Savoir sans Frontières

Pustolovine Archibalda Higginsa

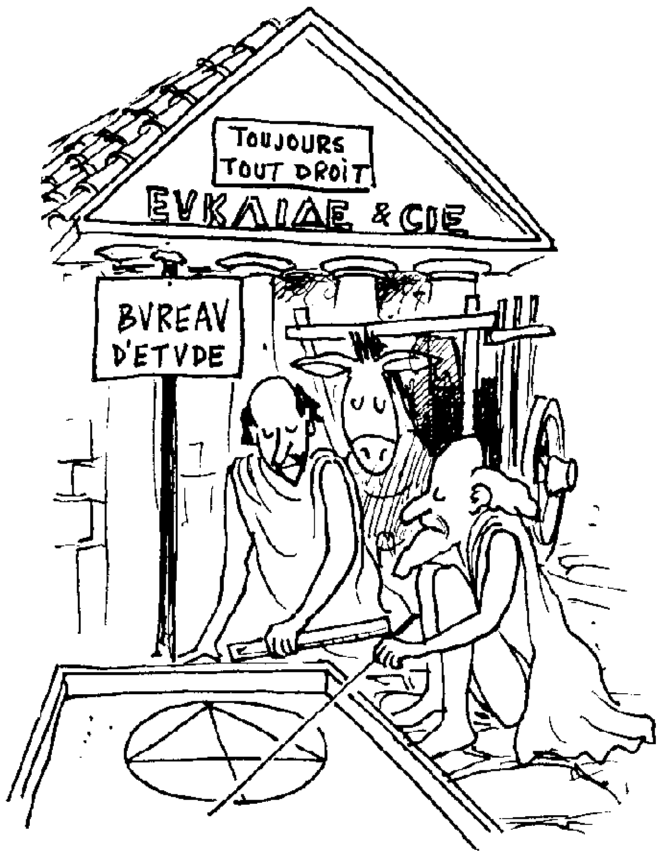
u epizodi

GEOMETRIKON

prijevod

Tanja Mrkalj

Jean-Pierre Petit



http://www.savoir-sans-frontieres.com

Pustolovine Archibalda Higginsa

U epizodi

GEOMETRIKON

Autor Jean-Pierre Pettit

Prijevod Tanja Mrkalj

Asocijaciju, znanost bez granica, oformio je znanstvenik, astrofizičar, Jean-Pierre Petit, u cilju pružanja znanstvenih i tehničkih znanja najvećem broju naroda u što većem broju jezika. Ilustrirani albumi, koji su njegovo autorsko djelo, sada su pristupačni svima i to bez ikakve nadoknade. Formiranjem ove asocijacije svi su slobodni kopirati postojeće fajlove, bilo u digitalnom obliku ili kao printane kopije, mogu ih prosljeđivati školama, knjižnicama, sveučilištima ili asocijacijama čiji su ciljevi bliski ciljevima znanosti bez granica, ukoliko one tim putem ne stiču bilo kakvu materijalnu dobit, niti imaju kakve političke, sektaške ili propovjedačke konotacije. Ovi PDF fajlovi također se mogu učiniti dostupnim i putem kompjutorskih mreža školskih ili sveučilišnih knjižnica.

Jean-Pierre Petit nastoji otići dalje u prosvjećivanju svijeta, i svoja dijela učiniti bližim što široj publici. Čak i nepismeni ljudi imat će mogućnosti uživanja u njegovim stripovima, jer će tekstualni dijelovi crteža „progovarati" kada čitaoc upotrijebi dvostruki klik na njima. Ostali albumi bit će dvojezični tako što će prelazak s jednog jezika na drugi biti omogućen jednostavnim klikom. Na ovakav način stripovi bit će korisni i prilikom učenja stranih jezika i razvijanja jezičkih sposobnosti, uopće.

Jean-Pierre Petit rođen je 1937.godine. Svoju znanstvenu karijeru izgradio je kao francuski istraživač. Radio je kao plazma fizičar, upravljao centrom za kompjutorske nauke, pravio kompjutorske programe, objavio na stotine članaka u znanstvenim časopisima, radio je na raznim temama, počevši od mehanike fluida pa sve do teoretske kozmologije. Objavio je blizu trideset knjiga koje su prevedene na razne jezike.

Asocijaciju znanost bez granica možete upoznati i kontaktirati putem internet sajta:

http://www.savoir-sans-frontieres.com

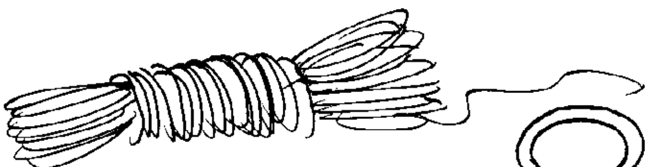
OBAVIJEST:

Ovo nije rasprava ili tečaj.
Ovo je priča o Archibaldu Higginsu i jednoj od njegovih pustolovina u zemlju geometrije.

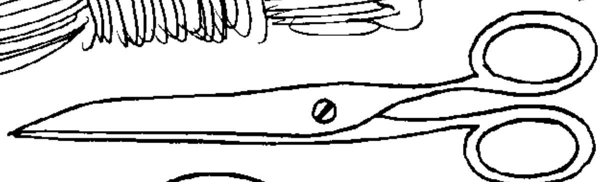
Ovu priču je bolje čitati uz:

* dosta aspirina

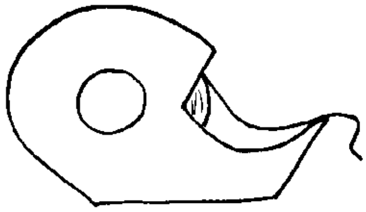
* i puno špage



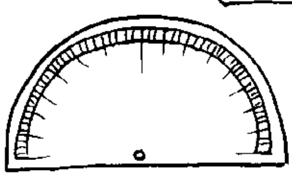
* škare



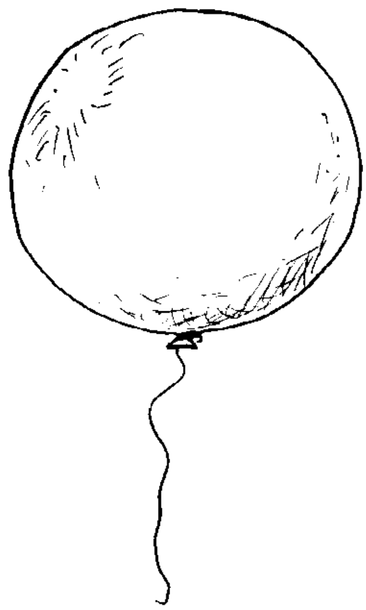
* sejlotep



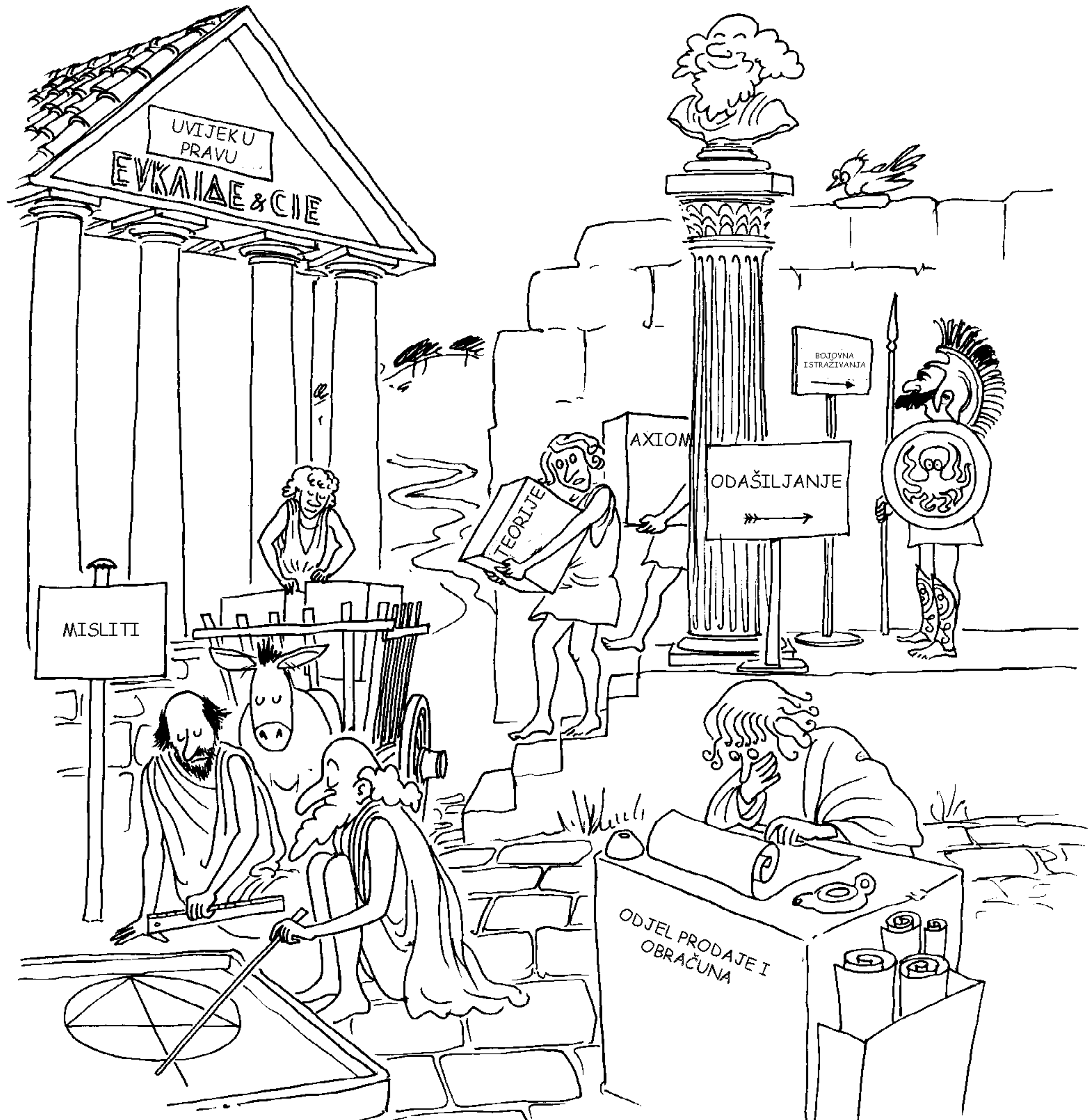
* kutomjer



* i jedan lijep okrugao balon

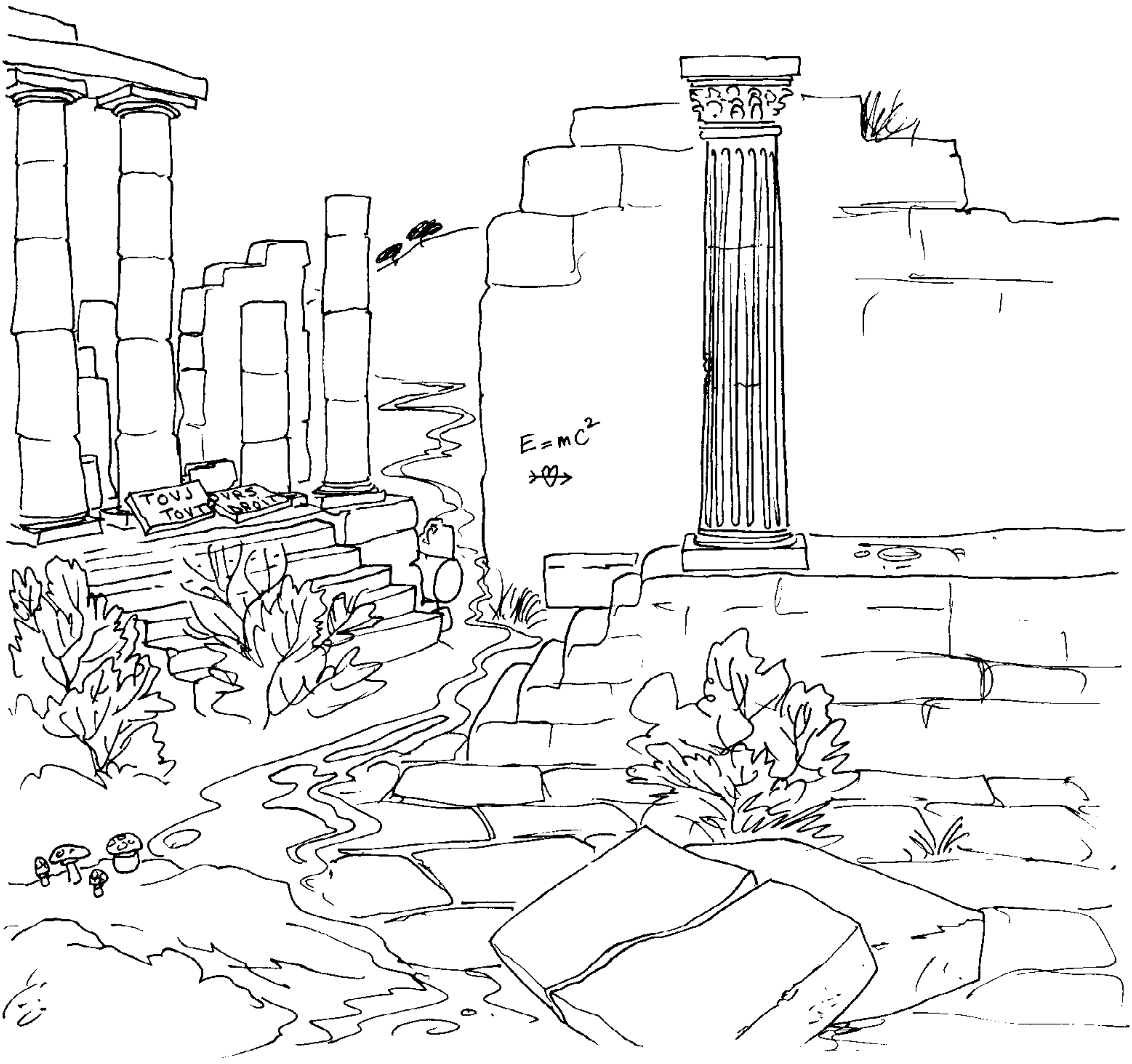


Tvrtka Euclid & Co, osnovana je u Aleksandriji u
3 stoljeću prije Krista. Za dvije tisuće i dvjesto godina
biznis je prosperirao. Produkti su bili vrlo uspješni a mušterije zadovoljne.



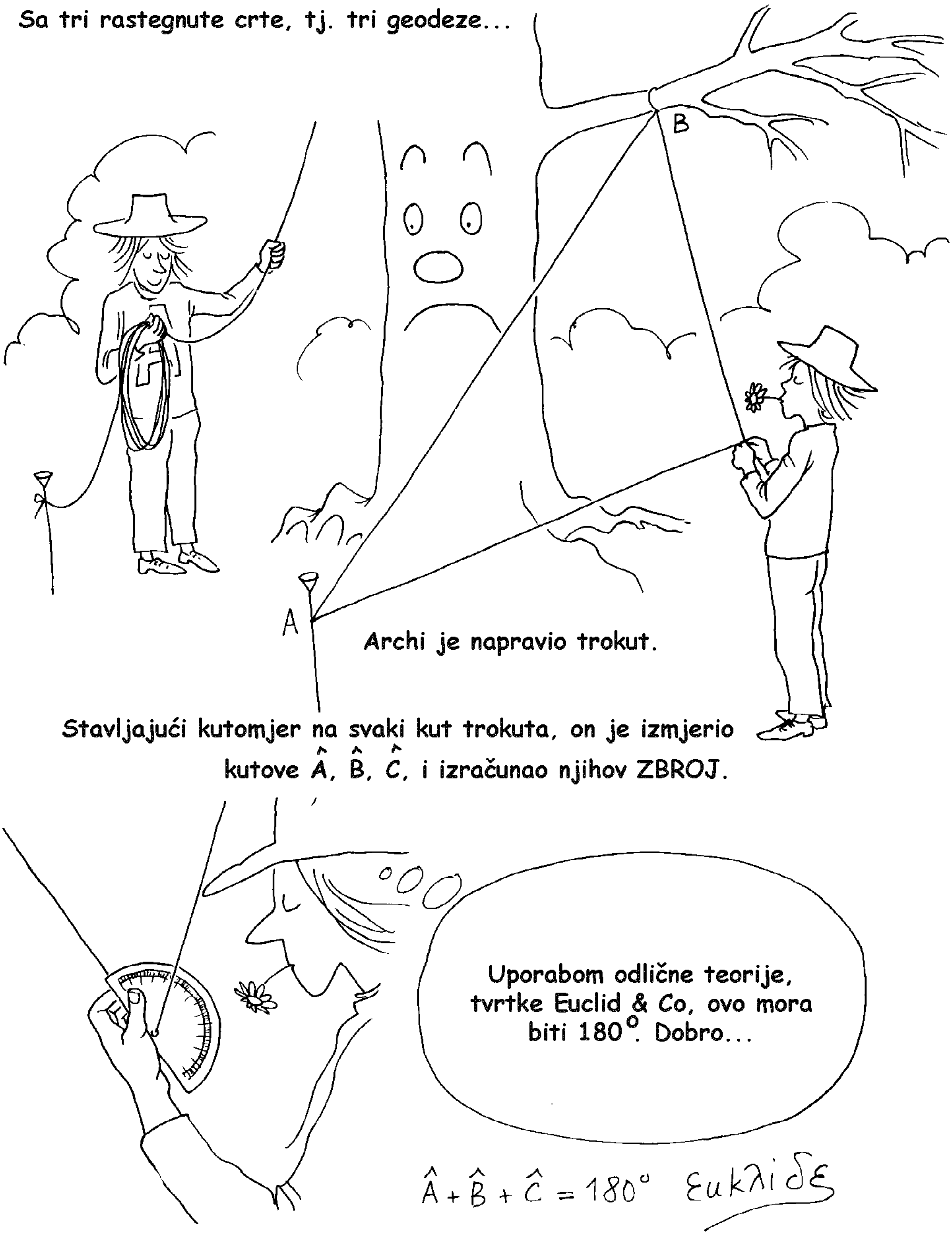
Ali, malo po malo, ukus mušterija se mijenjao. Neki, koji nikad ranije nisu dovodili u pitanje kvalitet, poslije čudnih iskustava počeli su se pitati "je li Euklid uvijek u pravu?"

Ovdje pričamo priču o jednoj takvoj osobi...



PROLOG:

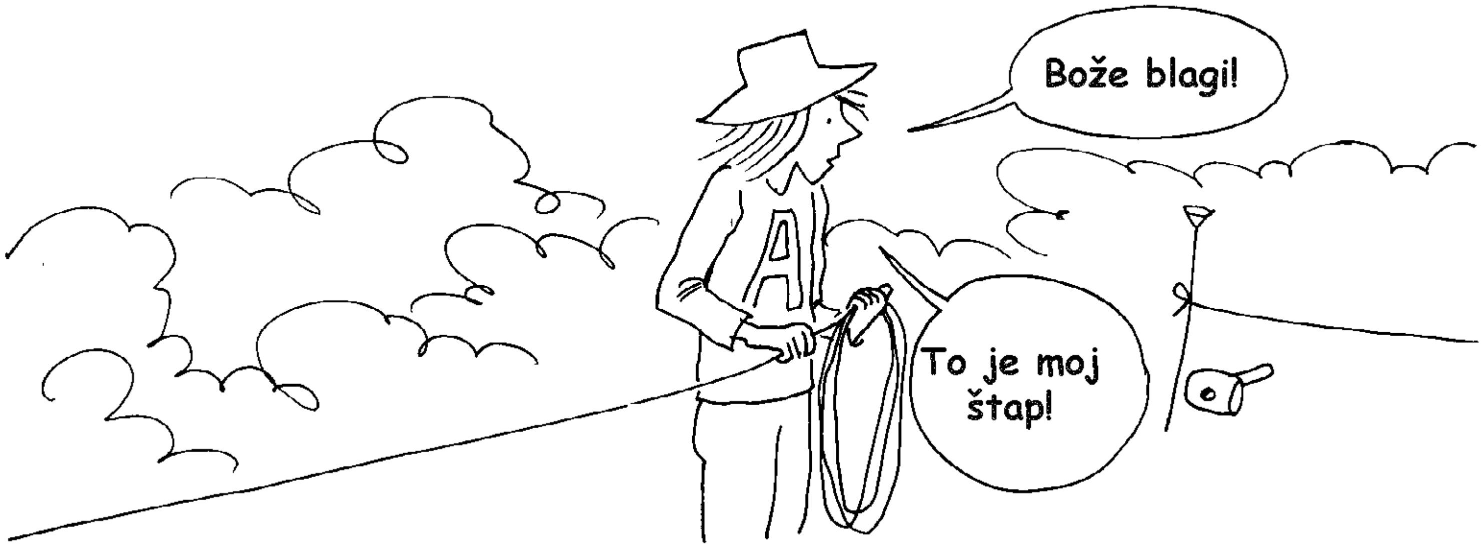
Jednog dana, Archibald je nastojao rastegnuti špagu između dva štapa...



Sa tri rastegnute crte, tj. tri geodeze...
B
A
Archi je napravio trokut.
Stavljajući kutomjer na svaki kut trokuta, on je izmjerio kutove $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, i izračunao njihov ZBROJ.
Uporabom odlične teorije, tvrtke Euclid & Co, ovo mora biti 180°. Dobro...
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
ευκλιδε

Archiev svijet je prekrio gusti oblak. Nisi si mogao vidjeti prst ispred nosa.

Ali - ima dana kad se sve čini nekako naopako...



Archi je uzeo puno špage odlučivši, jednom za svagda, ovu stvar razjasniti!

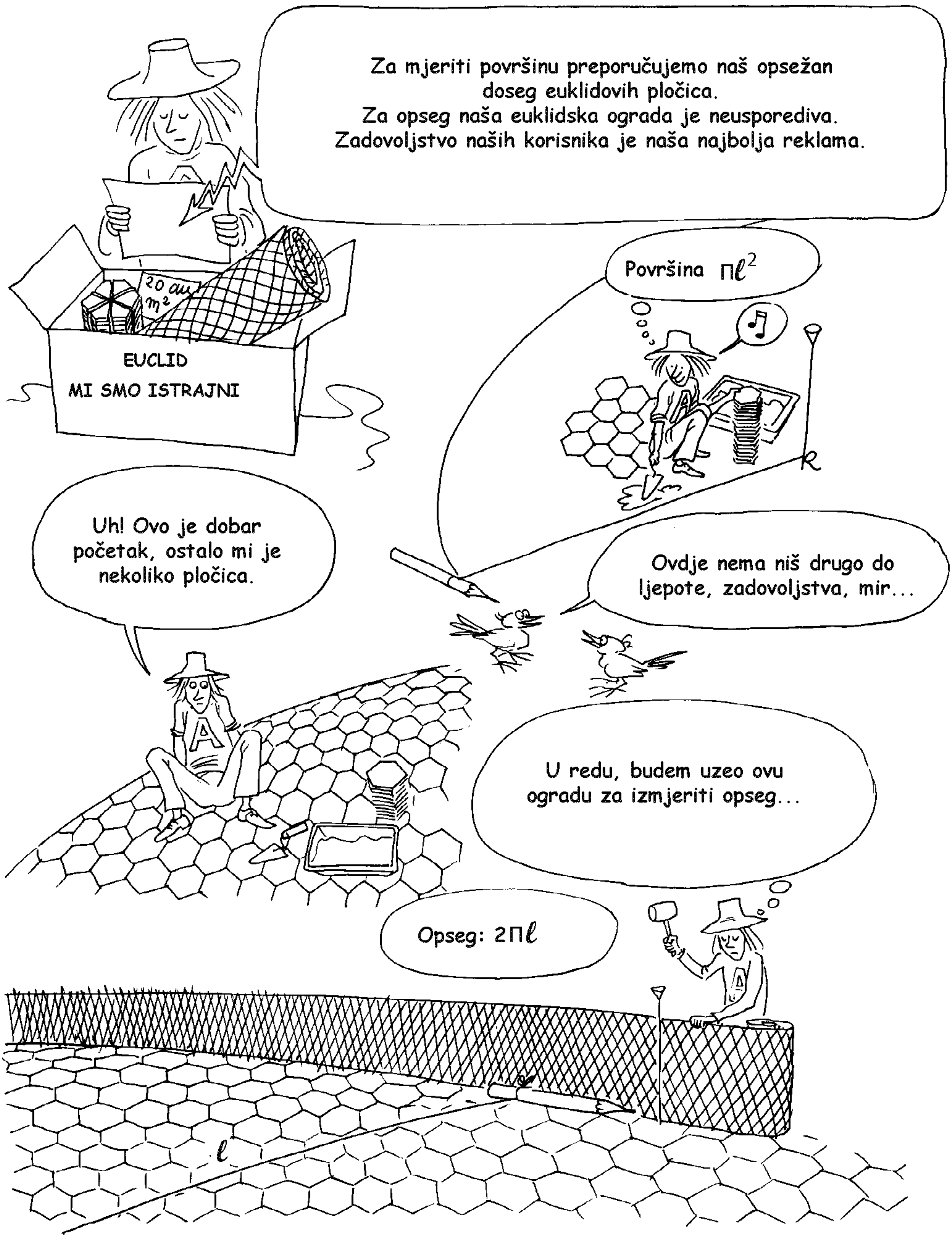
Neustrašivo je nastavio dalje, uvijek pravo naprijed...

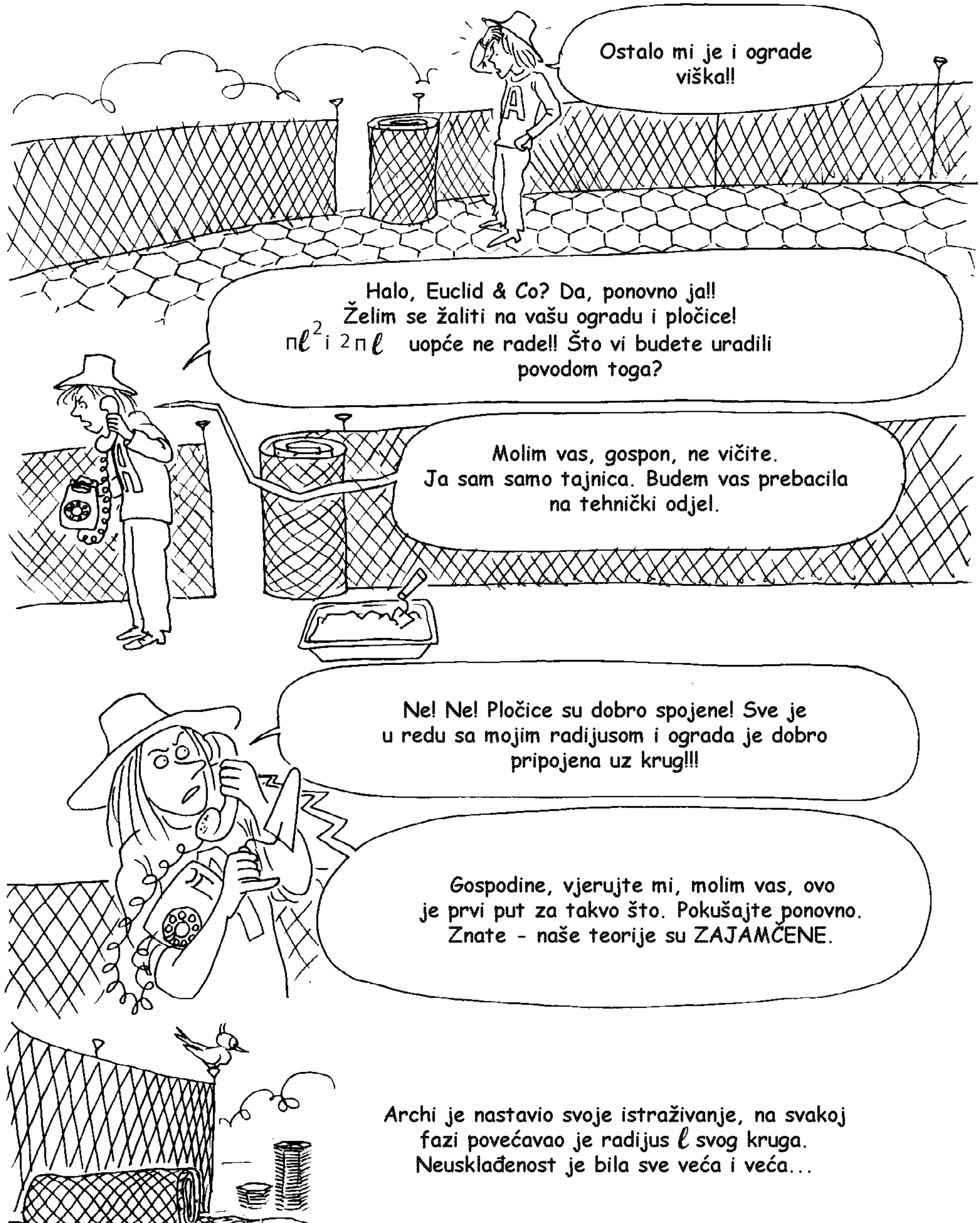
iznenada...

... Archijeva prava crta se zatvorila!

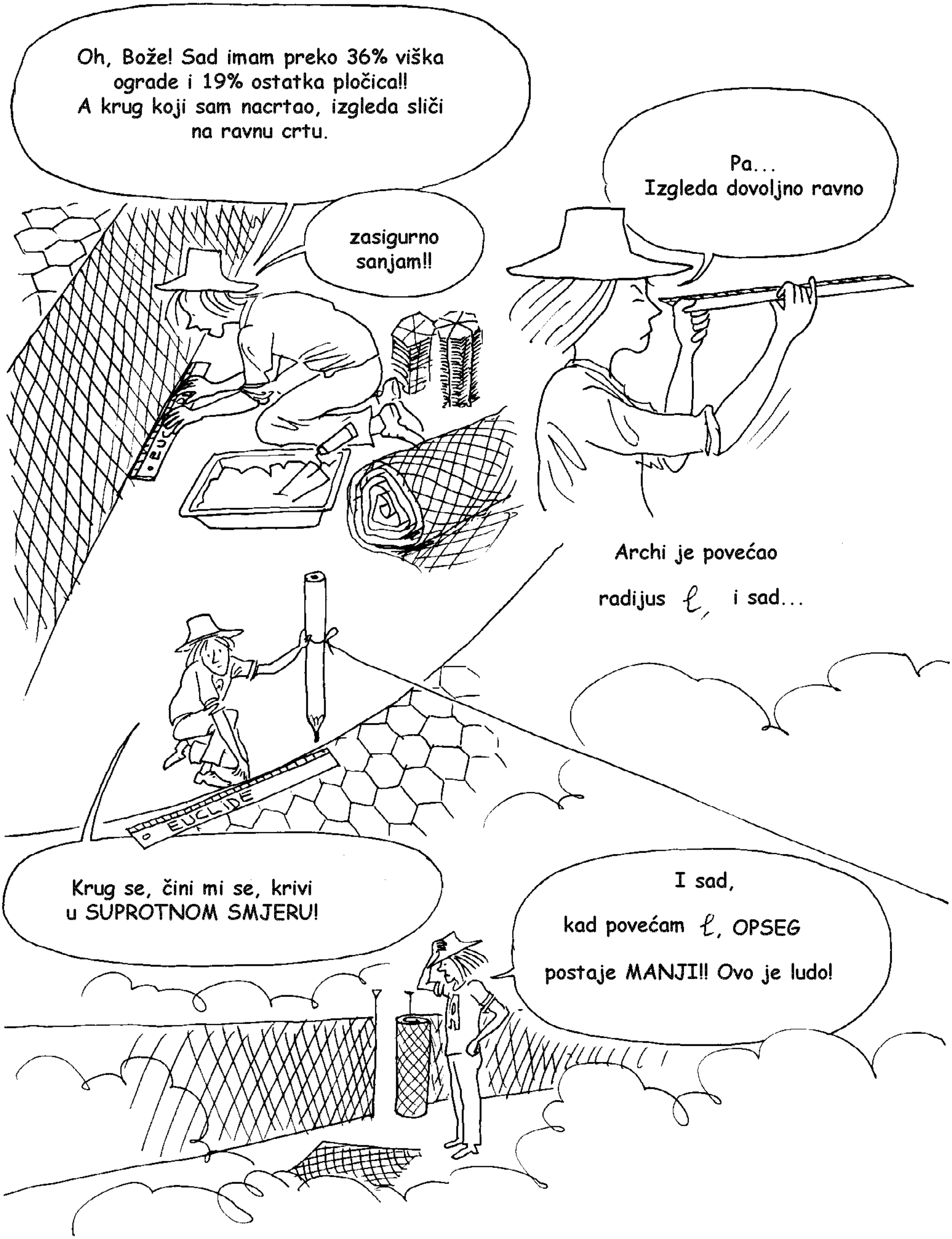

? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Budem vidjeo što ti euklidovi ljudi kažu o ovomu. Budem nacrtao tri geodeze iste duljine, praveći tako trokut. Onda kutovi budu bili 60° a njihov zbroj 180°
B 60 A 60 60 C
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$
Onda budemo vidjeli.
RATIO OMNIA VINCIT!
A
B
Ovdje je drugi vrh B. Sad moram rastegnuti još dvije crte za naći treći.
Znanost je sjajna, zar ne?
B
Ooops!! Kutovi su jednaki, ali su veći od 60.°
Imam osjećaj da je njihov zbroj veći od 180.°
Prepreka, aaaaaaa??
A
C

I onda, postavljajući ovaj moj kutomjer u apsolutno ravnu poziciju, mogu provjeriti jesu li moje crte ravne.
EUCLIDE
Halo? Euclid & Co? Čujte, imam problem s vašim produktom.
Samo malo... Budem vas prespojila sa tehničkim odjelom.
Problemi sa našim trokutima? Iznenađen sam! Zašto ne probate sa našim krugom? Naši klijenti su vrlo zadovoljni sa njim.
...Dobro... Krug je skup točaka smještenih na razdaljini ℓ od fiksne točke.
OPSEG je $2\pi\ell$ a POVRŠINA $\pi\ell^2$. Shvatio sam!!
ℓ
Sretni smo za pomoći vam!

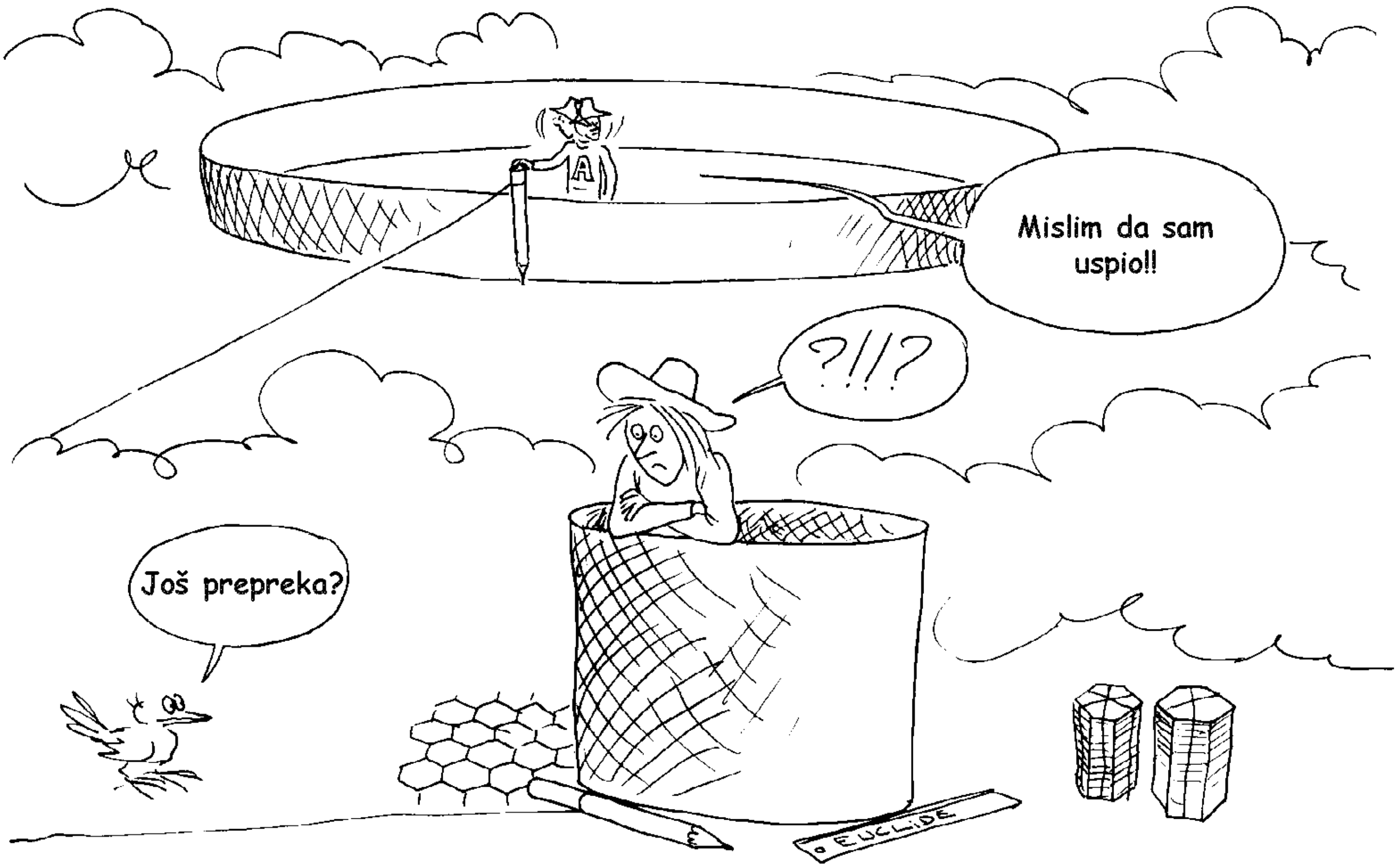

Za mjeriti površinu preporučujemo naš opsežan doseg euklidovih pločica.
Za opseg naša euklidska ograda je neusporediva.
Zadovoljstvo naših korisnika je naša najbolja reklama.
20 cu m²
EUCLID
MI SMO ISTRAJNI
Površina $\Pi\ell^2$
R
Uh! Ovo je dobar početak, ostalo mi je nekoliko pločica.
Ovdje nema niš drugo do ljepote, zadovoljstva, mir...
U redu, budem uzeo ovu ogradu za izmjeriti opseg...
Opseg: $2\Pi\ell$
ℓ



Ostalo mi je i ograde viška!!
Halo, Euclid & Co? Da, ponovno ja!! Želim se žaliti na vašu ogradu i pločice! $\pi\ell^2$ i $2\pi\ell$ uopće ne rade!! Što vi budete uradili povodom toga?
Molim vas, gospon, ne vičite. Ja sam samo tajnica. Budem vas prebacila na tehnički odjel.
Ne! Ne! Pločice su dobro spojene! Sve je u redu sa mojim radijusom i ograda je dobro pripojena uz krug!!!
Gospodine, vjerujte mi, molim vas, ovo je prvi put za takvo što. Pokušajte ponovno. Znate - naše teorije su ZAJAMČENE.
Archi je nastavio svoje istraživanje, na svakoj fazi povećavao je radijus ℓ svog kruga. Neusklađenost je bila sve veća i veća...


Oh, Bože! Sad imam preko 36% viška ograde i 19% ostatka pločica!! A krug koji sam nacrtao, izgleda sliči na ravnu crtu.
zasigurno sanjam!!
Pa... Izgleda dovoljno ravno
EUCLIDE
Archi je povećao radijus ℓ, i sad...
EUCLIDE
Krug se, čini mi se, krivi u SUPROTNOM SMJERU!
I sad, kad povećam ℓ, OPSEG postaje MANJI!! Ovo je ludo!

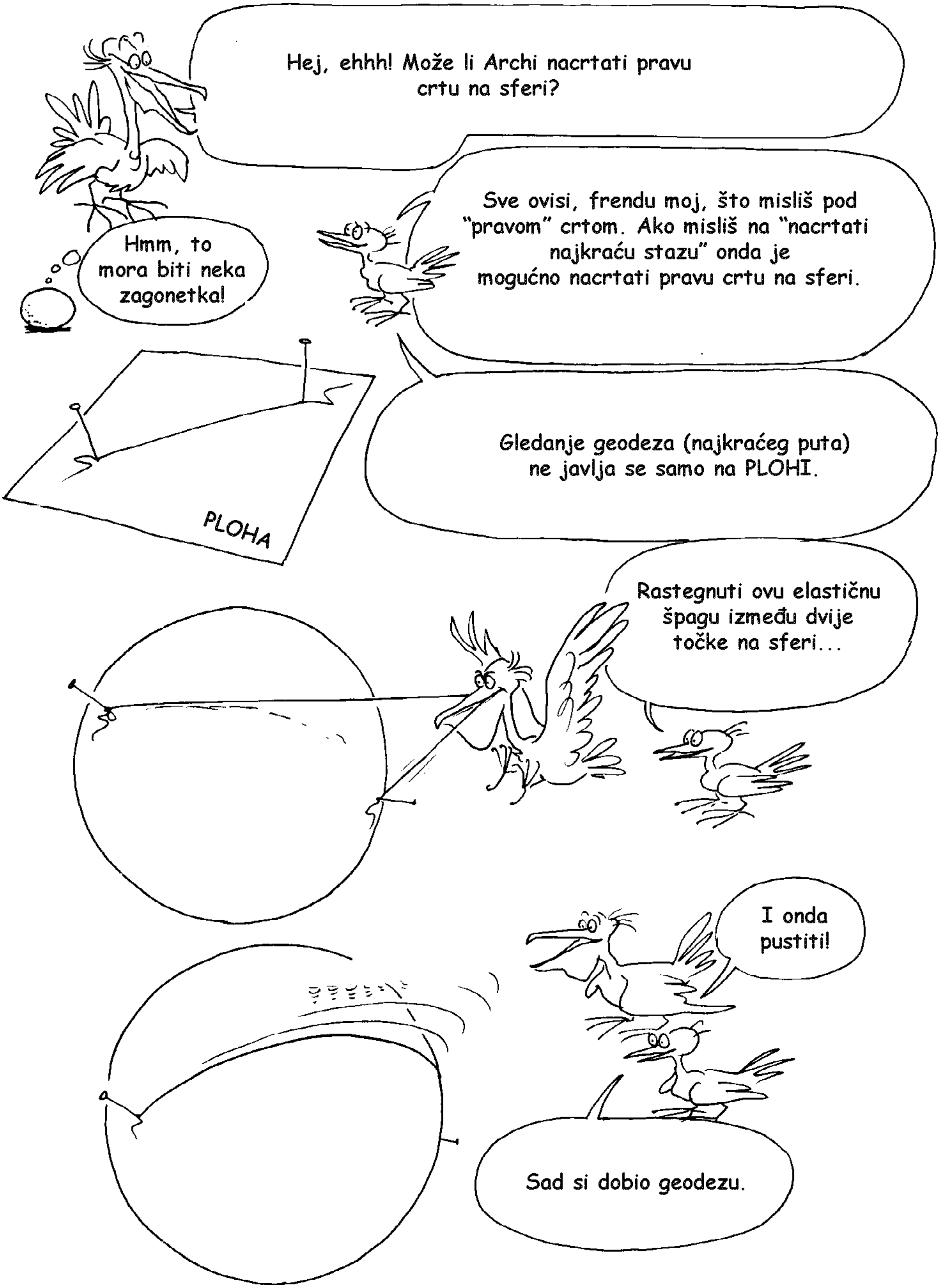
Poslije puno pločica...

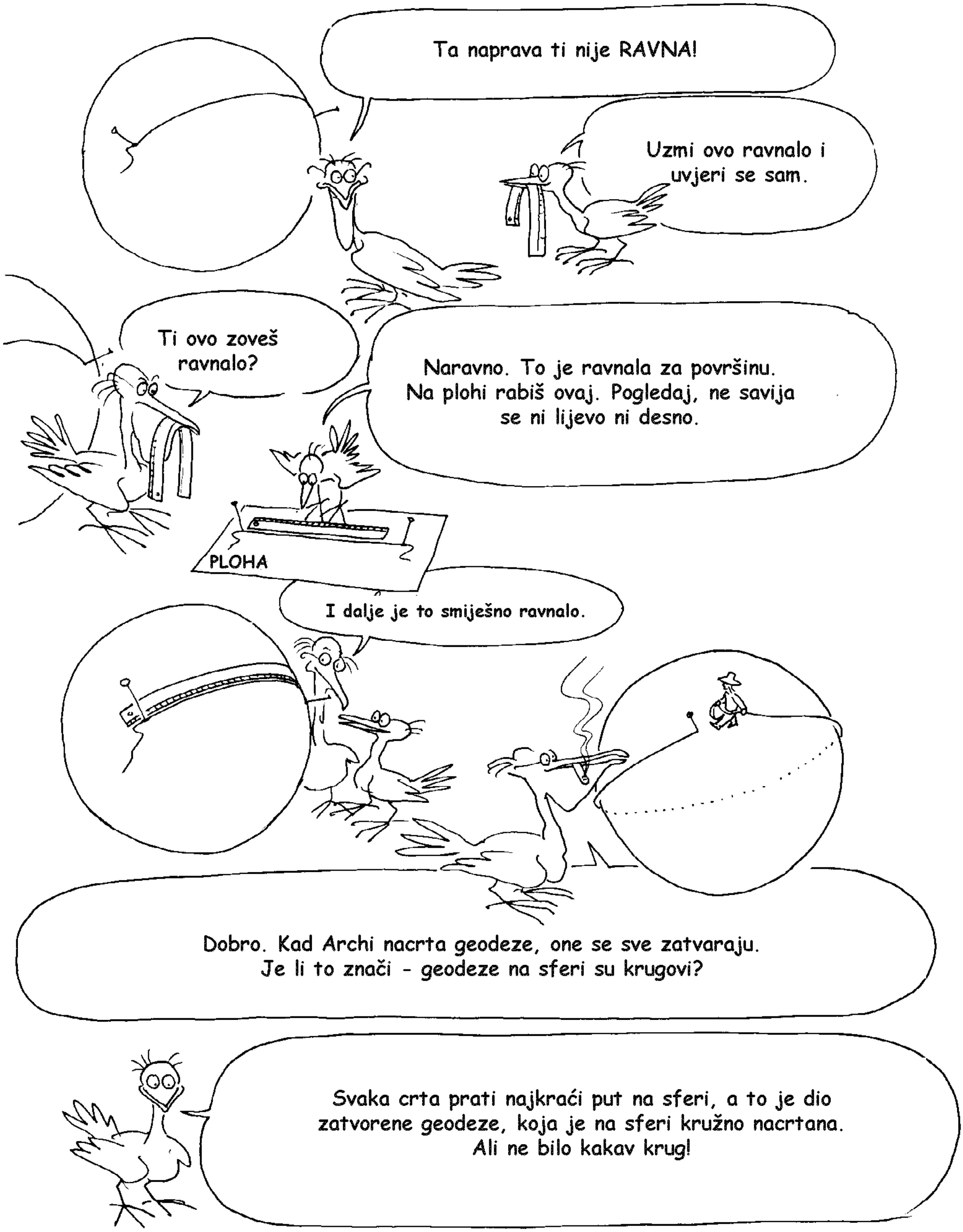


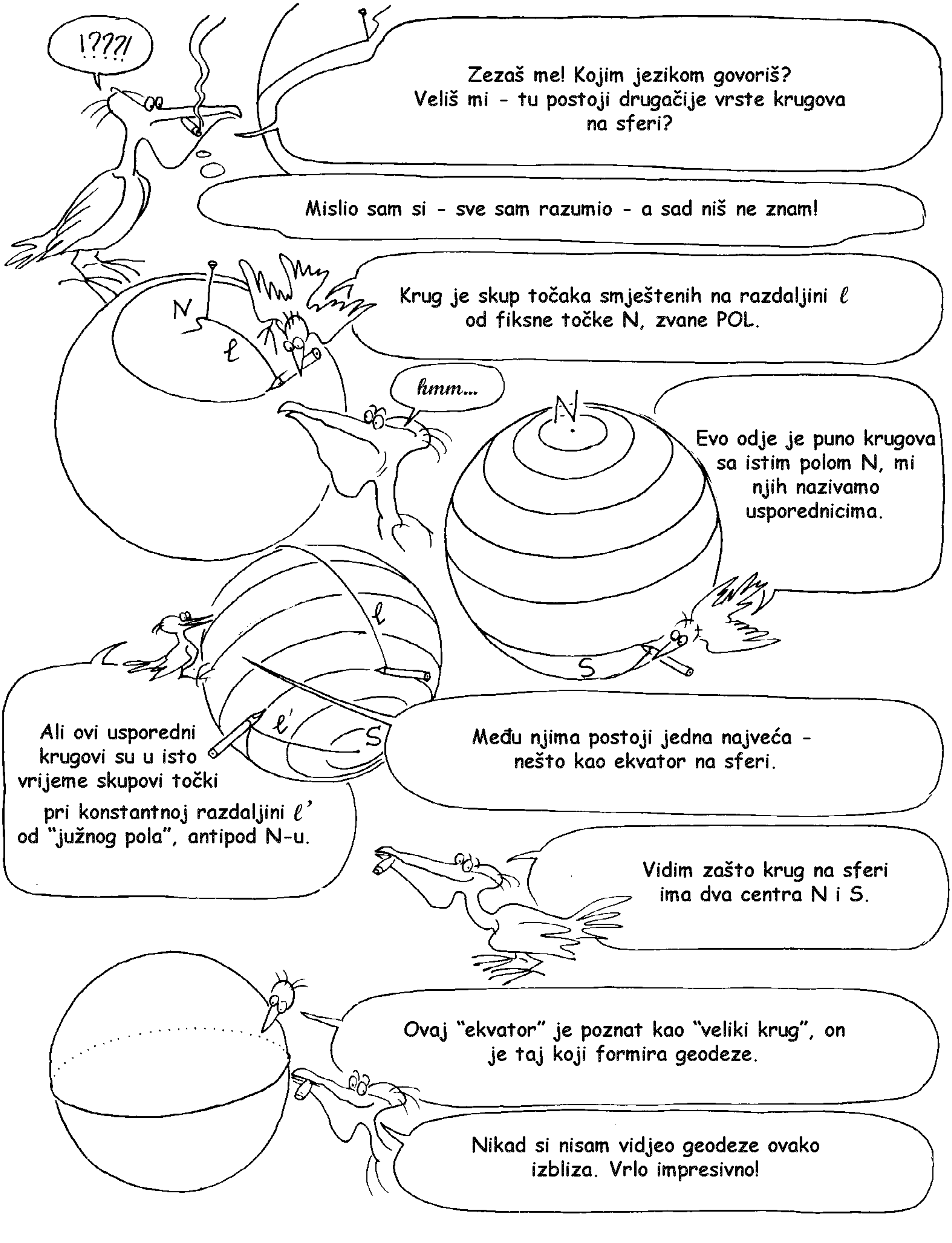
ŠTO SE DOGODILO?

Za vidjeti, idemo otjerati maglu...

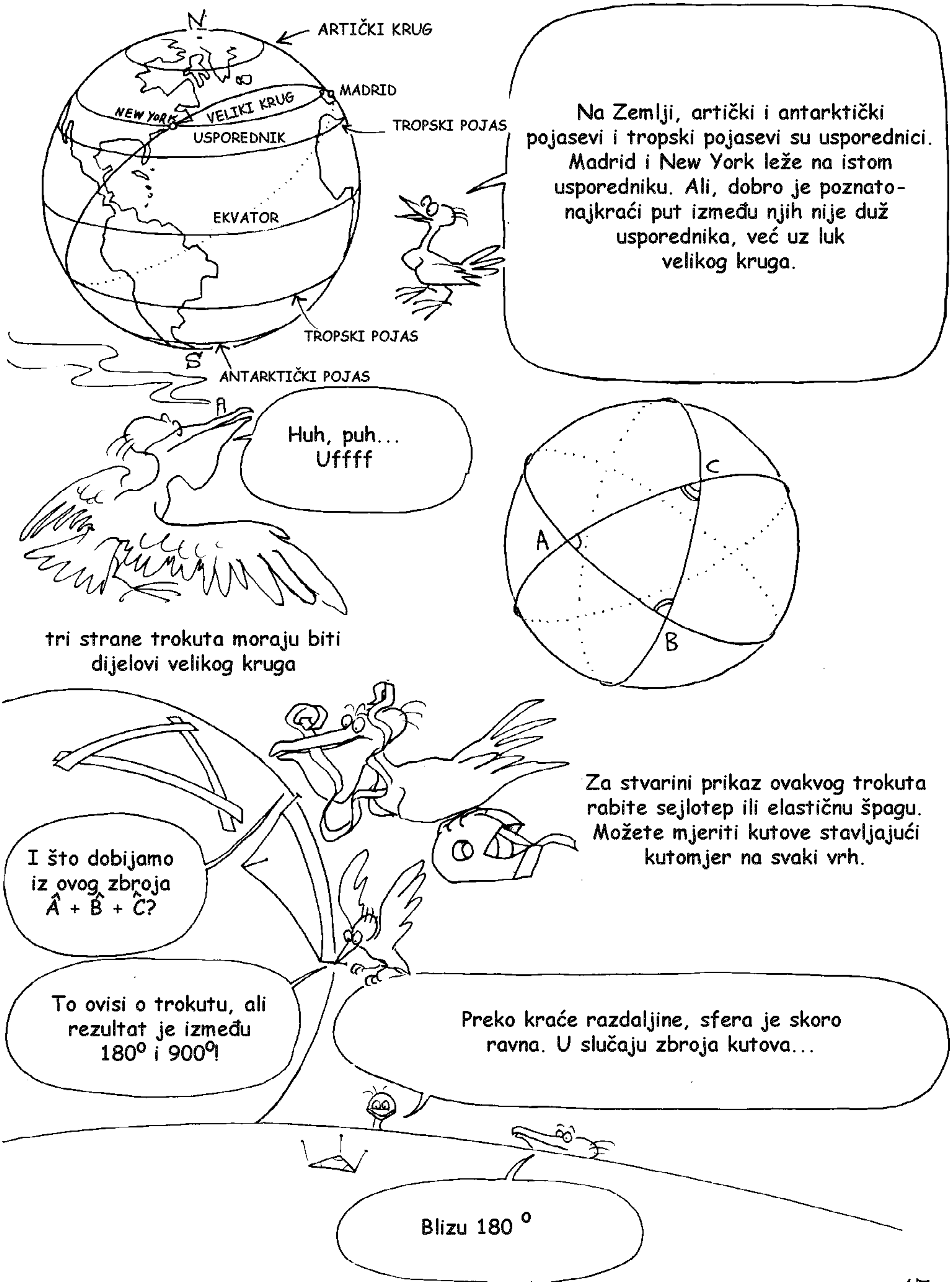
Archi je iznenada shvatio - primjenjivao je pravila GEOMETRIJE PLOHE dok je bio na površini SFERE.

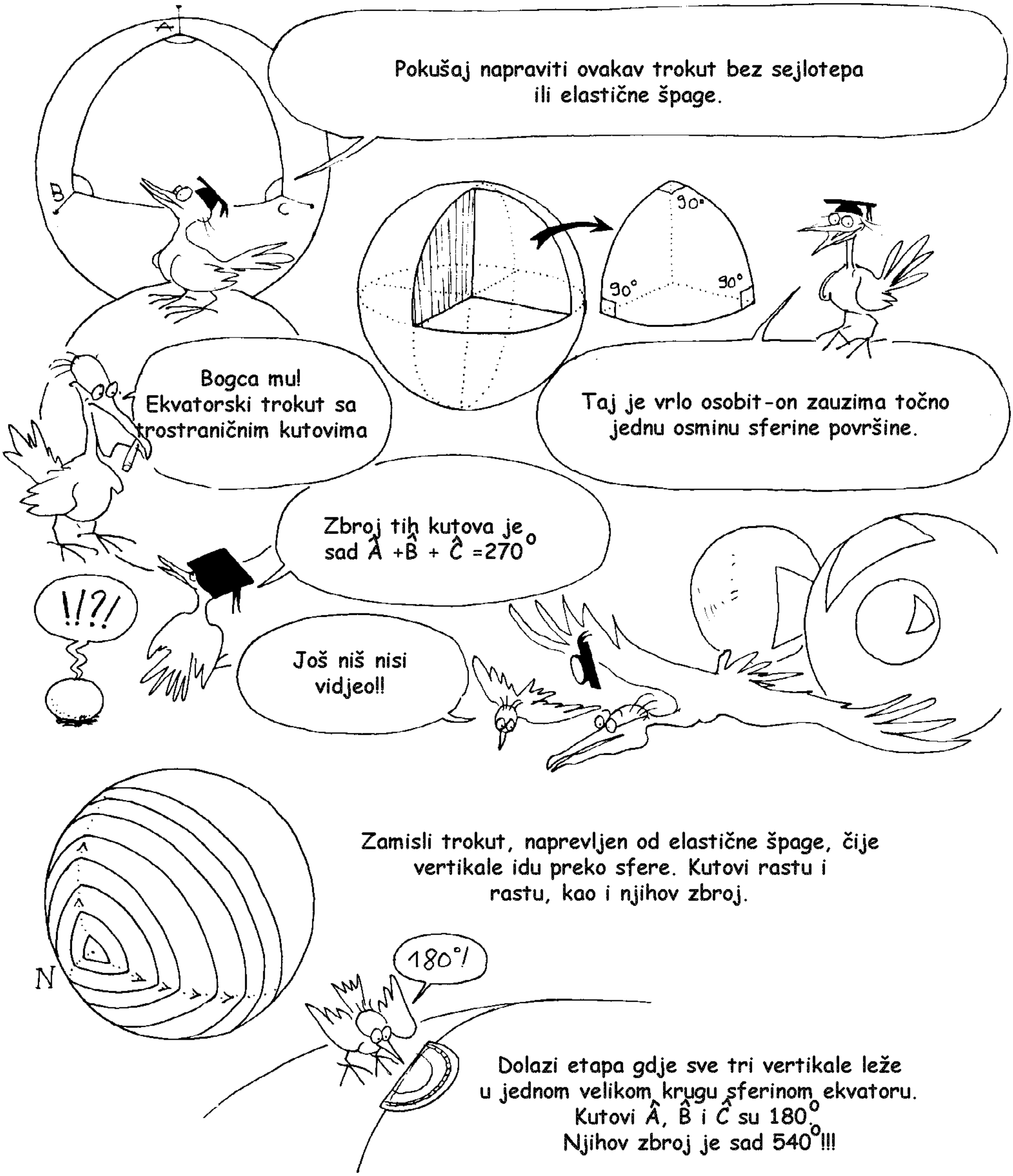

Hej, ehhh! Može li Archi nacrtati pravu crtu na sferi?
Hmm, to mora biti neka zagonetka!
Sve ovisi, frendu moj, što misliš pod "pravom" crtom. Ako misliš na "nacrtati najkraću stazu" onda je mogućno nacrtati pravu crtu na sferi.
PLOHA
Gledanje geodeza (najkraćeg puta) ne javlja se samo na PLOHI.
Rastegnuti ovu elastičnu špagu između dvije točke na sferi...
I onda pustiti!
Sad si dobio geodezu.

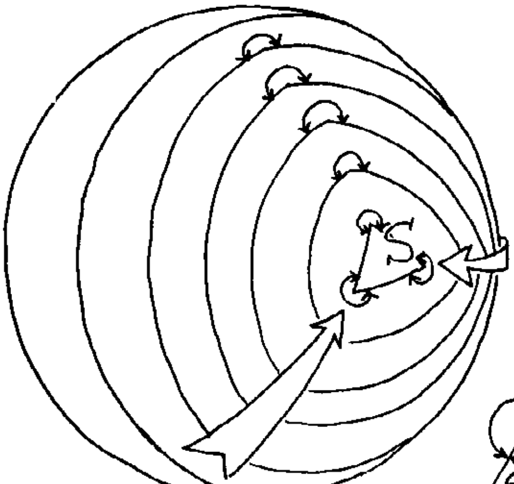

Ta naprava ti nije RAVNA!
Uzmi ovo ravnalo i uvjeri se sam.
Ti ovo zoveš ravnalo?
Naravno. To je ravnala za površinu. Na plohi rabiš ovaj. Pogledaj, ne savija se ni lijevo ni desno.
PLOHA
I dalje je to smiješno ravnalo.
Dobro. Kad Archi nacrta geodeze, one se sve zatvaraju. Je li to znači - geodeze na sferi su krugovi?
Svaka crta prati najkraći put na sferi, a to je dio zatvorene geodeze, koja je na sferi kružno nacrtana. Ali ne bilo kakav krug!



!???!
Zezaš me! Kojim jezikom govoriš?
Veliš mi - tu postoji drugačije vrste krugova na sferi?
Mislio sam si - sve sam razumio - a sad niš ne znam!
Krug je skup točaka smještenih na razdaljini ℓ od fiksne točke N, zvane POL.
N
ℓ
hmm...
N
Evo odje je puno krugova sa istim polom N, mi njih nazivamo usporednicima.
S
ℓ
ℓ'
S
Ali ovi usporedni krugovi su u isto vrijeme skupovi točki pri konstantnoj razdaljini ℓ' od "južnog pola", antipod N-u.
Među njima postoji jedna najveća - nešto kao ekvator na sferi.
Vidim zašto krug na sferi ima dva centra N i S.
Ovaj "ekvator" je poznat kao "veliki krug", on je taj koji formira geodeze.
Nikad si nisam vidjeo geodeze ovako izbliza. Vrlo impresivno!


N
ARTIČKI KRUG
MADRID
NEW YORK
VELIKI KRUG
USPOREDNIK
TROPSKI POJAS
EKVATOR
TROPSKI POJAS
S
ANTARKTIČKI POJAS
Na Zemlji, artički i antarktički pojasevi i tropski pojasevi su usporednici. Madrid i New York leže na istom usporedniku. Ali, dobro je poznato- najkraći put između njih nije duž usporednika, već uz luk velikog kruga.
Huh, puh... Uffff
A
C
B
tri strane trokuta moraju biti dijelovi velikog kruga
Za stvarini prikaz ovakvog trokuta rabite sejlotep ili elastičnu špagu. Možete mjeriti kutove stavljajući kutomjer na svaki vrh.
I što dobijamo iz ovog zbroja $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$?
To ovisi o trokutu, ali rezultat je između 180^{o} i 900^{o}!
Preko kraće razdaljine, sfera je skoro ravna. U slučaju zbroja kutova...
Blizu 180^{o}


A
B
C
Pokušaj napraviti ovakav trokut bez sejlotepa ili elastične špage.
90°
90°
90°
Bogca mu! Ekvatorski trokut sa trostraničnim kutovima
Taj je vrlo osobit-on zauzima točno jednu osminu sferine površine.
Zbroj tih kutova je sad Â +B̂ + Ĉ =270°
!!?!
Još niš nisi vidjeo!!
Zamisli trokut, naprevljen od elastične špage, čije vertikale idu preko sfere. Kutovi rastu i rastu, kao i njihov zbroj.
N
180°!
Dolazi etapa gdje sve tri vertikale leže u jednom velikom krugu sferinom ekvatoru.
Kutovi Â, B̂ i Ĉ su 180°.
Njihov zbroj je sad 540°!!!

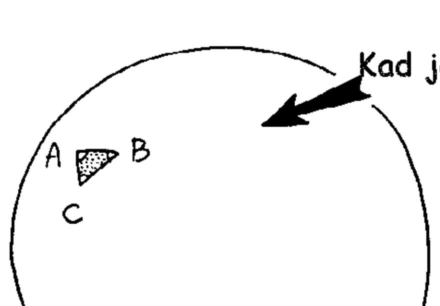


Kako trokut nastavlja svoju migraciju ka južnoj hemisferi, njegove vertikale se ističu na točki S koja je antipod točki N. Određivanjem vrhova kutova, na isti način kao na početku pokazuje da su sada prešli 180°! Preciznije svaki osobno postaje $360° - 60° = 300°$!

U biti, teorija, utvrđena od strane Gaussa, kaže - zbroj kutova je dat ovim:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1+\frac{A}{3{,}1416\,R^2}\right)$$

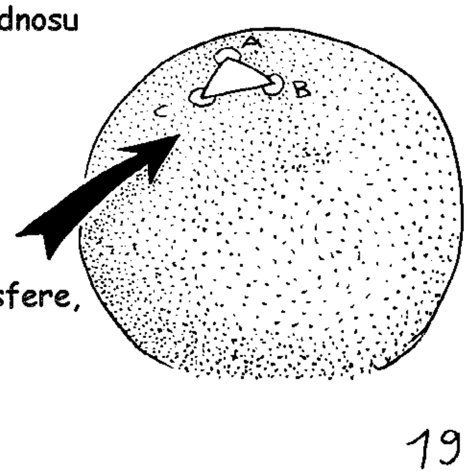
gdje je R radijus sfere, A je površina trokuta.

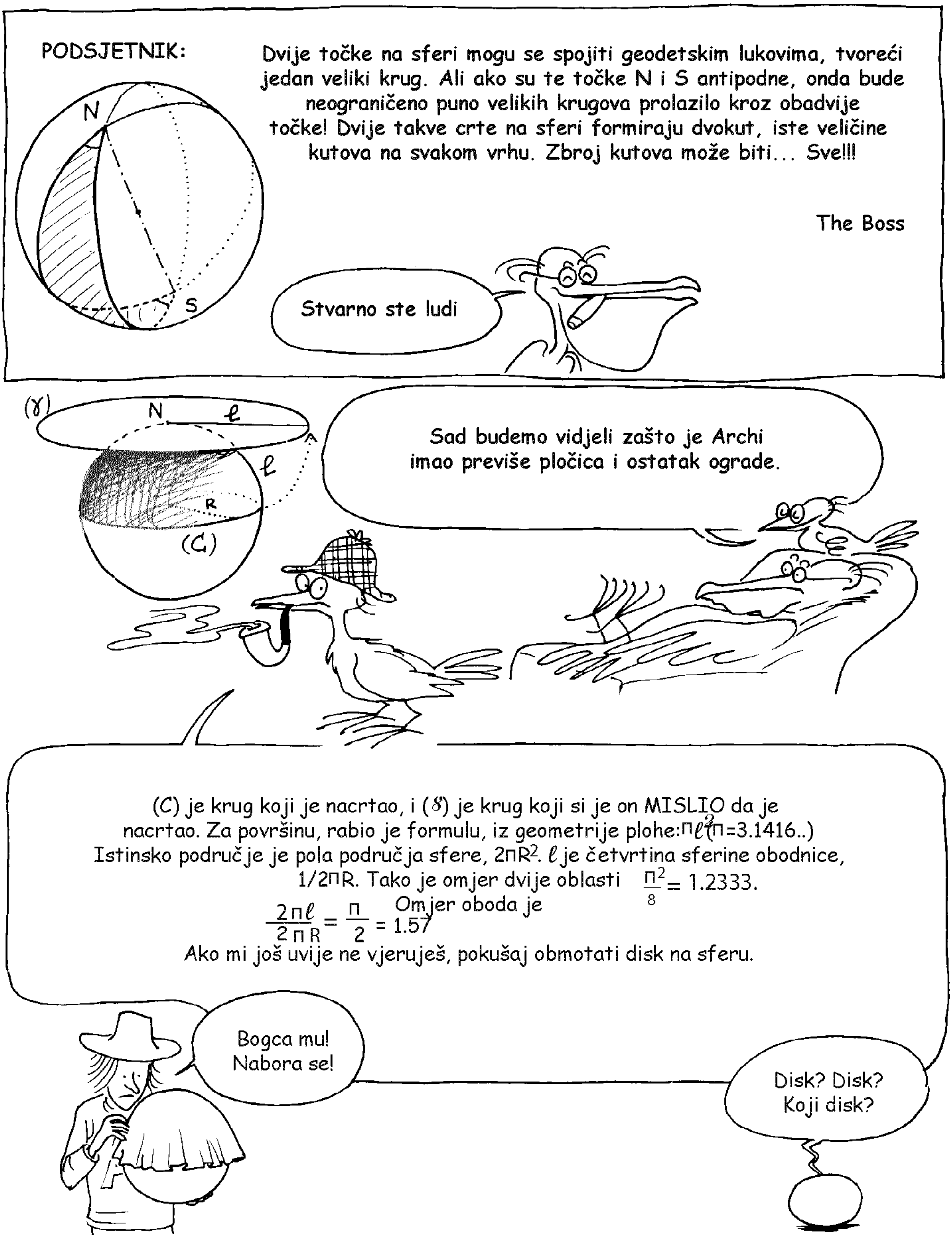


Kad je površina relativno mala u odnosu na sferu, mi obnavljamo euklidski rezultat

$$(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°)$$

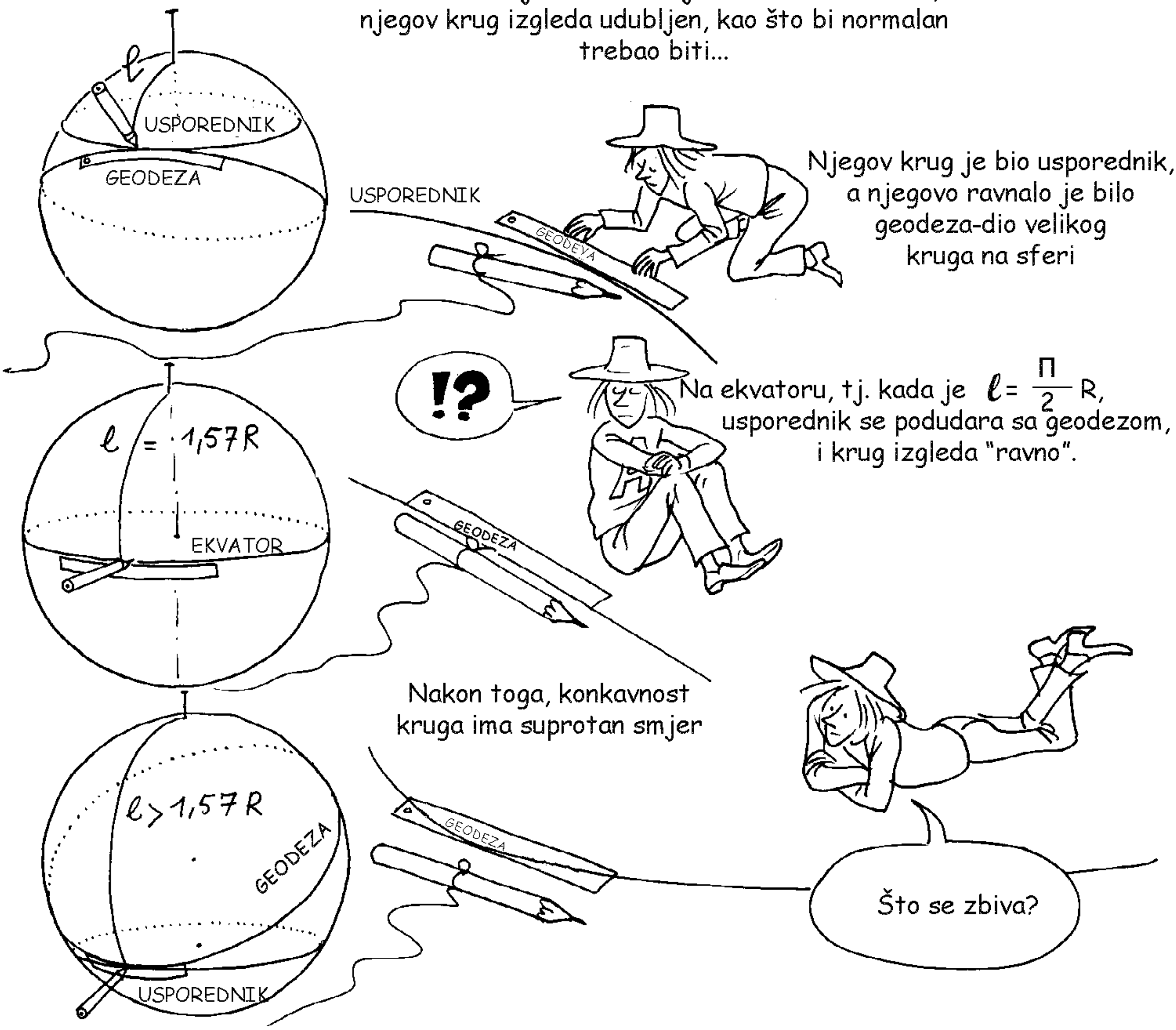
Ali, ako je područje trokuta skoro isto ono područje sfere, $4 \times 3.1416 \times R^2$, dobijamo 900°.



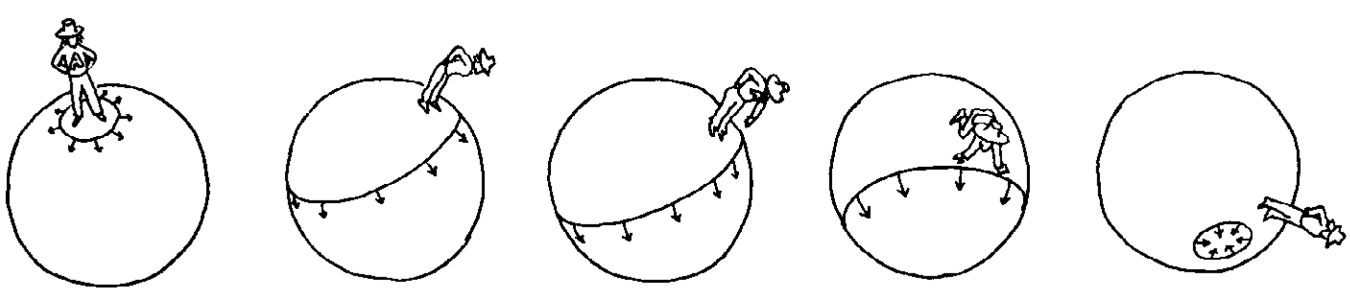


PODSJETNIK:
Dvije točke na sferi mogu se spojiti geodetskim lukovima, tvoreći jedan veliki krug. Ali ako su te točke N i S antipodne, onda bude neograničeno puno velikih krugova prolazilo kroz obadvije točke! Dvije takve crte na sferi formiraju dvokut, iste veličine kutova na svakom vrhu. Zbroj kutova može biti... Sve!!!
The Boss
N
S
Stvarno ste ludi
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Sad budemo vidjeli zašto je Archi imao previše pločica i ostatak ograde.
(C) je krug koji je nacrtao, i (γ) je krug koji si je on MISLIO da je nacrtao. Za površinu, rabio je formulu, iz geometrije plohe: $\pi\ell^2$ (π=3.1416..)
Istinsko područje je pola područja sfere, $2\pi R^2$. ℓ je četvrtina sferine obodnice, $1/2\pi R$. Tako je omjer dvije oblasti $\frac{\pi^2}{8} = 1.2333$.
Omjer oboda je $\frac{2\pi\ell}{2\pi R} = \frac{\pi}{2} = 1.57$
Ako mi još uvije ne vjeruješ, pokušaj obmotati disk na sferu.
Bogca mu! Nabora se!
Disk? Disk? Koji disk?

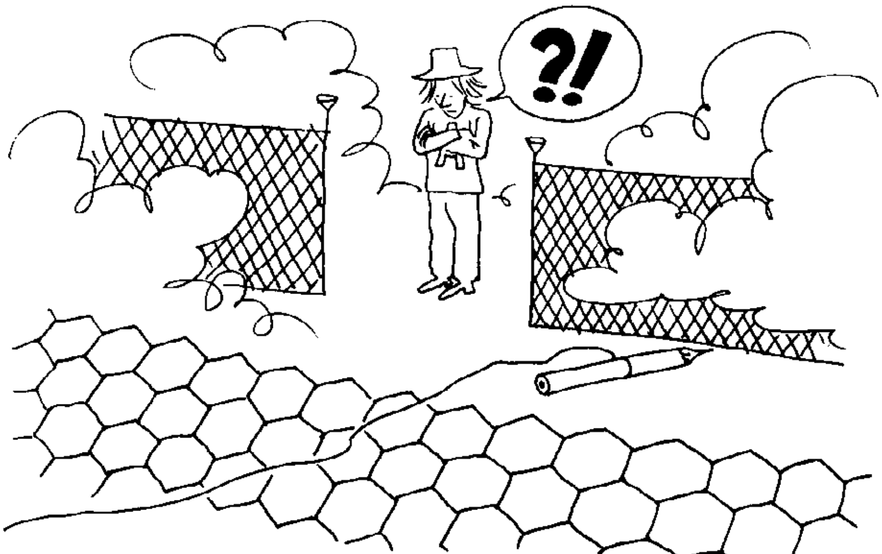
Za sve to vrijeme Archi nije došao do ekvatora, njegov krug izgleda udubljen, kao što bi normalan trebao biti...



Ovo objašnjava kako možeš ući "u" ili "izaći van" kruga na sferi, bez njegovog prelaženja. Misli si o krugu kao napravljenom od elastike, pokreće se kao gumeni obruč na bilijar kugli,



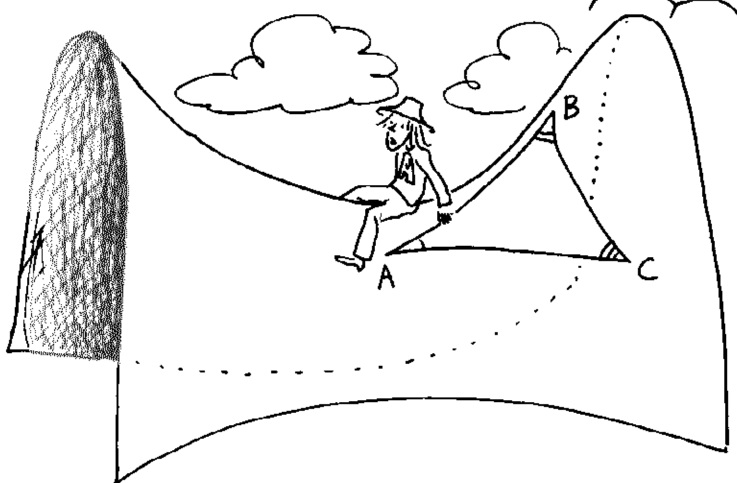

Archiju je trebalo malo vremena za svariti ovu ideju, otkrivenu od strane matematičara Gaussa (1777-1855) odlučio je za sljedeći korak - razumjeti geometriju POVRŠINE.
GEOMETRIJA SFERE
GAUSS
Dobro, imam sve što mi treba: ravnalo, kutomjer, špagu, čekić. Krećem!
Katkad, znanost zahtjeva preuzimanje rizika...
Znanje!!
Archi je došao u novi svijet, Ponovno je stvarao geodeze - ali ovug puta....
K vragu! Nigdje ne stižem s ovim!!
Geodeze se nisu zatvorile...
O.K. Budem pokušao drukčije...
Uporabom tri rastegljive špage, Archi je napravio trokut - ali sad je zbroj kutova na vertikali bio MANJI od 180°!!!

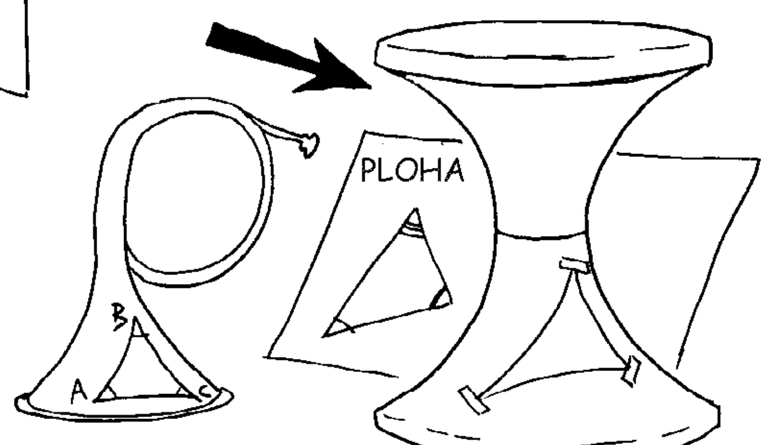


Kao i uvijek, određujući si krug za fiksirati razdaljinu od odabrane točke, Archi je otkrio ovo - krug nacrtan na novoj površini ima vanjski rub VEĆI od $2\pi \ell$, i veću površinu od $\pi \ell^2$

Uklonimo maglu:

Površina sad ima isti oblika kao prolaz u planini ili kao sjedlo konja. Mnogi objekti iz svakodnevne uporabe budu podjednako dobro poslužili - rog za lov, pan, ili...





ZAKRIVLJENOST:

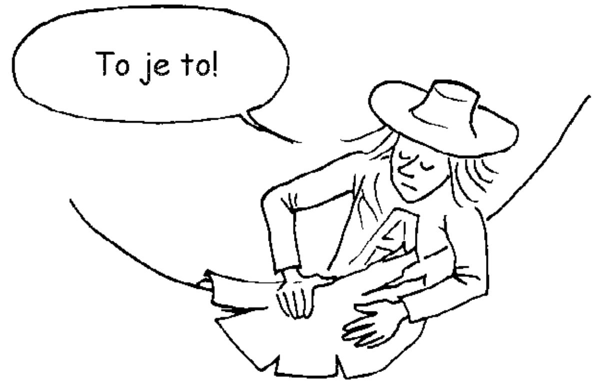
Zakrivljena površina je ona na kojoj teorema Euklida&Co. ne radi. Zakrivljenost može biti pozitivna ili negativna.

Na površini POZITIVNE ZAKRIVLJENOSTI, zbroj kutova trokuta veći je od 180°. Ako nacrtate krug radijusa ℓ, njegova površina je manja od $\pi\ell^2$. A njegov vanjski rub je manji od $2\pi\ell$

Na površini NEGATIVNE ZAKRIVLJENOSTI zbroj kutova trojuta je manji od 180°. Ako nacrtate krug radijusa ℓ, njegova povrsina je veća od $\pi\ell^2$. A njegov vanjski rub je veći od $2\pi\ell$

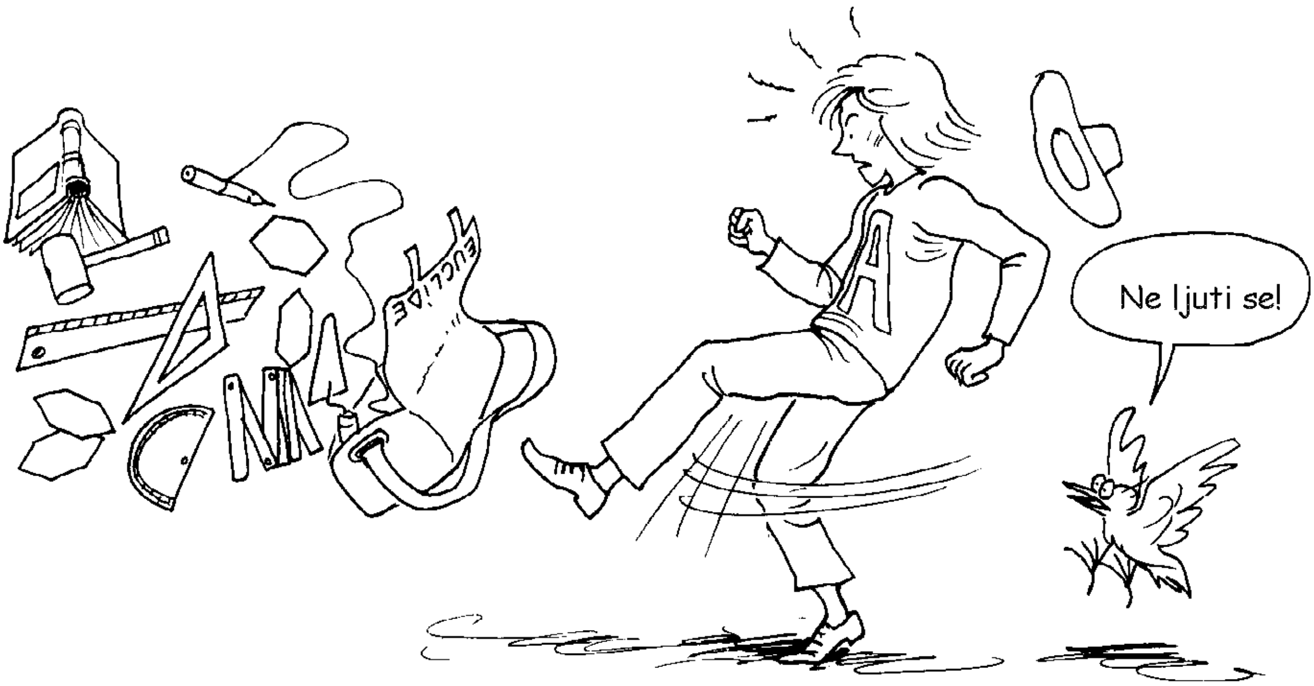
Archi je ranije opazio, kad pokušavaš omotati dio ravni sa površinom pozitivne zakrivljenosti,ti je naboraš. Takođe je nemogućno omotati dio ravni na površini negativne zakrivljenosti: razdvaja se.

Ovo omotavanje je jednostavan test za pozitivnu ili negativnu zakrivljenost.



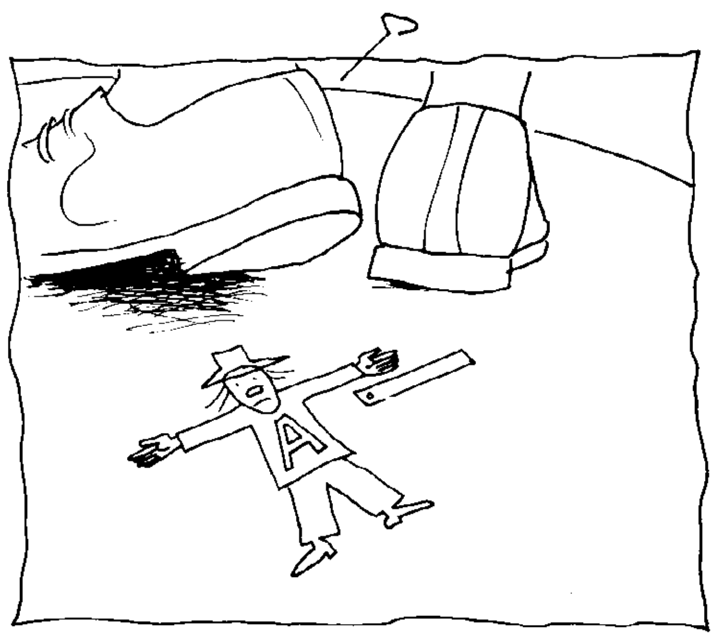
Kao što ste vidjeli na predhodnoj stranici, neke površine mogu imati oblasti pozitivne zakrivljenosti i oblasti negativne zakrivljesnosti.


test obmotavanja...
Hmmm... možeš obmotati ravan na valjak ili na stožac!
Ne paniči. Budem zalijepio tri komada sejlotepa - kao geodeze, na valjak.
...sad markiram geodeze na površini,,,
...odmotavam valjak da bude ravan....
!...
Po našoj definiciji, valjak i stožac ispunjavaju euklidsku geometriju, i oni su ravne površine!!!

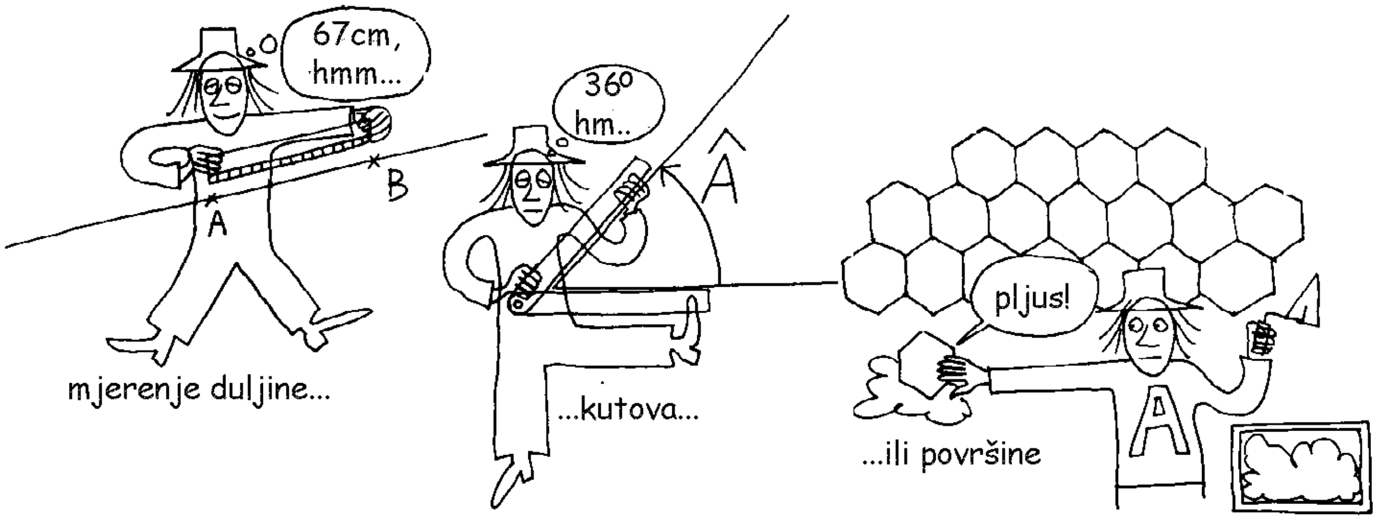


OBAVIJEST O PROSTORU:

Ranije su oblaci spriječavali Archija za vidjeti dalje od svog nosa. On nije mogao vidjeti zakrivljenje SFERNOG PROSTORA na kom je živjeo. Postoji drugi način za spriječiti Archija za vidjeti zakrivljenost površine: neka živi u njoj - neka postane dio nje.



Ovaj novi pogled nema efekta....



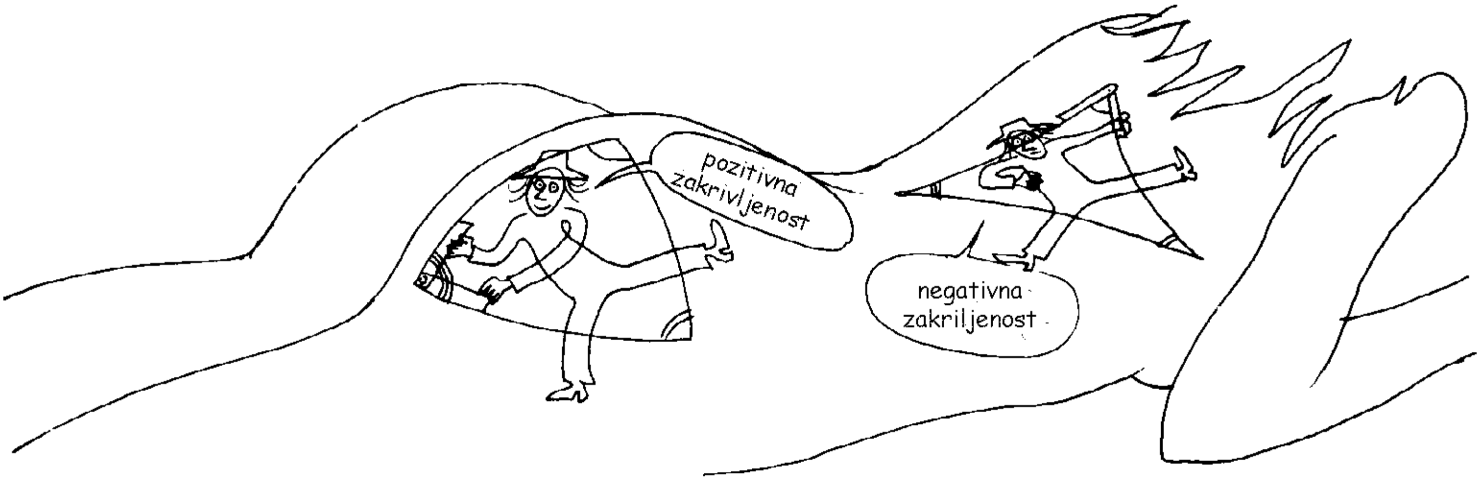
Arči ni dalje nije mogao uzeti u obzir zakrivljenost, ni odlučiti je li ona pozitivna ili negativna, ili čak je izmjeriti, sve dok ne bude kadar za vidjeti je. Ako je zbroj kutova u trokutu bio 180^o, površina bude bila RAVAN. Ako zbroj premašuje 180^o, zakrivljenost bude bila pozitivna i Archi bude mogao izračunati lokalni radijus zakrivljenosti R uporabom formule

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}= 180(1+ \frac{A}{3.1416 R^2}) \text{ stupnjeva,}$$

gdje je A površina trokuta. Ako je zbroj manji od 180 ^{o}, možemo definirati radijus zakrivljenosti R date

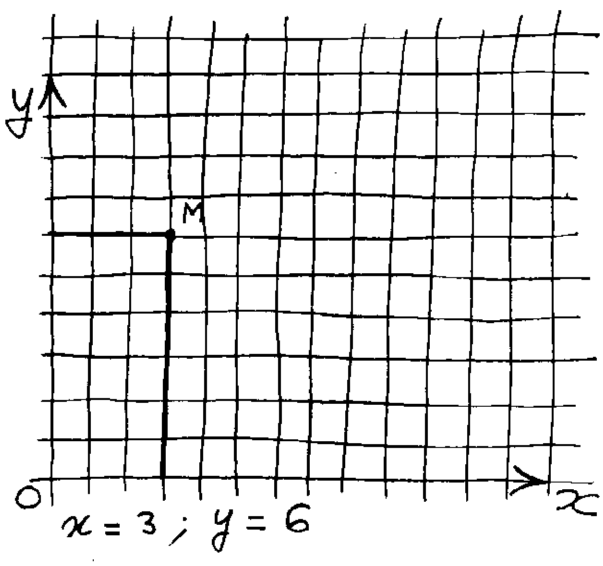
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}= 180(1- \frac{A}{3.1416R^2})$$

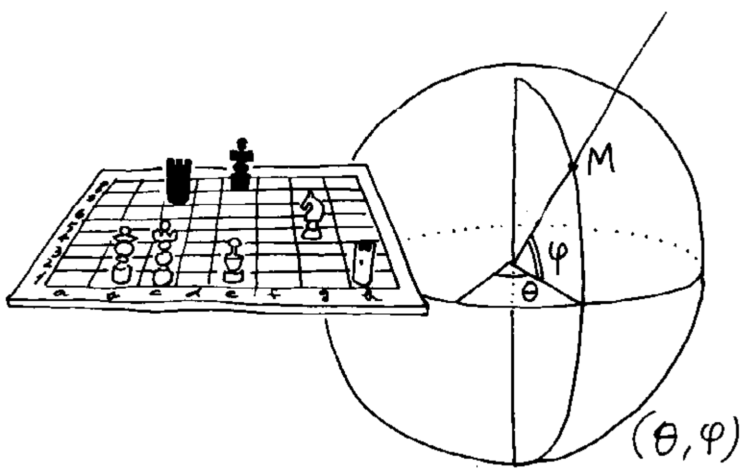
ali to više ne bude imalo UOBIČAJENO FIZIČKO ZNAČENJE.
Zamijetite i ovo - mi možemo uvrstiti ravan kao površinu čiji je radijus zakrivljenosti R beskrajan. Tako budemo otkrili uobičajenu euklidsku teoriju.



KONCEPT DIMENZIJE

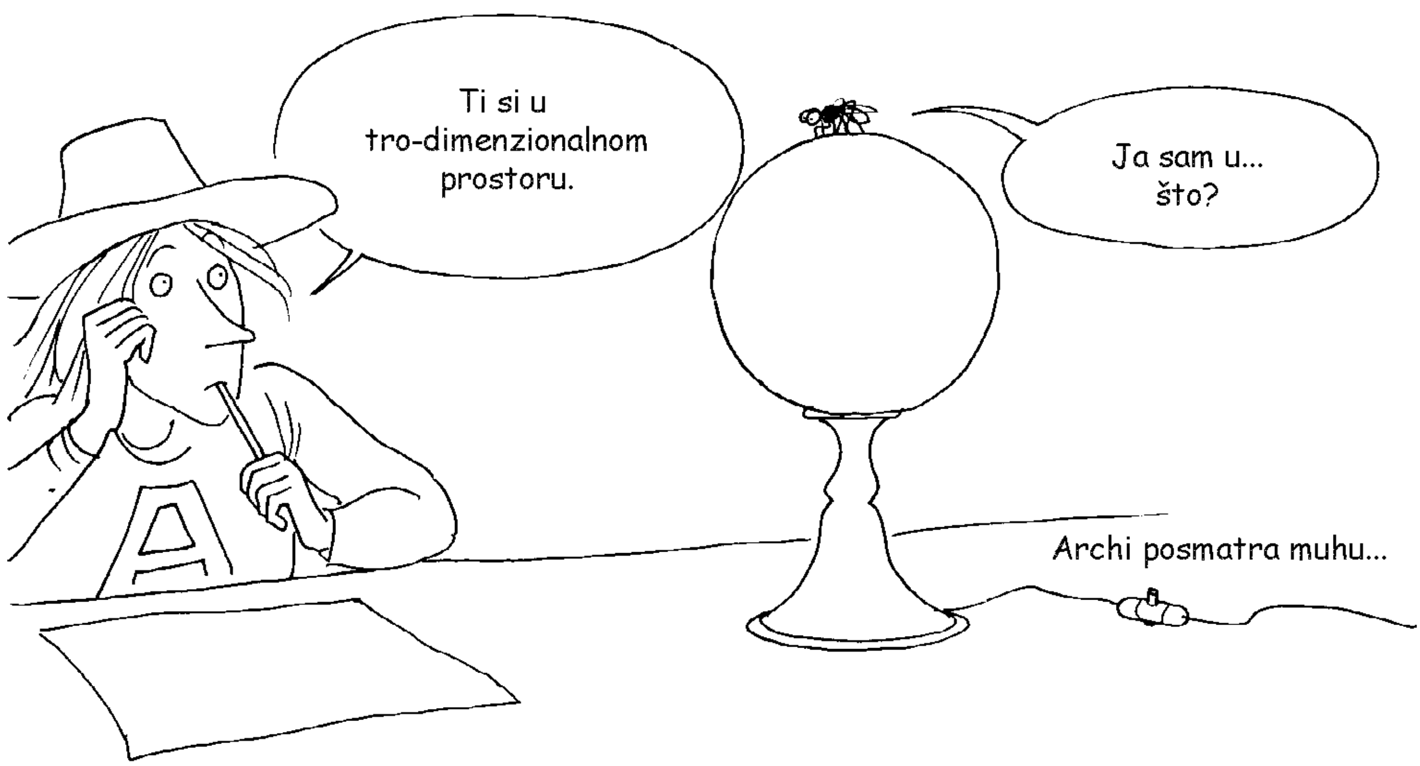
Broj dimenzije je broj veličine - ili koordinate - koje moraju biti date, u izabranom prostoru, za definirati poziciju točke.
Površina je prostor koji ima 2 dimenzije veličine koje se rabe za mjerenje, one mogu biti: duljine, brojevi, kutevi...

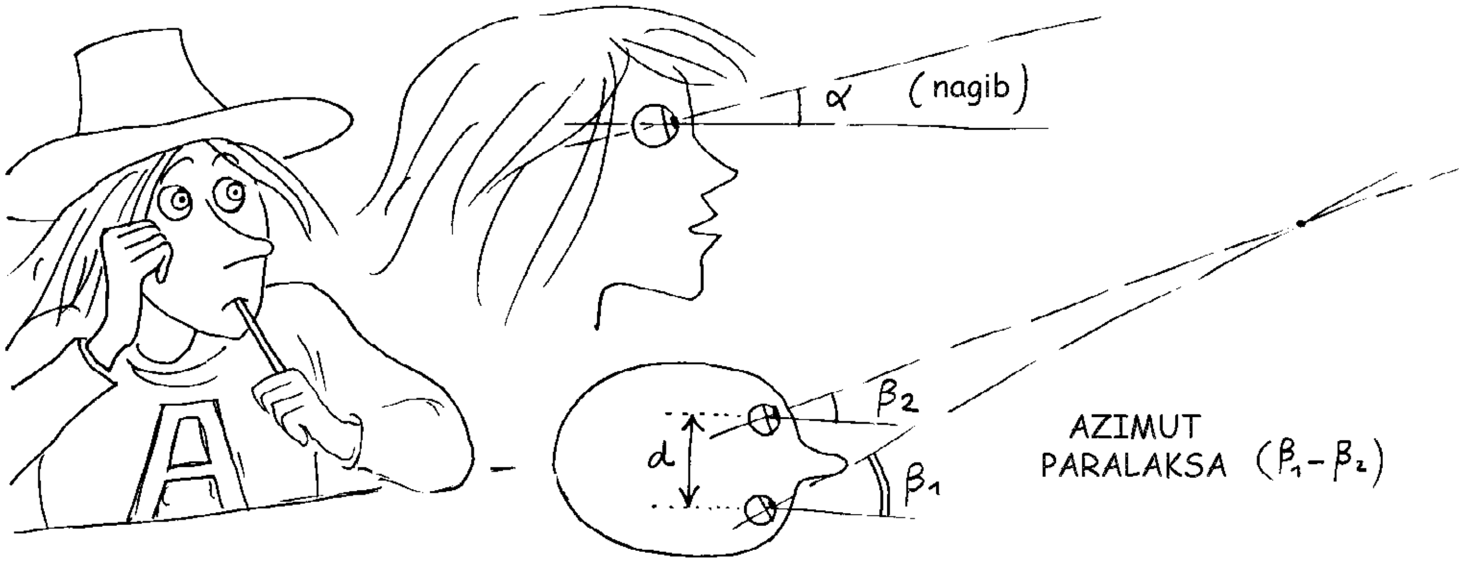




LONGITUDA, LATITUDA

Uobičajeno je reći za naš prostor, ako ignoriramo vrijeme, ima 3 dimenzije

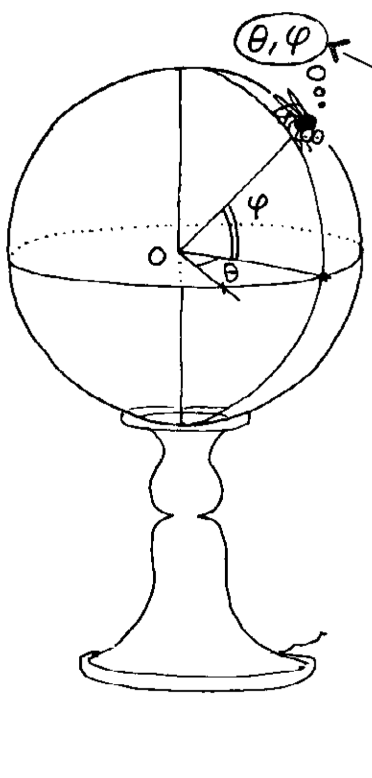




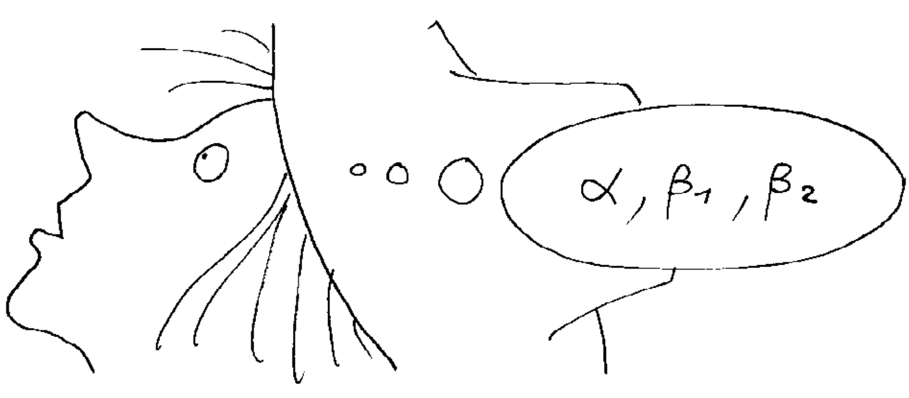
Archi može pronaći pozicije stvari uporabom svoje glave...
Pozicija točke može se determinirati sa tri kuta: nagib, azimut paralaksa i njegovih očiju.
Razlika kutova $\beta_1 - \beta_2$ zove se PARALAKSA.
Archijev mozak može dekodirati ovu paralaksu i objasniti je kao razdaljinu.

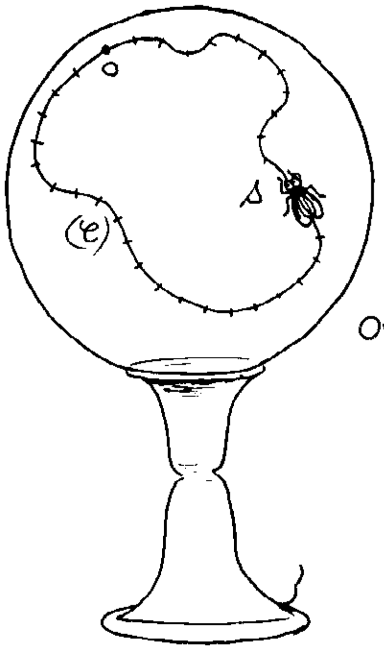
IMERZIJA:

Muha si misli da se giba na sfernom putu, gdje se njena pozicija, u ovom dvo-dimenzionalnom prostoru, može objasnitisamo pomoću ovih kutova (longituda i latituda)

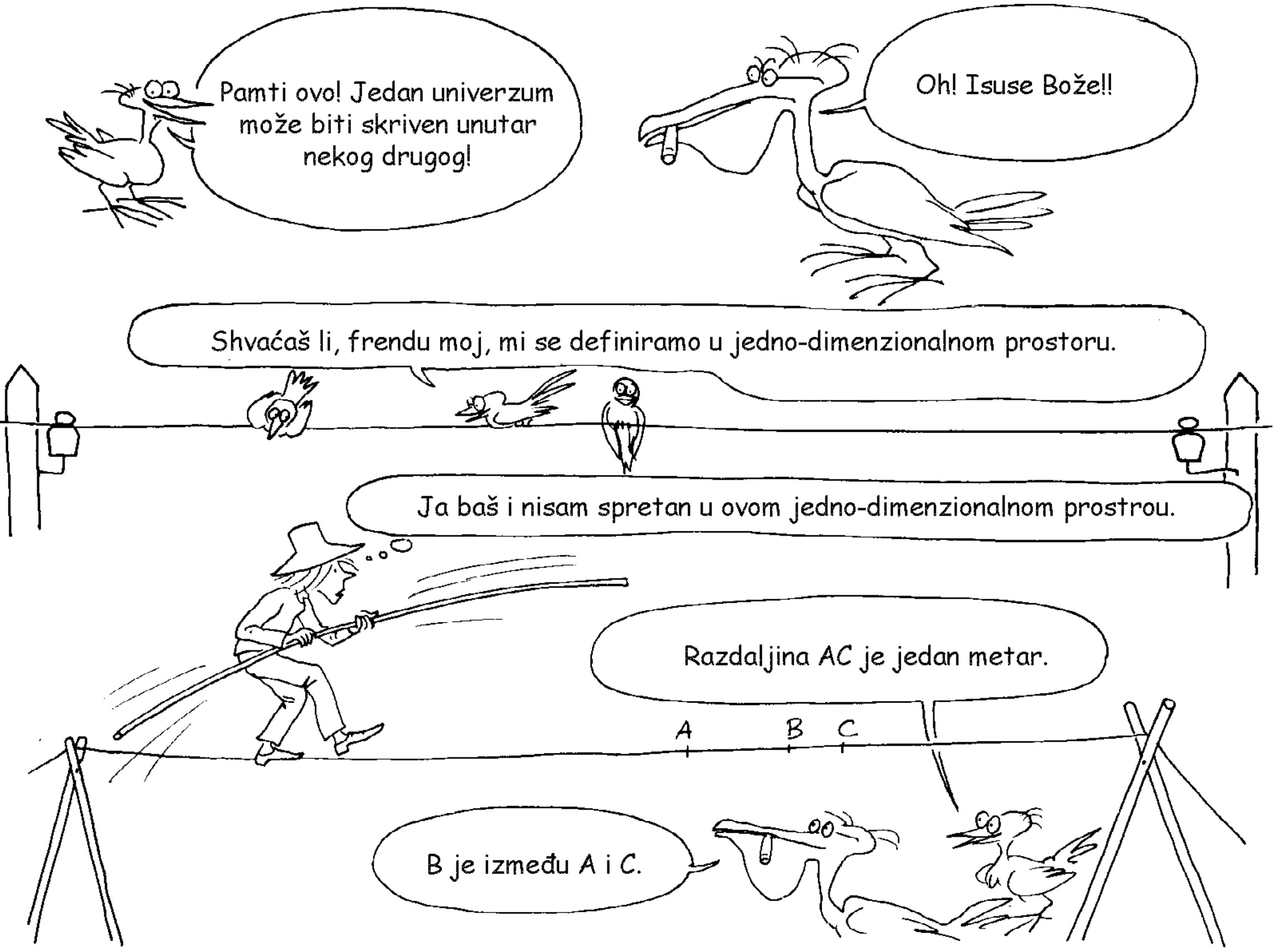


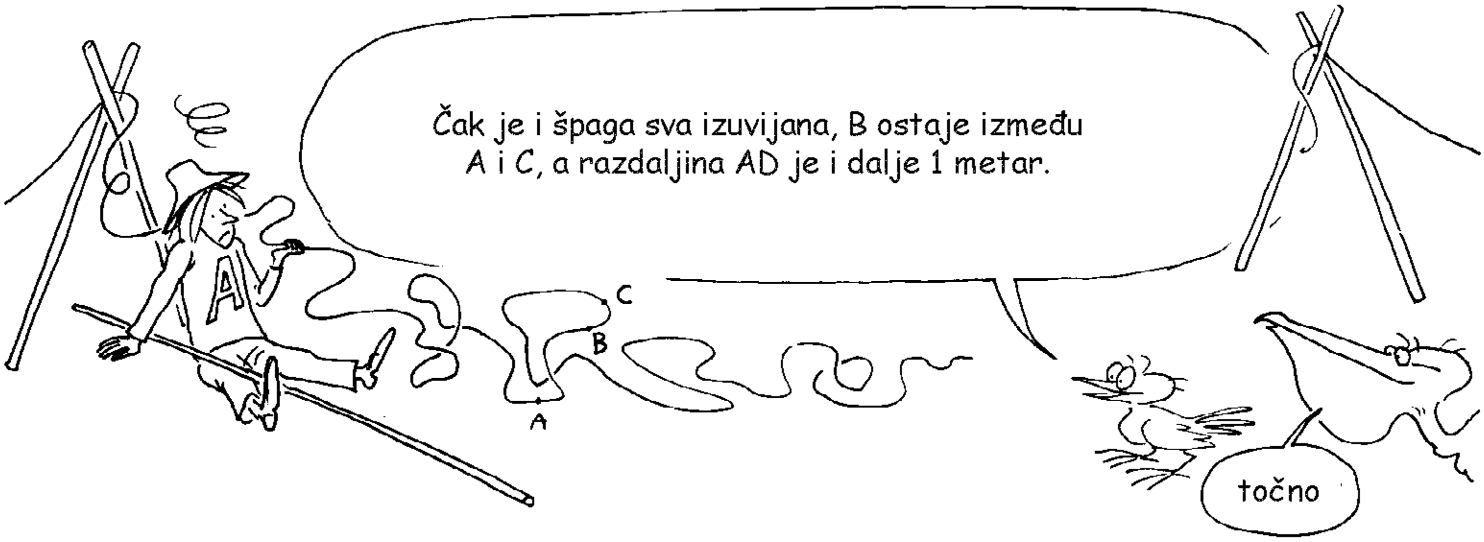
Mi kažemo za ovaj dvo-dimenzionalni prostor - on je uronjen (ili utisnut) u naš uobičajeni tro-dimenzionalan prostor.



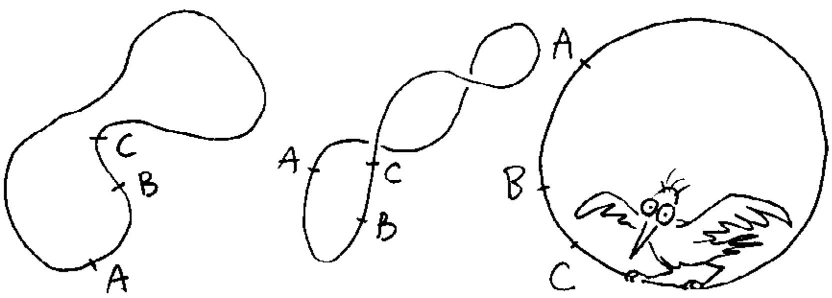


Pretpostavimo si ovo - muha prati zakrivljenost (ℓ) sfere. Sada možemo prikazati njenu poziciju uporabom samo jedne koordinate - razdaljine između početne točke. Zakrivljenost je slika jedno-dimenzionalnog prostora. Ovaj jedno-dimenzionalni prostor je uklopljen u dvo-dimenzionalni prostor (sferu), koja je uklopljena u tro-dimenzionalni prostor. Tako naš prostor može biti ugrađen u neku veću dimenziju koje nismo svjesni.





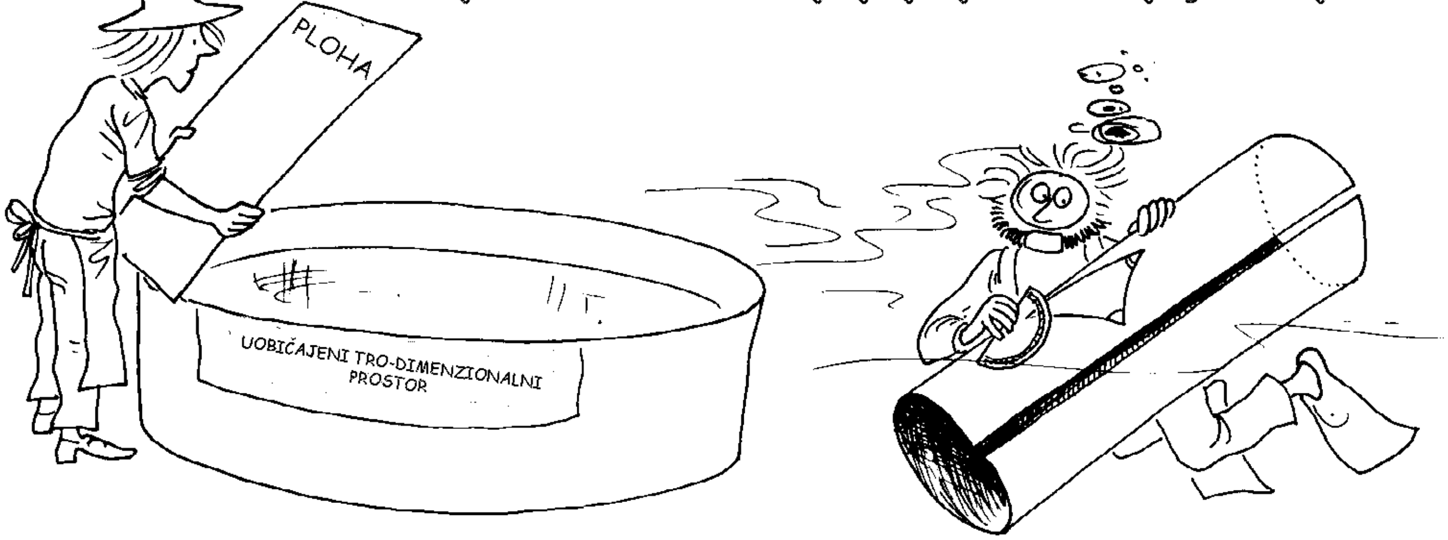
Ovo sugerira - neke značajke mogu biti neovisne o načinu na koji je prostor izokrenut.



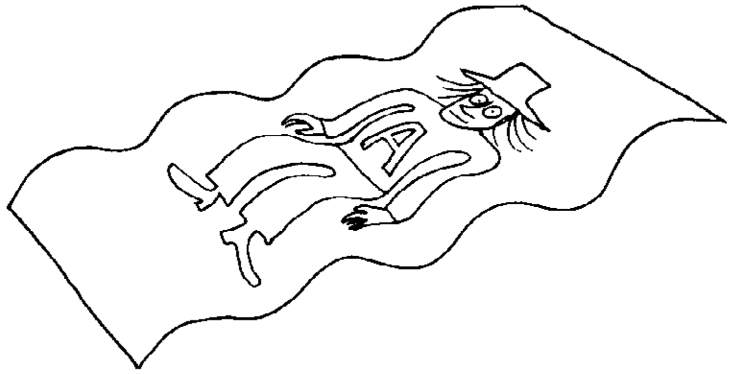
Evo različitih načina za okružiti ZATVORENU KRIVULJU u uobičajenom prostoru. Činjenica da je krivulja zatvorena ne ovisi o tome kako se ona okružuje.

Ali moramo biti na oprezu za ne nategnuti previše ili sabiti špagu, i ne promijeniti razdaljinu među točkama. Sad budemo pokušali okružiti površinu u uobičajenom prostoru.

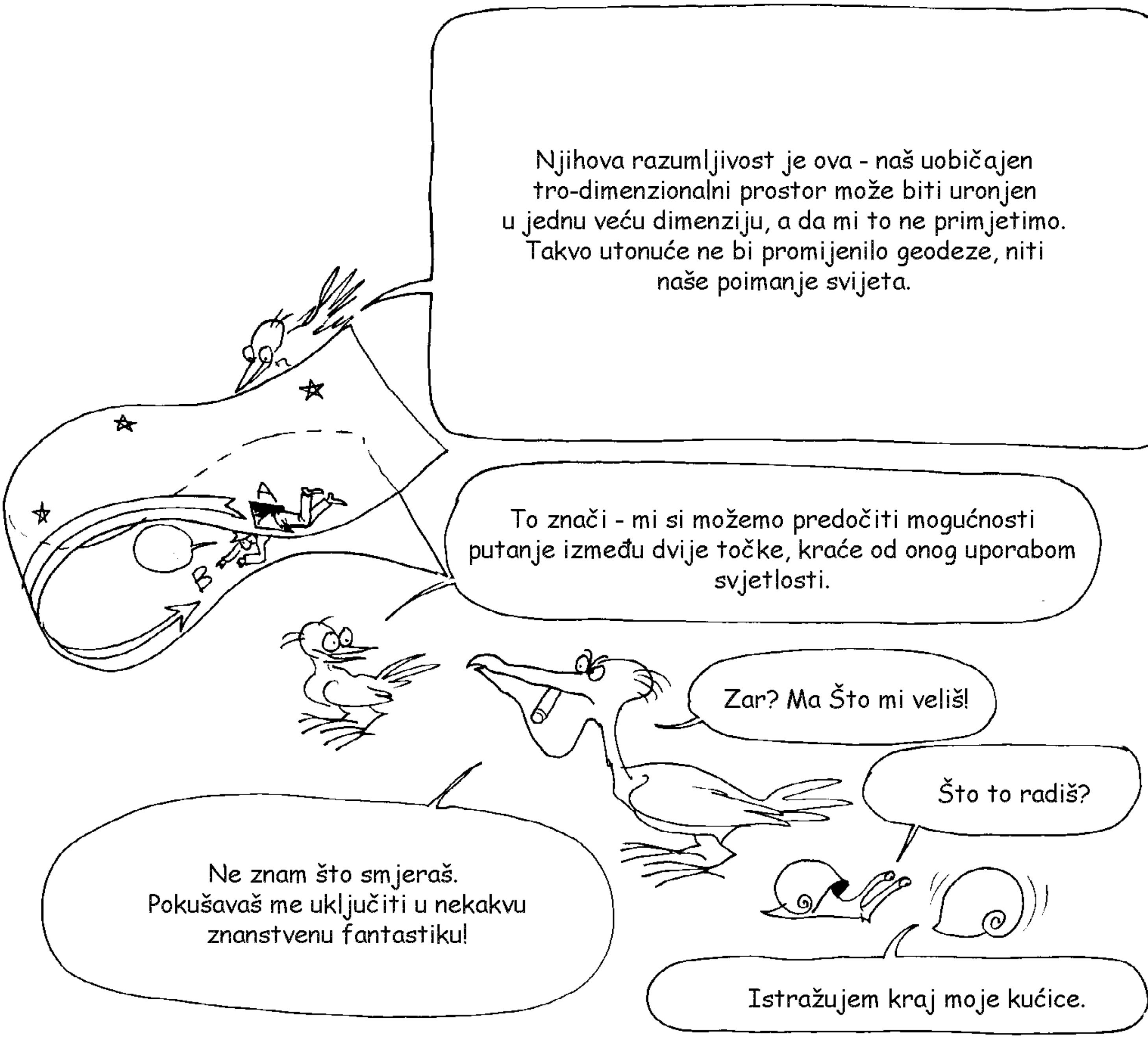
Ako budemo okružili plohu u uobičajenom tro-dimenzionalnom prostru, mi je možemo saviti bez mijenjanja njene unutarnje geometrije.



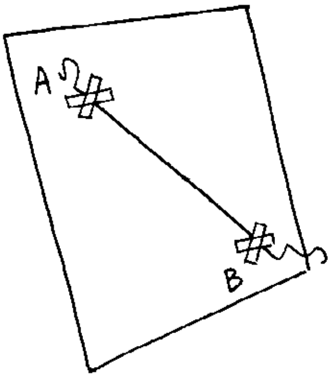
Vidjeli smo - savijanje plohe u valjak
ne mijenja geodeze ili kutove.
Sa ove točke gledišta - ova ravan
uvijek ima euklidsku geometriju plohe.

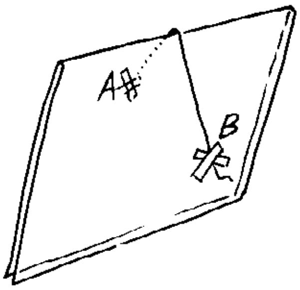


Žitelji takvog dvo-dimenzionalnog prostora ne bi imali ideje uvrtanja, izokretanja... površine, a to su promjenjive značajke načina na koji je površina okružena u tro-dimenzionalnom prostoru.

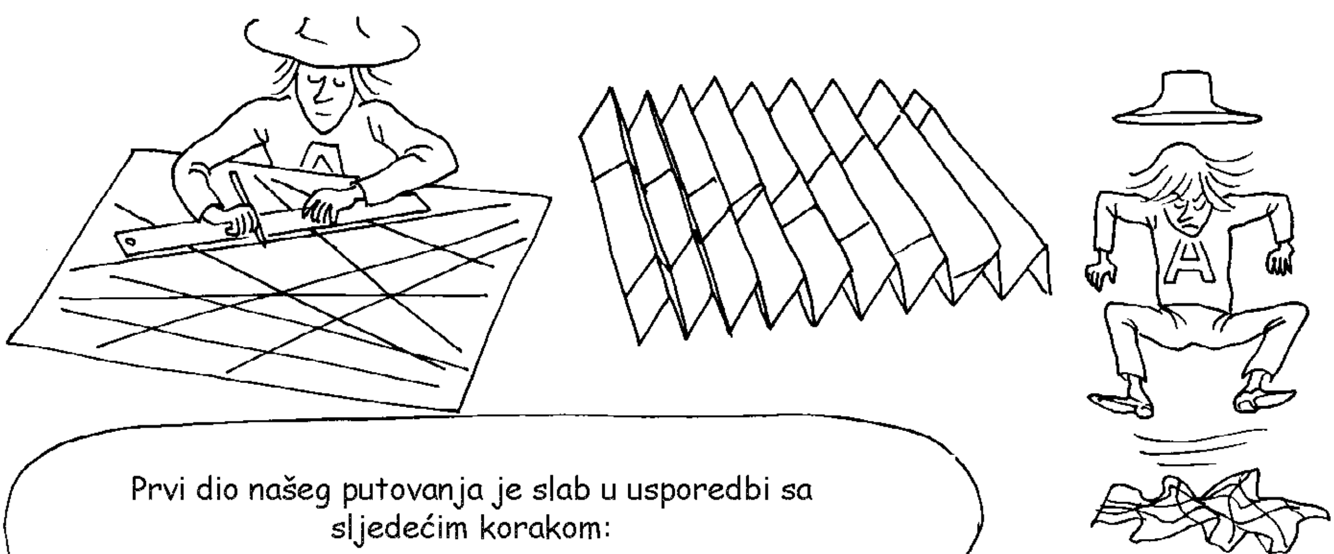


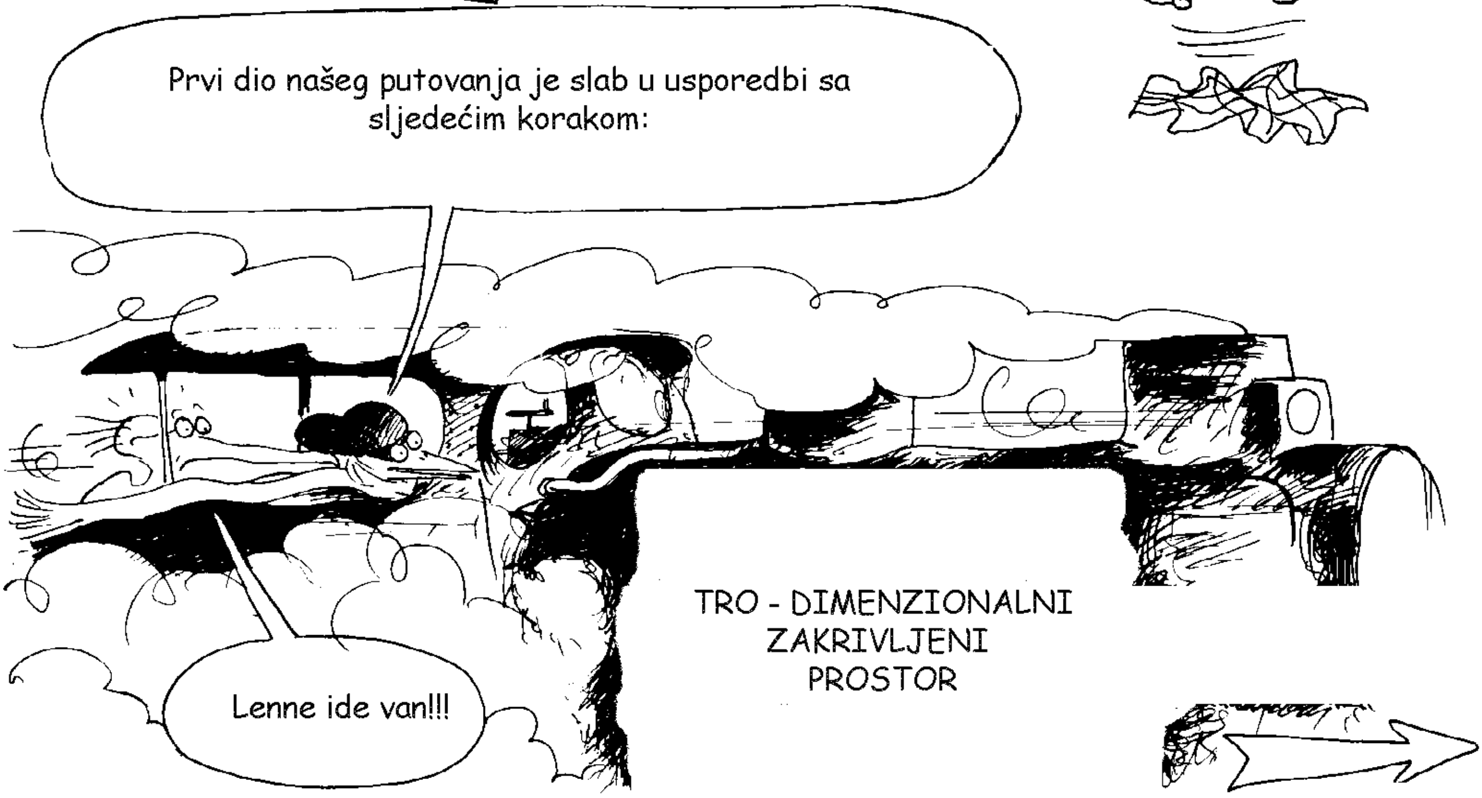
Uzmi dio ravni i presavij je:





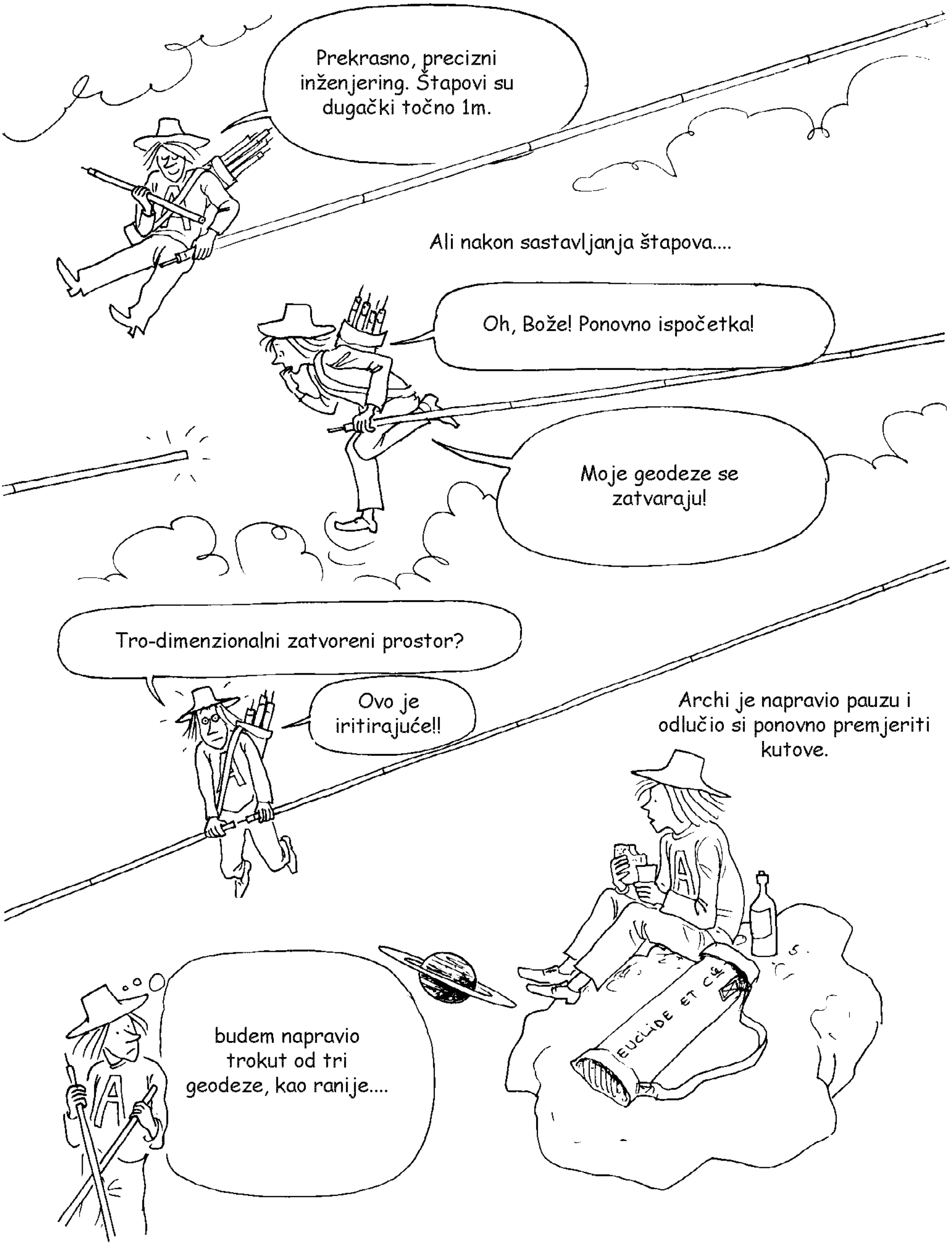
Uporabom ravnala na lictu papira, nacrtaj puno pravih crta (geodeza). Onda presavij papir nekoliko puta. Onda budeš vidjeo - tu su geodeze - unatoč tomu je li presavijaš površinu ili ne!





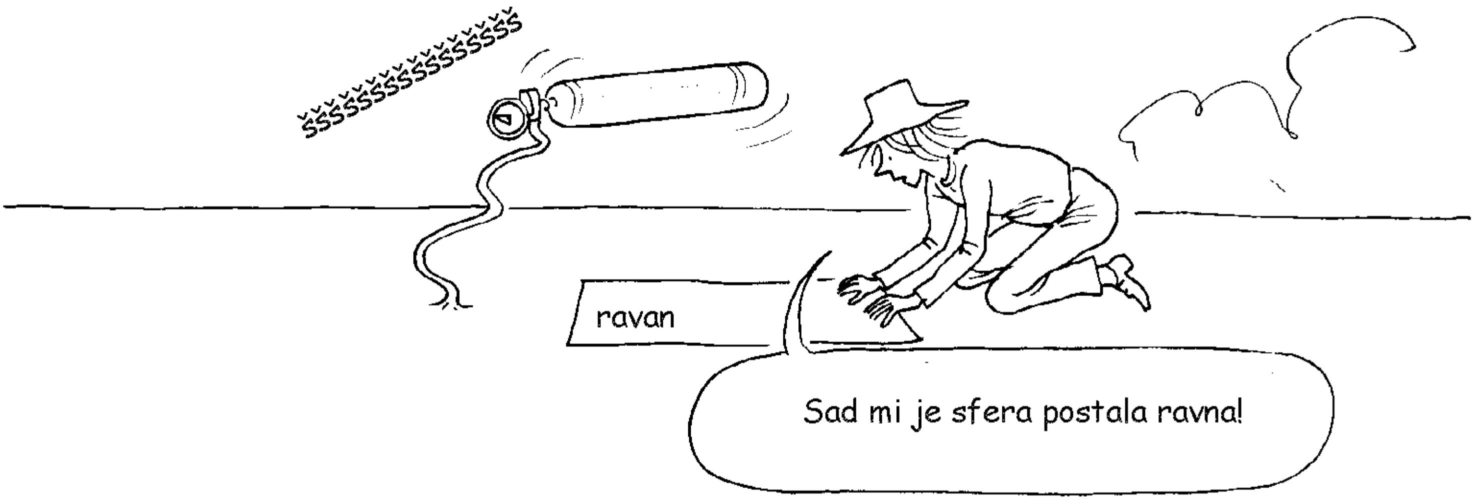

Gospon Higgins?
On!!
Ja sam iz tvrtke Euclid&Co. rečeno mi je za vaš problem s nekim našim produktima.
Euclid& Co.
Ponio sam neka posljednja dostignuća, za koja mislim da su potpuno zadovoljavajuća.
Idemo ih vidjeti.
Tri dimenzije, to je uobičajeno danas. Geometrija za 2-dimenzionalni prostor je zastarila
kozmički fluid
najnovije otkriće vezano za geodeze...
...napravljeno je od krutih štapova, koji se savršeno uklapaju
Ovo ti ne bude dozvoljavalo odstupanje ni lijevo ni desno, ni gore ni dolje, samo budeš išao PRAVO NAPRIJED!


Za mjerenje površine, što ne bi oprobao našu novu boju? 100g na kvadratni metar.
A za volumen, ovaj ventil za plin. Možeš si čitati vrijednosti sa metra pričvršćenog na svemirsku sondu.
Zanimljivo
I upamti, površina sfere je $4\pi\ell^2$ volumen je $\frac{4}{3}\pi\ell^3$
Upamtio sam!
EUCLIDE & Cie
Ovo je jako zahtjevna profesija!
Ovog puta se Archi spustio u tro-dimenzionalni prostor. Nastavljamo pratiti njegovo istraživanje.


Prekrasno, precizni inženjering. Štapovi su dugački točno 1m.
Ali nakon sastavljanja štapova....
Oh, Bože! Ponovno ispočetka!
Moje geodeze se zatvaraju!
Tro-dimenzionalni zatvoreni prostor?
Ovo je iritirajuće!!
Archi je napravio pauzu i odlučio si ponovno premjeriti kutove.
budem napravio trokut od tri geodeze, kao ranije....
EUCLIDE ET C.ie


?!?
Pravilno sam postavio geodeze, ali zbroj kutova ovog trokuta je veći od 180°!
Oh Bože
SPATIOTEST
Budem napravio jednu, i budem izmjerio njen volumen i površinu.
Sfera radijusa ℓ je oblast točaka smještenih na fiksnoj razdaljini ℓ od date točke koju budem nazvao N.
Površina je manja od $4\pi\ell^2$...
A volumen je manji od $\frac{4}{3}\pi\ell^3$!
Dosta mi je svega ovog.

Archi je povećao radijus na svojoj sferi....



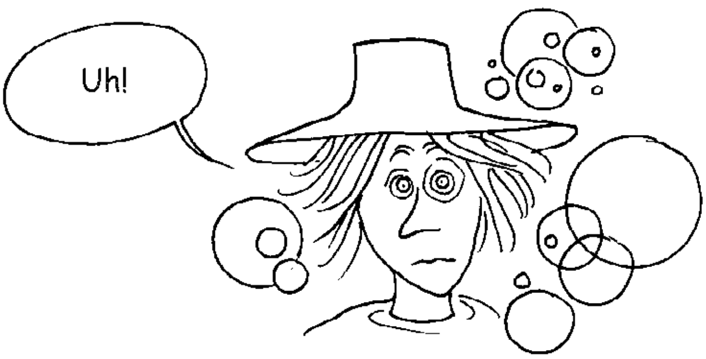
sve više i više...

malo kasnije....

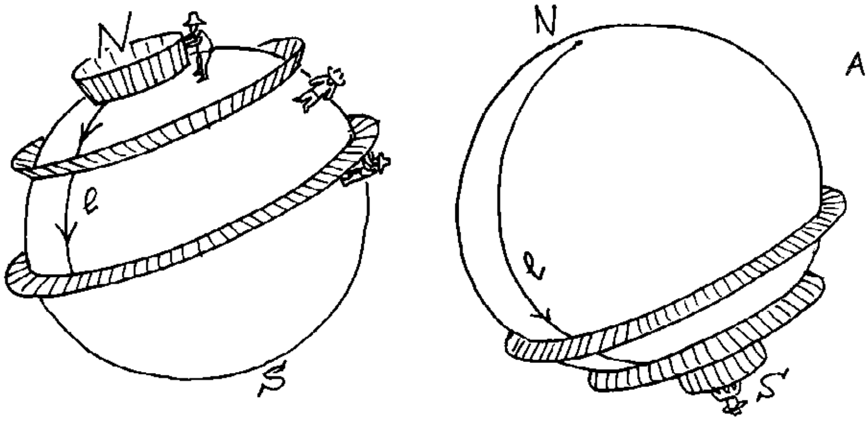
I tako... Jednostavnim izduvanjem balona u 3-dimenzionalnom prostoru, Higgins se našao U NJEMU!

Da nije prekinuo dotok plina na vrijeme, bio bi smrvljen.

I uz najveću volju i želju nije mogućno PREDOČITI ZAKRIVLJENOST ovog tro-dimenzionalnog prostora. Njegove geodeze se zatvaraju, i njegov ukupni volumen je konačni broj kubičnih metara, kao na površini naše planete, koja zauzima konačan broj kvadratnih metara. Zbroj kutova u trokutu u ovom tro-dimenzionalnom prostoru je veći od 180°! Za "vidjeti" zakrivljenost morali bismo biti sposobni razmatrati to u četvrtoj dimenziji.



Ovo bi moglo biti točno - naš tro-dimenzionalni univerzum je hiperpovršinski uvučen u 4-dimenzionalni prostor, koji onda sebe uvlači u 5-dimenzionalni prostor, itd. Ali sad o tome nije mogućno raspravljati.

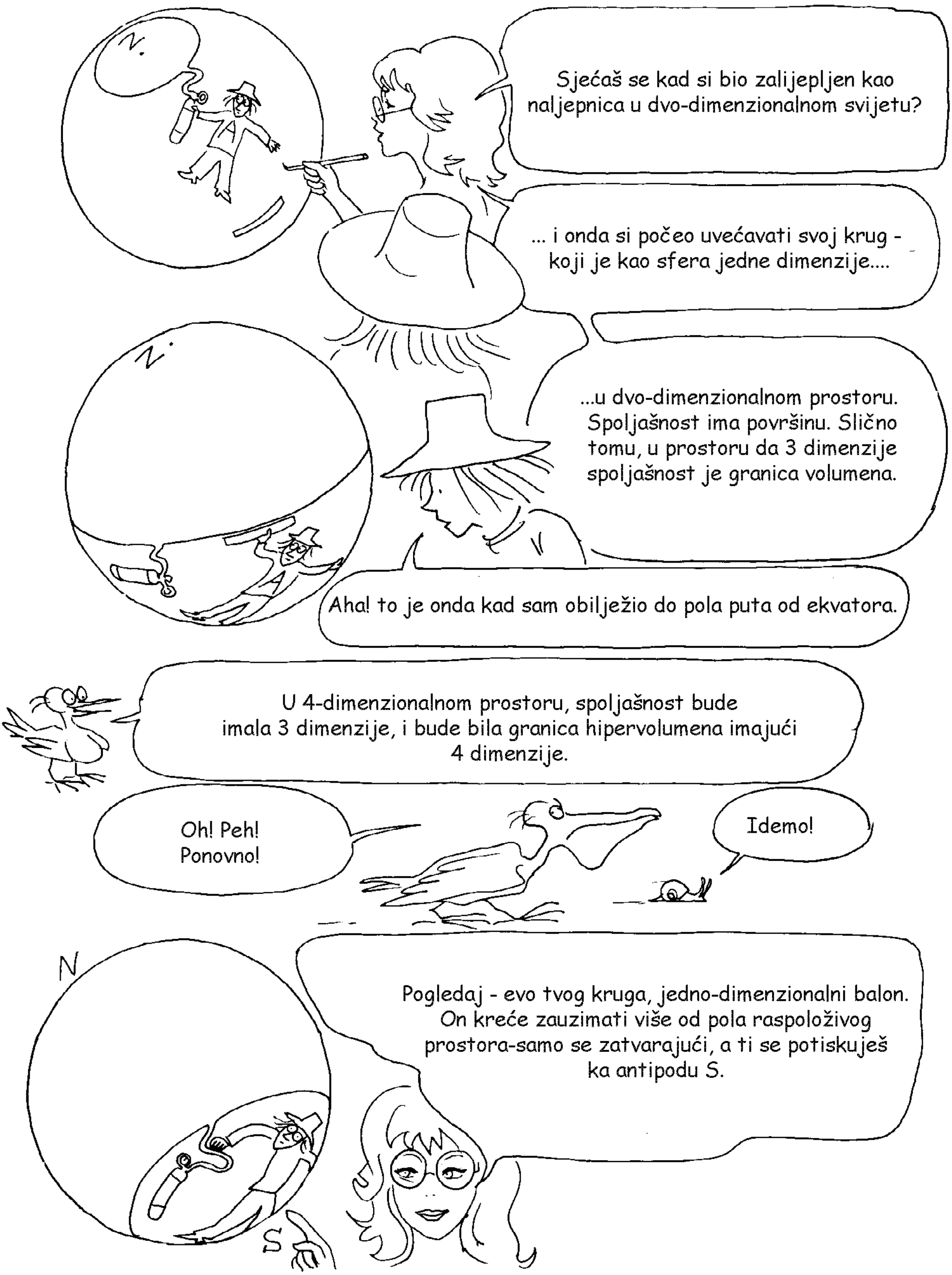


Archi je, proširiši radijus ℓ, na sferi završio nalazeći se zarobljen na antipodnoj točki S, orginalnoj točki N.

U 3-dimenzionalnom prostoru, pozitivne zakrivljenosti, ista stvar se dogodila. Archi je došao do ekvatora u 2-dimenzionalnoj sferi, zatvorivši pola od dostupne površine. U ovom 3-dimenzionalnom hipersfernom prostoru, nalazi se i ekvator, a Archi ga je dosegao kad je njegov balon zauzeo pola od dostupnog volumena na sferi, ekvator sliči na ravnu crtu. Isto tako na hipersferi, "ekvatorski balon" sliči na ravan.

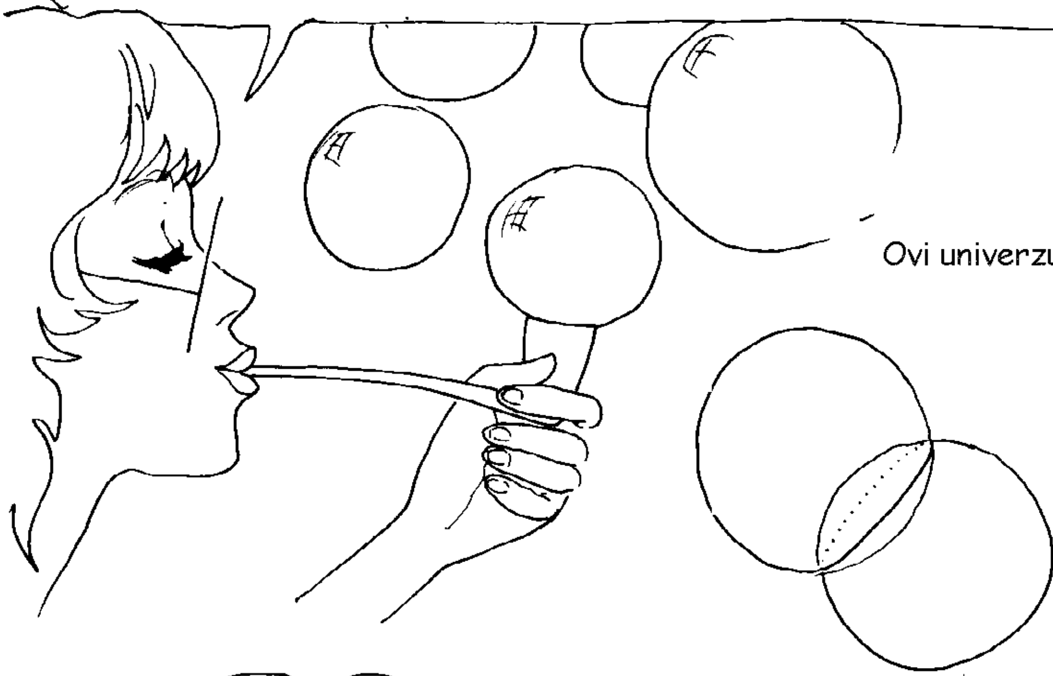

Problemi?
Pa... Uh - sve mi se zbrkalo u glavi...
Ja sam Sofi - moja profesija su zakrivljenja svih vrsta.
Navigacija na hipersferi je u početku iznenađujuća. Najbolji način za izbjeći nasukavanje je uzeti si malo vremena.
Hmm...da....
Izgubio sam si bit...


Dobro, za početak mi reci - gdje je centar hipersfere?
Pogledaj - ako nacrtam krug na plohi, budeš se složio da on predstavlja prostor sa 1 dimenzijom, uklopljenom u prostor od 2-dimenzije, tj. plohu.
I centar kruga nije na krugu.
Uhhh
Sfera predstavlja zatvoreni dvo-dimenzionalni prostor uklopljen u tro-dimenzionalni prostor. Ponovno, centar sfere ne leži na centru same sfere - već u okruženju tro-dimenzionalnog prostora.
Centar hipersfere ime 3 dimenzije može se pronaći u 4-dimenzionalnom prostoru. Ali to ne leži točno na hipersferi. Slično tomu, ti možeš uklopiti 4-dimenzionalnu hipersferu u 5-dimenzionalni prostor, i tako dalje.

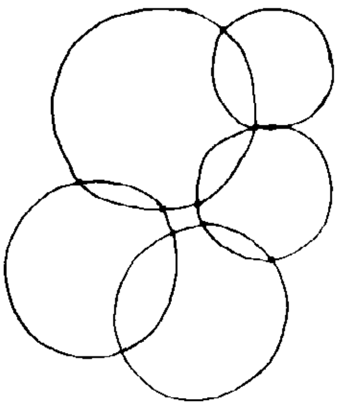

N.
Sjećaš se kad si bio zalijepljen kao naljepnica u dvo-dimenzionalnom svijetu?
... i onda si počeo uvećavati svoj krug - koji je kao sfera jedne dimenzije....
N.
...u dvo-dimenzionalnom prostoru. Spoljašnost ima površinu. Slično tomu, u prostoru da 3 dimenzije spoljašnost je granica volumena.
Aha! to je onda kad sam obilježio do pola puta od ekvatora.
U 4-dimenzionalnom prostoru, spoljašnost bude imala 3 dimenzije, i bude bila granica hipervolumena imajući 4 dimenzije.
Oh! Peh! Ponovno!
Idemo!
N
Pogledaj - evo tvog kruga, jedno-dimenzionalni balon. On kreće zauzimati više od pola raspoloživog prostora-samo se zatvarajući, a ti se potiskuješ ka antipodu S.
S


Potpuno isto, u mom zakrivljenom tro-dimenzionalnom prostoru, kad sam napumpao više od polovine ukupnog volumena balon se zatvorio na mene.
SHVATIO SAM SVE!!!!
Kako sfera u 3-dimenzionalnom zakrivljenom prostoru, ima dva centra koji su antipodna.
?!!?
Pa, to je...
Nisam potpuno siguran što sam shvatio, nešto je jasno...
Baš deprimira!
To je u redu Archi, treba dosta za razumjeti to!
Za razumjeti treba ekstrapolirati.
ja ekstrapoliram ali ne kužim!
Moraš si zamisliti svoju sliku!

Budem počela u tro-dimenzionalnom prostoru, tu budem stavila puno sfera - malih dvo-dimenzionalnih univerzuma.



Ovi univerzumi mogu si ući u nešto.



Ovi krugovi, imaju jednu dimenziju, kad se smjeste na list papira (dimenzija 2) oni imaju sjecišta točaka i uobičajeno je reći - dimenzija točke je nula

Sfera se može vidjeti kao sjecište 3-dimenzije koje žive u prostoru 4-dimenzije.

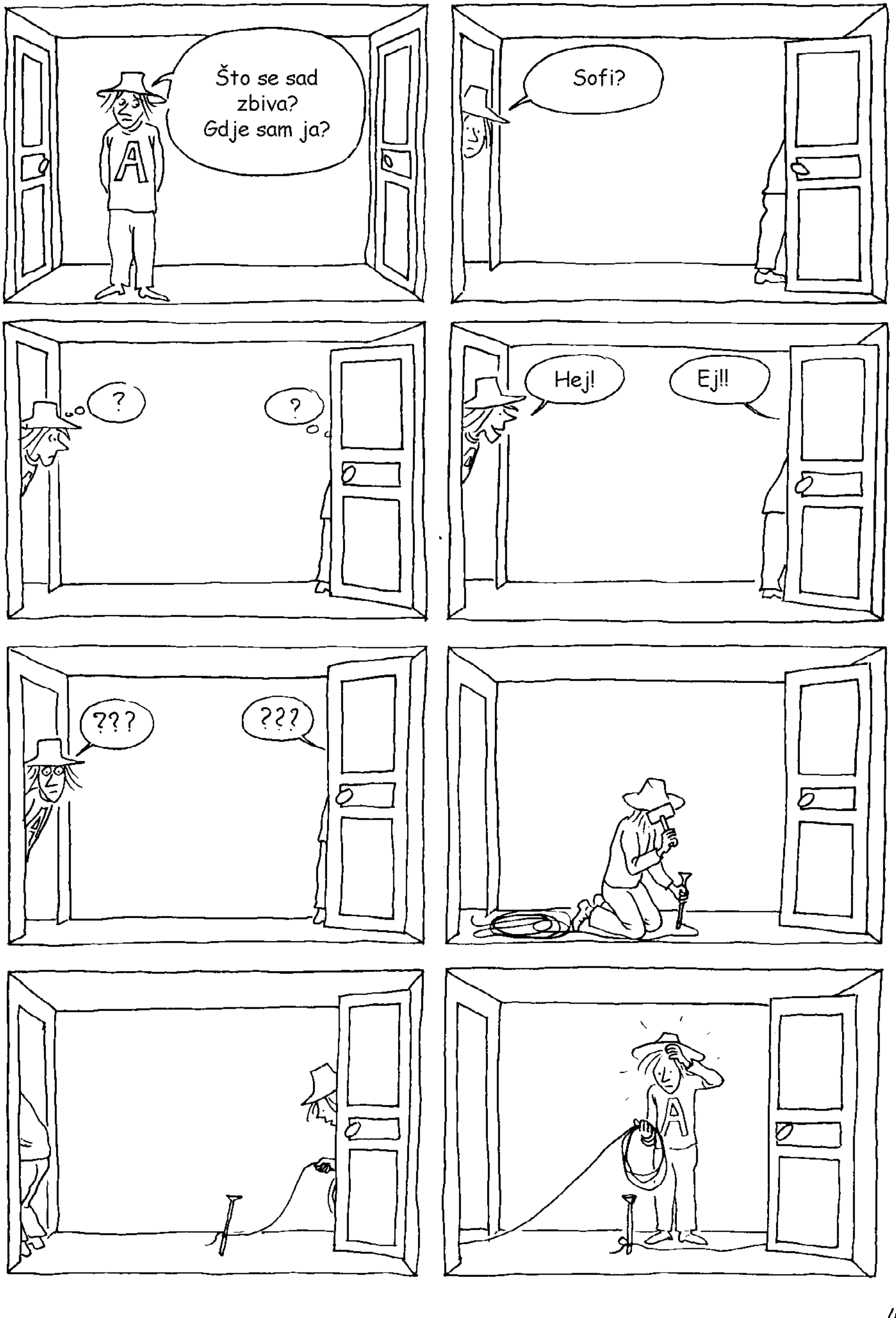
I tako dalje: 3-dimenzionalan zakrivljeni prostor, hipersfera, može se posmatrati kao sjecište u 4-dimenzionalnom balončiću u prostoru od 5 dimenzija.

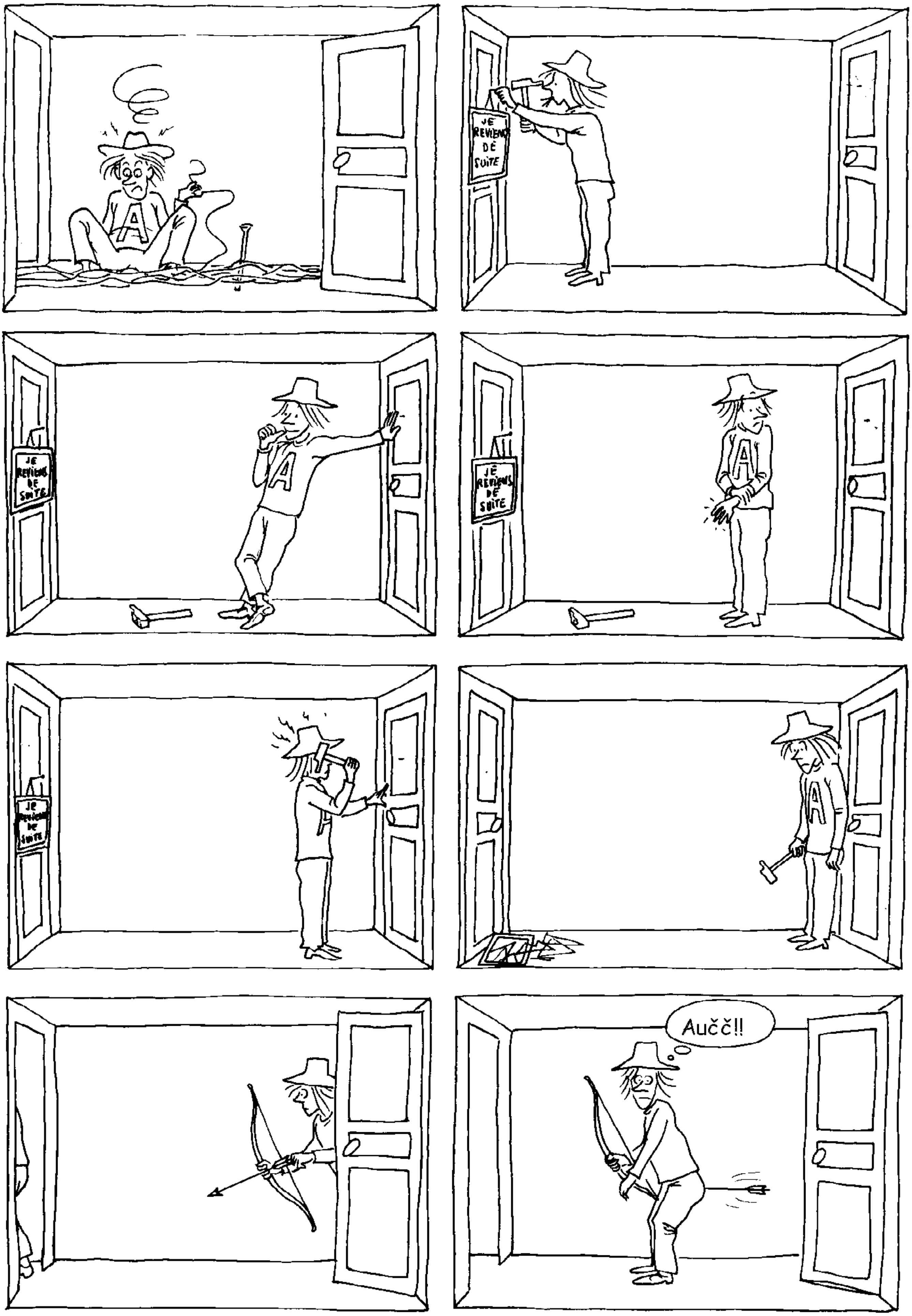

Archi i Sofi su razmjerili tako vrtoglavo visoku eksploraciju, počeli su iznova eksploraciju novog tro-dimenzionalnog svijeta.
Matematičari su...? Tko su oni?
Ovo je tro-dimenzionalni sejlotep za praviti geodeze.
I sad, u novom prostoru, geodeze se ne zatvaraju. I kad ja budem uvećao balon, volumen je veći od $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ i površina je veća od $4\pi\ell^2$ A zbroj kutova trokuta je manji od 180 .
Prisjećajući se stranice 23, budeš vidjeo - ti si u prostoru negativne zakrivljenosti.

SAŽETAK:

U tro-dimenzionalnom svijetu postoji puno mogućnih oblika ponašanja. Ako je zbroj kutova trokuta, u tro-dimenzionalnom prostoru veći od 180^0, onda kažemo - zakrivljenost je pozitivna.
Formiranjem sfere radijusa ℓ, svemirska sonda daje volumen manji od $\frac{4}{3}\pi \ell^3$ i površinu manju od $4\pi\ell^2$
Ovaj se prostor, hipersfera, sam zatvara. Ali, ako je zbroj kutotova trokuta manji od 180^0, onda je zakrivljenost u tro-dimenzonalnom prostoru NEGATIVNA. Volumen sfere radijusa ℓ je veći od $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ i površina je veća od $4\pi\ell^2$
Cijeli svemir je neograničenog prostiranja.
Ali. ako zbroj kutova ide ka 180^0. prostor je jednostavno euklidski.
I to bi bilo sve!

PROSTOR MORA BILI ILI OTVOREN ILI ZATVOREN!


Što se sad
zbiva?
Gdje sam ja?
Sofi?
?
?
Hej!
Ej!!
???
???

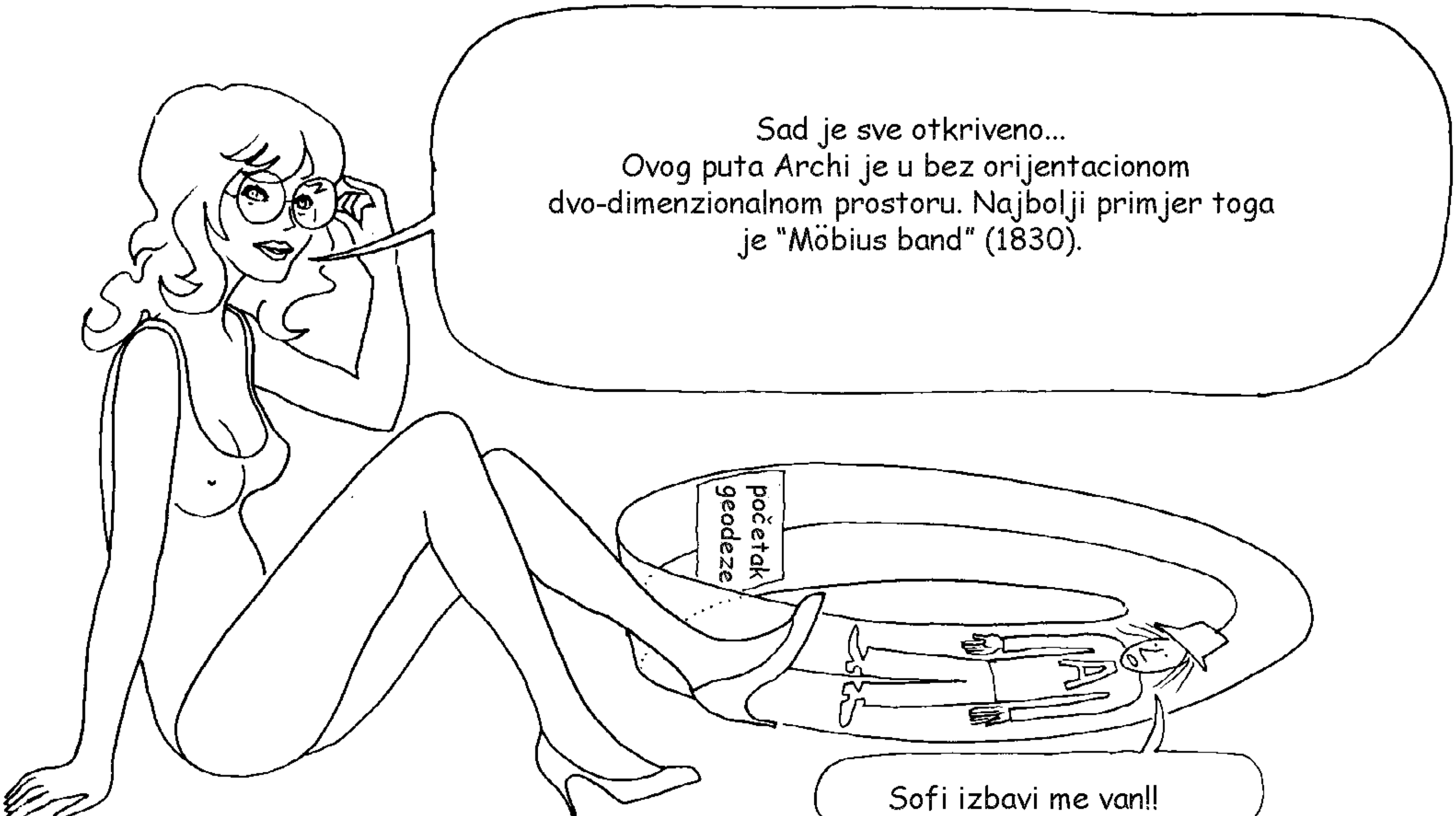

JE REVIENS DE SUITE
JE REVIENS DE SUITE
JE REVIENS DE SUITE
Aučč!!

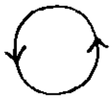

Vidiš - Archi se našao u valjkastom tro-dimenzionalnom prostoru. Unatoč tomu što je euklidski sa nula zakrivljenja (zbroj kutova je 180°) ovaj univerzum se samo-zatvara.
Ah!
Ok! Shvatio sam sve sam shvatio!
Misliš?
Vratimo se u dvije dimenzije.
Ha?

UNUTAR VAN:

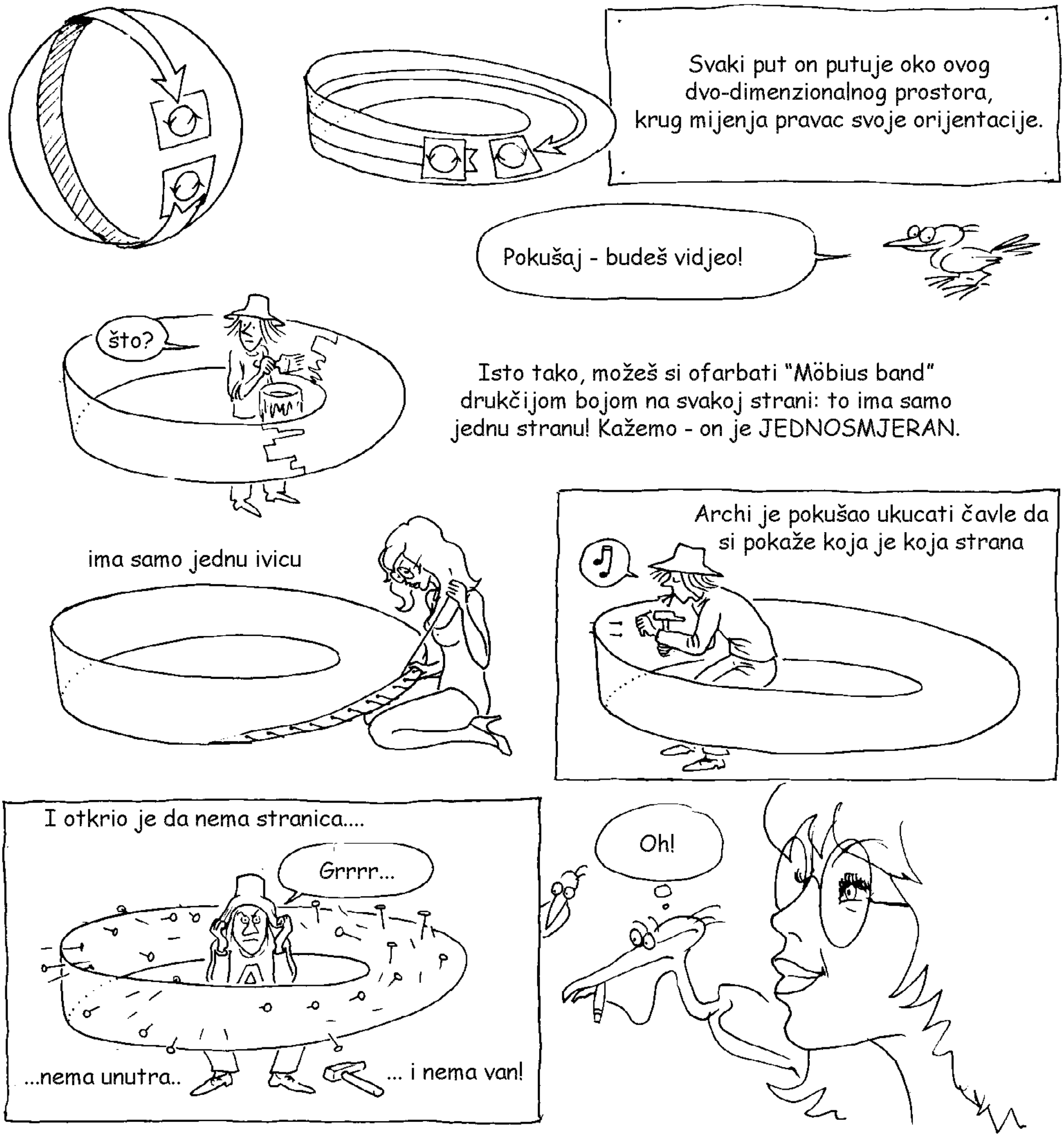

Dragi Archi,
Ovo ti je službeno odobren spuž.
Ako mu zavežeš oči možeš si pretpostaviti
on ne bude išao ni lijevo ni desno, nego bude
išao ka geodezama.
Tvoja Sofi
Idemo!
početak geodeze
Dovoljno daleko:
počinjem pratiti najkraći put.
Hej-gdje je taj
smiješni spuž?
Hej!

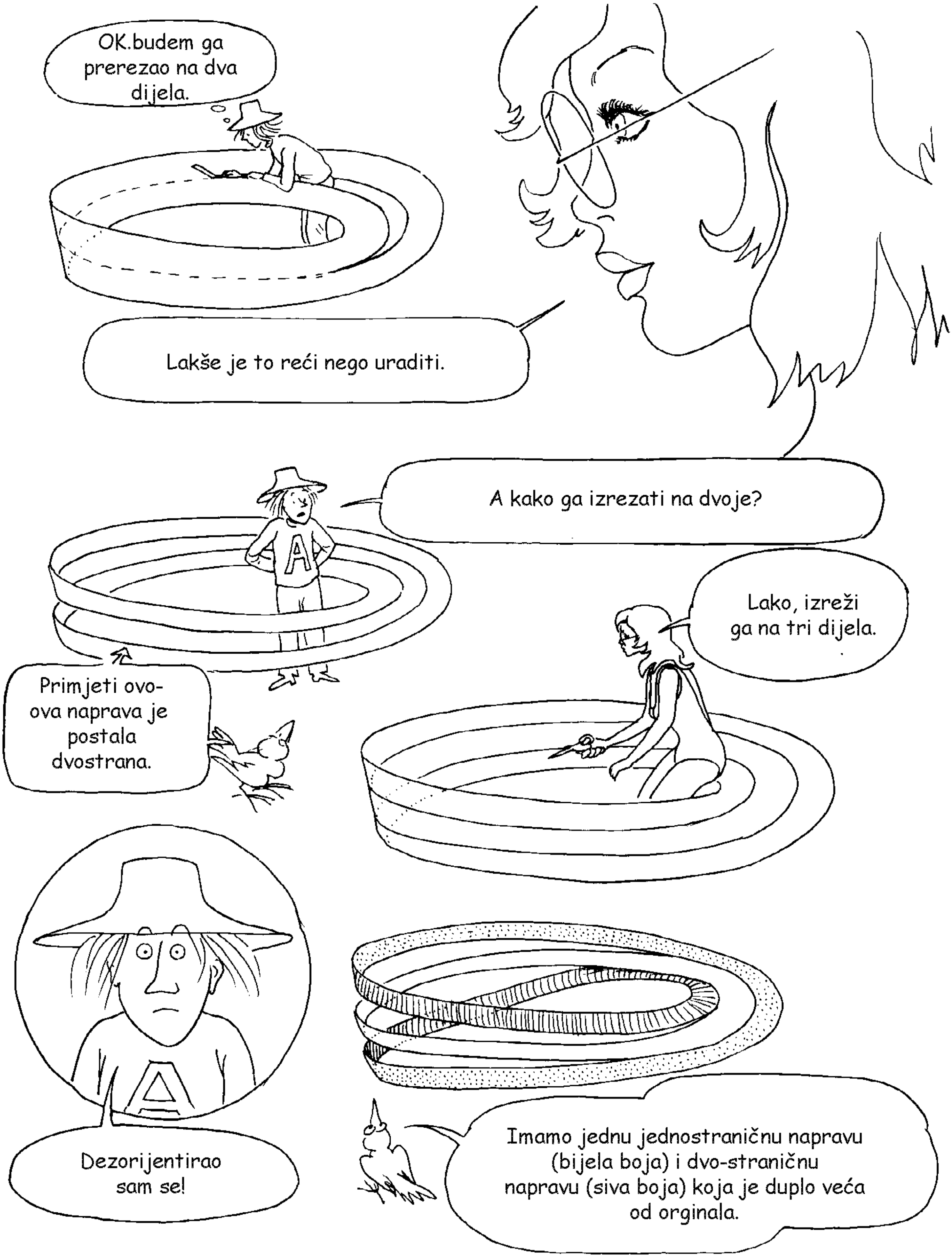
ili, možda nije...





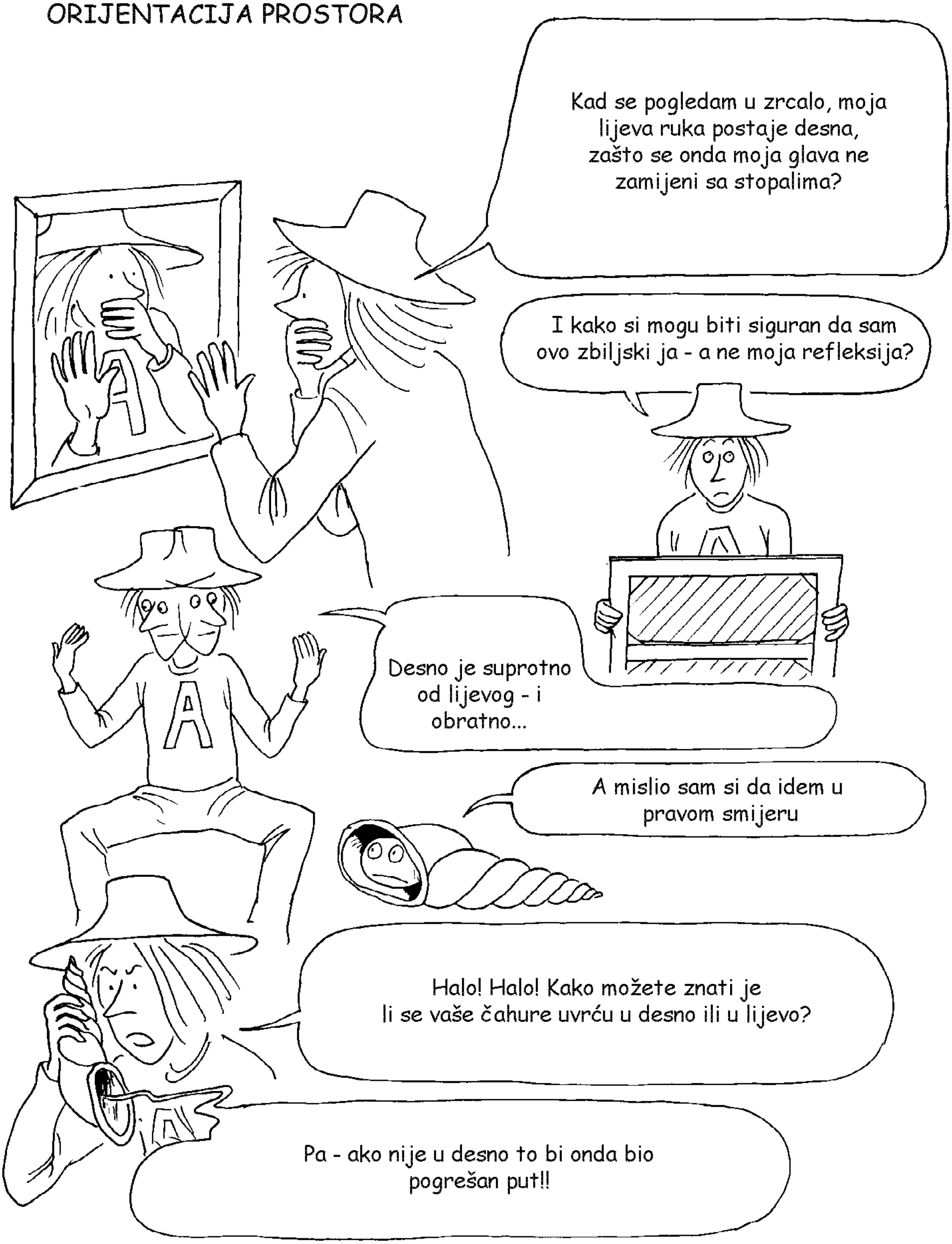
Nacrtaj krug na površini i stavi strijelice na njega. Misli o krugu kao o maloj naljepnici koju možemo sklizati po površini. Ako se krug uvijek vraća u orginalnu poziciju sa strijelicama koje pokazuju isti put, mi kažemo - površina je orijentaciona kao u slučaju sfere, valjka, plohe, itd.
Ali na "Möbius band-u" stvari stoje drukčije...



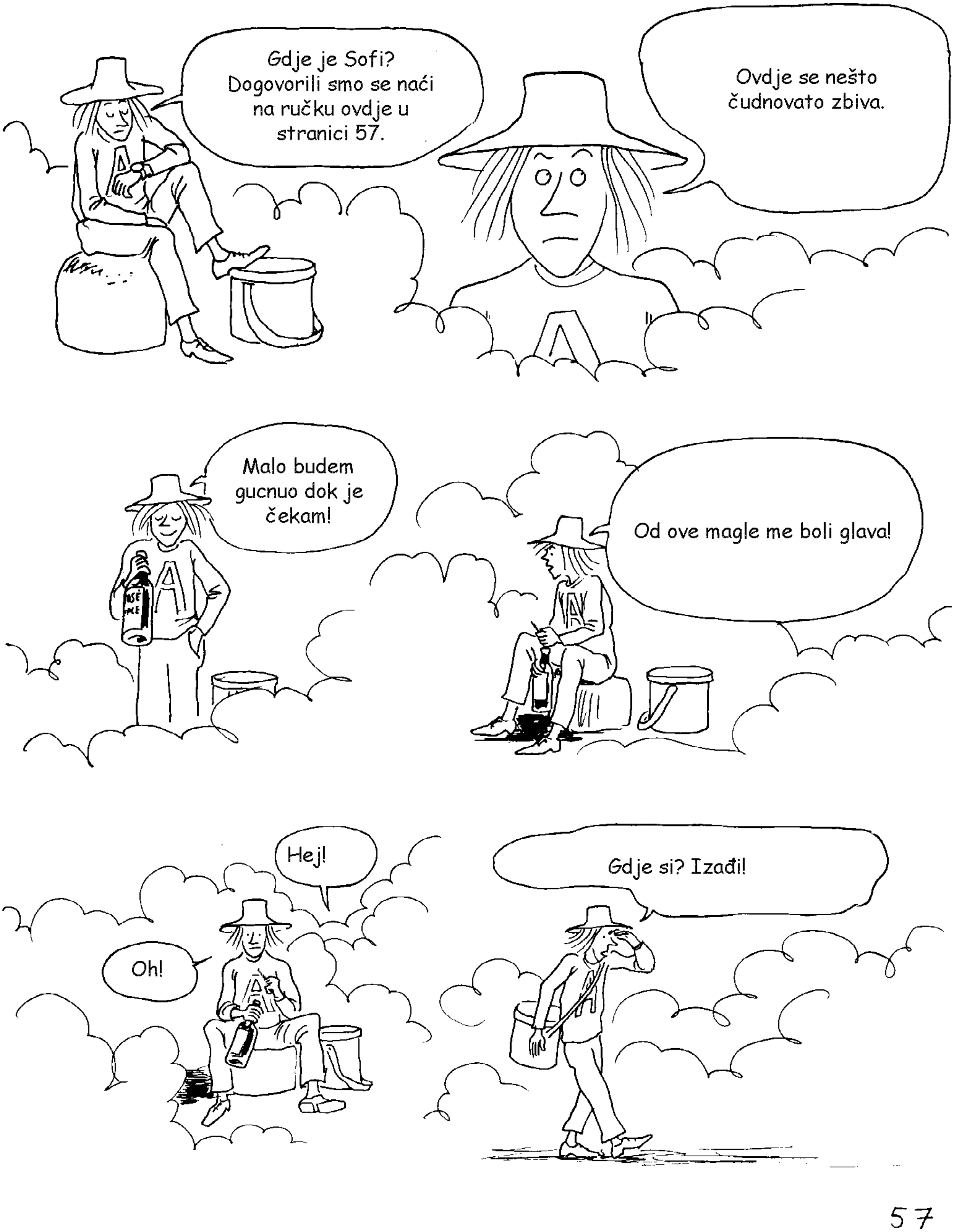

OK.budem ga prerezao na dva dijela.
Lakše je to reći nego uraditi.
A kako ga izrezati na dvoje?
Primjeti ovo-ova naprava je postala dvostrana.
Lako, izreži ga na tri dijela.
Dezorijentirao sam se!
Imamo jednu jednostraničnu napravu (bijela boja) i dvo-straničnu napravu (siva boja) koja je duplo veća od orginala.

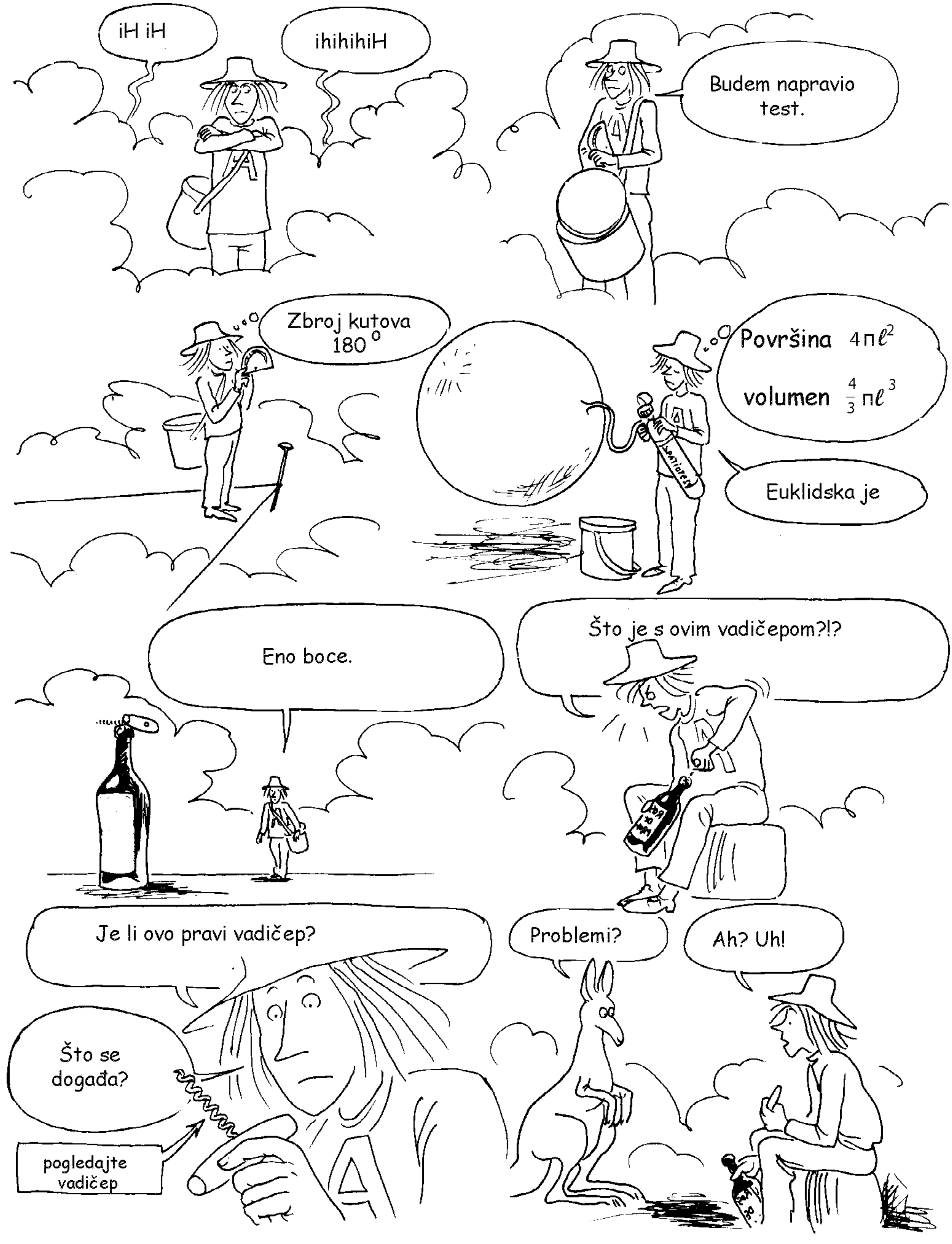
Nakon ovih događaja vratimo se tro-dimenzionalnom euklidskom prostoru

ORIJENTACIJA PROSTORA



Pratimo dalje Archija u otkrivanju euklidskog svijeta (bez zakrivljenja)

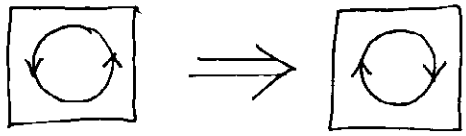




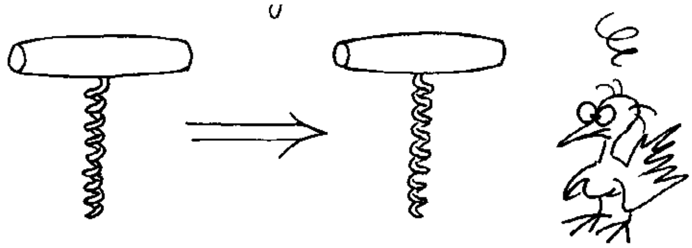
iH iH
ihihihiH
Budem napravio test.
Zbroj kutova 180 °
Površina $4\pi\ell^2$
volumen $\frac{4}{3}\pi\ell^3$
Euklidska je
Eno boce.
Što je s ovim vadičepom?!?
Je li ovo pravi vadičep?
Što se događa?
pogledajte vadičep
Problemi?
Ah? Uh!


Piješ ovo, nije loše, uopće nije loše!
Imaš problema s vadičepom?
Da!
Bolje biti pijan nego star
bolje biti pijan nego star
GUC
GUC
GUC
Niš čudno nisi primjetio?
Pio sam i bolja vina.
vino ne zna da smo nekad bili dobar par...
Bok stari
Netko mi je pokvario vadičep, a klokan je popio moje vino... Što se ovdje zbiva?
Huh!
Preporučujemo vam da pogledate ovaj vadičep sa pozornošću.

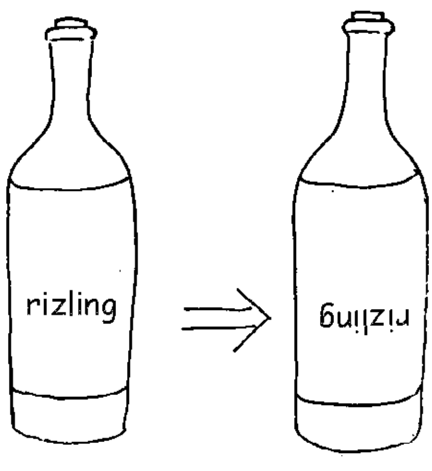
"Möbius band" - ne orijntirani dvo-dimenzionalni prostor ima analogne tri dimenzije. Na "Möbius band-u" cirkularni znak koji tvori kruženje u prostoru može se vratiti sa svojim promijenjenim smjerom.



pogledaj stranicu 54



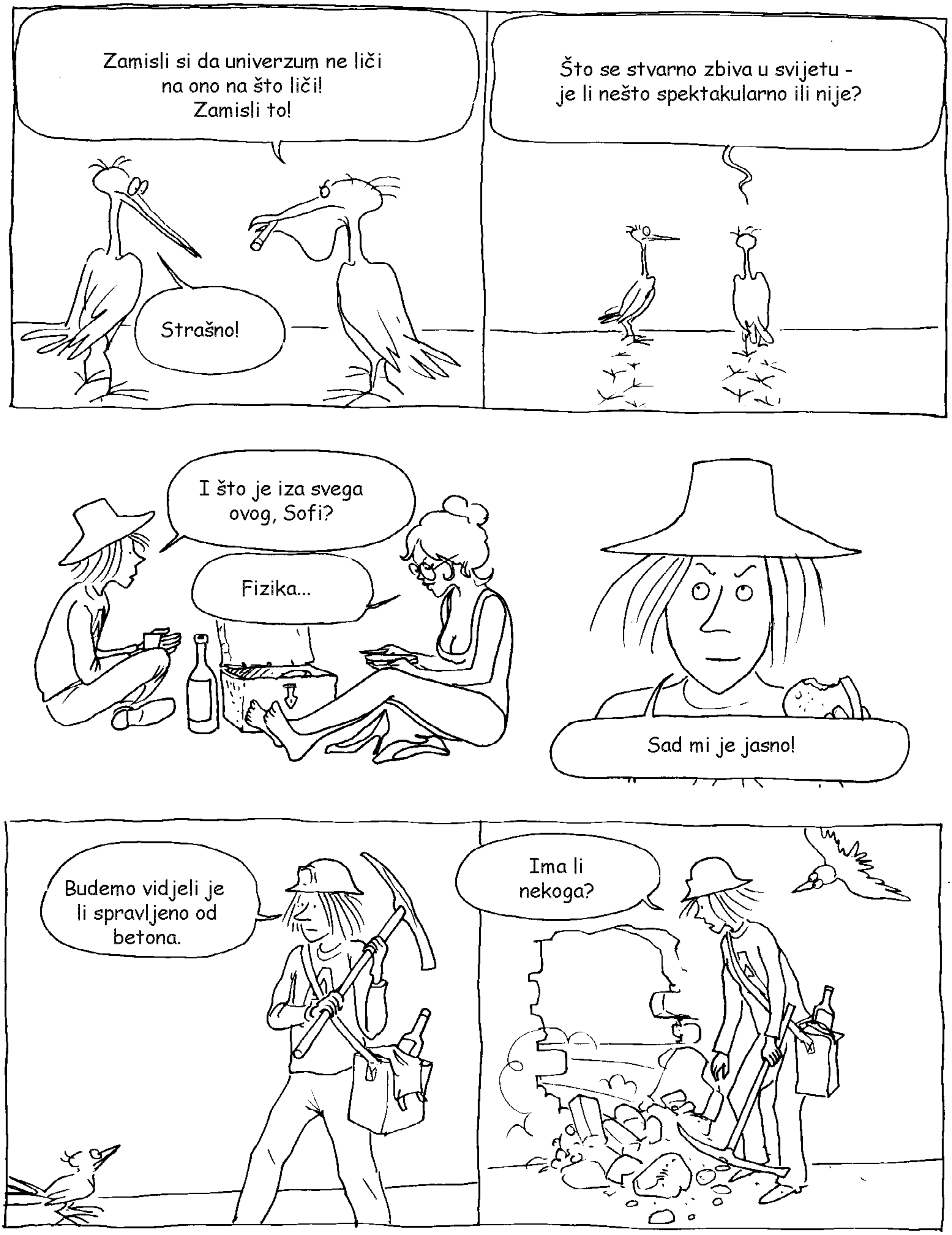
Vadičep je odraz iz zrcala. Vadičep i Archi se mogu posmatrati kao naljepnice u tro-dimenzionalnom prostru, njihov smjer je obrnut. Kako smo našli Archija u njegovom izokrenutom putovanju ne iznenađuje što smo, kao i njega, pronašli bocu kao odraz u zrcalu, i vadičep zaokrenut u suprotnom smjeru. Drugo kruženje bude obnovilo ove objekte do njihovog pravog pojavljivanja.



Archi i klokan (antipodna vrsta) žive u istom prostoru, ali drukčiji su na ovaj način, ono što je za klokana ispravno za Archija nije i obratno.

EPILOG:


Ovo je otišlo predaleko. Svega i svačega ima, ni pravo ni gore, i kud onda?
Moraš pratiti geodeze Archi, geodeze tvog života.
Hih! Nikad ti ja ne budem povjerovao u to!
To ti je kao nešto iz stripa!
Zašto se mučiš s tim, očito je-univerzum je euklidski! (*)
(*) Ovo gledište je iz 1830 godine, profesor matematike iz Petrograda, Ostrogradski, ga je ustanovio.



Zamisli si da univerzum ne liči na ono na što liči! Zamisli to!
Strašno!
Što se stvarno zbiva u svijetu - je li nešto spektakularno ili nije?
I što je iza svega ovog, Sofi?
Fizika...
Sad mi je jasno!
Budemo vidjeli je li spravljeno od betona.
Ima li nekoga?


...ako je gustoća supstanci u univerzumu manja od 10^{-29}gm.cm^{-3}
?
...onda univerzum bude imao negativnu zakrivljenost i beskrajno prostriranje
... s druge strane, ako je gustina veća od 10^{-29}gm.cm^{-3}
!..
Univerzum bude bio hipersferni i zatvoren
A ako je gustina jednaka 10^{29}gm.cm^{-3}, to bude bilo euklidski.
Hmmm
Dr.Einstein?
Ja sam.


Ima li matematičara u blizini!!!
KRAJ