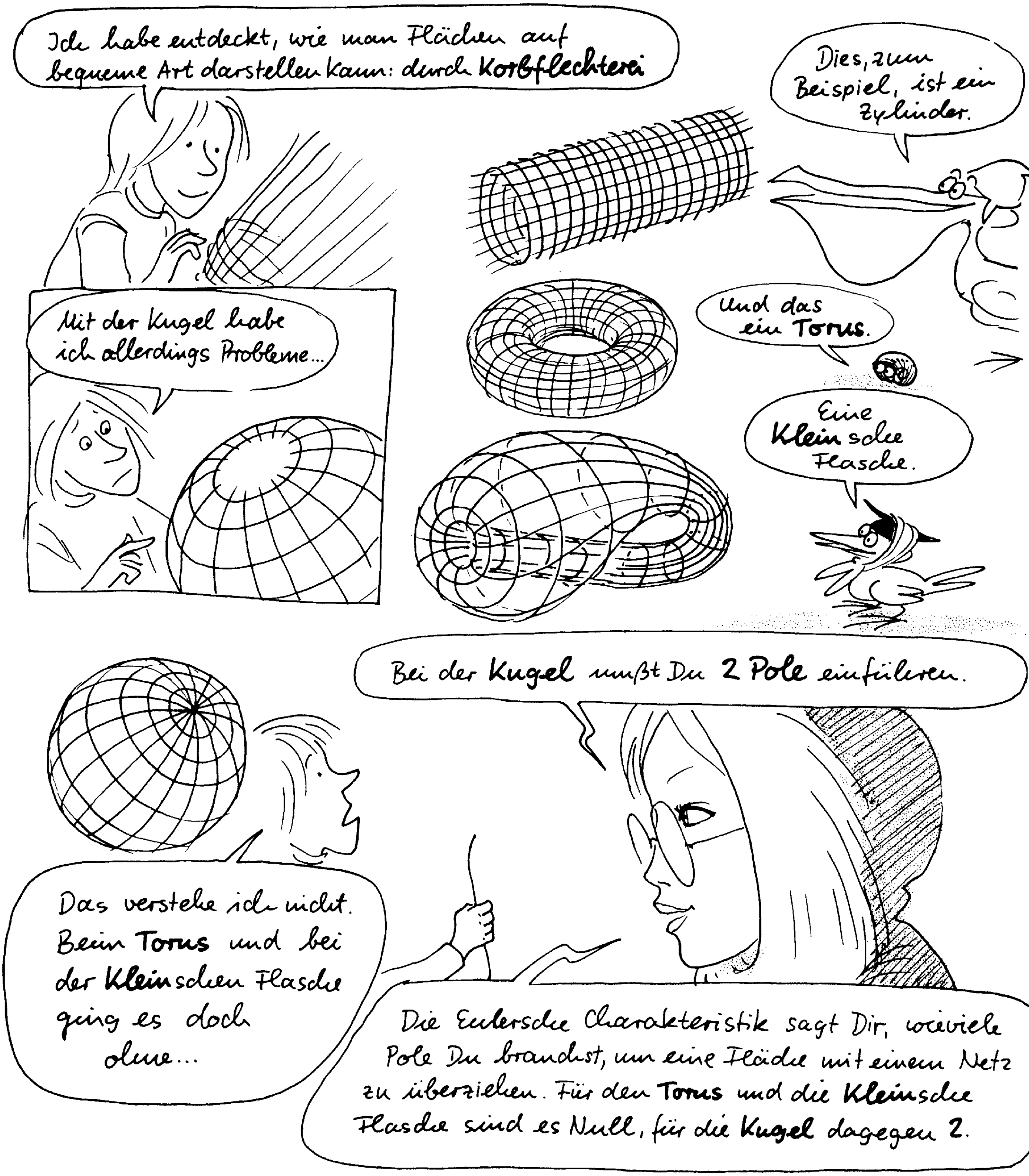


Es hängt aber noch von dem Raum ab, in dem das Objekt dargestellt ist. Sehen Sie sich diese Kurve an. In einer Ebene ist es unmöglich, die beiden Schnittpunkte wegzubringen.
EBENE
Auf einer Kugel dagegen:
So kommt es, das gewisse Dinge in einem Darstellungsraum (hier in der Ebene) unmöglich, in einem Raum mit einer anderen Topologie dagegen möglich sind.
In der Ebene läßt sich diese Kurve leicht entknoten. Es ist aber unmöglich, wenn sie auf einem Torus dargestellt ist.
Sagen Sie, Tiresias, es gibt doch Sachen, die in unserer Raum-Zeit definitiv möglich oder unmöglich sind, oder?
Angstzustände...

Kennen Sie denn die Topologie unserer Raum-Zeit?
Äh... eigentlich nicht...
Wir leben in einer Scheinwelt... und vielleicht nicht mal das...
Die Kreuzungspunkte einer geschlossenen Kurve rühren von der Darstellung der Kurve in einer Fläche her. Das zweidimensionale Bild ist aber nur eine Projektion.
In Wirklichkeit geht es hier aber nur um ein einziges Objekt: die **geschlossene Kurve**, ein **eindimensionales Gebilde**.
In einem vierdimensionalen Darstellungsraum durchschneidet sich die **Kleinsche Flasche** nicht mehr selbst!
Soll das heißen, ich kann **alles** machen, wenn ich nur den Darstellungsraum richtig wähle? Zum Beispiel eine Kleinsche Flasche in eine Kugel verwandeln?
Nein, es gibt Eigenschaften die **unabhängig vom Darstellungsraum** sind.

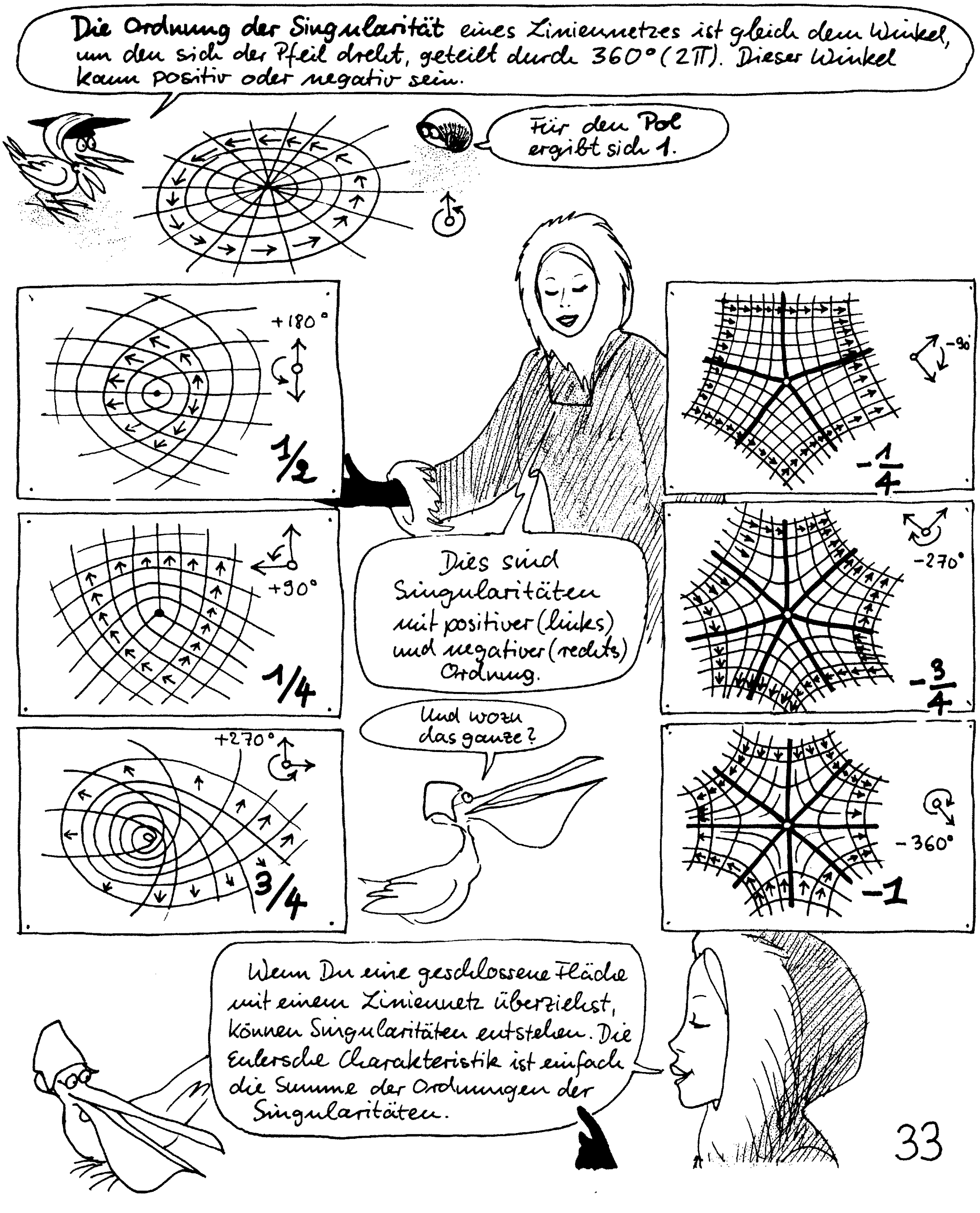
DIE TOPOLOGIE

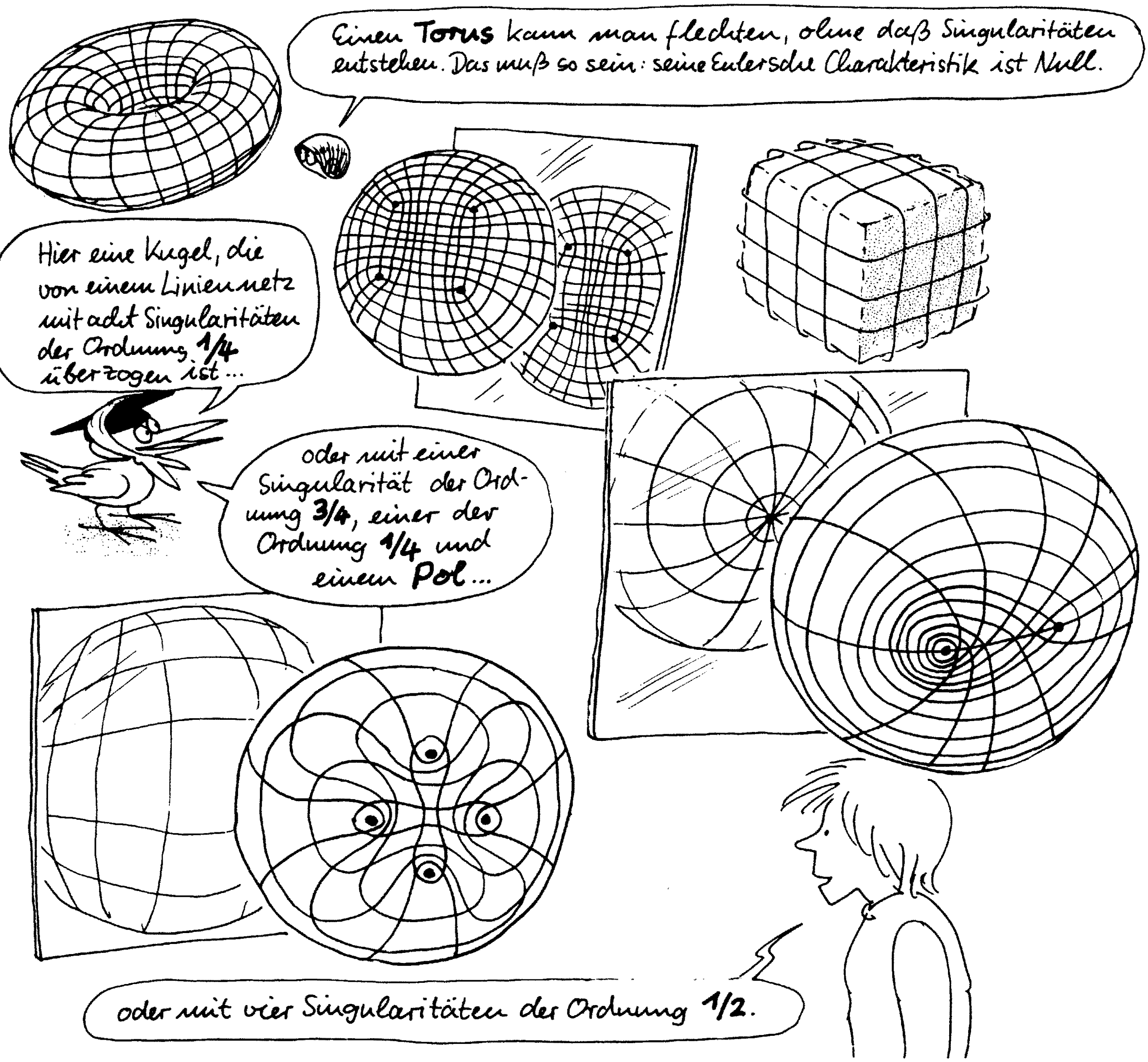
LINIENNETZE



(*) Siehe „**Der Urknall**" in dieser Reihe.

SINGULARITÄTEN

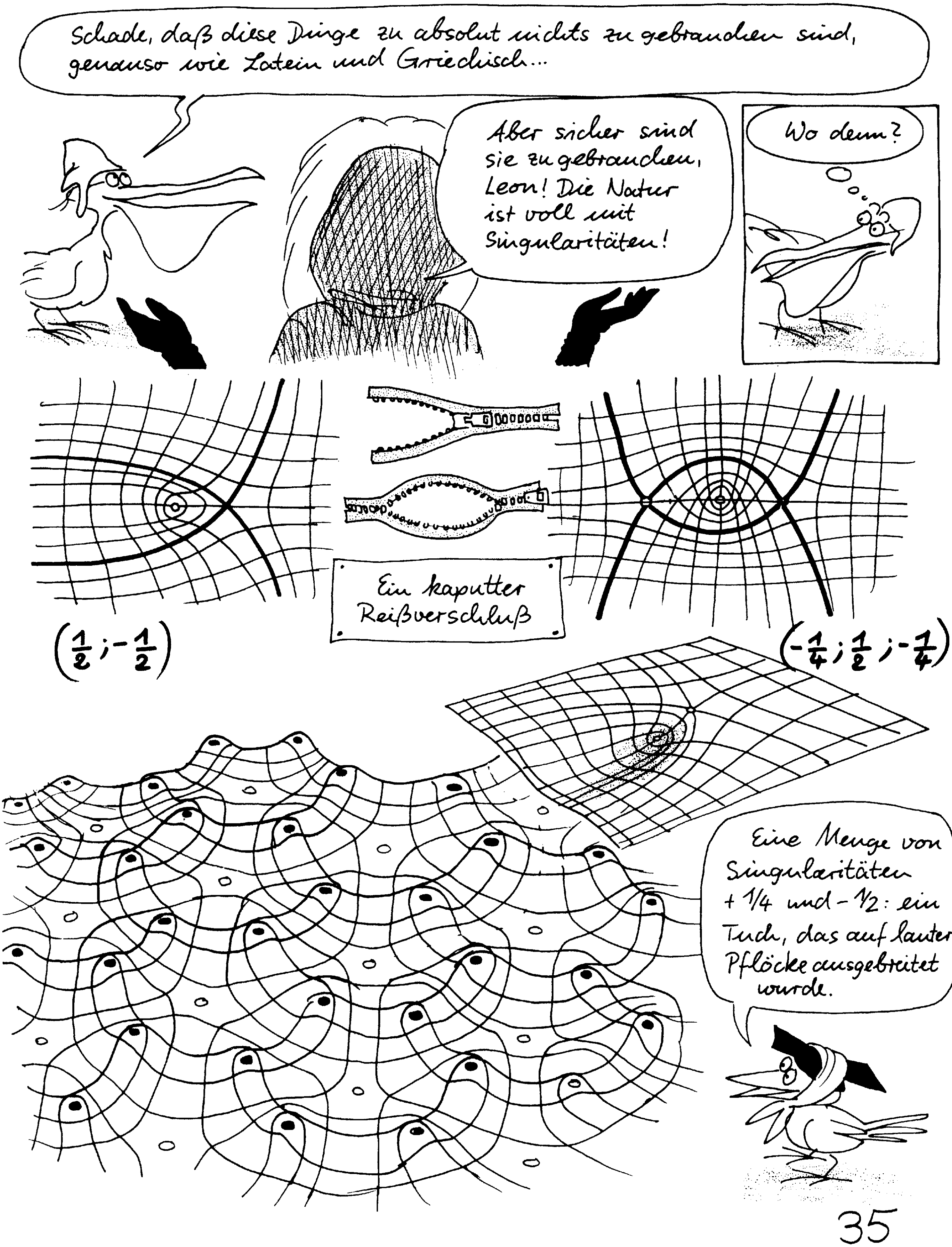


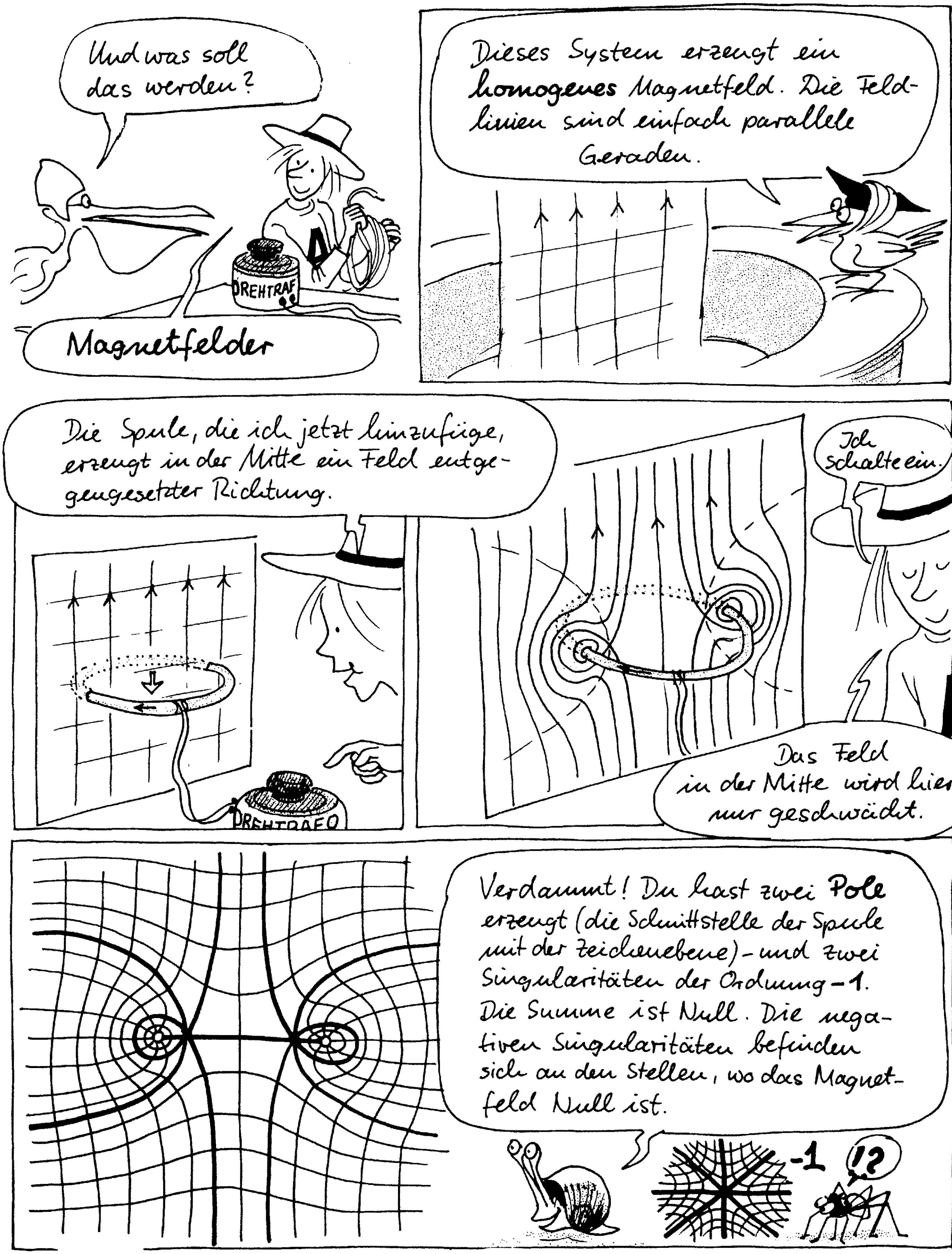


Bemerkung:

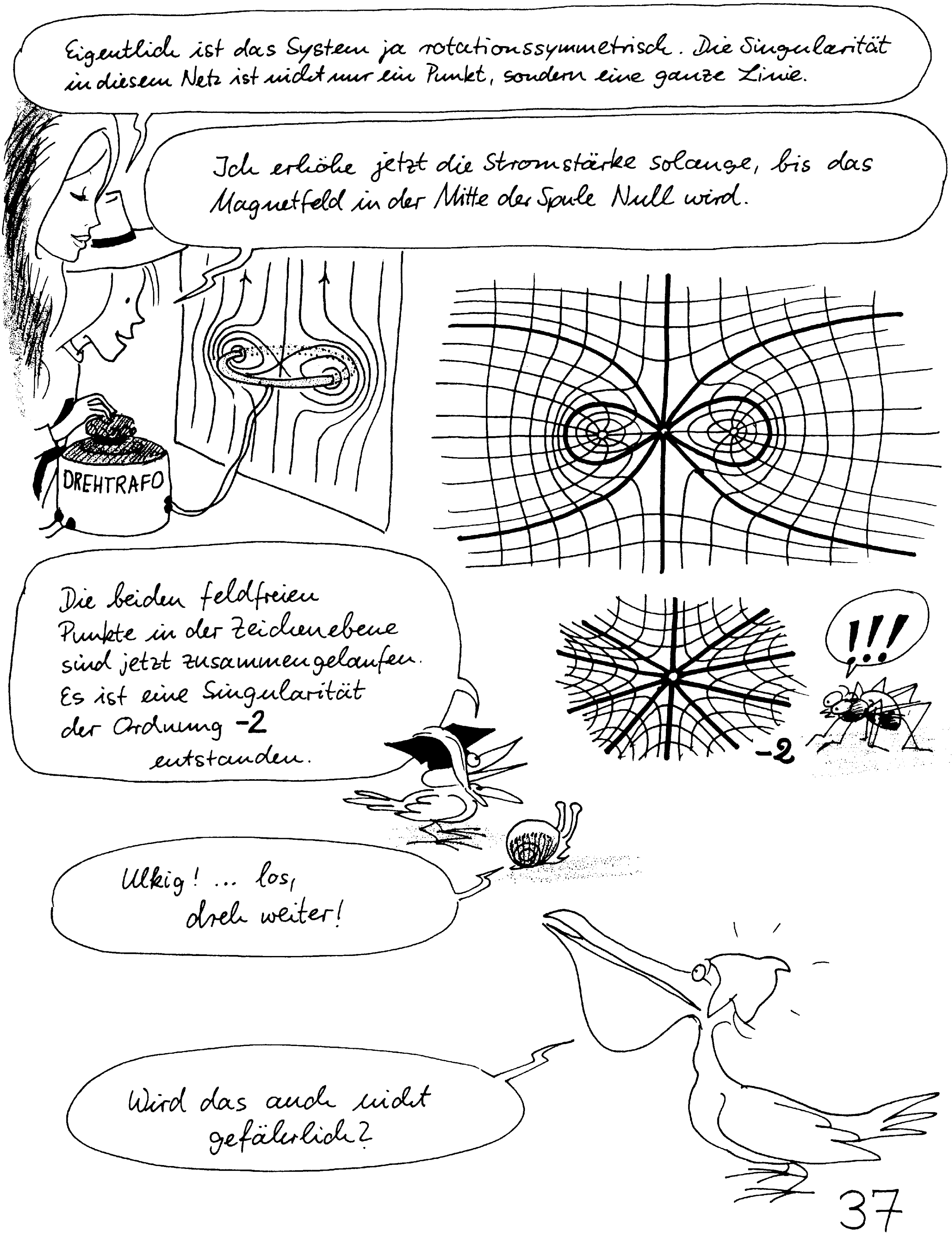
Wer „**Das schwarze Loch**" in dieser Reihe kennt, hat sicher die Ähnlichkeit bemerkt zwischen den Zeichnungen der Singularitäten von Liniennetzen und dem was sich im **Schwarzen Loch** auf die **Posikone**, **Negakone** und die Krümmung bezog. Alle diese Begriffe hängen eng miteinander zusammen. Die **Gesamtkrümmung** einer Fläche, die in unserem dreidimensionalen Raum dargestellt ist, ist nämlich gleich der Eulerschen Charakteristik, multipliziert mit 360° (oder 2π).

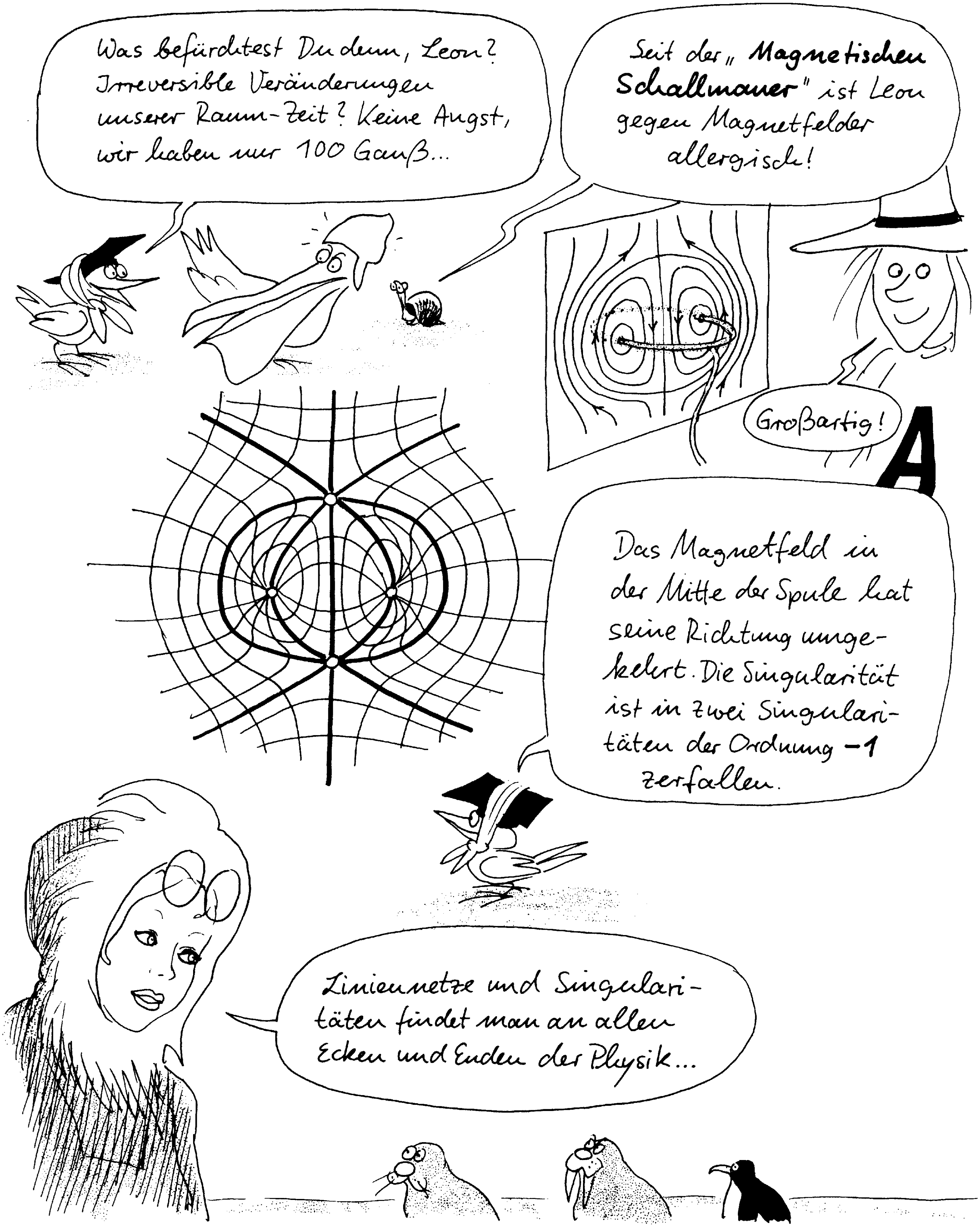
Die Direktion

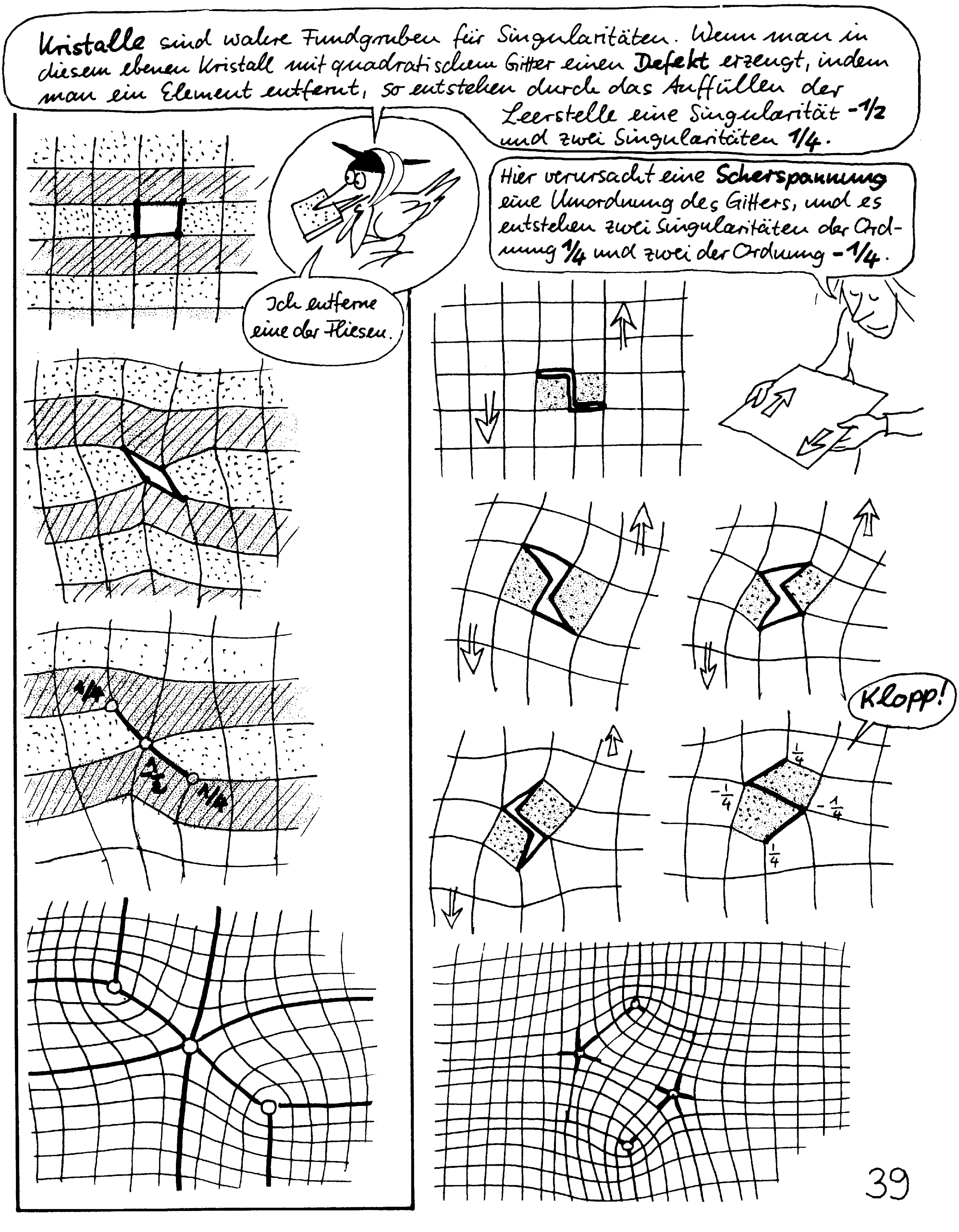

Schade, daß diese Dinge zu absolut nichts zu gebrauchen sind, genauso wie Latein und Griechisch...
Aber sicher sind sie zu gebrauchen, Leon! Die Natur ist voll mit Singularitäten!
Wo denn?
Ein kaputter Reißverschluß
$\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$
Eine Menge von Singularitäten +1/4 und −1/2: ein Tuch, das auf lauter Pflöcke ausgebreitet wurde.



Magnetfelder
Und was soll das werden?
DREHTRAF
Dieses System erzeugt ein **homogenes** Magnetfeld. Die Feldlinien sind einfach parallele Geraden.
Die Spule, die ich jetzt hinzufüge, erzeugt in der Mitte ein Feld entgegengesetzter Richtung.
DREHTRAFO
Ich schalte ein.
Das Feld in der Mitte wird hier nur geschwächt.
Verdammt! Du hast zwei **Pole** erzeugt (die Schnittstelle der Spule mit der Zeichenebene) – und zwei Singularitäten der Ordnung −1. Die Summe ist Null. Die negativen Singularitäten befinden sich an den Stellen, wo das Magnetfeld Null ist.
-1
!?


Eigentlich ist das System ja rotationssymmetrisch. Die Singularität in diesem Netz ist nicht nur ein Punkt, sondern eine ganze Linie.
Ich erhöhe jetzt die Stromstärke solange, bis das Magnetfeld in der Mitte der Spule Null wird.
DREHTRAFO
Die beiden feldfreien Punkte in der Zeichenebene sind jetzt zusammengelaufen. Es ist eine Singularität der Ordnung -2 entstanden.
-2
!!!
Ulkig! ... los, dreh weiter!
Wird das auch nicht gefährlich?


Was befürchtest Du denn, Leon? Irreversible Veränderungen unserer Raum-Zeit? Keine Angst, wir haben nur 100 Gauß...
Seit der „Magnetischen Schallmauer" ist Leon gegen Magnetfelder allergisch!
Großartig!
A
Das Magnetfeld in der Mitte der Spule hat seine Richtung umgekehrt. Die Singularität ist in zwei Singularitäten der Ordnung −1 zerfallen.
Liniennetze und Singularitäten findet man an allen Ecken und Enden der Physik...



Kristalle sind wahre Fundgruben für Singularitäten. Wenn man in diesem ebenen Kristall mit quadratischem Gitter einen Defekt erzeugt, indem man ein Element entfernt, so entstehen durch das Auffüllen der Leerstelle eine Singularität -1/2 und zwei Singularitäten 1/4.
Ich entferne eine der Fliesen.
Hier verursacht eine Scherspannung eine Unordnung des Gitters, und es entstehen zwei Singularitäten der Ordnung 1/4 und zwei der Ordnung -1/4.
1/4
-1/2
1/4
Klopp!
$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$


Da muß ich an was denken...
Woran, mein lieber Tiresias?
Angenommen, das Universum wäre eine Art...
...Kristall?
Wenn das Universum aus lauter Zellen bestünde, könnten die **Elementarteilchen** Defekte oder Versetzungen sein, Kombinationen von Singularitäten der **Pflasterung**. Eine Bewegung oder eine Wechselwirkung wäre dann eine Umordnung von dem Ganzen...
Keine schlechte Idee...
Ich... äh...

Das Folgende wird mit einem Daumenkino in den vier Filmen A, B, C und D illustriert. Man blättert dazu die folgenden Seiten in schneller Folge von hinten nach vorn.

Die Direktion

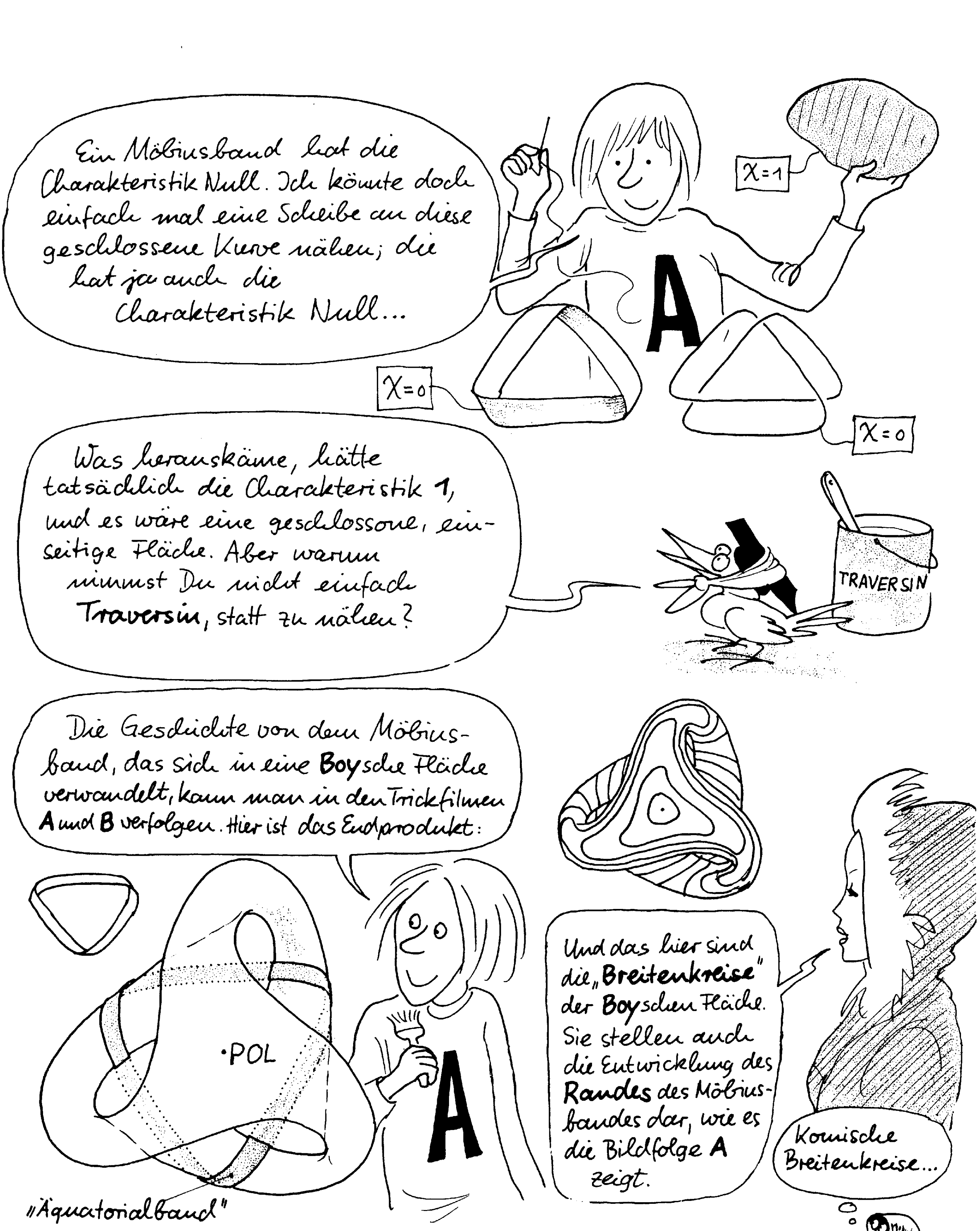
A
Transformation eines Möbiusbandes in eine Boysche Fläche

DIE BOYSCHE FLÄCHE

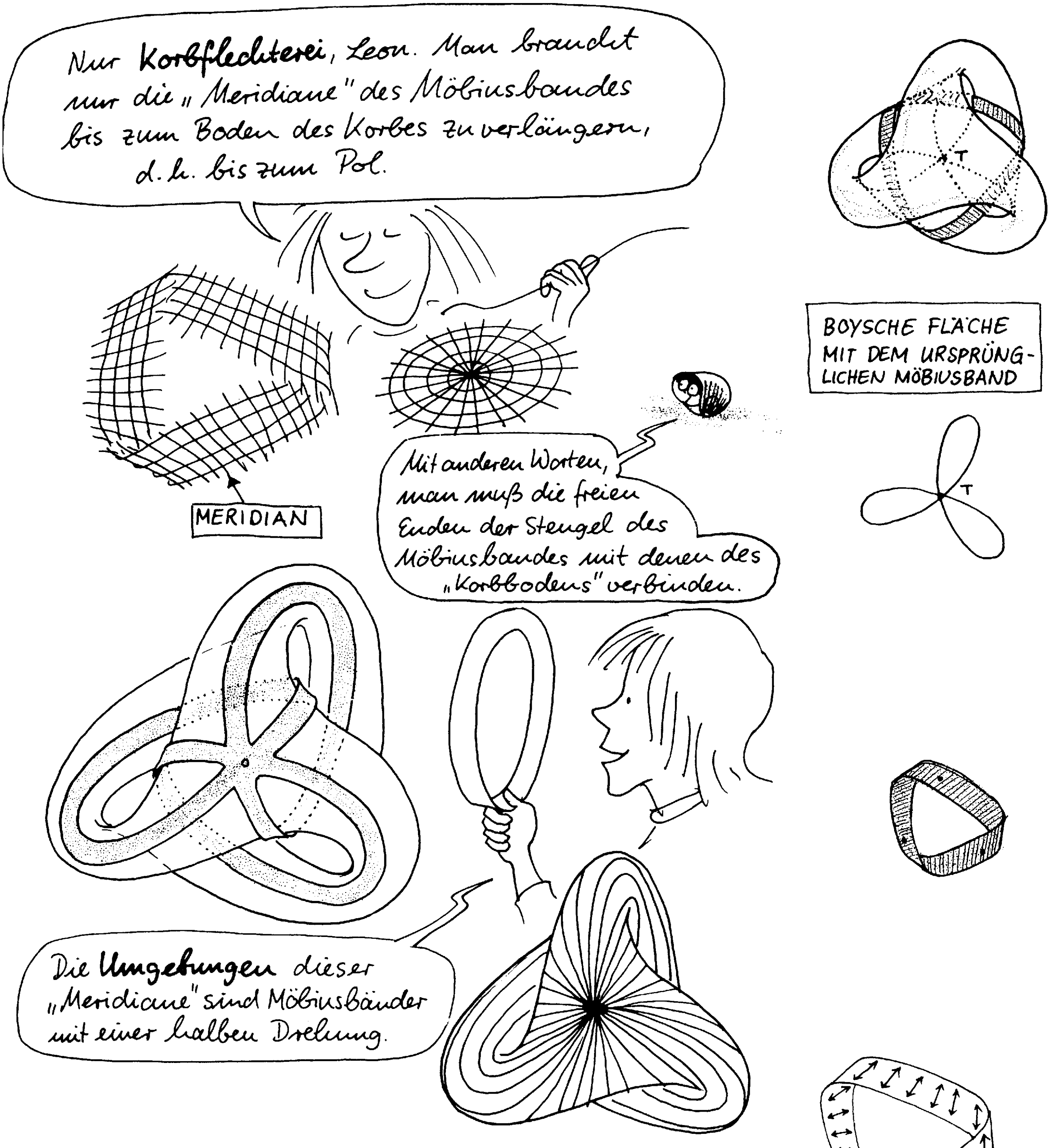
B
Idem: Randkurve und Kurven der Selbstdurchdringung

C
Verbindung der Antipoden

D
Zeitumkehr

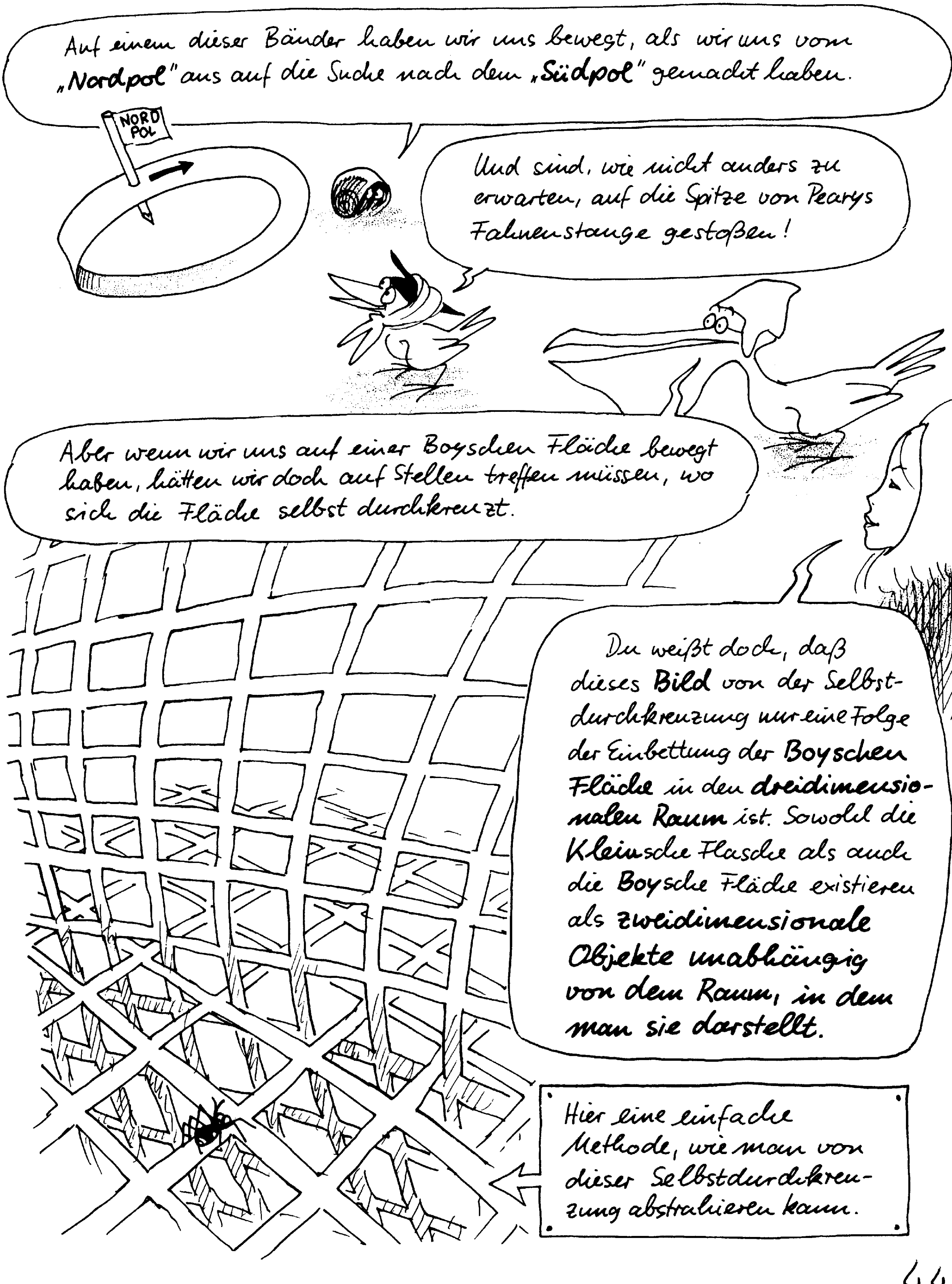


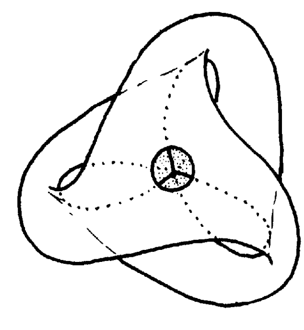
Ein Möbiusband hat die Charakteristik Null. Ich könnte doch einfach mal eine Scheibe an diese geschlossene Kurve nähen; die hat ja auch die Charakteristik Null...
χ=1
χ=0
χ=0
Was herauskäme, hätte tatsächlich die Charakteristik 1, und es wäre eine geschlossene, einseitige Fläche. Aber warum nimmst Du nicht einfach **Traversin**, statt zu nähen?
TRAVERSIN
Die Geschichte von dem Möbiusband, das sich in eine **Boy**sche Fläche verwandelt, kann man in den Trickfilmen **A** und **B** verfolgen. Hier ist das Endprodukt:
·POL
„Äquatorialband"
Und das hier sind die „**Breitenkreise**" der **Boy**schen Fläche. Sie stellen auch die Entwicklung des **Randes** des Möbiusbandes dar, wie es die Bildfolge **A** zeigt.
Komische Breitenkreise...



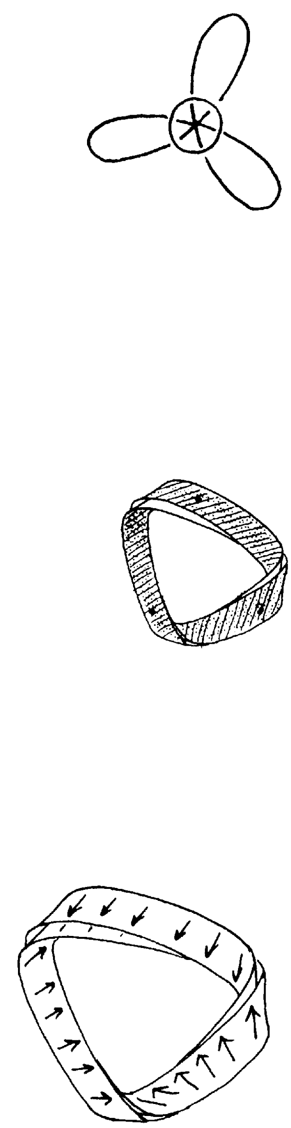
Das erste Modell der Boyschen Fläche mit seinen „Meridianen" und „Breitenkreisen" wurde vom Autor dieses Buches erdacht. Eine dreidimensionale Realisierung dieses Modells durch den Bildhauer Max Sauze steht in „Saal π" im Palais de la Découverte in Paris.

Die Direktion

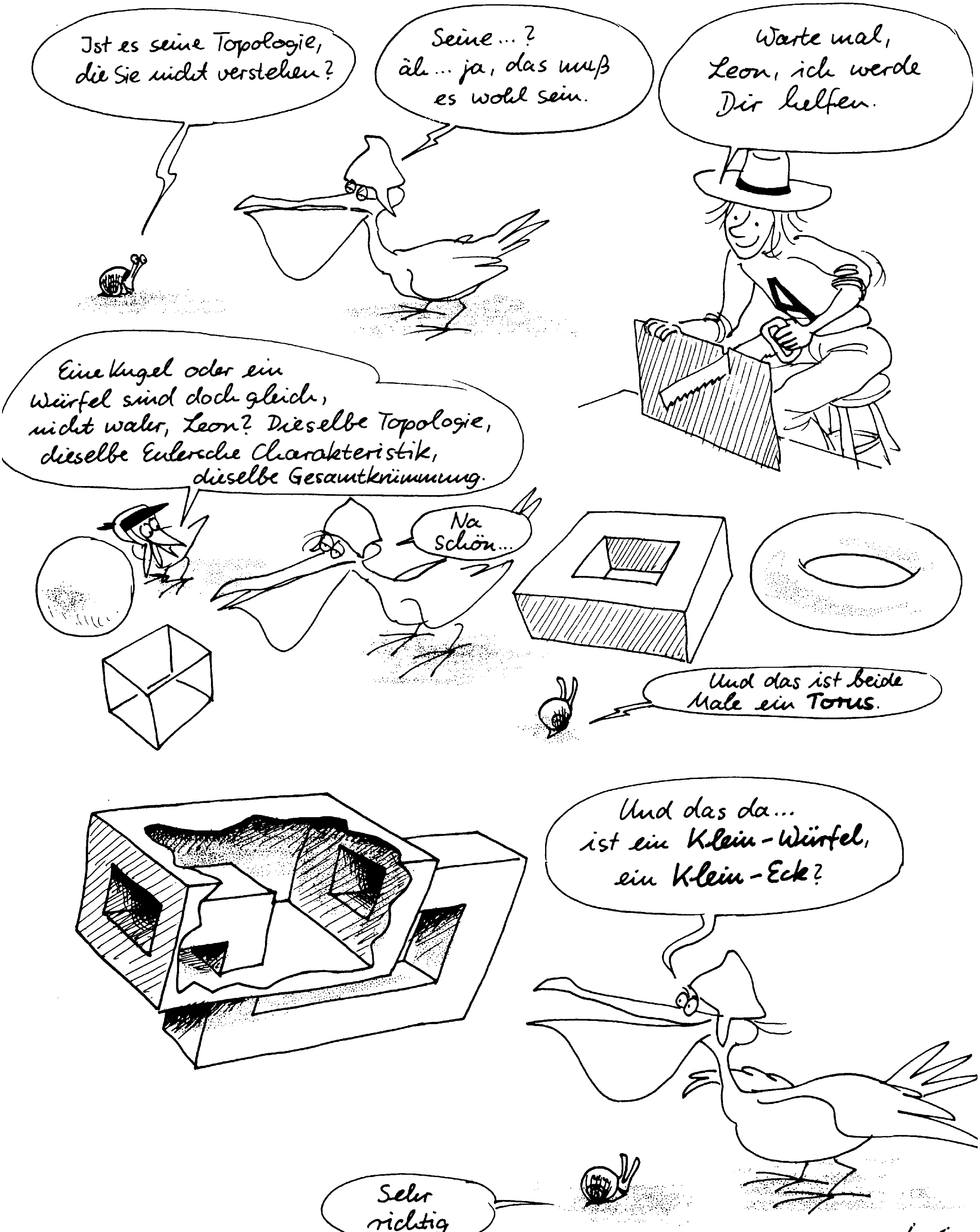

Auf einem dieser Bänder haben wir uns bewegt, als wir uns vom „Nordpol" aus auf die Suche nach dem „Südpol" gemacht haben.
NORD POL
Und sind, wie nicht anders zu erwarten, auf die Spitze von Pearys Fahnenstange gestoßen!
Aber wenn wir uns auf einer Boyschen Fläche bewegt haben, hätten wir doch auf Stellen treffen müssen, wo sich die Fläche selbst durchkreuzt.
Du weißt doch, daß dieses **Bild** von der Selbstdurchkreuzung nur eine Folge der Einbettung der **Boyschen Fläche** in den **dreidimensionalen Raum** ist. Sowohl die **Kleinsche Flasche** als auch die **Boysche Fläche** existieren als **zweidimensionale Objekte unabhängig von dem Raum, in dem man sie darstellt.**
Hier eine einfache Methode, wie man von dieser Selbstdurchkreuzung abstrahieren kann.

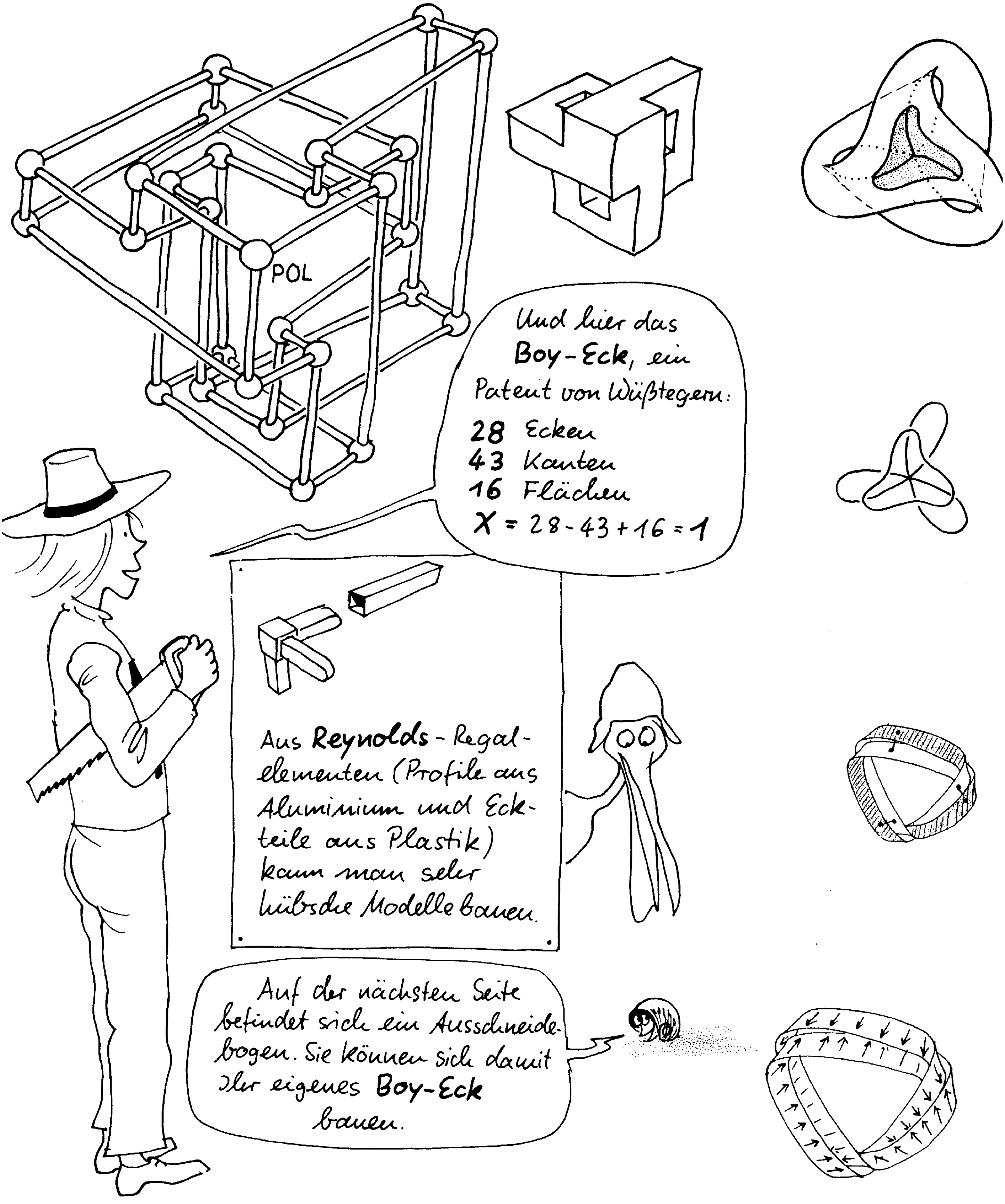


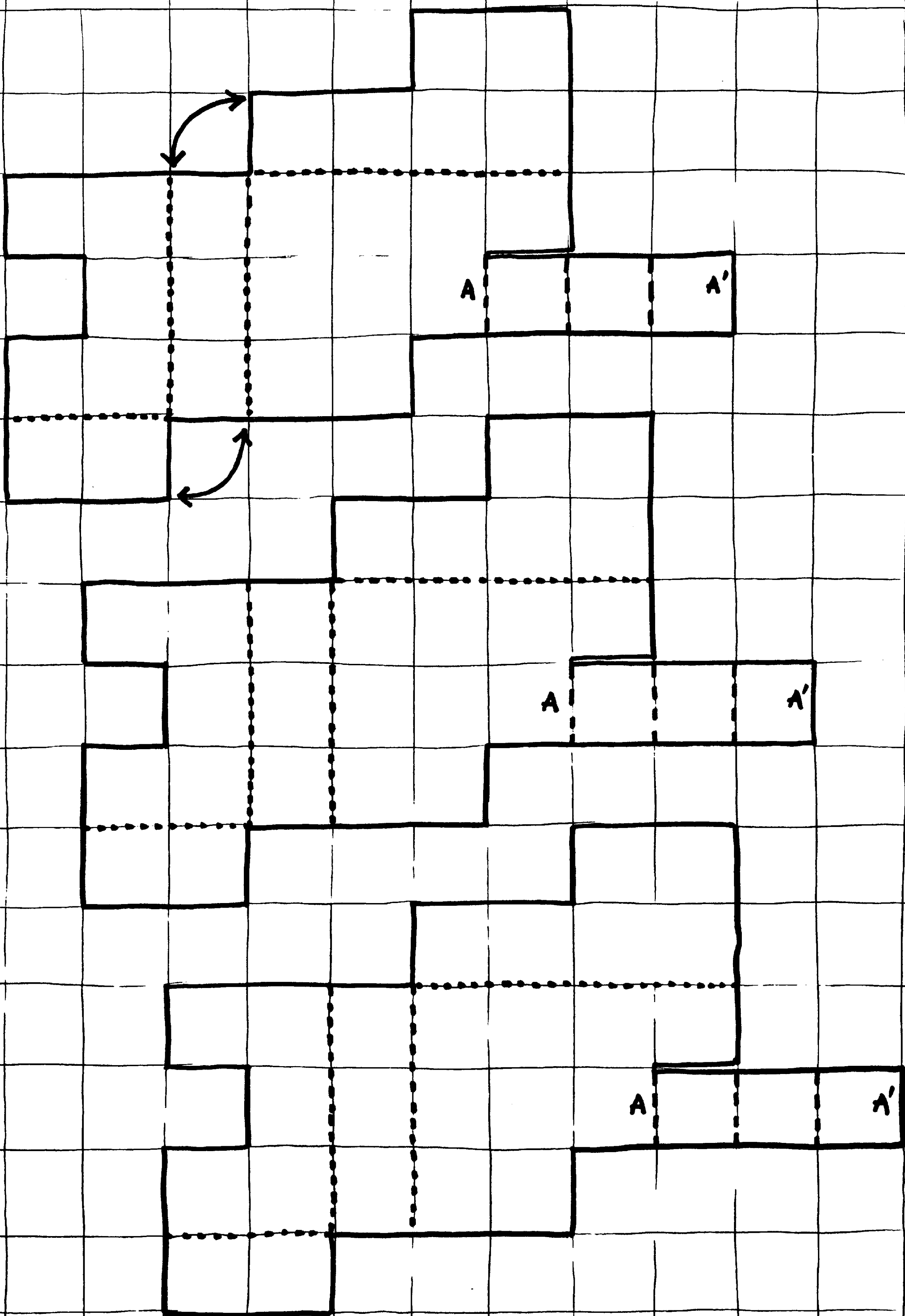
MÖBIUSBAND MIT KREISFÖRMIGEM RAND

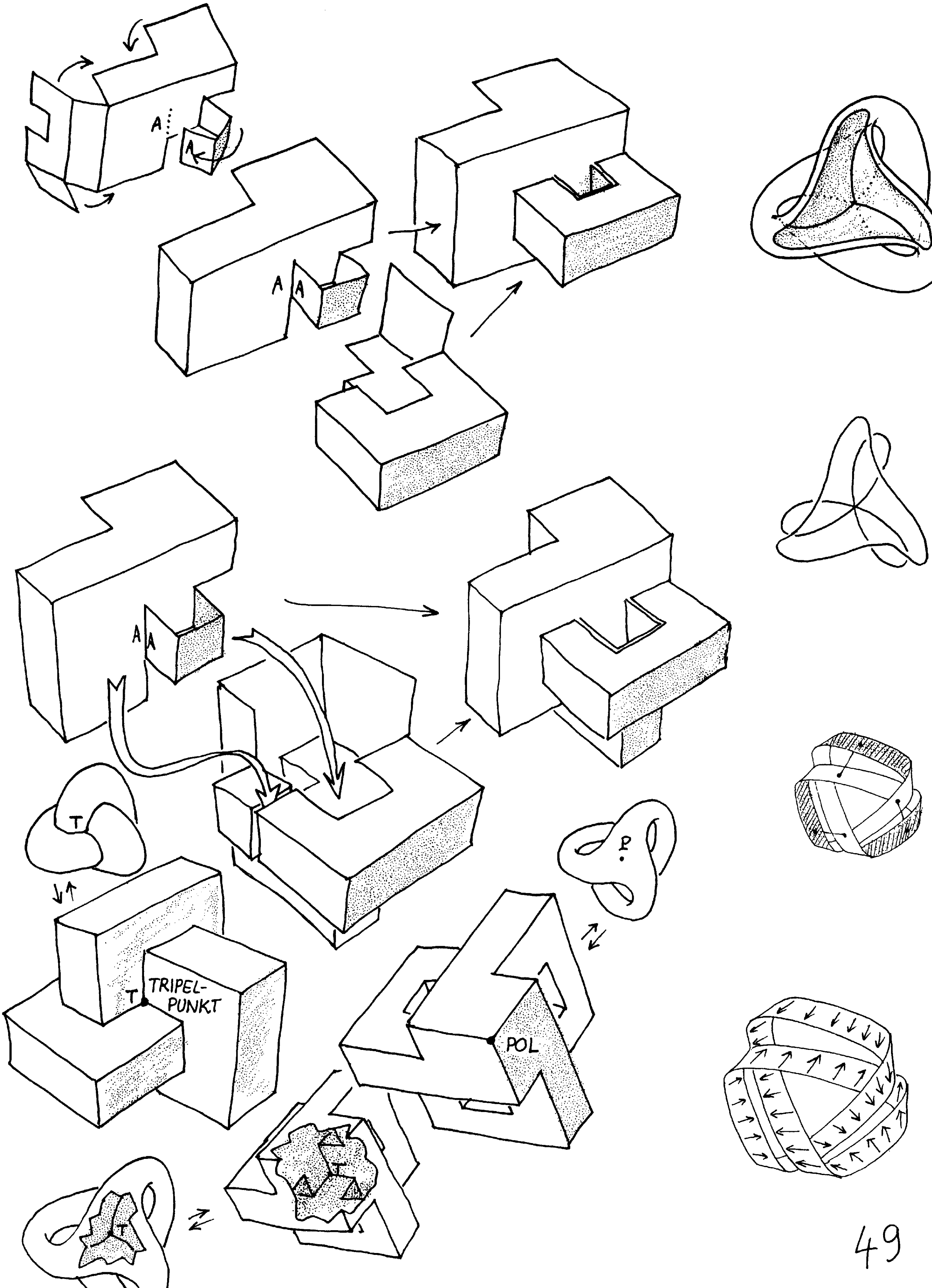


DAS BOY-ECK

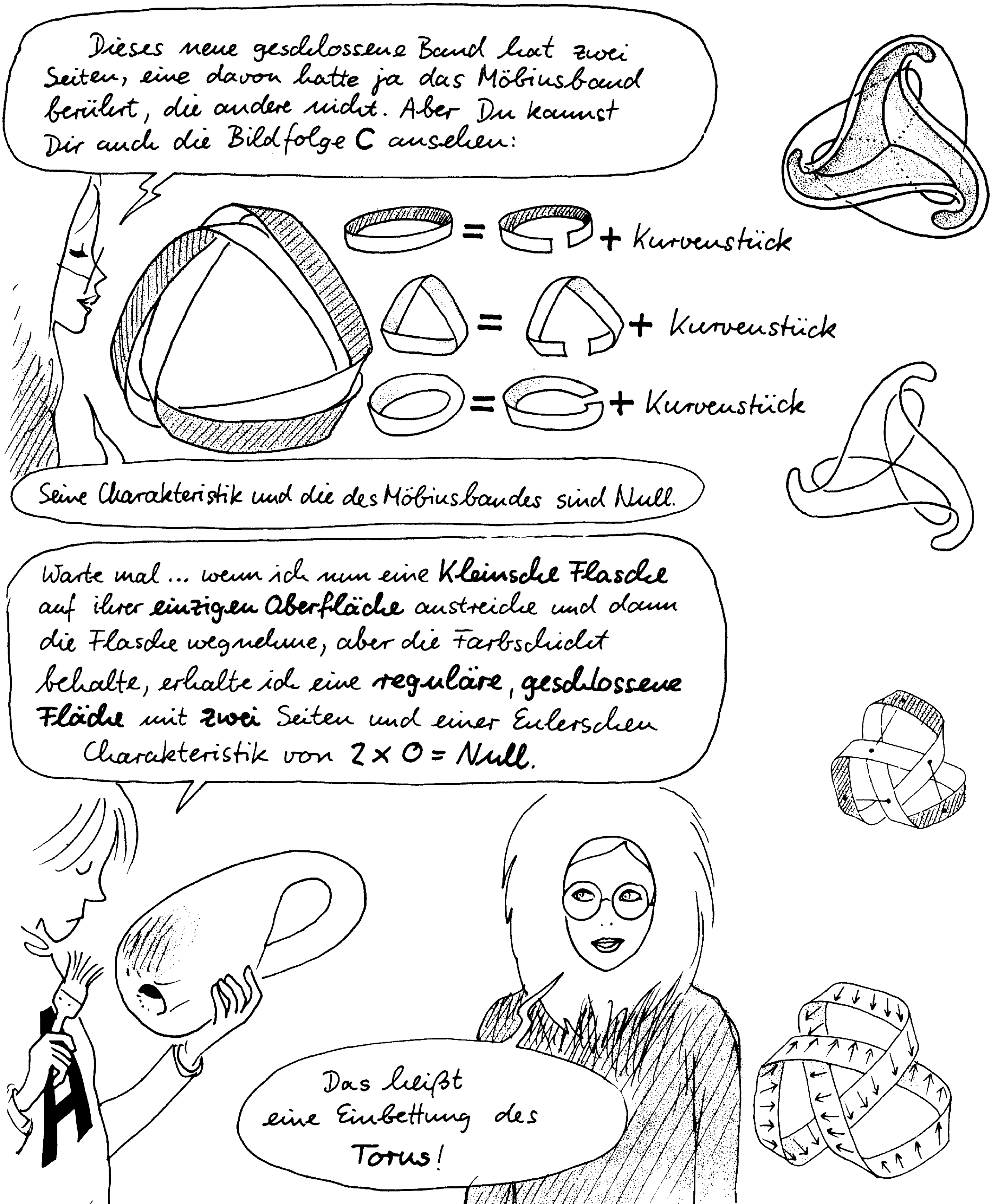

Jst es seine Topologie, die Sie nicht verstehen?
Seine...? äh... ja, das muß es wohl sein.
Warte mal, Leon, ich werde Dir helfen.
Eine Kugel oder ein Würfel sind doch gleich, nicht wahr, Leon? Dieselbe Topologie, dieselbe Eulersche Charakteristik, dieselbe Gesamtkrümmung.
Na schön...
Und das ist beide Male ein Torus.
Und das da... ist ein Klein-Würfel, ein Klein-Eck?
Sehr richtig

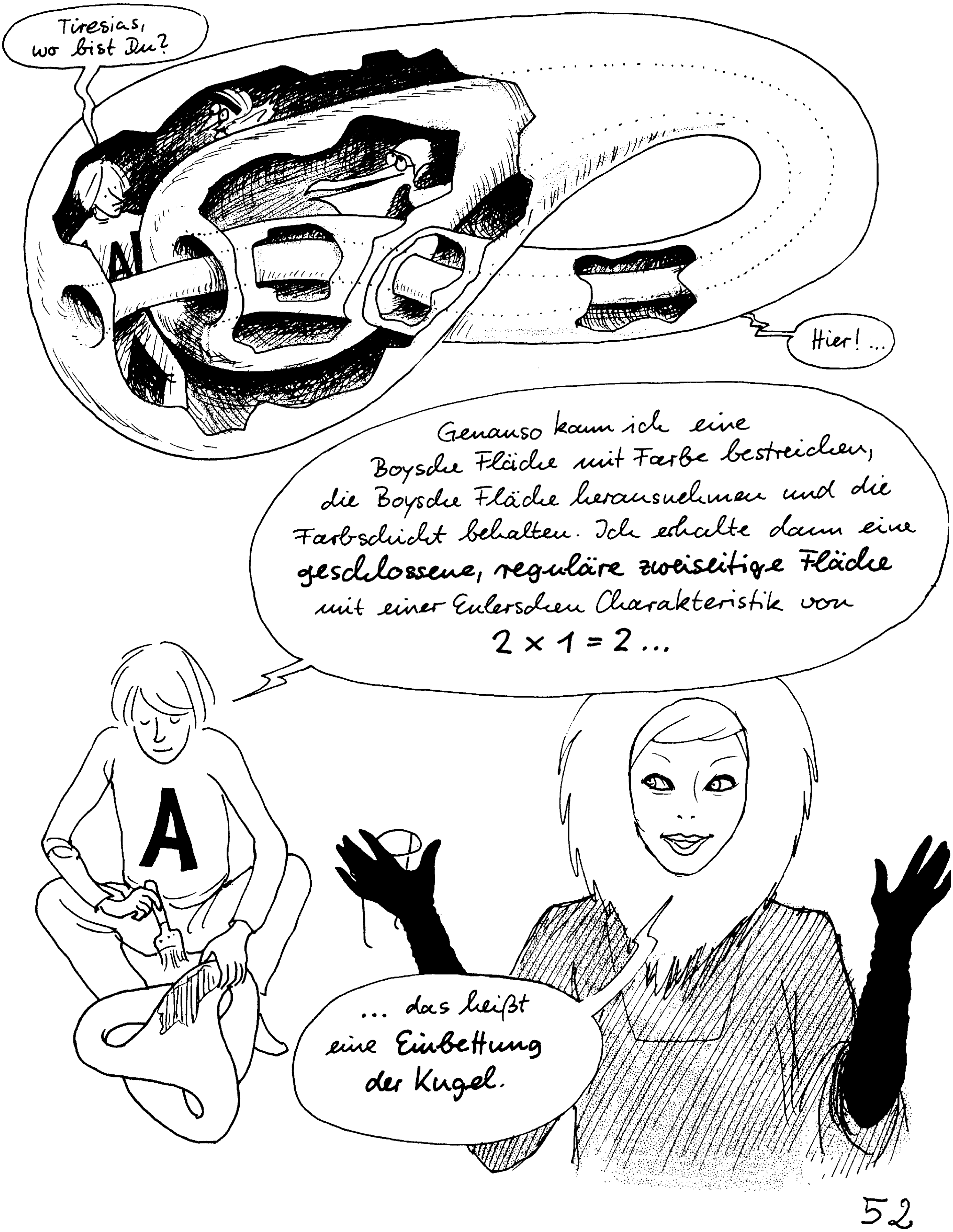

POL
Und hier das Boy-Eck, ein Patent von Wüßtegern:
28 Ecken
43 Kanten
16 Flächen
X = 28 - 43 + 16 = 1
Aus Reynolds-Regalelementen (Profile aus Aluminium und Eckteile aus Plastik) kann man sehr hübsche Modelle bauen.
Auf der nächsten Seite befindet sich ein Ausschneidebogen. Sie können sich damit Ihr eigenes Boy-Eck bauen.


A
A′
A
A′
A
A′


A
A
A
A
A
A
T
T
TRIPEL-
PUNKT
POL
P
T
T

BESCHICHTUNGEN

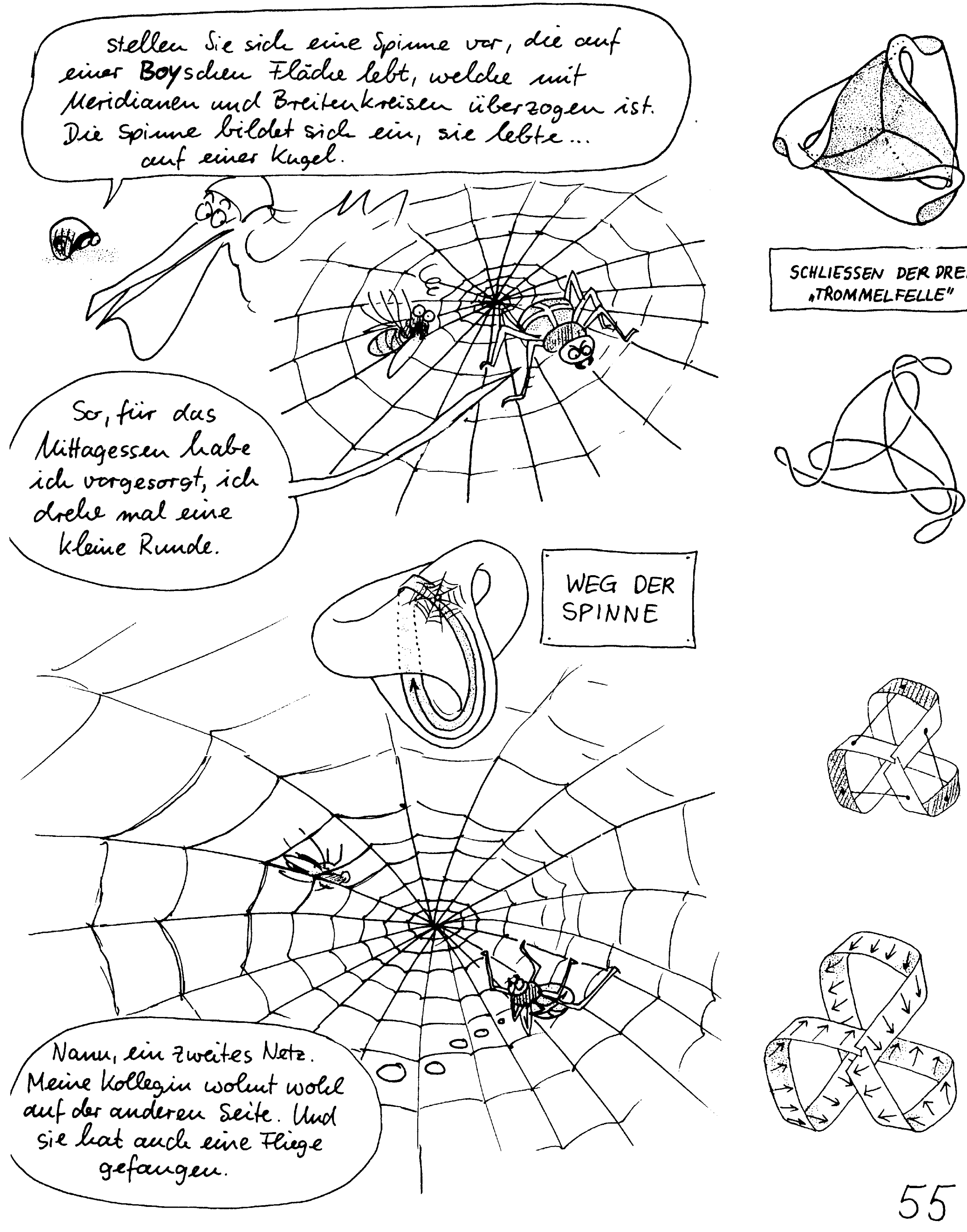

Dieses neue geschlossene Band hat zwei Seiten, eine davon hatte ja das Möbiusband berührt, die andere nicht. Aber Du kannst Dir auch die Bildfolge C ansehen:
= + Kurvenstück
= + Kurvenstück
= + Kurvenstück
Seine Charakteristik und die des Möbiusbandes sind Null.
Warte mal ... wenn ich nun eine **Kleinsche Flasche** auf ihrer **einzigen Oberfläche** anstreiche und dann die Flasche wegnehme, aber die Farbschicht behalte, erhalte ich eine **reguläre**, **geschlossene Fläche** mit **zwei** Seiten und einer Eulerschen Charakteristik von **2 × 0 = Null**.
Das heißt eine Einbettung des **Torus**!

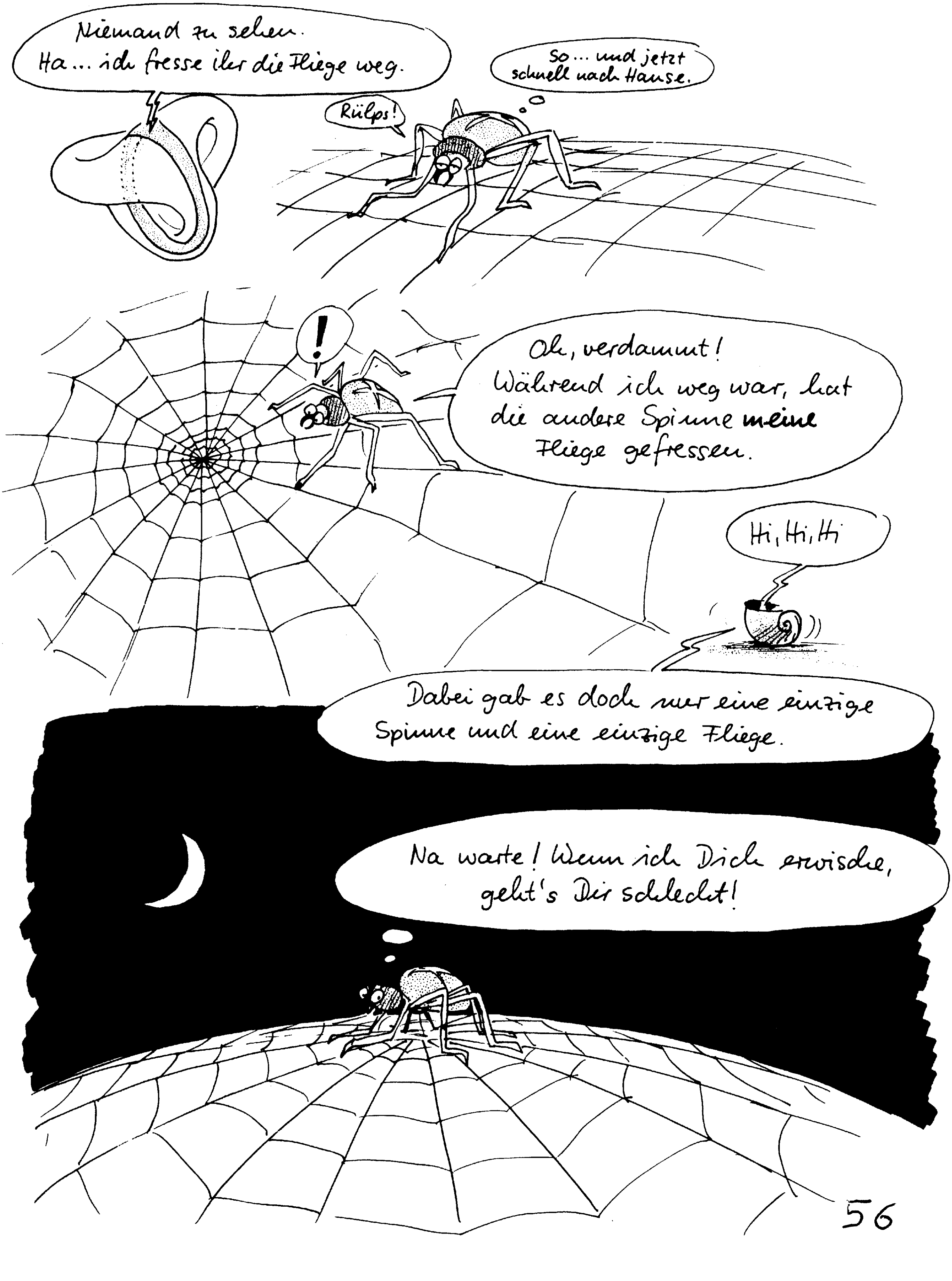


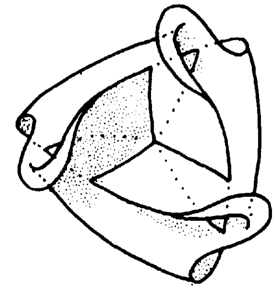
Tiresias, wo bist Du?
Hier! ...
Genauso kann ich eine Boysche Fläche mit Farbe bestreichen, die Boysche Fläche herausnehmen und die Farbschicht behalten. Ich erhalte dann eine geschlossene, reguläre zweiseitige Fläche mit einer Eulerschen Charakteristik von 2 × 1 = 2 ...
... das heißt eine Einbettung der Kugel.


Kann ich denn aber diese merkwürdige Kugel **wirklich** „auseinanderfalten" und sie in eine „gewöhnliche" Kugel verwandeln?
Mit **Traversin** kein Problem. Und das geht natürlich auch beim **Torus**.
Versuchen wir's mal umgekehrt. Angenommen, ich wollte eine Kugel „zusammenfalten" ohne eine Falte zu machen.
DURCH-KREUZUNG BEENDET
SCHRUMPFOL
Dazu brauchst Du **Schrumpfol**.

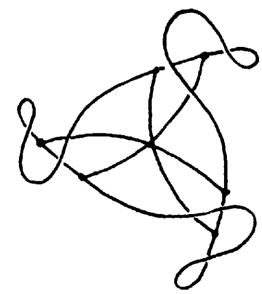
Man verbindet als erstes jeden Punkt der Kugel mit seinem **Antipoden**, und zwar mit Hilfe von Fäden, die vorher in **Schrumpfol** getaucht worden sind.
Diese Fäden ziehen sich dann bis auf die Länge Null zusammen – und zwar so, daß die Oberfläche der Kugel konstant bleibt. So bringt man jeden Punkt mit seinem **Antipoden** in Berührung.
Einzelheiten darüber erfahren Sie ein andermal, wenn es darum gehen wird, wie man eine **Kugel umkrempelt**. Im Augenblick können Sie sich aber schon die Bildfolge **C** ansehen. Sie zeigt, wie sich der **Äquator** der Kugel verformt und zum **Äquator** der **Boy**schen Fläche wird. Dabei schmiegt sich natürlich der **Nordpol** an den **Südpol**.
Die Direktion
Meridiane kommen dabei mit Meridianen und Breitenkreise mit Breitenkreisen zur Deckung.

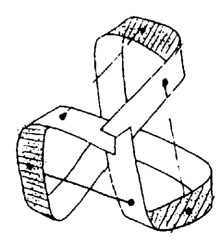

stellen Sie sich eine Spinne vor, die auf einer Boyschen Fläche lebt, welche mit Meridianen und Breitenkreisen überzogen ist. Die Spinne bildet sich ein, sie lebte ... auf einer Kugel.
SCHLIESSEN DER DREI „TROMMELFELLE"
So, für das Mittagessen habe ich vorgesorgt, ich drehe mal eine kleine Runde.
WEG DER SPINNE
Nanu, ein zweites Netz. Meine Kollegin wohnt wohl auf der anderen Seite. Und sie hat auch eine Fliege gefangen.

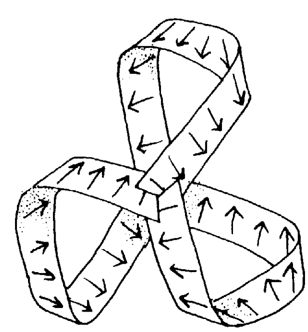

Niemand zu sehen.
Ha ... ich fresse ihr die Fliege weg.
So ... und jetzt schnell nach Hause.
Rülps!
!
Oh, verdammt! Während ich weg war, hat die andere Spinne meine Fliege gefressen.
Hi, Hi, Hi
Dabei gab es doch nur eine einzige Spinne und eine einzige Fliege.
Na warte! Wenn ich Dich erwische, geht's Dir schlecht!



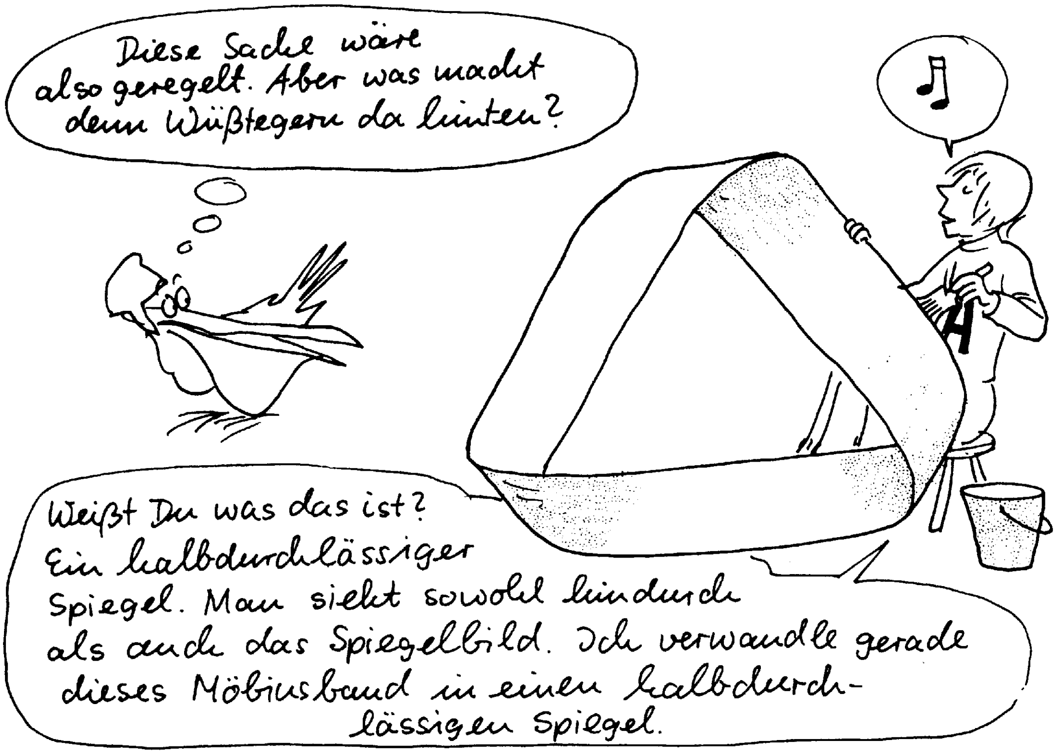
ANFANG DER „OHREN"

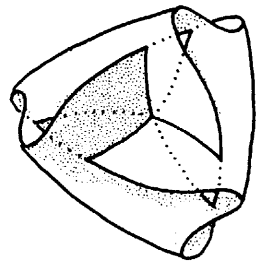


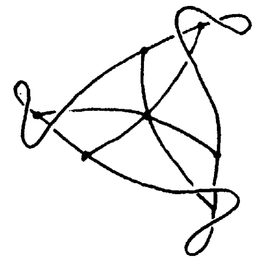




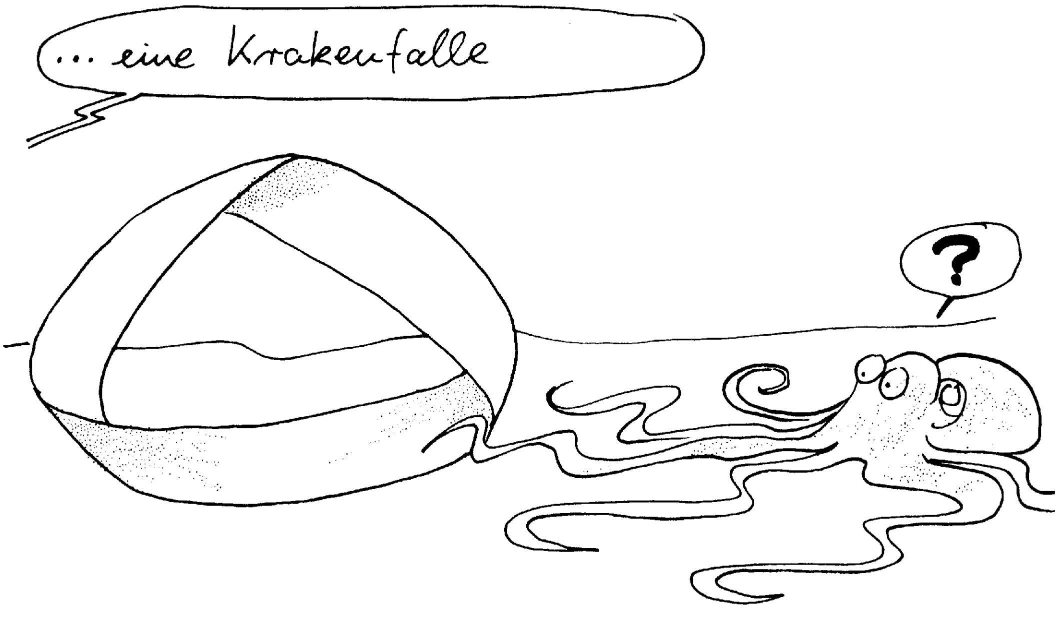

Was für ein schöner Tag!
Das sieht doch nach was aus.
Ein historisches Photo, Herr Amundsen.
Weg da, ich will allein sein auf meinem historischen Photo.
SÜDPOL
Es ist in der Wissenschaft wie überall. Man darf manchmal nicht zu sehr in die Tiefe gehen...
... jeder Pol hat seinen Platz, und jetzt haben wir hoffentlich Ruhe...
Übrigens, wenn man unter dem Nordpol graben würde, erlebte man vielleicht eine Überraschung.
Und ich kenne jemanden, der enttäuscht wäre.

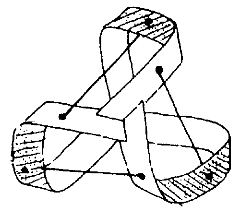


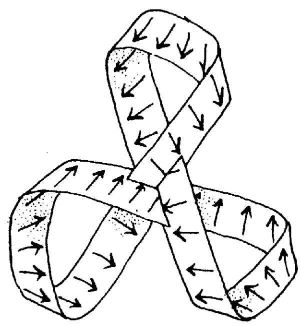


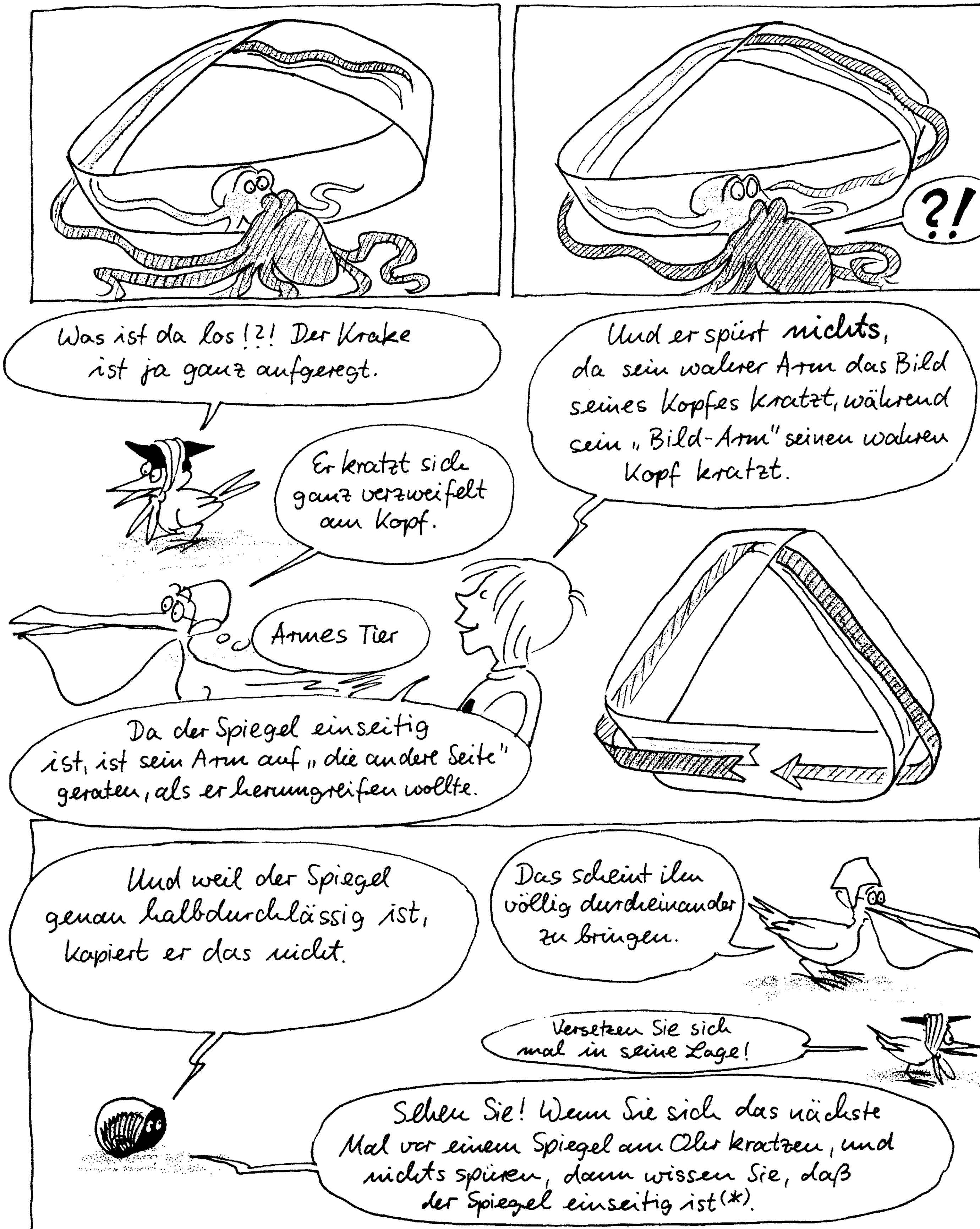


SPIEGEL-GESCHICHTE

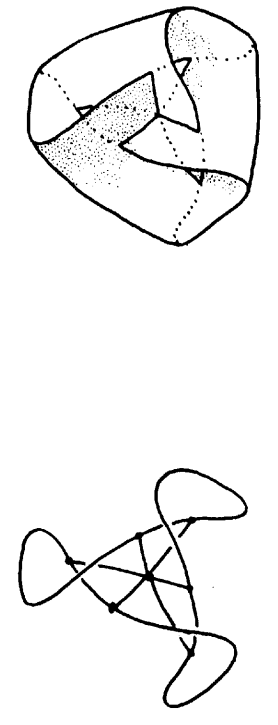




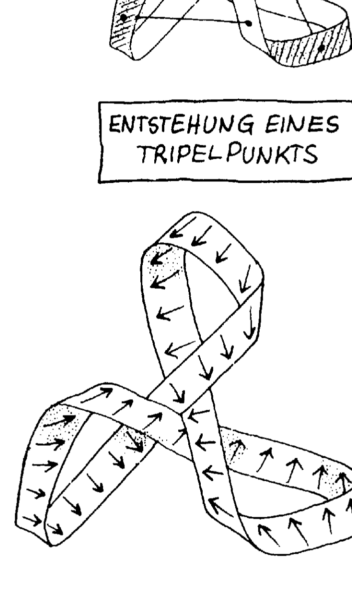




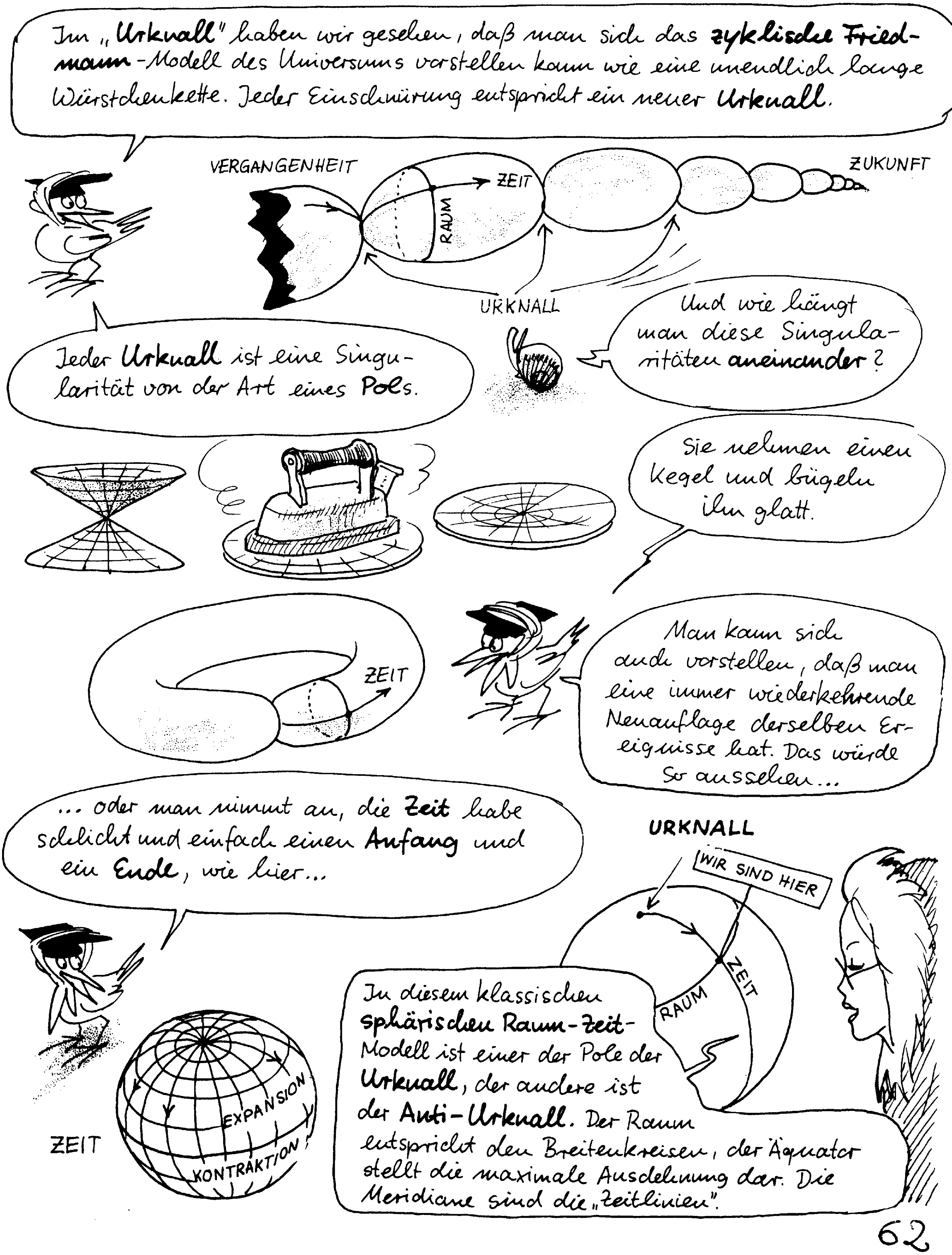
(*) Sie können sich so einen Spiegel leicht selbst herstellen aus einer alten Kleinschen Flasche vom Sperrmüll.

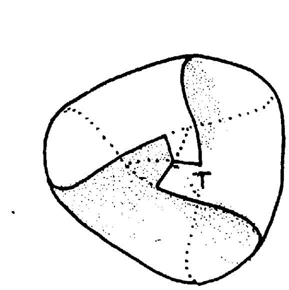


DIE RAUM-ZEIT DREHT DURCH

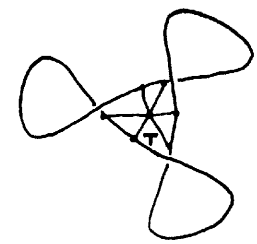

ENTSTEHUNG EINES TRIPELPUNKTS

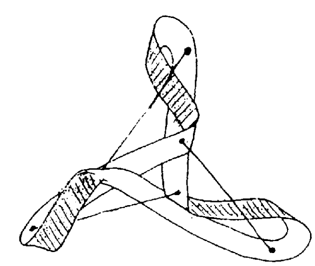
(*) Der Versuch wurde nie unternommen.

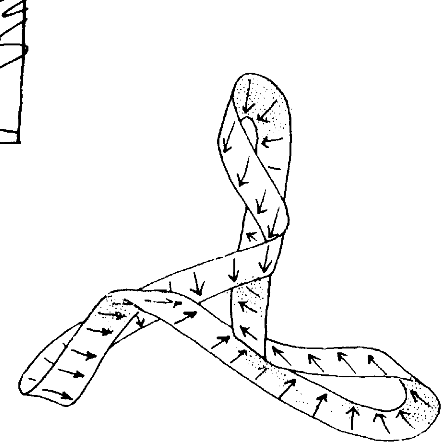

Im „Urknall" haben wir gesehen, daß man sich das zyklische Friedmann-Modell des Universums vorstellen kann wie eine unendlich lange Würstchenkette. Jeder Einschnürung entspricht ein neuer Urknall.
VERGANGENHEIT
ZEIT
RAUM
ZUKUNFT
URKNALL
Jeder Urknall ist eine Singularität von der Art eines Pols.
Und wie hängt man diese Singularitäten aneinander?
Sie nehmen einen Kegel und bügeln ihn glatt.
ZEIT
Man kann sich auch vorstellen, daß man eine immer wiederkehrende Neuauflage derselben Ereignisse hat. Das würde so aussehen...
... oder man nimmt an, die Zeit habe schlicht und einfach einen Anfang und ein Ende, wie hier...
URKNALL
WIR SIND HIER
ZEIT
RAUM
ZEIT
EXPANSION
KONTRAKTION
In diesem klassischen sphärischen Raum-Zeit-Modell ist einer der Pole der Urknall, der andere ist der Anti-Urknall. Der Raum entspricht den Breitenkreisen, der Äquator stellt die maximale Ausdehnung dar. Die Meridiane sind die „Zeitlinien".



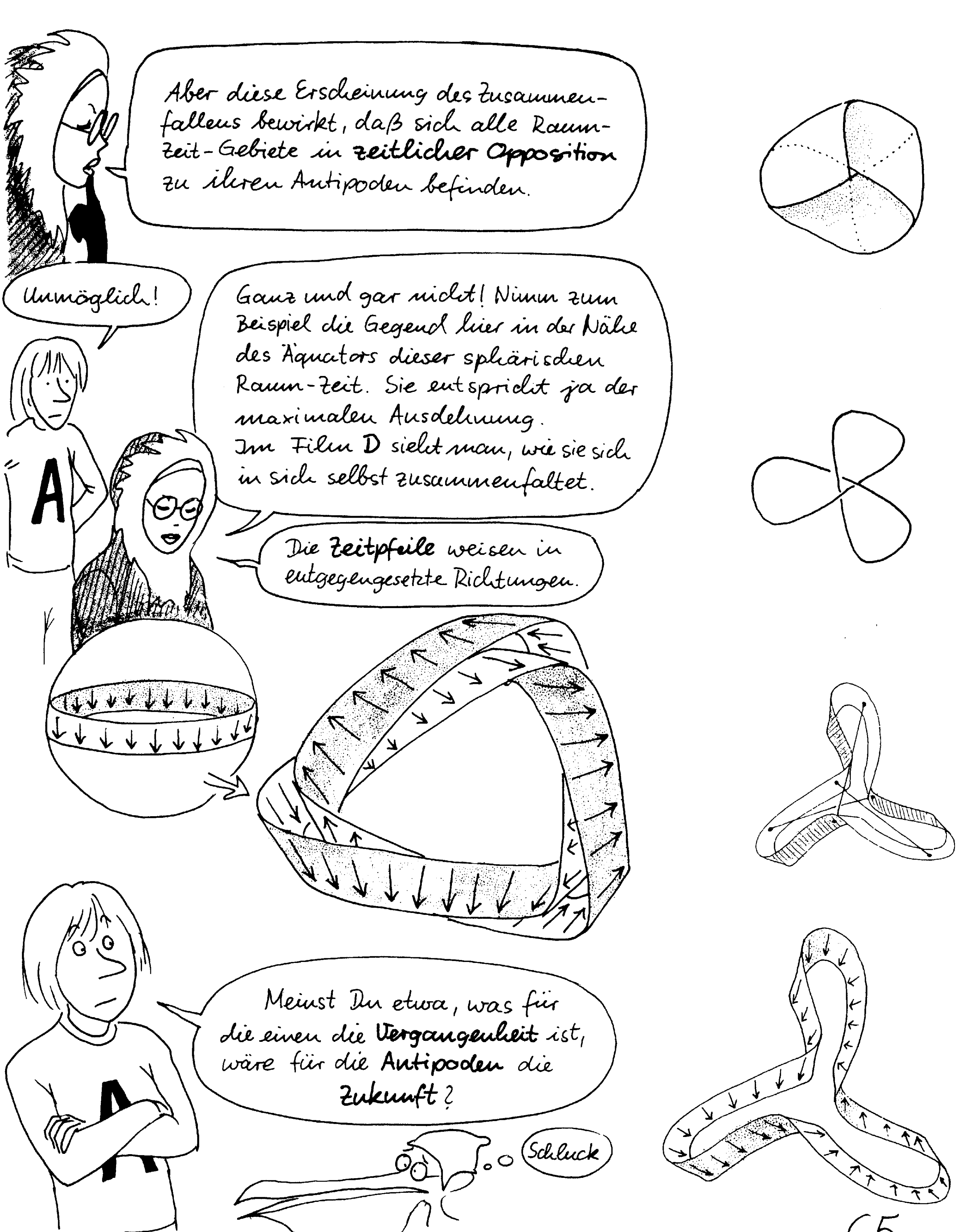
ENTSTEHUNG DES TRIPELPUNKTES







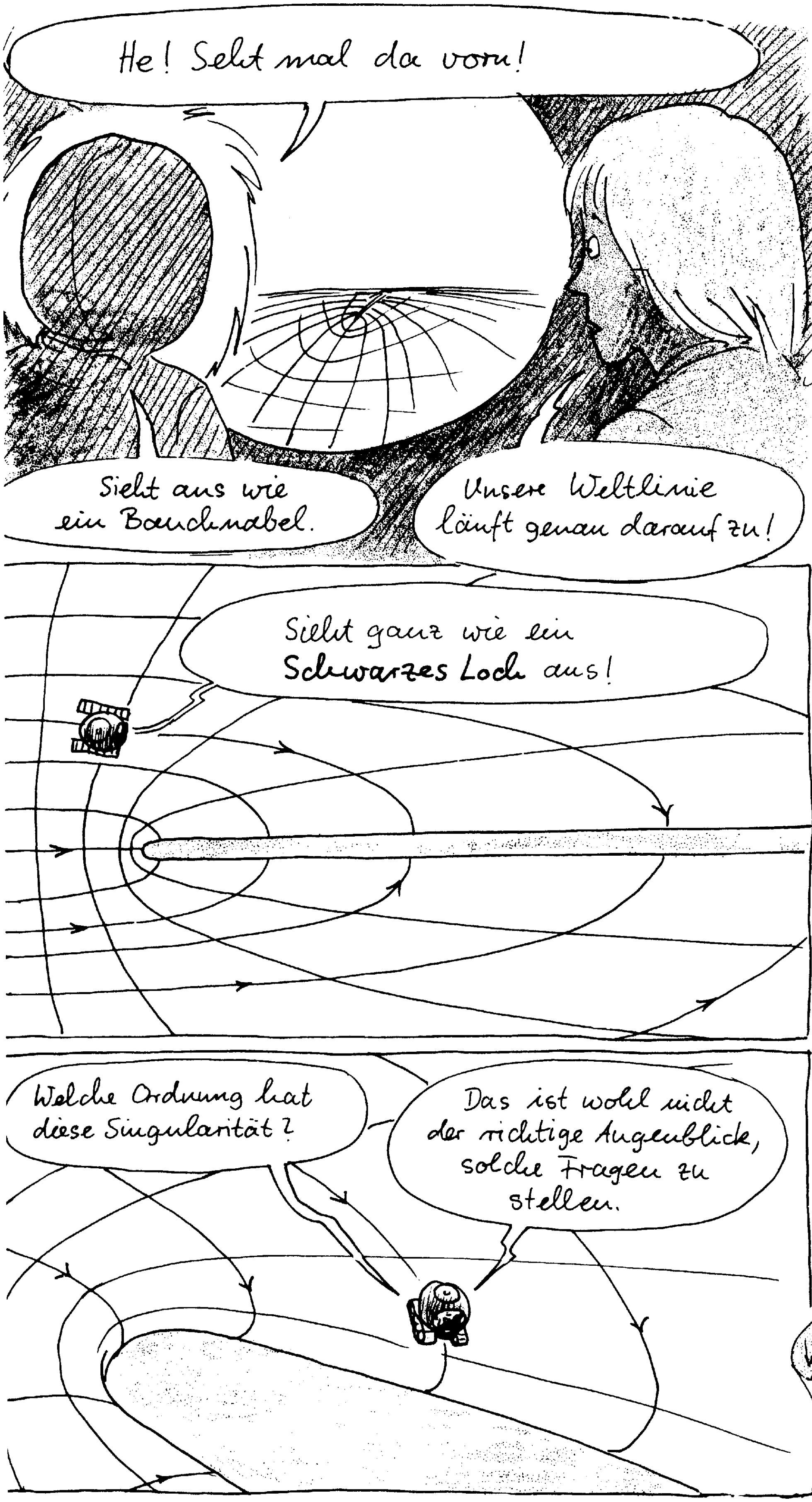
(*) von Hoyle und Sacharow

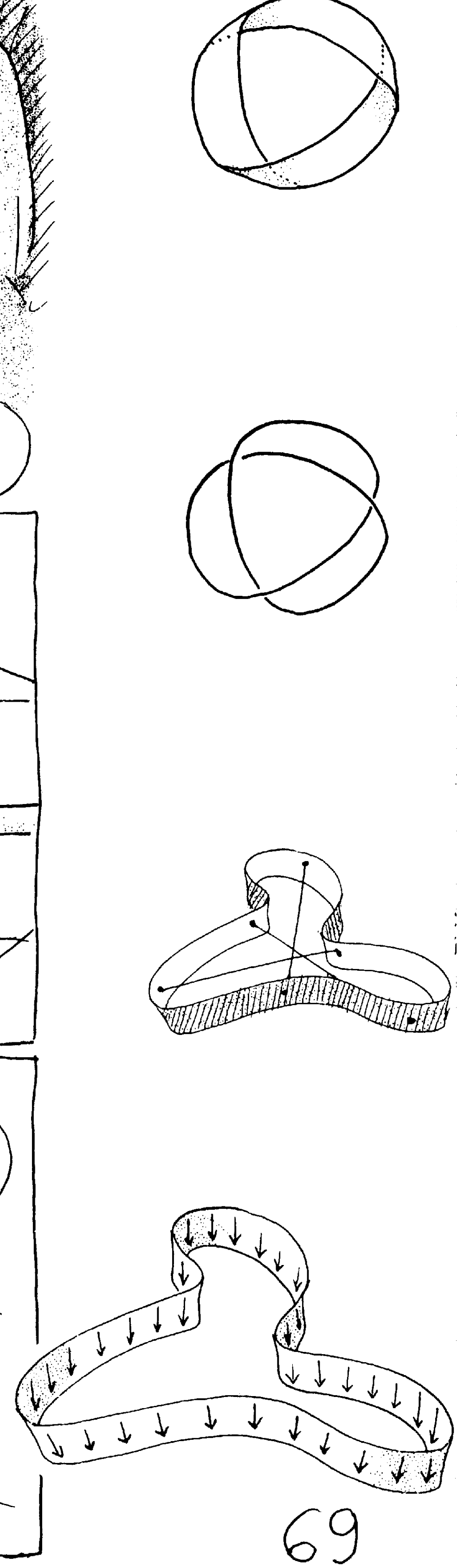

Aber diese Erscheinung des Zusammenfallens bewirkt, daß sich alle Raum-Zeit-Gebiete in **zeitlicher Opposition** zu ihren Antipoden befinden.
Unmöglich!
Ganz und gar nicht! Nimm zum Beispiel die Gegend hier in der Nähe des Äquators dieser sphärischen Raum-Zeit. Sie entspricht ja der maximalen Ausdehnung. Im Film **D** sieht man, wie sie sich in sich selbst zusammenfaltet.
Die **Zeitpfeile** weisen in entgegengesetzte Richtungen.
Meinst Du etwa, was für die einen die **Vergangenheit** ist, wäre für die **Antipoden** die **Zukunft**?
Schluck

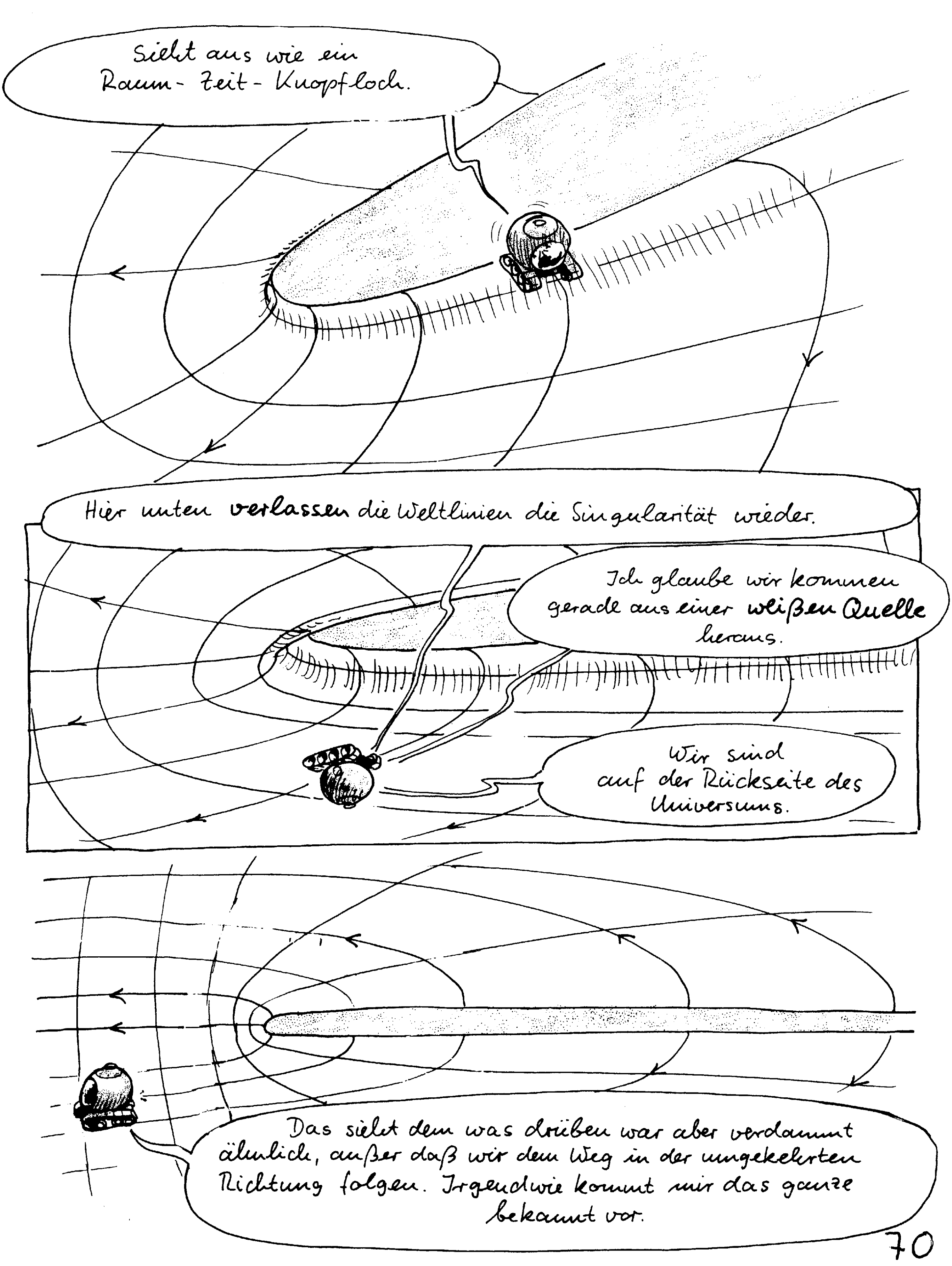

Mein Lieber, da haben Sie ja was angerichtet!
Sie meinen, daß das Universum in eine ausweglos widersprüchliche Situation gestürzt wurde?
Eine Art logische Sackgasse
Wenn das Schrumpfol seine Wirkung getan hat, wird das ganze Universum zusammenknallen, und die gegen den Strich laufende Zeit wird uns voll ins Gesicht schlagen.
Wo ist denn Tiresias überhaupt?
Kommt wir steigen in den Chronoskaphen, wir können versuchen, ihn von dort aus zu rufen.
Eine Suchmeldung?

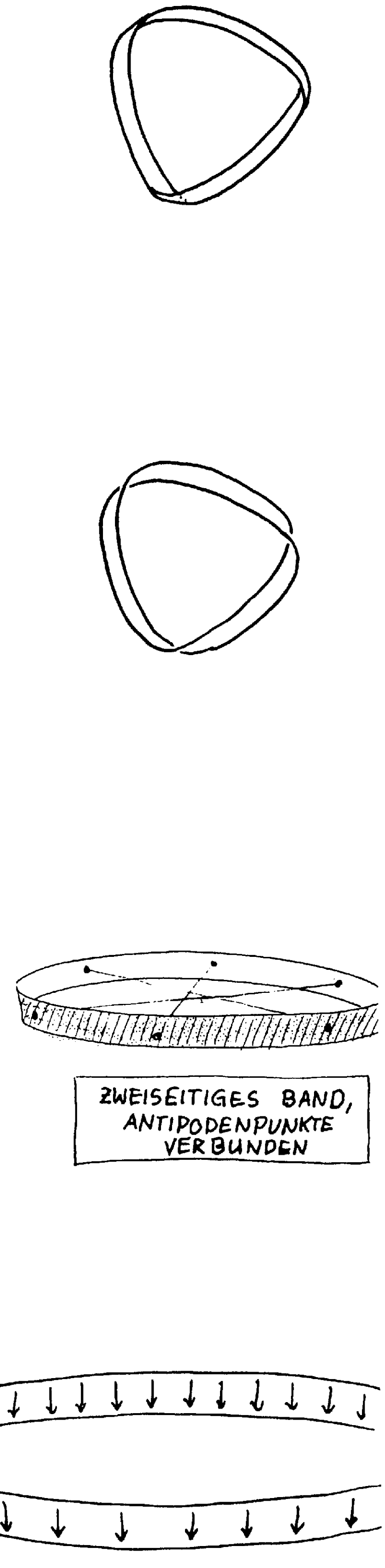
(*) Siehe „**Der Urknall**" in dieser Reihe.


Tiresias! Wo warst Du denn?
Klonk!
Ach, ich habe mir nur etwas die Beine vertreten.
Hoppla, der **Chronoskaph**! Er fährt los...
Du hättest die Tür nicht so zuschlagen sollen!
Wie kann man das Ding anhalten?
Du weißt doch, daß man es nicht anhalten kann!
Und wie steuert man es?
Du hast manchmal Ideen!!
Mi!
Einen **Chronoskaphen** steuert man nicht, er steuert Euch. Er folgt einfach einer **Weltlinie**...


He! Seht mal da vorn!
Sieht aus wie ein Bauchnabel.
Unsere Weltlinie läuft genau darauf zu!
Sieht ganz wie ein Schwarzes Loch aus!
Welche Ordnung hat diese Singularität?
Das ist wohl nicht der richtige Augenblick, solche Fragen zu stellen.




Sieht aus wie ein Raum-Zeit-Knopfloch.
Hier unten verlassen die Weltlinien die Singularität wieder.
Ich glaube wir kommen gerade aus einer weißen Quelle heraus.
Wir sind auf der Rückseite des Universums.
Das sieht dem was drüben war aber verdammt ähnlich, außer daß wir dem Weg in der umgekehrten Richtung folgen. Irgendwie kommt mir das ganze bekannt vor.



(*) Dieselbe Struktur kann es in vier Dimensionen geben.

WISSENSCAFTLICHER ANHANG

Der Hilbertschüler **Boy** entdeckte seine Fläche im Jahr 1902. Die erste analytische Darstellung wurde 1981 gegeben von Jérôme **Souriau** (Sohn des Mathematikers **J.M. Souriau**) und dem Autor. Die halbempirische Methode besteht darin, die Meridiane der Fläche durch Ellipsen zu beschreiben, welche dann parametrisiert werden. Die Koordinaten x, y, z des laufenden Punktes sind:

$$x = X_1 \cos\mu - Z_1 \sin\alpha \sin\mu$$
$$y = X_1 \sin\mu + Z_1 \sin\alpha \cos\mu$$
$$z = Z_1 \cos\alpha$$

mit:

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{A^2 - B^2}{\sqrt{A^2+B^2}} + A\cos\theta - B\sin\theta \\ Z_1 = \sqrt{A^2+B^2} + A\cos\theta + B\sin\theta \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8}\sin 3\mu \qquad \begin{aligned} A(\mu) &= 34 + 4{,}79\sin(6\mu - \pi/3) + 6{,}73\sin(3\mu - \pi/6) \\ B(\mu) &= 34 + 4{,}79\sin(6\mu - \pi/3) - 6{,}73\sin(3\mu - \pi/6) \end{aligned}$$

Meridiane: Kurven $\mu = \text{const}$; θ läuft von 0 bis 2π, μ von 0 bis π.

Das folgende **Basic**-Programm zeichnet eine Projektion die etwa der Abbildung auf Seite 43 entspricht:

(Apple II)

```
100 PI = 3.141592 : P3 = PI/3 : P6 = PI/6 : P8 = PI/8
110 HGR
120 HCOLOR = 3
130 FOR MU = 0 TO PI STEP 0.1
140 D = 34 + 4.79 * SIN (6 * MU - P3)
150 E = 6.73 * SIN (3 * MU - P6)
160 A = D+E
170 B = D-E
180 AL = (P8) * SIN(3 * MU)
190 C1 = A * A - B * B
200 C2 = SQR(A * A + B * B)
210 CM = COS (MU)
220 SM = SIN (MU)
230 FOR TE = 0 TO 6.283 STEP .03
240 X1 = C1/C2 + A * COS (TE) - B * SIN (TE)
250 Z1 = C2 + A * COS (TE) + B * SIN (TE)
260 REM KOORDINATEN
270 X = X1 * CM - Z1 * SIN (AL) * SM
280 Y = X1 * SM + Z1 * SIN (AL) * CM
300 REM ZEICHNUNG
310 HPLOT 130 + X, 80 + Y
320 NEXT TE
330 NEXT MU
```