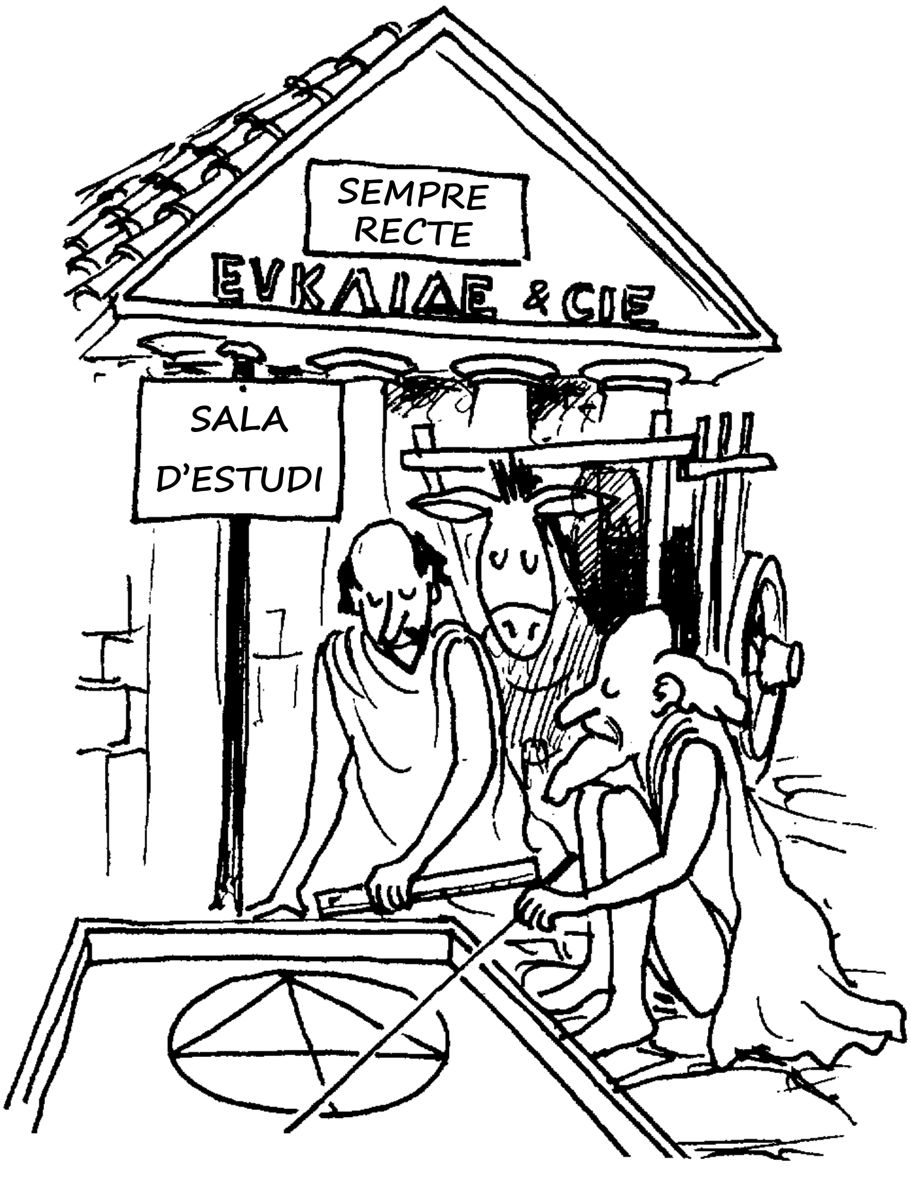
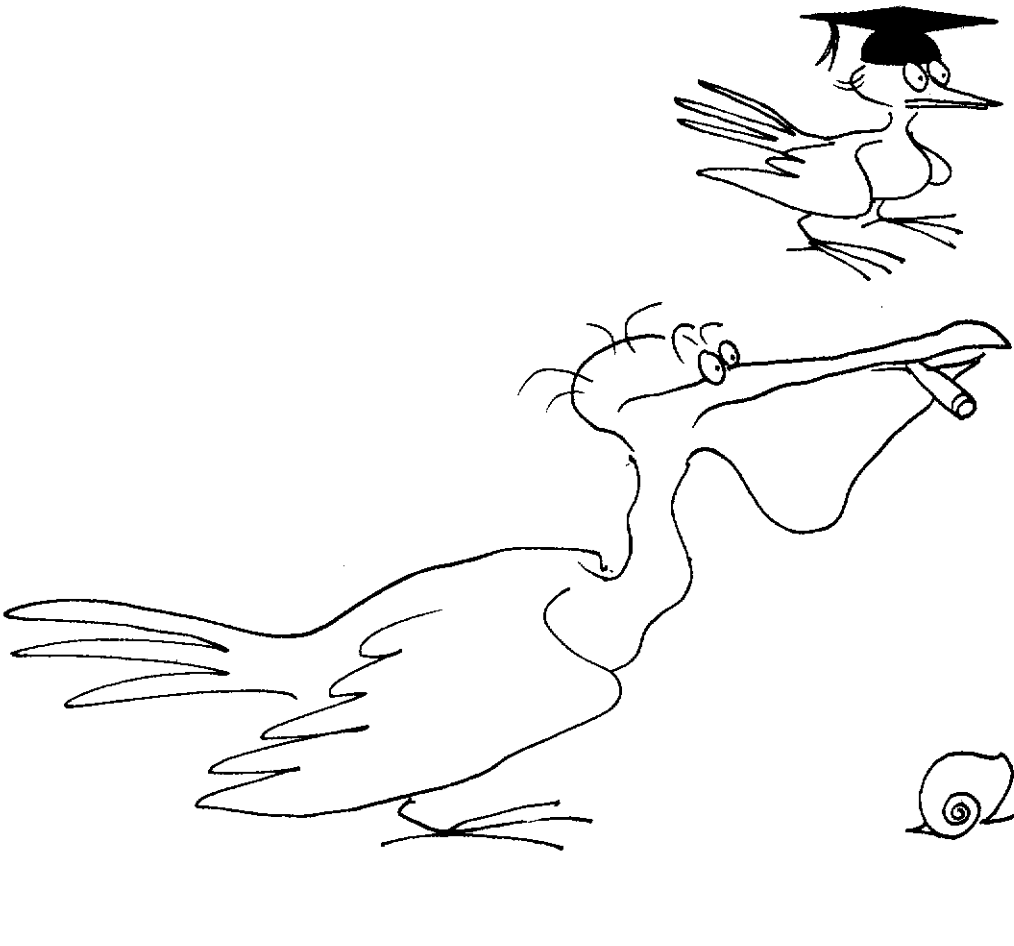
Les Aventures d'Anselm Lanturlu

EL GEOMETRICÓ

Jean-Pierre Petit





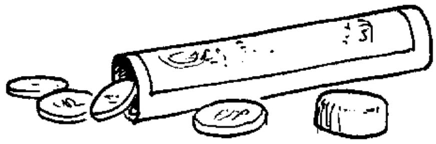

Hi ha
cap matemàtic
a la sala?

ADVERTÈNCIA

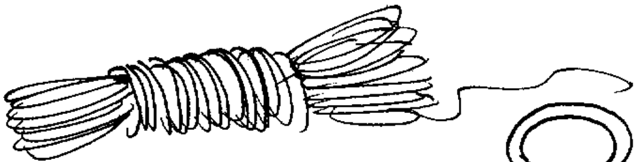
AIXÒ NO ÉS NI UN TRACTAT, NI UN CURS.
ÉS SIMPLEMENT LA HISTÒRIA D'ANSELM LANTURLU
I UN DELS SEUS VIATGES,
AL PAÍS DE LA GEOMETRIA.

LLEGIR PREFERIBLEMENT AMB:

* SOBRETOT ASPIRINA

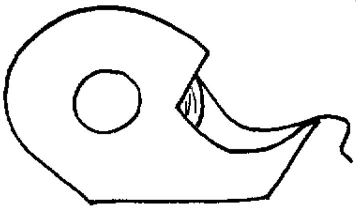


* DESPRÉS CORDA

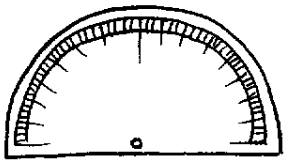


* TISORES

* CINTA ADHESIVA

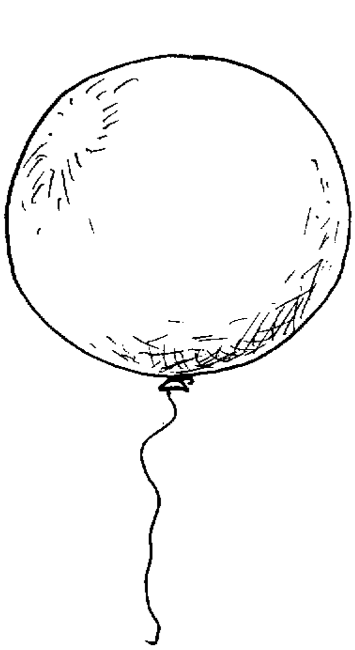


* UN TRANSPORTADOR



* I UN GLOBUS BEN MACO

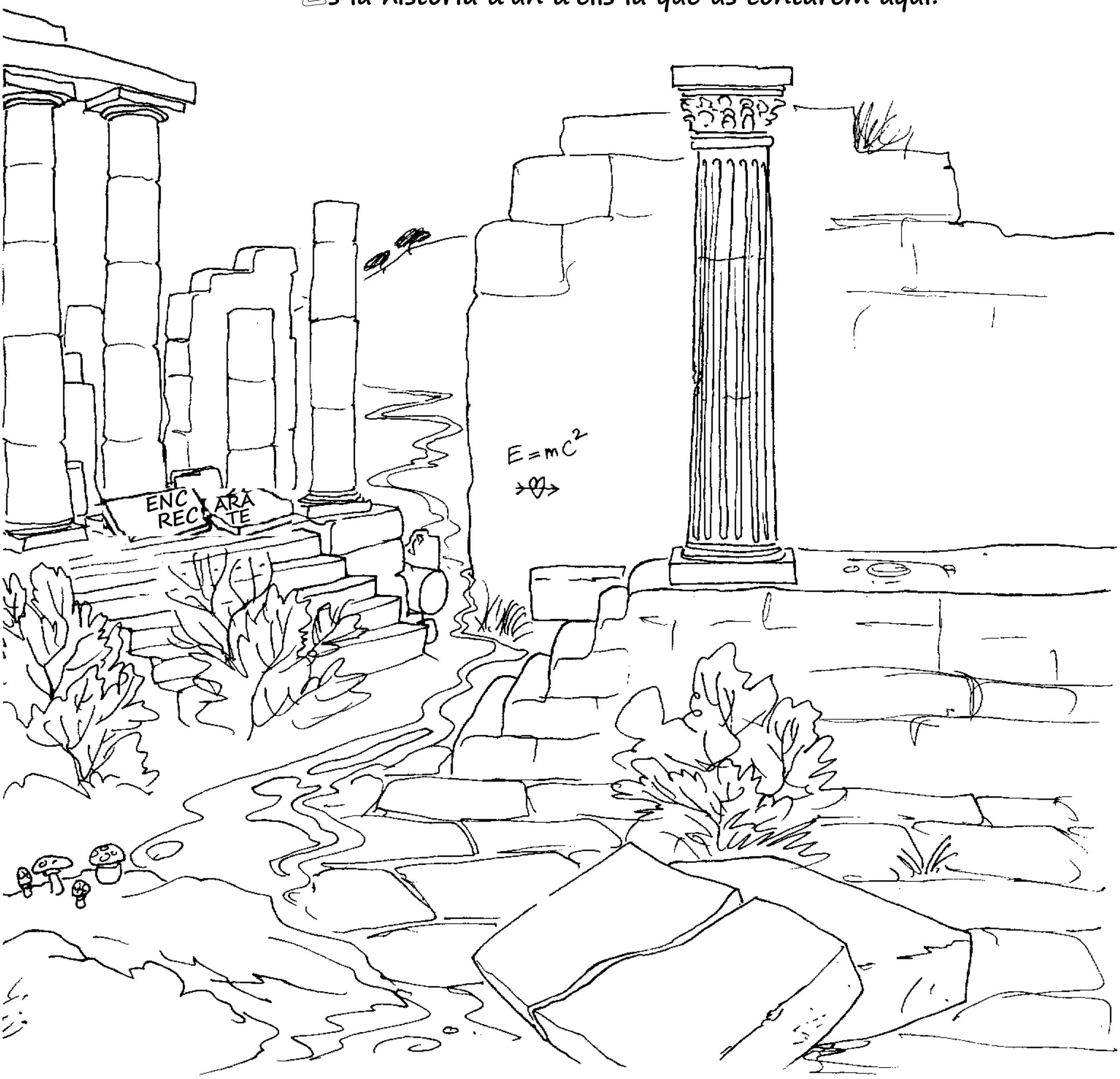
BEN RODÓ...



La societat Euclides i Cia va néixer a Alexandria al tercer segle abans de Jesucrist. Durant dos mil dos-cents anys els negocis van prosperar. Els productes eren apreciats i la clientela satisfeta i fidel.

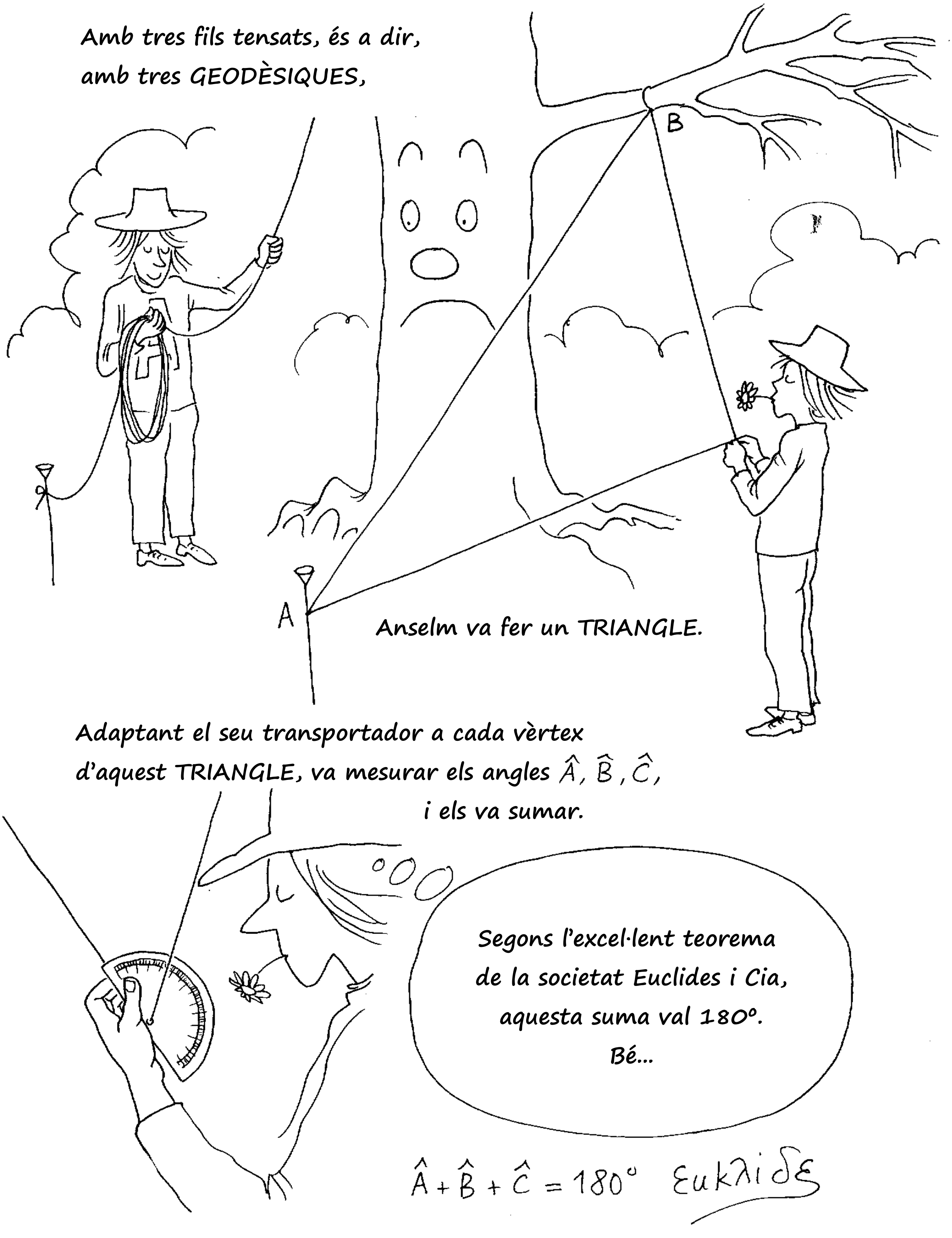
Però, poc a poc, el gust dels clients va canviar. Alguns, abans incondicionals de la marca, com a conseqüència d’experiències curioses, es van preguntar: "Euclides, és realment, per a tot i per tot arreu, el millor que hi ha?".

És la història d’un d’ells la que us contarem aquí.

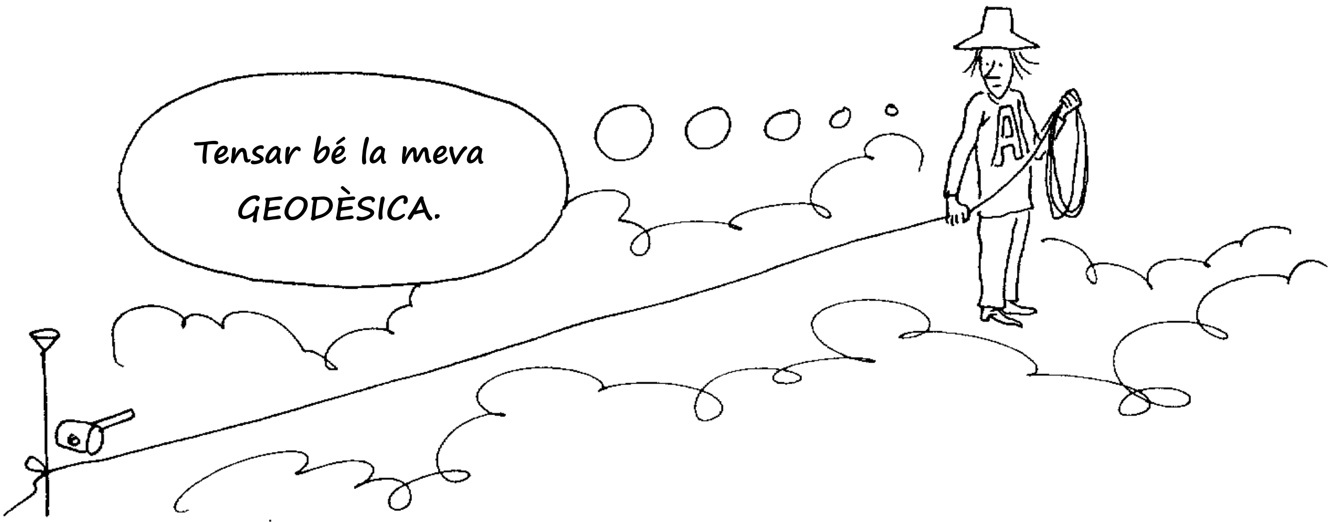


PRÒLEG:

Un dia, Anselm Lanturlu va decidir tensar un cordill entre dos pals:

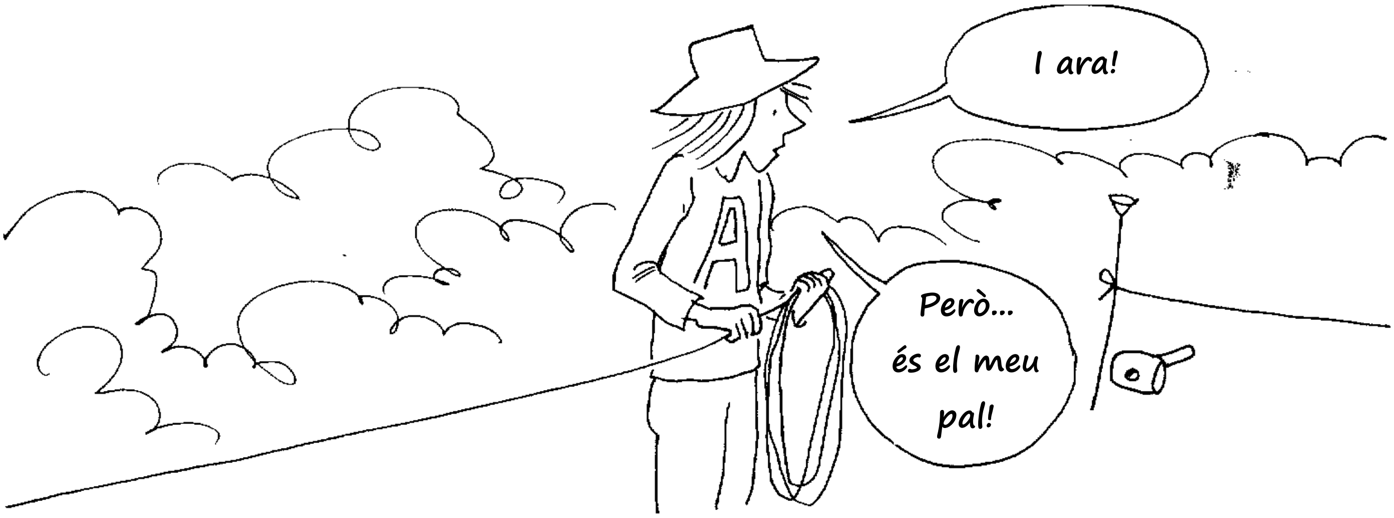

Amb tres fils tensats, és a dir, amb tres GEODÈSIQUES,
B
A
Anselm va fer un TRIANGLE.
Adaptant el seu transportador a cada vèrtex d'aquest TRIANGLE, va mesurar els angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, i els va sumar.
Segons l'excel·lent teorema de la societat Euclides i Cia, aquesta suma val 180º. Bé...
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ Ευκλιδε

El món on vivia Anselm era boira pura. Ens hauríem mocat amb el nas d'un altre.



Anselm va caminar durant molt de temps, molt de temps...
Darrere seu el cordill es desenrotllava, tant bé tensada, que li eren indiferents les incertituds de caminar entre la boira: fabricava una GEODÈSICA impecable.

Però, no sé si ho heu observat, hi han dies on sembla que tot passa del revés.



Anselm, que encara tenia cordill, va decidir aclarir aquest assumpte.

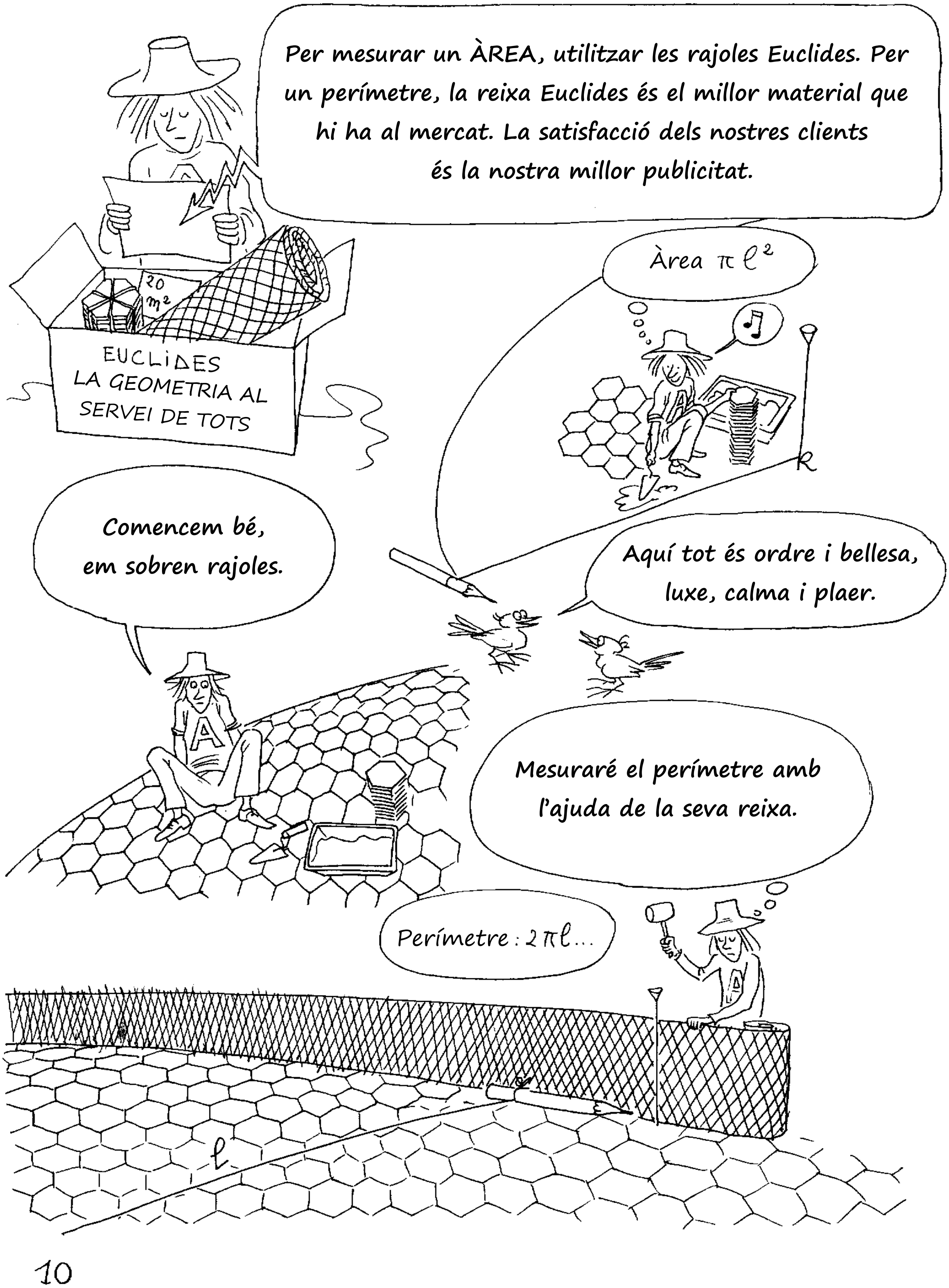
Inalterable, va continuar tensant el seu cordill, i continuà, DRET DAVANT, ple de curiositat.

Carai...

La RECTA d'Anselm es tancava!


? ?
? ? ? ? ?
? ? ? ?
Intentem un teorema de Euclides. Treuré tres GEODÈSIQUES amb la mateixa longitud. Això em donarà un TRIANGLE, els tres angles del qual hauran de tenir cadascú 60º, essent 180º la seva suma. Està escrit a les instruccions.
B 60 60 60 A C
Â+B̂+Ĉ = 180°
A veure.
RATIO OMNIA VINCIT
A
B
Ja tinc el segon vèrtex B. Solament haig de tensar dos fils més per trobar el tercer.
És bonica la ciència.
I ara! Els angles són iguals, però fan més de 60º.
Hi ha un problema?
C
La seva suma, és clar, fa més de 180º!
GEOMETRIA EUCLIDIANA
EUCLIDES
EUCLIDES

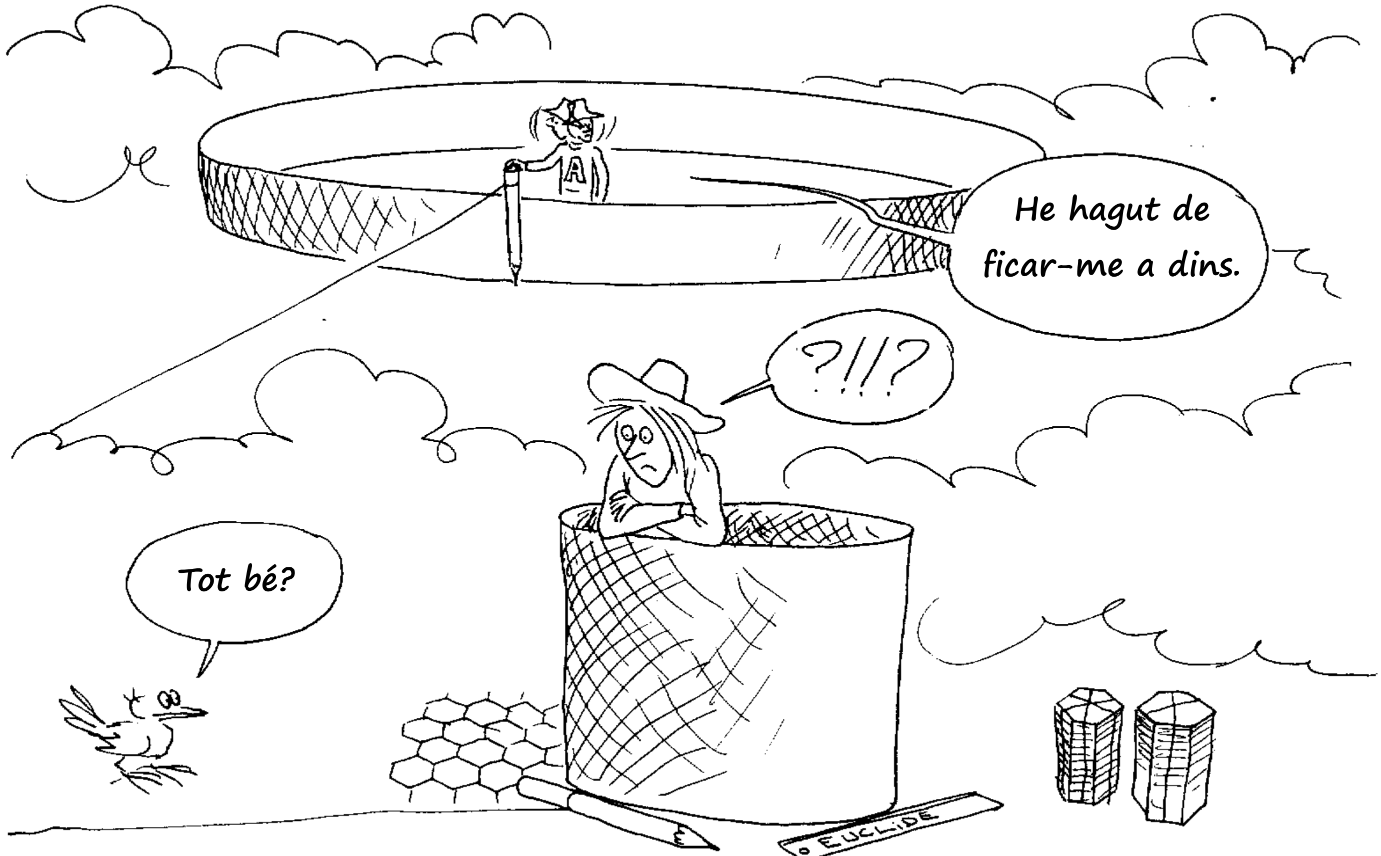

No obstant, posant el meu regle perfectament PLA, he verificat que els meus fils eren ben RECTES.
EUCLIDE
Hola, és la casa d'Euclides? Tinc problemes amb el seu material.
Un moment, li passo amb el servei tècnic.
Problemes amb el nostres triangles? Sorprenent. Per què no prova els nostres cercles? Els nostres clients estan molt contents.
... Un cercle és, aleshores, el conjunt dels punts situats a una distància ℓ d'un punt fix.
Vostè diu: perímetre $2\pi\ell$, ÀREA: $\pi\ell^2$, prenc nota.
ℓ
Al seu servei.


Per mesurar un ÀREA, utilitzar les rajoles Euclides. Per un perímetre, la reixa Euclides és el millor material que hi ha al mercat. La satisfacció dels nostres clients és la nostra millor publicitat.
20 m²
EUCLIDES
LA GEOMETRIA AL
SERVEI DE TOTS
Àrea $\pi \ell^2$
Comencem bé, em sobren rajoles.
Aquí tot és ordre i bellesa, luxe, calma i plaer.
Mesuraré el perímetre amb l'ajuda de la seva reixa.
Perímetre : $2\pi\ell$...
ℓ


També tinc massa reixa!
Hola, la casa Euclides? Sí, sóc jo un altre cop! Tinc problemes amb les seves rajoles I la seva reixa. $\pi\ell^2$, $2\pi\ell$, això no funciona!
No cridi així, senyor. Jo tan sols sóc la secretària. Li passo amb el servei tècnic.
No, no, les rajoles estan ben posades. El meu radi està ben dret, i la meva reixa està ben posada a sobre del CERCLE!
Senyor, li asseguro que aquest és el primer cop que passa això. Torni-ho a intentar i, no es preocupi, sap que els nostres teoremes estan garantitzats.

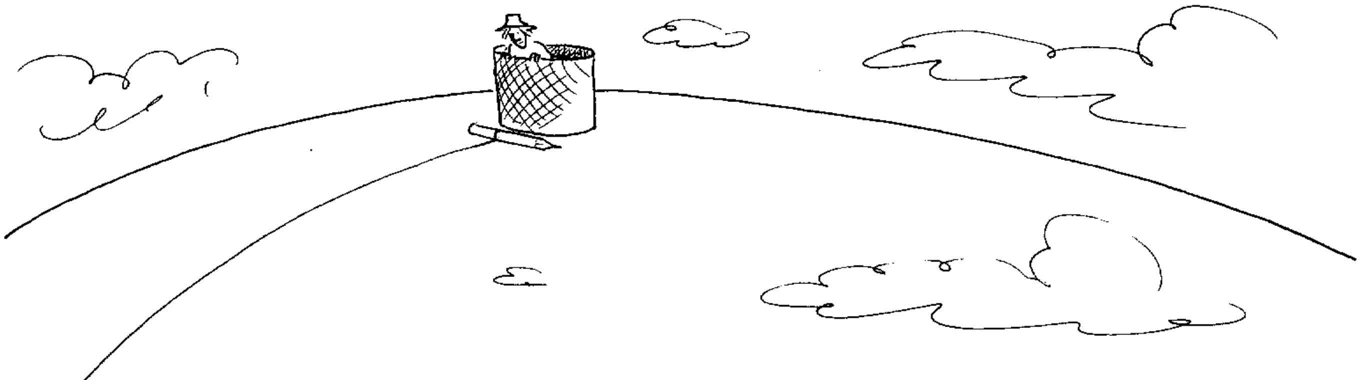

Carai, ara tinc més d'un 36% de reixa de més! I un 19% menys de rajoles! I el cercle que dibuixo s'ha tornat... una RECTA!
Somio o què?
I ara! En canvi aquest regle està ben RECTE!
EUCLIDES
Anselm augmenta encara més el radi ℓ, i aquest cop...
EUCLIDES
La curvatura del meu cercle ha passat a l'altra banda.
I ara, quan AUGMENTO ℓ, el meu perímetre DISMINUEIX, és de bojos!

Després d'un últim paviment:

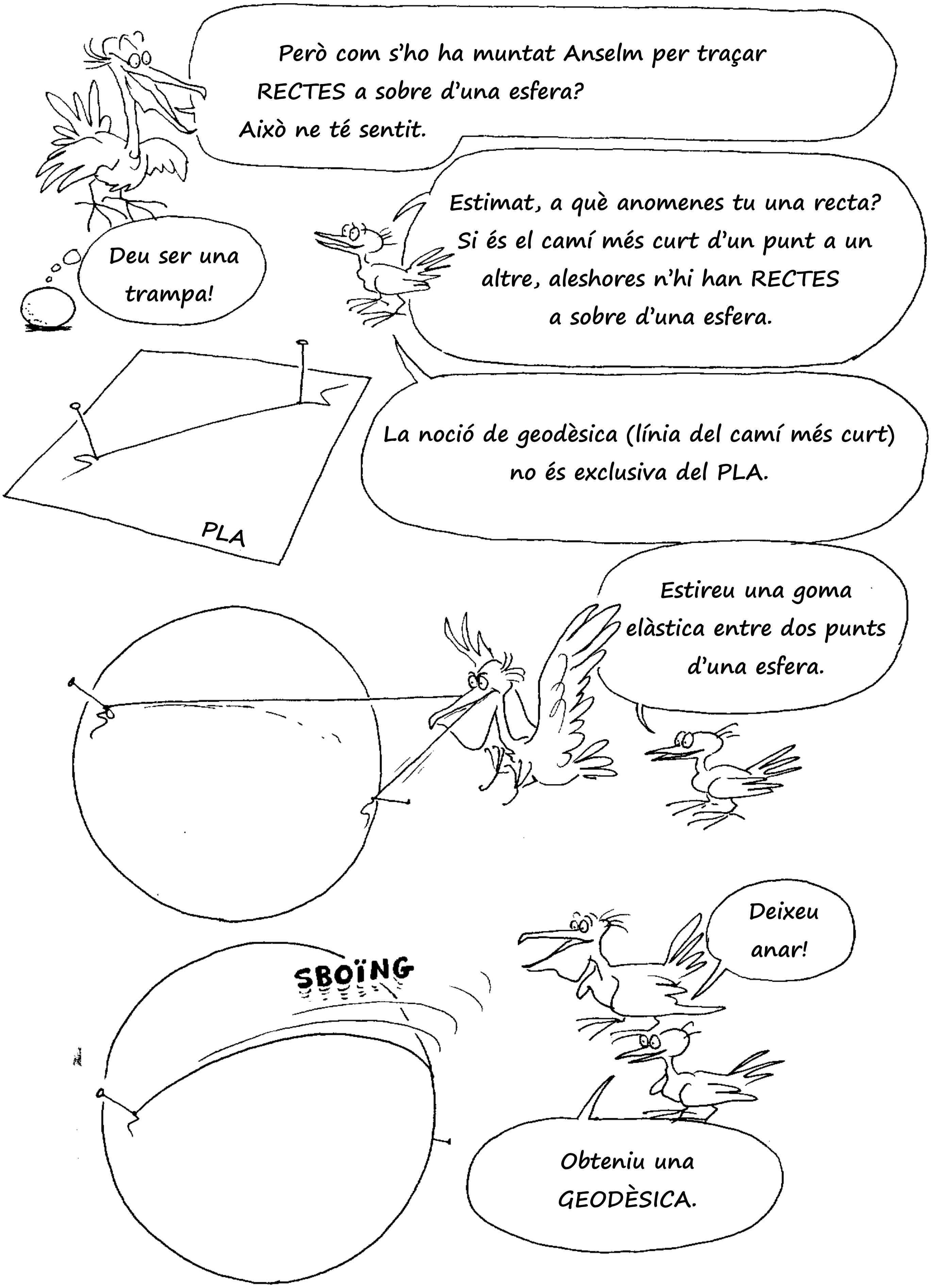


QUÈ HA PASSAT?

Per saber-ho, dissipem la boira:

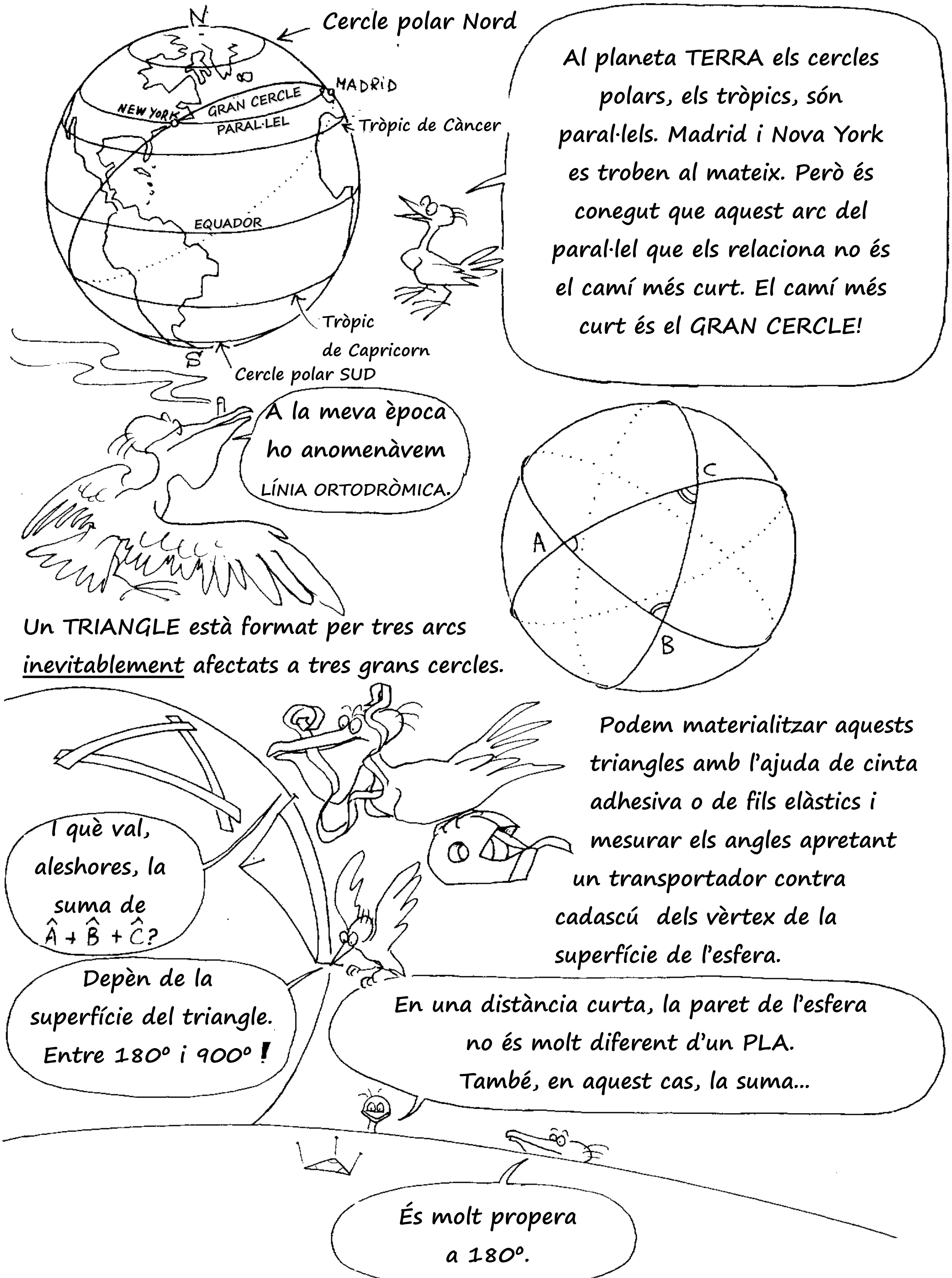


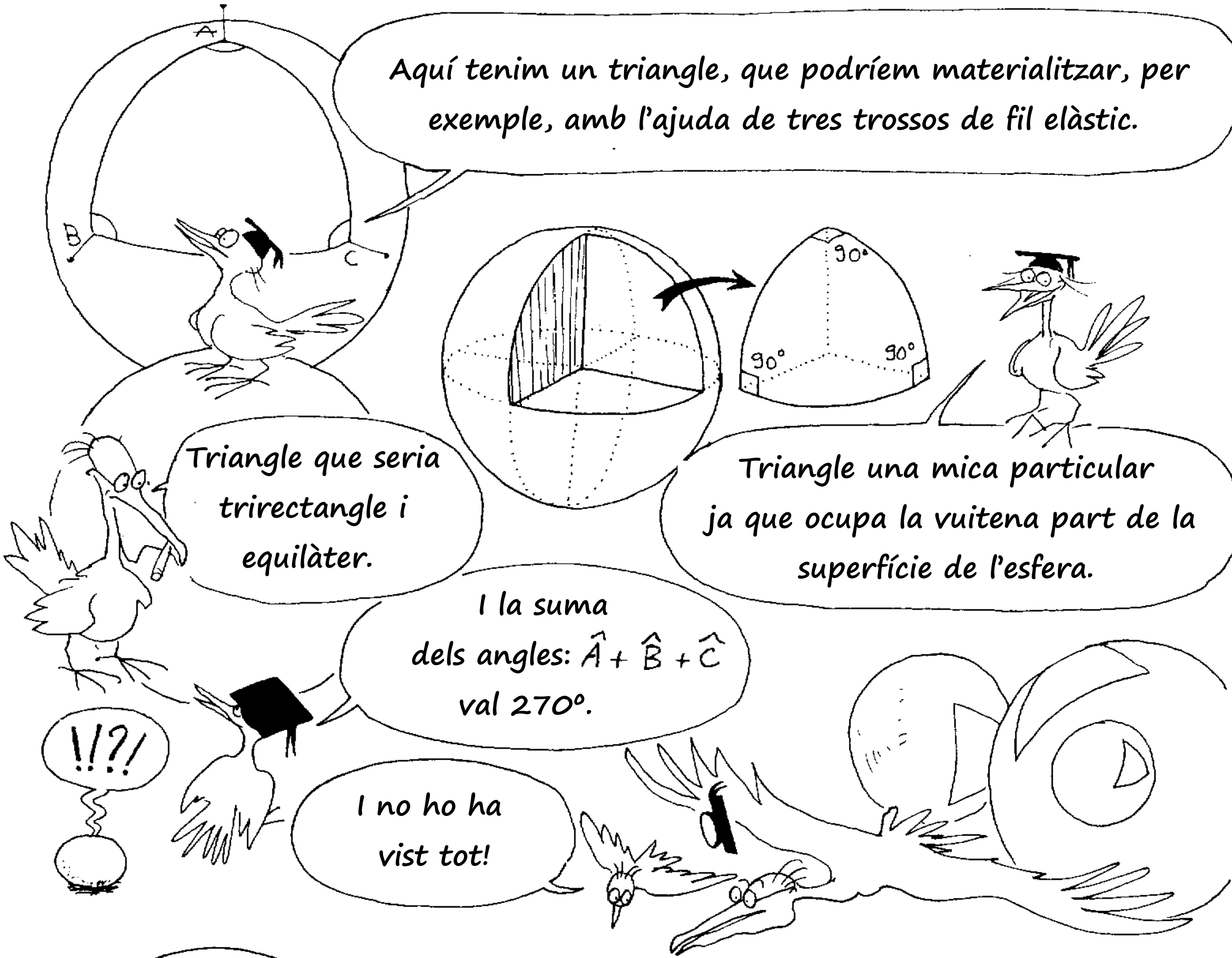
Anselm comprèn de sobte que es troba a sobre d'una esfera a sobre de la qual ha aplicat les regles de la GEOMETRIA del PLA.

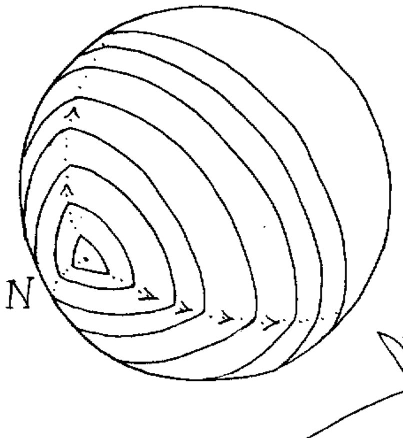

Però com s'ho ha muntat Anselm per traçar RECTES a sobre d'una esfera? Això ne té sentit.
Deu ser una trampa!
Estimat, a què anomenes tu una recta? Si és el camí més curt d'un punt a un altre, aleshores n'hi han RECTES a sobre d'una esfera.
PLA
La noció de geodèsica (línia del camí més curt) no és exclusiva del PLA.
Estireu una goma elàstica entre dos punts d'una esfera.
Deixeu anar!
SBOÏNG
Obteniu una GEODÈSICA.


Què m'està dient?
Aquesta cosa no està RECTA!
Agafi aquest regle i comprovi-ho vostè mateix.
Vostè anomena això un regle!
És un regle per a les SUPERFÍCIES. A sobre d'un PLA funciona molt bé, mireu: No permet anar ni a dreta ni a esquerra.
PLA
Quin regle més estrany, bé...
Bé, passa sempre que Lanturlu traça la seva geodèsica, es TANCA. Aleshores, a sobre d'una esfera, les geodèsiques, no són més que cercles?
Totes les línies del camí més curt, a sobre d'una esfera, són porcions de corbes geodèsiques tancades, que són cercles traçats a sobre d'aquesta esfera. Però no qualsevols!

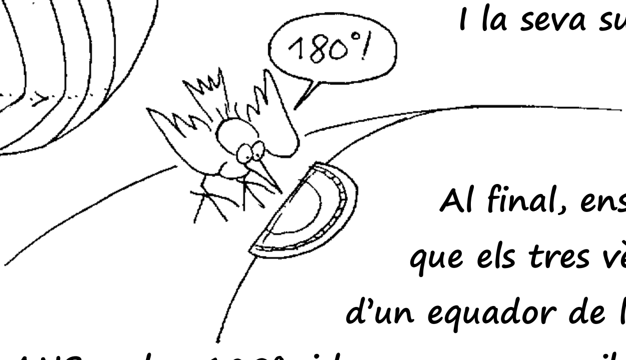
!???!
Què és aquesta història? Juga amb les paraules. Vol dir que existeix, a sobre d'una esfera, diversos tipus de cercles??!
Caram, pensava que ho entenia i vet aquí que ja no entenc res de res...
N
ℓ
Un xercle, éx el conjunt de punts situats a una distància constant ℓ d'un punt fix N, que anomenarem POL.
mmm...
N
Aquí tenim tot un conjunt de cercles de mateix pol N, que anomenarem PARAL·LELES.
S
EQUADOR
ℓ
ℓ'
S
Aquests cercles paral·lels també són els punts a igual distància ℓ' del punt S "pol sud" antípoda del "pol nord" N.
Entre ells, existeix un, més gran que els altres, que podria servir d'EQUADOR de l'esfera.
Per fi comprenc per què un cercle a sobre d'una esfera té DOS centres N i S!
A aquests "EQUADORS" els anomenarem: GRANS CERCLES de l'ESFERA. I seran, precisament, les seves GEODÈSIQUES.
És la primera vegada que veig una GEODÈSICA de prop... molt impressionant!


N
Cercle polar Nord
MADRID
NEW YORK
GRAN CERCLE
PARAL·LEL
Tròpic de Càncer
EQUADOR
Tròpic de Capricorn
S
Cercle polar SUD
Al planeta TERRA els cercles polars, els tròpics, són paral·lels. Madrid i Nova York es troben al mateix. Però és conegut que aquest arc del paral·lel que els relaciona no és el camí més curt. El camí més curt és el GRAN CERCLE!
A la meva època ho anomenàvem LÍNIA ORTODRÒMICA.
A
B
C
Un TRIANGLE està format per tres arcs inevitablement afectats a tres grans cercles.
Podem materialitzar aquests triangles amb l'ajuda de cinta adhesiva o de fils elàstics i mesurar els angles apretant un transportador contra cadascú dels vèrtex de la superfície de l'esfera.
I què val, aleshores, la suma de $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$?
Depèn de la superfície del triangle. Entre 180° i 900° !
En una distància curta, la paret de l'esfera no és molt diferent d'un PLA. També, en aquest cas, la suma...
És molt propera a 180°.

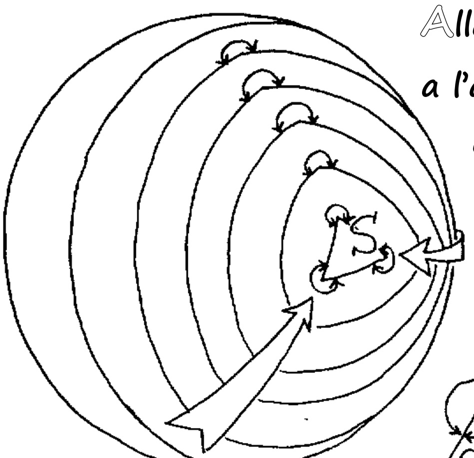




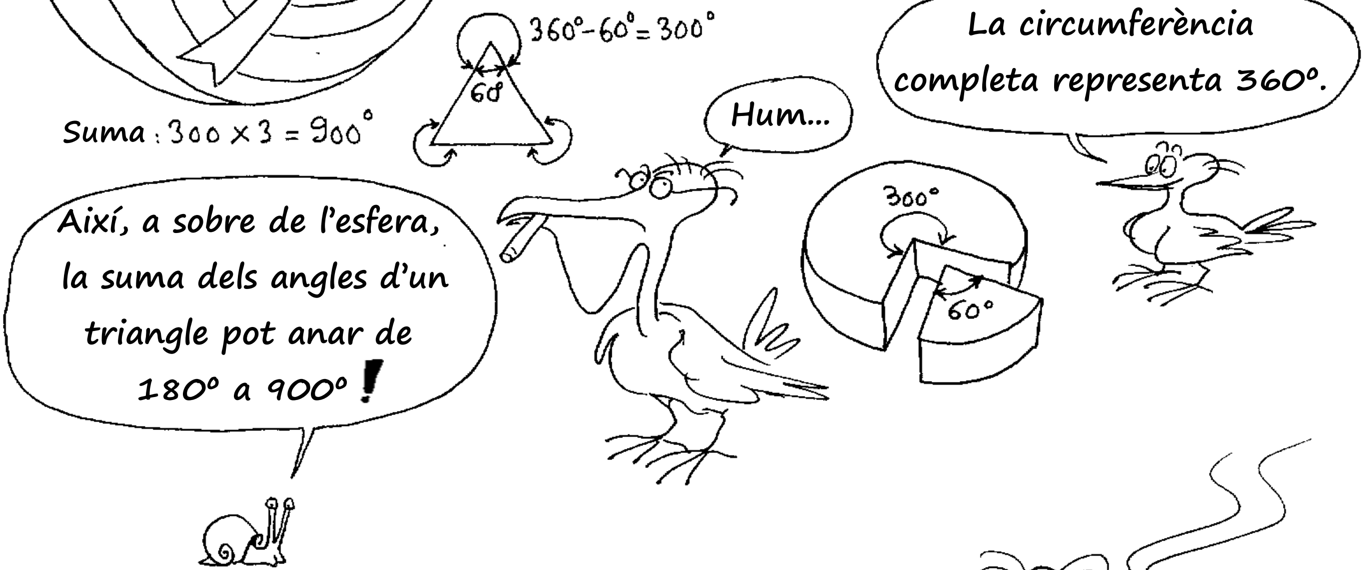
Imaginem ara un triangle, sempre format per aquests fils elàstics, dels quals allunyem progressivament els vèrtexs. Els angles en aquests vèrtexs creixeran.
I la seva suma farà el mateix.

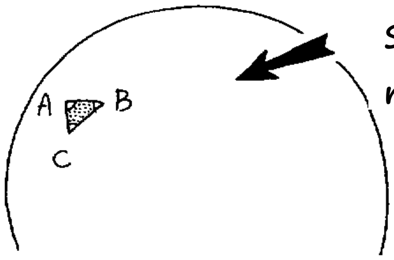


Al final, ens ho podem muntar bé per que els tres vèrtexs es dibuixin a sobre d'un equador de l'esfera. Els angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ i $\hat{C}$ són, doncs, PLANS, valen 180°, i la seva suma arriba a 540° !!...

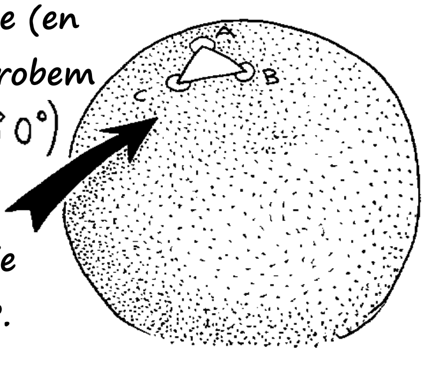


Allargant aquesta migració dels vèrtexs del triangle a l'altre hemisferi, aquest convergirà al punt S, antipodal de N. Si conservem als angles, als vèrtexs, la seva definició d'inici, cadascun d'ells valdrà aleshores més de 180°! Per ser precís, el valor de cadascun serà 360°−60°=300°.

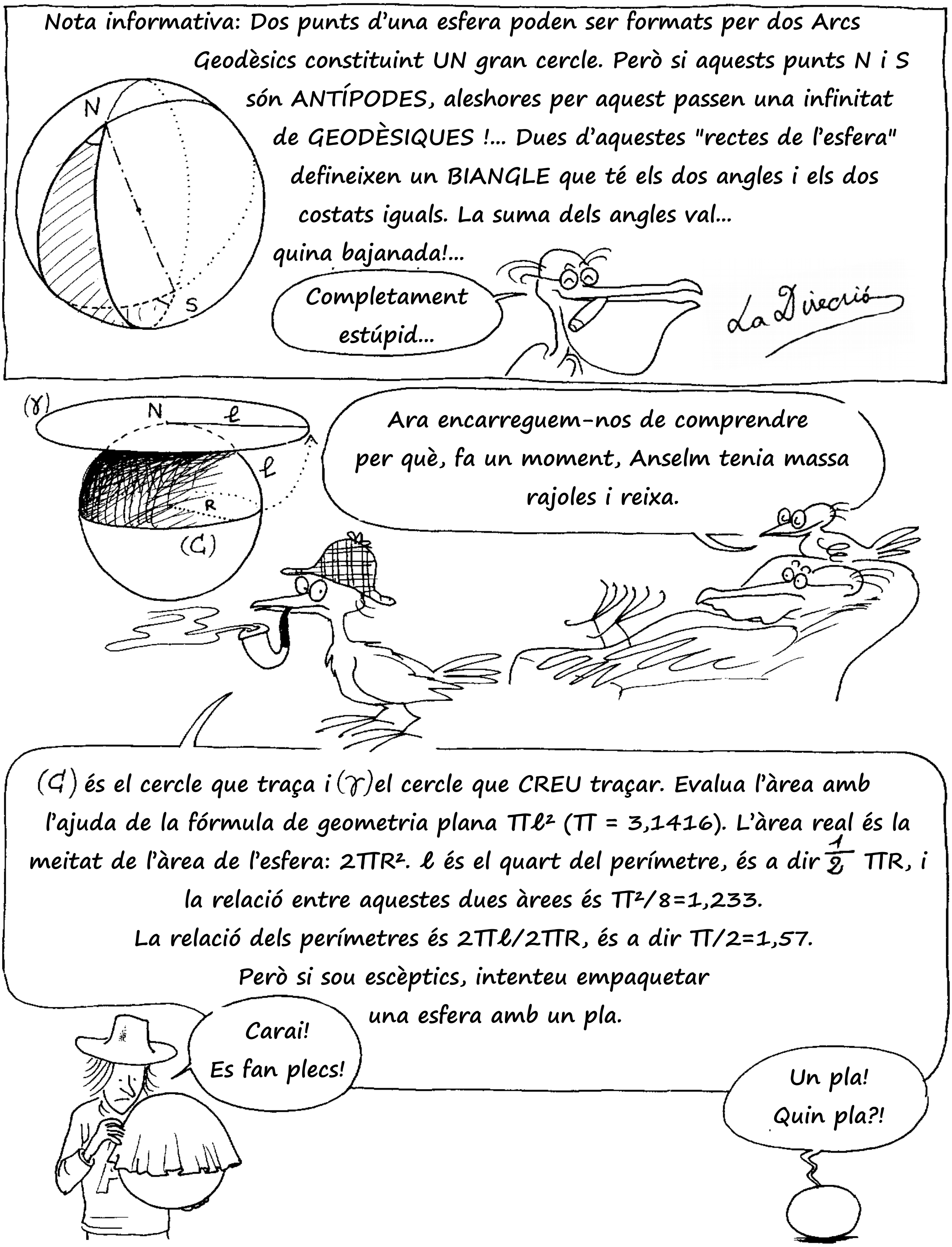




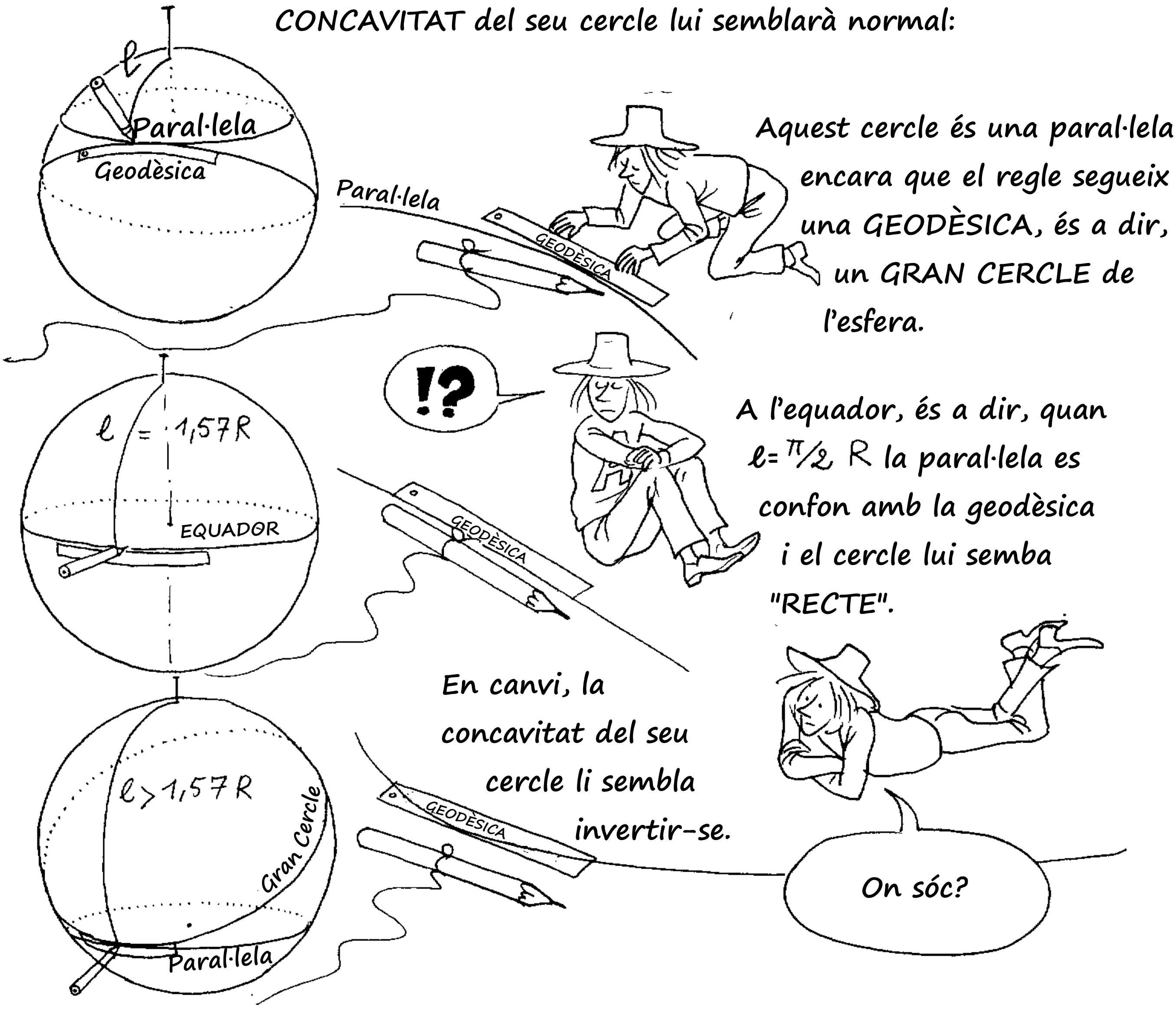
Si el triangle és d'àrea feble (en referència al de l'esfera), trobem a Euclides $\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°\right)$



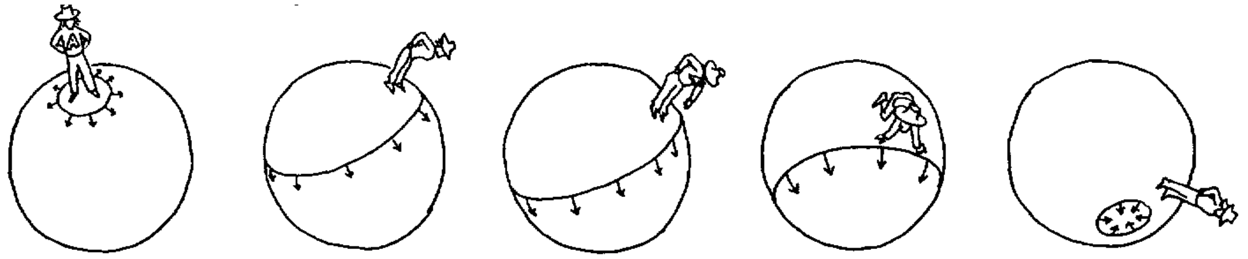
Si, al contrari, el triangle té gairebé la superfície de l'esfera (4 x 3,1416 x R^2), arribem als 900°.


Nota informativa: Dos punts d'una esfera poden ser formats per dos Arcs Geodèsics constituint UN gran cercle. Però si aquests punts N i S són ANTÍPODES, aleshores per aquest passen una infinitat de GEODÈSIQUES !... Dues d'aquestes "rectes de l'esfera" defineixen un BIANGLE que té els dos angles i els dos costats iguals. La suma dels angles val... quina bajanada!...
N
S
Completament estúpid...
La Direcció
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Ara encarreguem-nos de comprendre per què, fa un moment, Anselm tenia massa rajoles i reixa.
(C) és el cercle que traça i (γ) el cercle que CREU traçar. Evalua l'àrea amb l'ajuda de la fórmula de geometria plana $\pi\ell^2$ (π = 3,1416). L'àrea real és la meitat de l'àrea de l'esfera: $2\pi R^2$. ℓ és el quart del perímetre, és a dir $\frac{1}{2}\pi R$, i la relació entre aquestes dues àrees és $\pi^2/8=1,233$.
La relació dels perímetres és $2\pi\ell/2\pi R$, és a dir $\pi/2=1,57$.
Però si sou escèptics, intenteu empaquetar una esfera amb un pla.
Carai! Es fan plecs!
Un pla! Quin pla?!

Mentre Lanturlu no hagi arribat a l'equador de l'esfera, la CONCAVITAT del seu cercle lui semblarà normal:



Aquesta propietat explica com podem "entrar" o "sortir" tant com vulguem d'un cercle, sense travessar-lo, mentre estigui traçat a sobre d'una esfera. Fa falta imaginar-se aquest cercle com un anell elàstic que faríem relliscar a sobre d'una bola de billar.



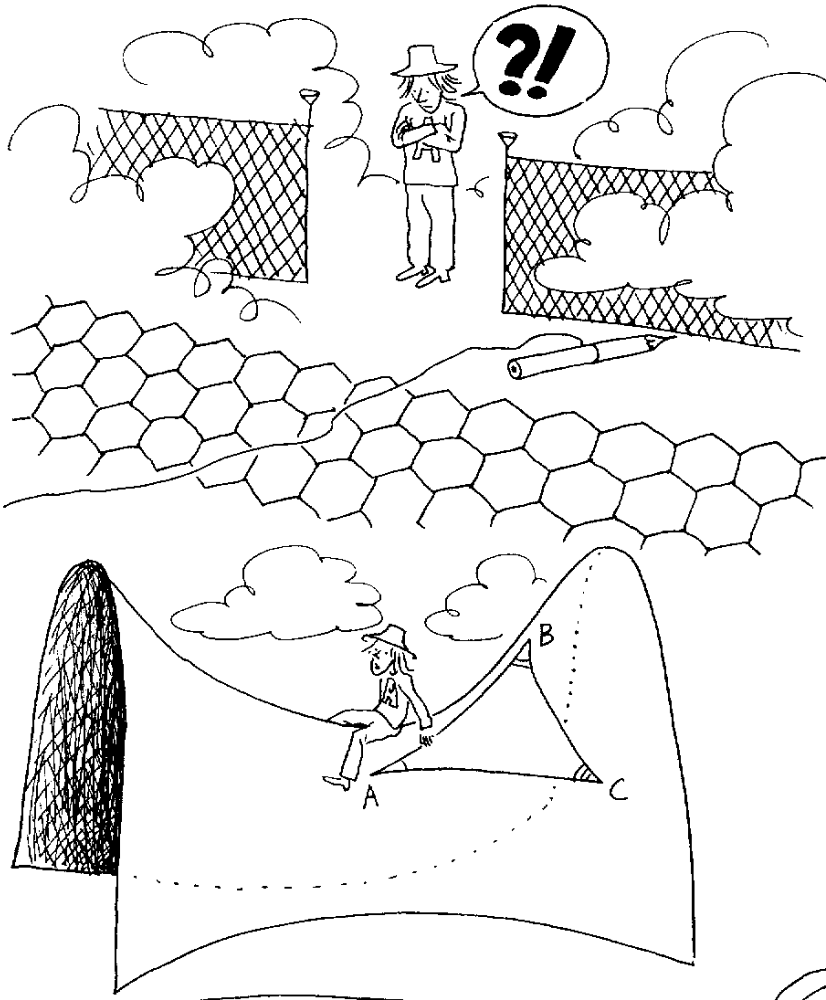
Anselm va trigar un temps a digerir tots aquests aspectes, descoberts pel matemàtic Gauss (1777-1855). Va decidir anar a la descoberta del món de les SUPERFÍCIES:

De vegades la ciència ens porta a prendre de riscs.

Havent aterrat a un nou món, Anselm desenrotlla un cop més una GEODÈSICA, però aquesta vegada:

La geodèsica no es tanca.

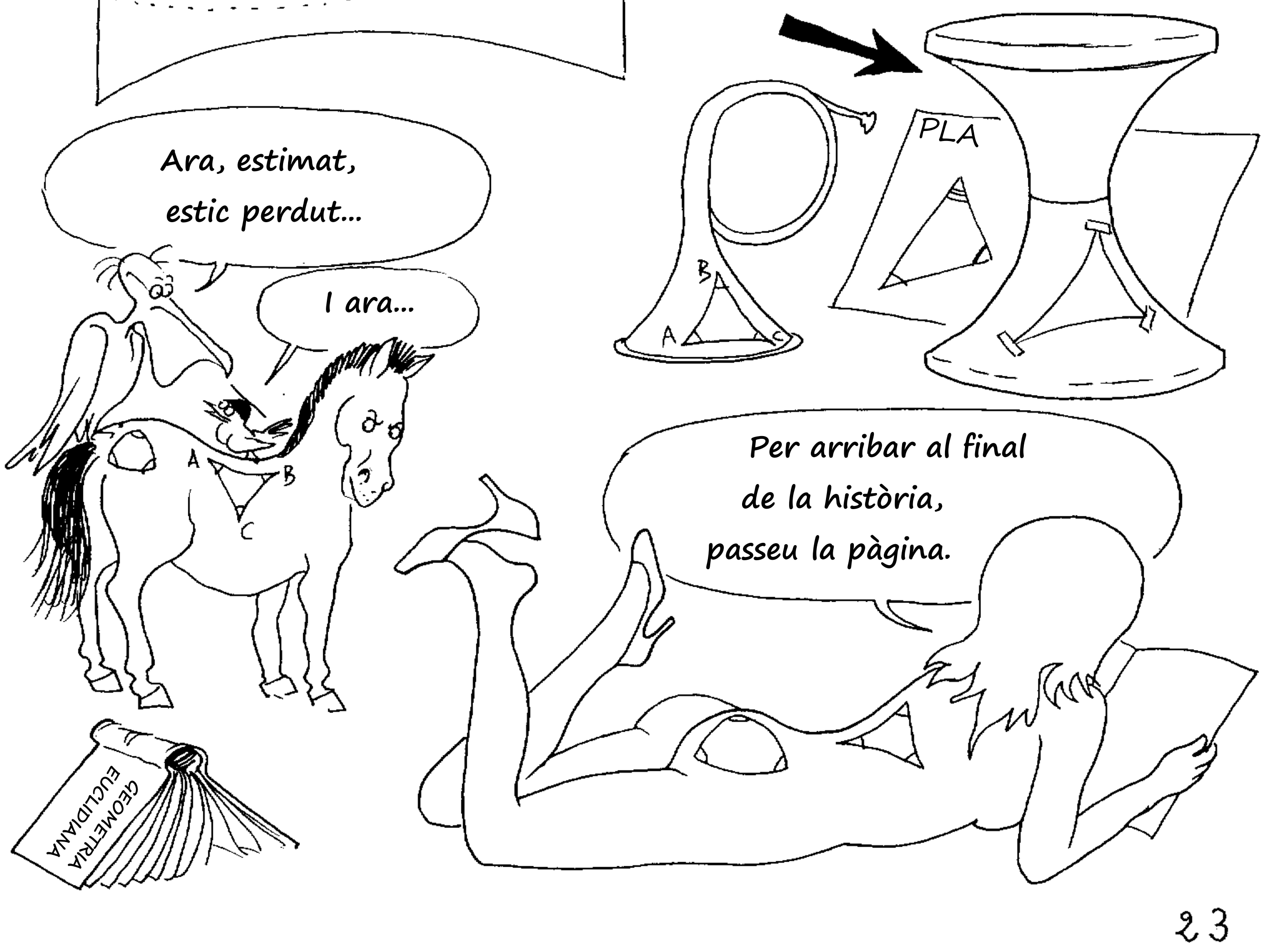
Amb l'ajuda de tres fils ben tensats, Anselm construeix un triangle, però la suma dels angles als vèrtex es mostra, aquesta vegada, inferior a 180°.



Un cercle éssent sempre el conjunt de punts situats a una mateixa distància ℓ d'un punt fix, Lanturlu constata que aquest cercle, traçat a sobre d'aquesta nova superfície, a un perímetre SUPERIOR a $2\pi\ell$, mentre que la seva àrea EXCEDEIX $\pi\ell^2$.

Dissipem la boira:

La superfície afecta, aquest cop, a la forma d'un coll de muntanya o d'una sella de cavall. Alguns objectes de vostra vida quotidiana també poden convenir: un corn de caça o aquest tipus de tamboret.



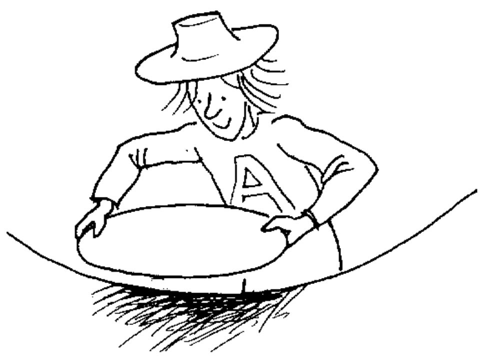
CURVATURA:

Una superfície corba és una superfície a on els teoremes euclidians no funcionen. La curvatura pot ser positiva o negativa.

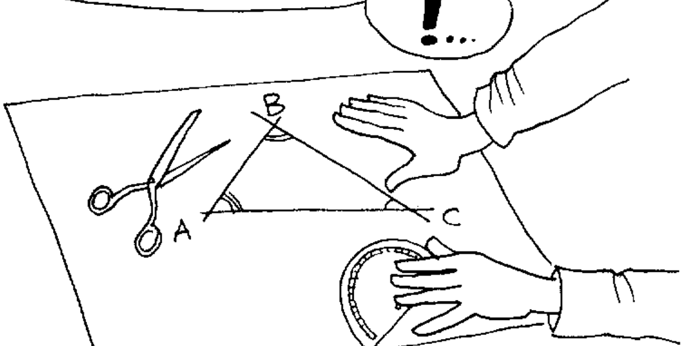
A sobre d'una superfície amb CURVATURA POSITIVA, la suma dels angles d'un triangle és superior a 180°. Si tracem un cercle de radi ℓ, la seva superfície és inferior a $\pi\ell^2$ i el seu perímetre inferior a $2\pi\ell$.

A sobre d'una superfície de CURVATURA NEGATIVA la suma dels angles d'un triangle és inferior a 180°. Si tracem un cercle de radi ℓ, la seva superfície és superior a $\pi\ell^2$ i el seu perímetre superior a $2\pi\ell$.

Fa un moment, Anselm havia constatat que intentant COBRIR una esfera, superfície amb curvatura positiva, amb un element pla, apareixien plecs. La cobertura d'una superfície de curvatura negativa amb un pla també és impossible: apareixen esquerdes. Aquest test de l'embalatge és el més senzill per determinar si la curvatura és positiva o negativa.

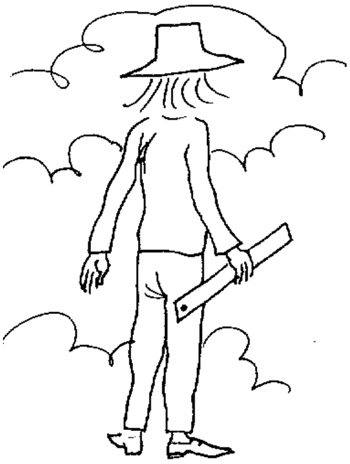


Com podem veure a la pàgina anterior, les superfícies poden presentar regions amb curvatura positiva i d'altres amb curvatura negativa.

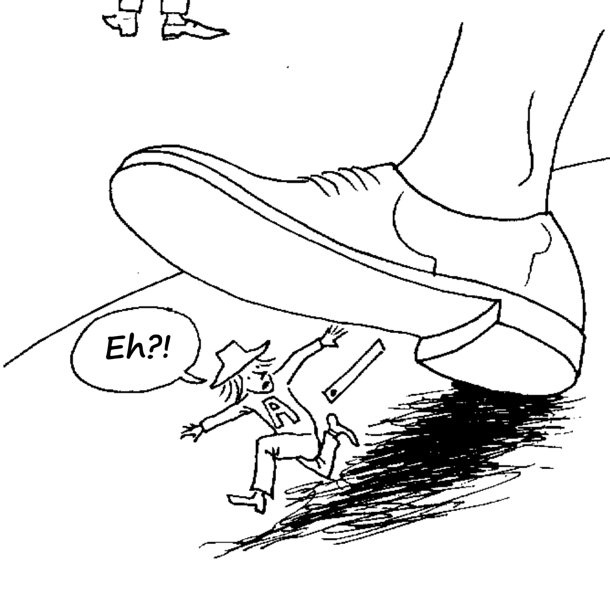


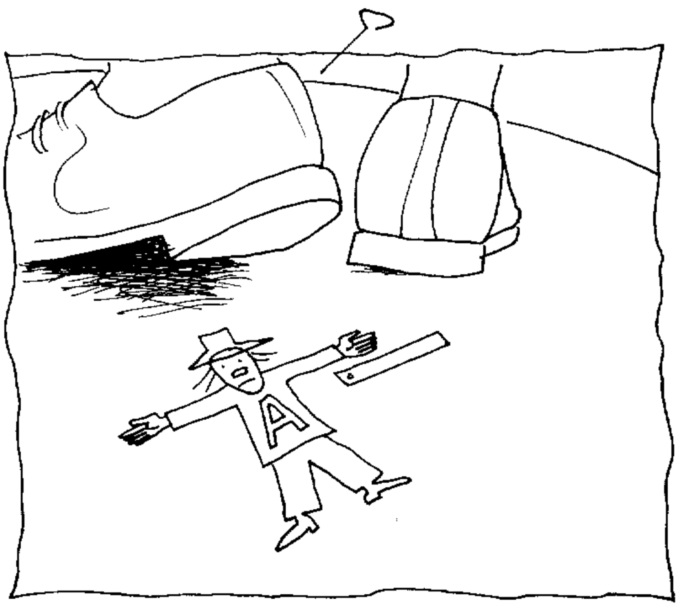
Seguint la nostra definició, els cilindres i els cons, obeint a la geometria EUCLIDIANA, són SUPERFÍCIES PLANES !!!

LA NOCIÓ DE L'ESPAI:

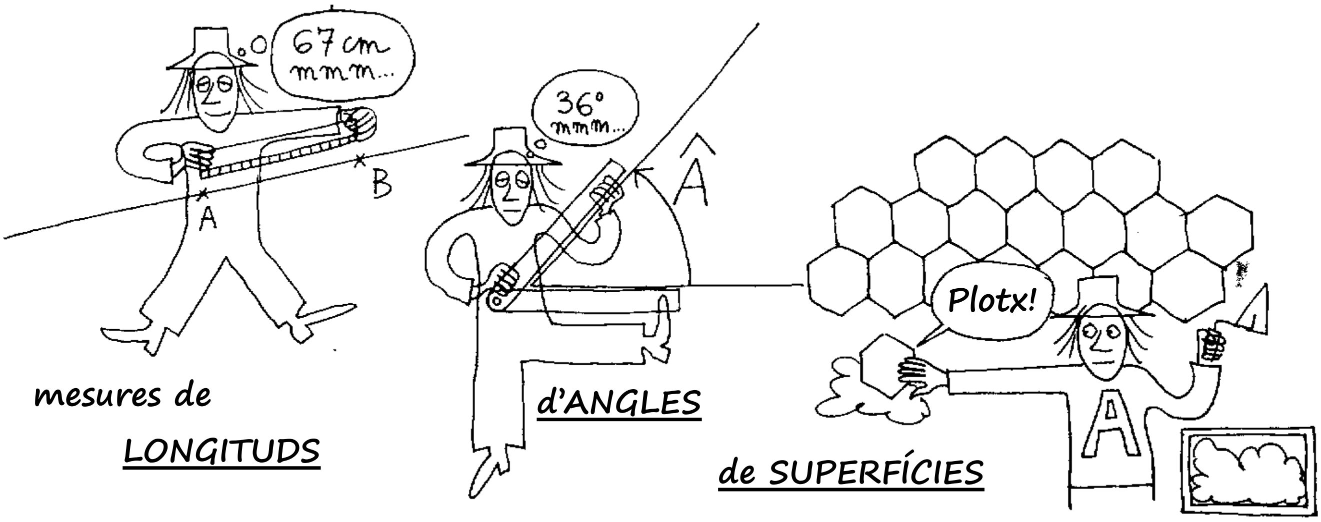


Fa un moment, la boira impedia a Anselm veure més enllà del seu nas... o gairebé. Si no hagués estat així hauria pogut percebre la CURVATURA del seu ESPAI ESFÈRIC.
N'hi ha una altra forma d'impedir a Lanturlu VEURE aquesta curvatura: Es tracta de fer-li habitar la superfície, intentant que PERTANYI a aquesta.





Notarem que aquesta nova situació no impedeix de cap manera les



mesures de <u>LONGITUDS</u>

<u>d'ANGLES</u>

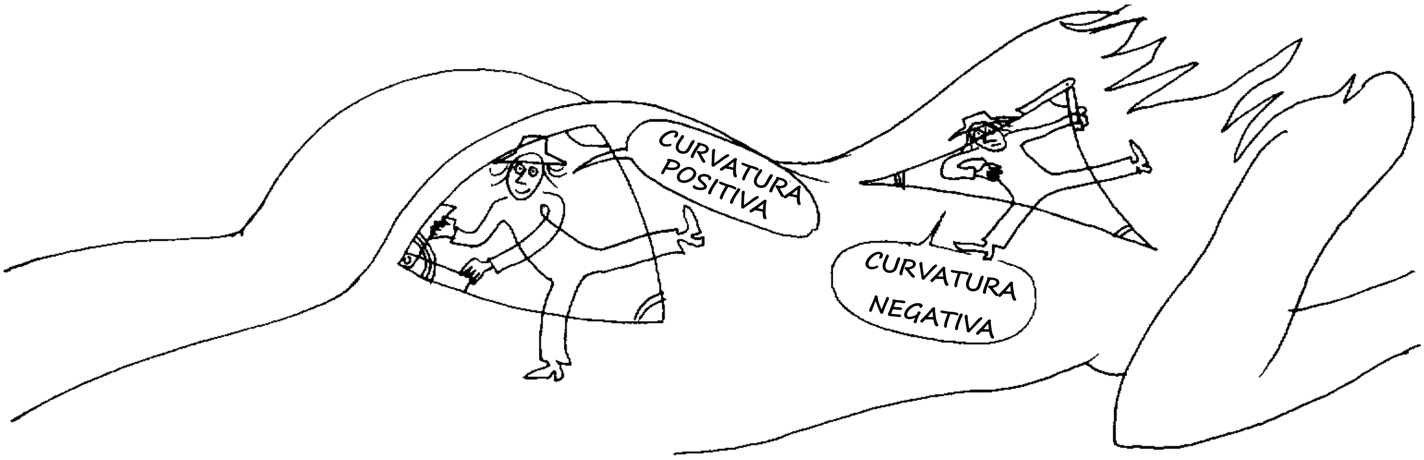
de <u>SUPERFÍCIES</u>

Si Anselm hagués estat confinat A DINS de la superfície, hauria pogut constatar perfectament la curvatura i definir el seu signe (Positiu o negatiu), i fins i tot mesurar-la, tanmateix sense poder VEURE-LA. Si la suma dels angles d'un triangle val 180°, aleshores aquesta superfície és PLANA. Si aquesta suma excedeix 180°, la curvatura és positiva i Anselm pot calcular el radi de curvatura R local amb l'ajuda de la fórmula: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 + \frac{A}{3{,}14\, R^2}\right)$ graus a on A és l'àrea del triangle.

Si aquesta suma és inferior a 180°, podem definir un radi de curvatura R, donat per: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 - \frac{A}{3{,}14\, R^2}\right)$ però ja no té el <u>sentit físic habitual</u>.

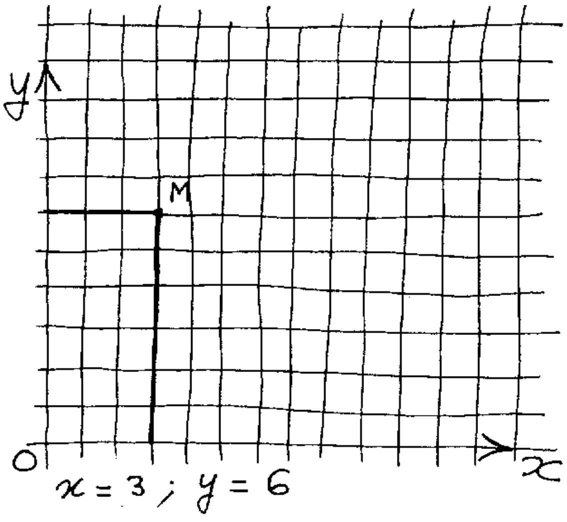
Notarem que un PLA pot ser assimilat a una superfície que tingui un radi de curvatura R infinit.

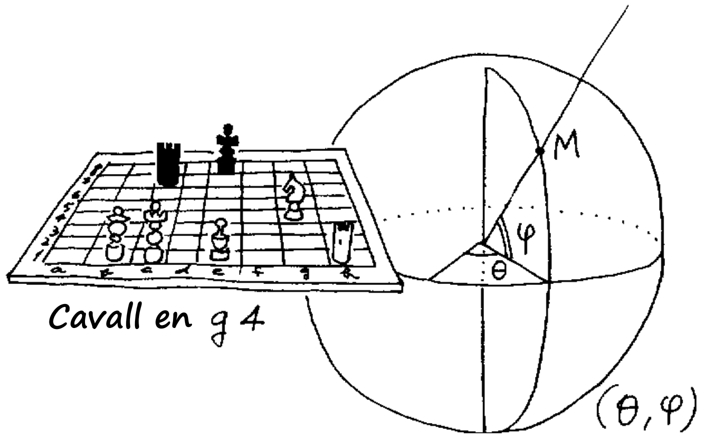
Trobem aleshores tots els teoremes d'Euclides.



EL CONCEPTE DE DIMENSIÓ

El nombre de dimensions és simplement el nombre de quantitats, de coordenades, que fa falta donar-se, en un espai qualsevol, per definir un PUNT.
Les SUPERFÍCIES són representacions d'espais de dues dimensions. Les quantitats servint de referència poden ser longituds, nombres, angles...

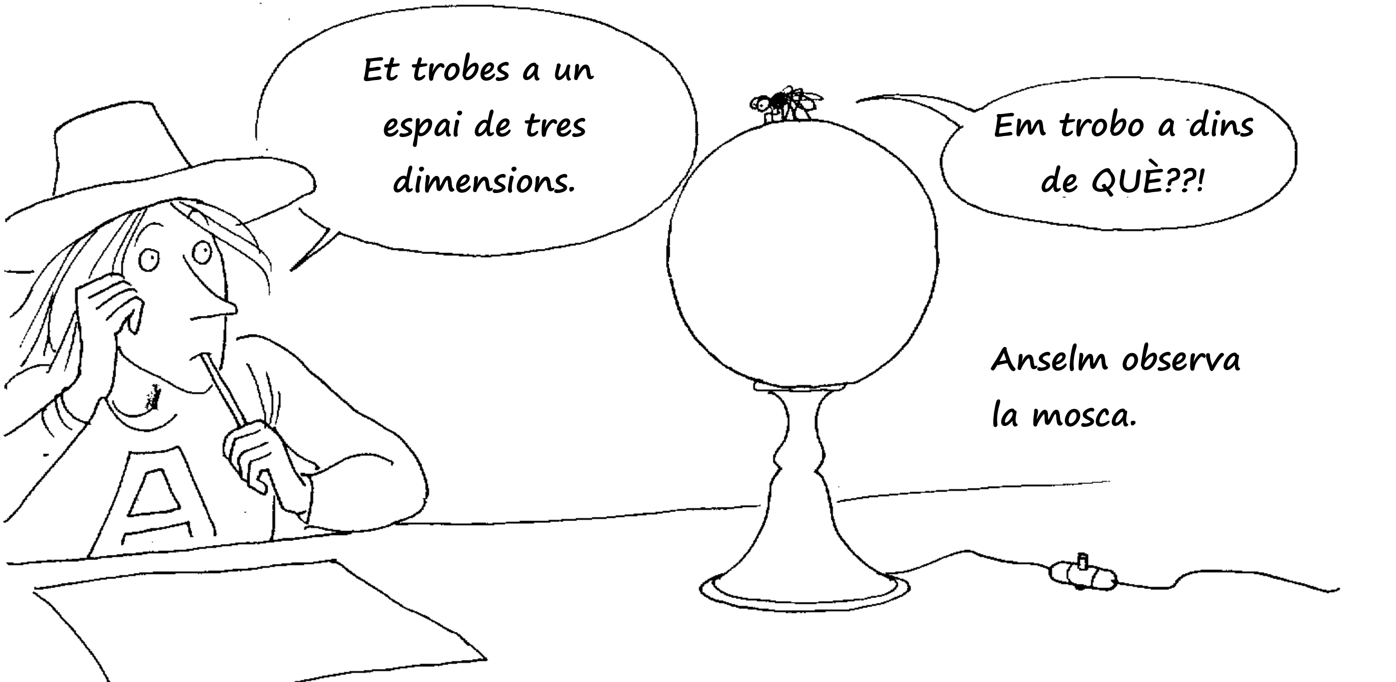


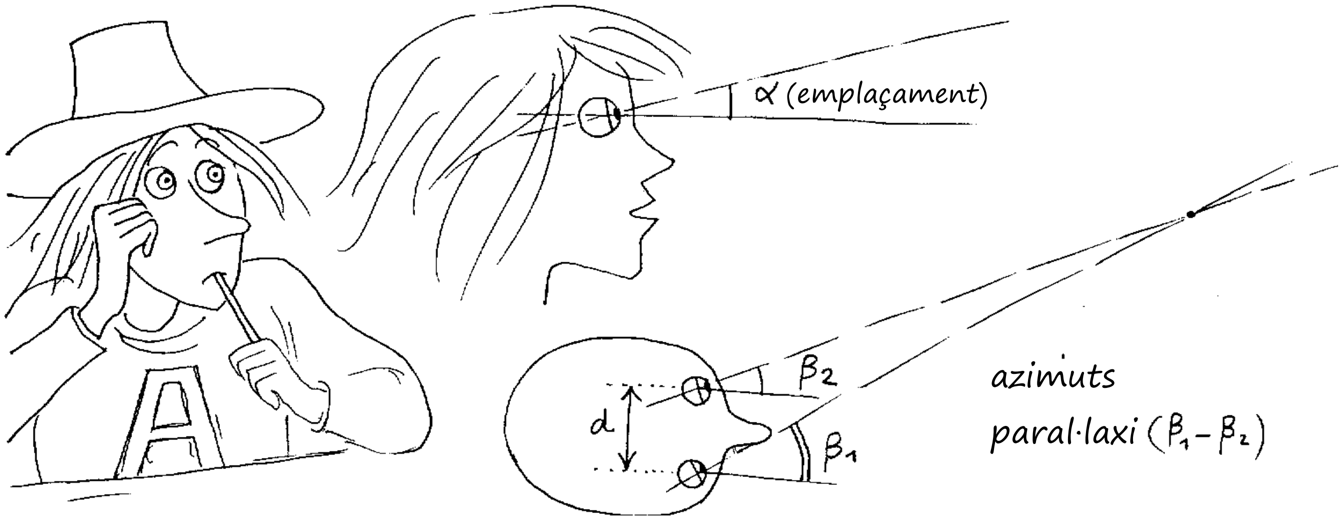


Cavall en g 4

Longitud, latitud .

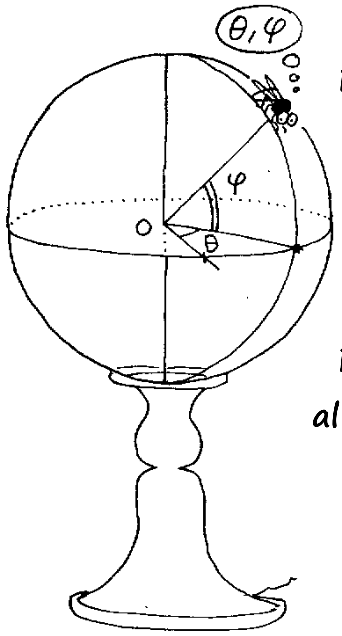
Tenim el costum de dir que el nostre espai, si no tenim en compte el temps, té tres dimensions.





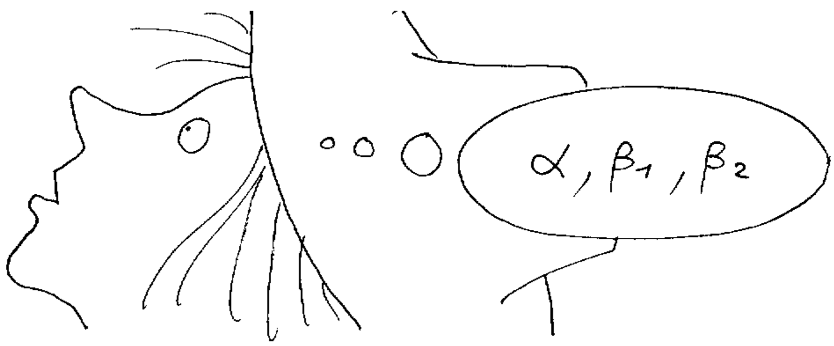
Anselm veu els objectes en relació al seu cos, a dins de la seva caixa cranial. La posició d'un objecte puntual és coneguda amb l'ajuda de tres ANGLES: l'emplaçament i les connexions azimutals dels seus dos ulls: B_1 i B_2. La diferència angular B_1-B_2 es diu paral·laxi. Al cervell d'Anselm s'efectua una descodificació que transforma aquesta paral·laxi en distància.

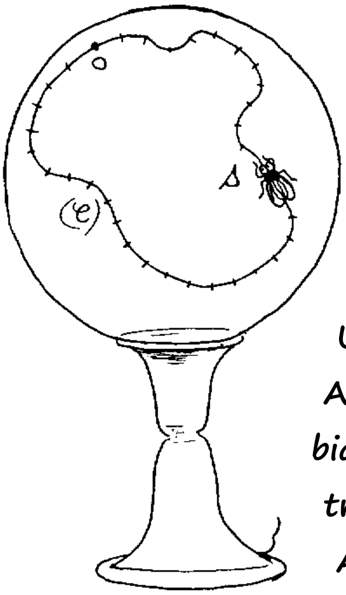
LA IMMERSIÓ:



Però la mosca també evoluciona a sobre del globus esfèric del llum on la seva posició, a dins d'aquest espai bidimensional, pot ser vista amb l'ajuda de dos angles θ i φ (longitud i latitud).

Diríem que aquest espai de dues dimensions està IMMERS al nostre espai de tres dimensions.



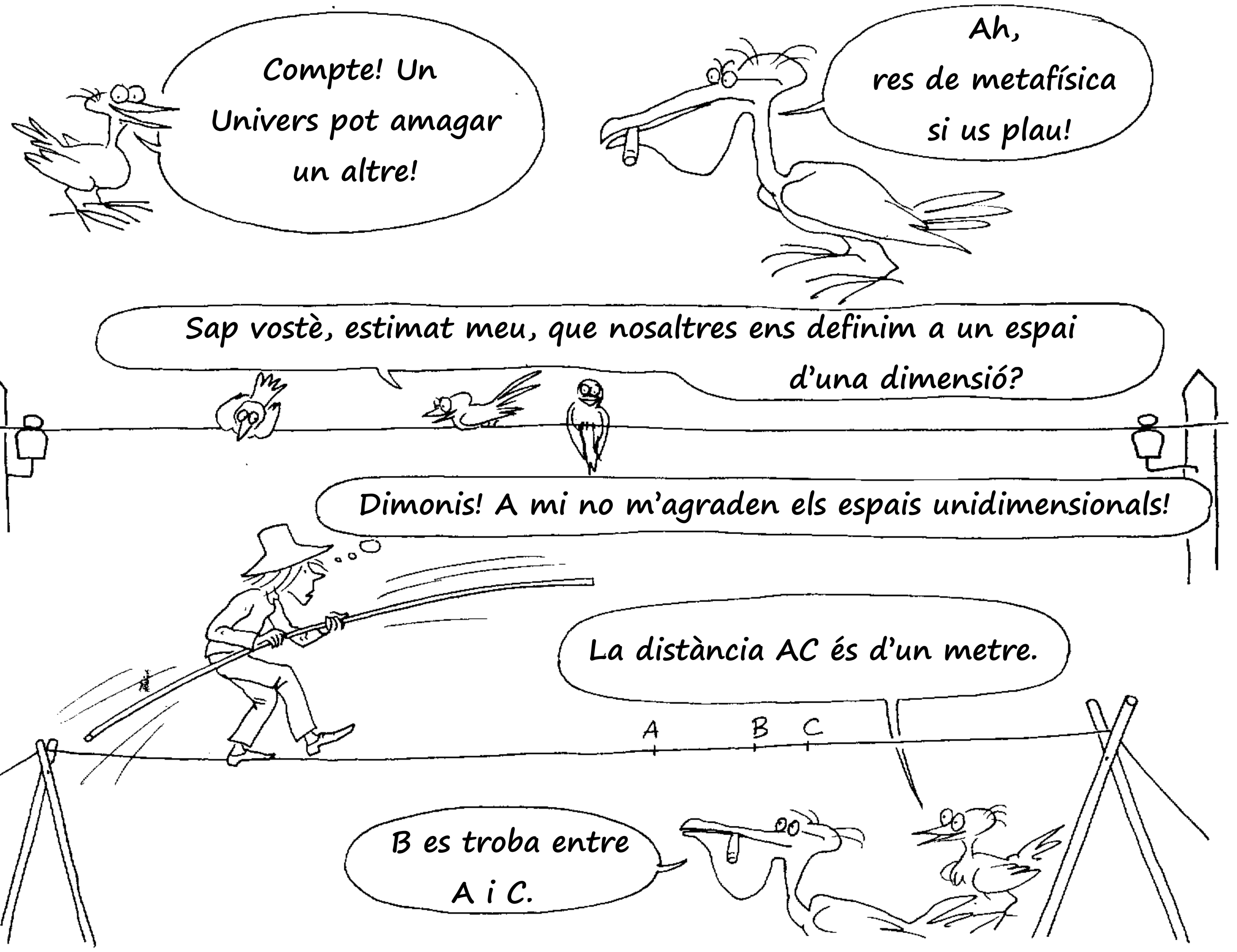


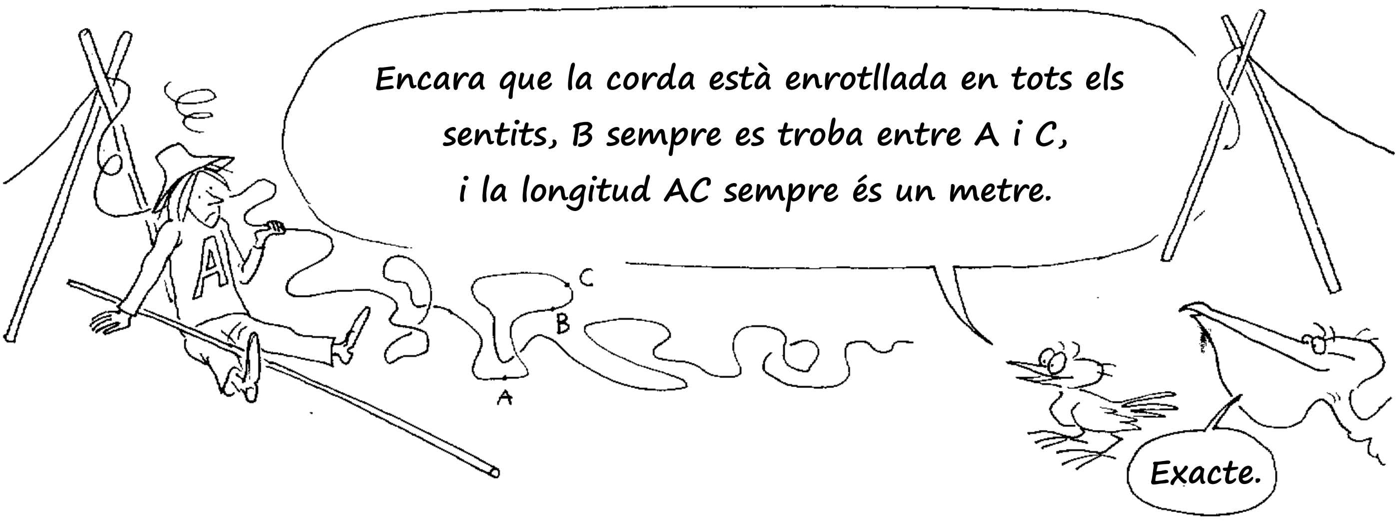
Suposem que la mosca segueix una corba $(\mathcal{C})$ traçada a sobre de l'esfera. Podrem veure la seva posició amb l'ajuda de tan sols una coordenada (la seva distància s a un punt d'origen, comptat algebraicament).

Una corba és una imatge d'un espai d'UNA dimensió.

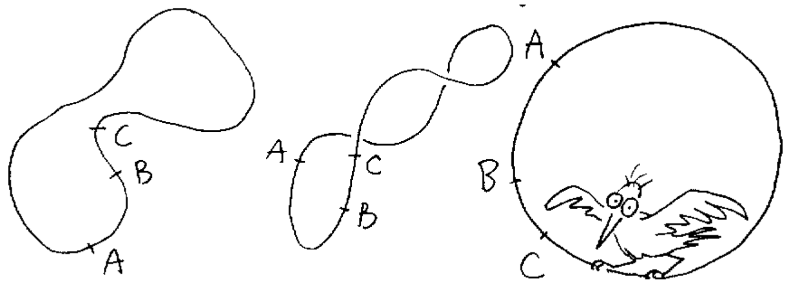
Aquest espai unidimensional està immers a dins d'un espai bidimensional (esfera), ell mateix SUBMERGIT en un espai tridimensional.

Així l'espai on evolucionem podria estar submergit a dins d'un espai de dimensió superior sense que poguéssim tenir consciència.





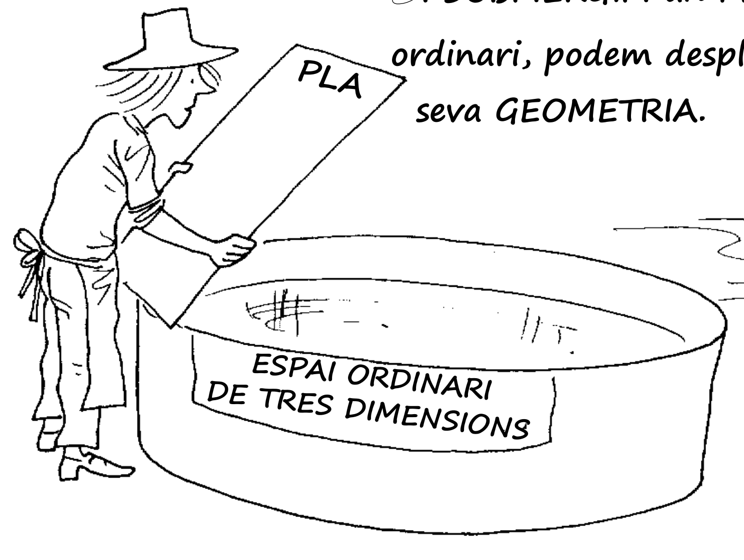
Això suggereix que certes propietats poden ser independents de la forma en la que es fa la immersió.

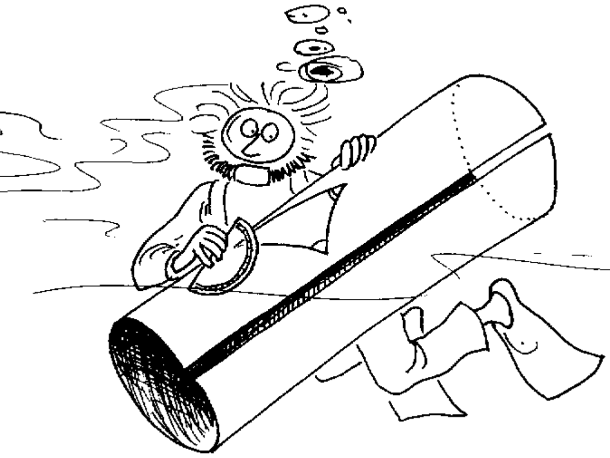


Vet aquí diferents formes de SUBMERGIR una CORBA TANCADA a l'espai ordinari. Aquest TANCAMENT és una propietat independent de la immersió.

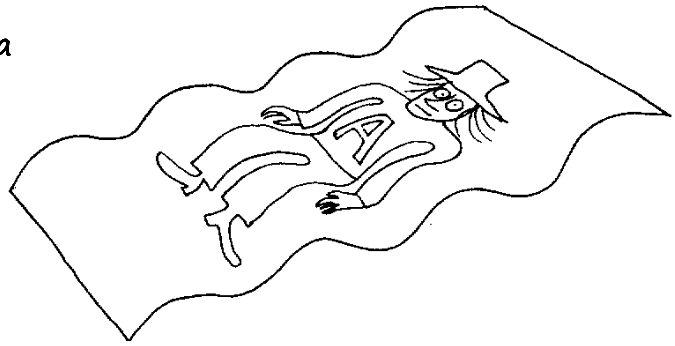
Però hem evitat al màxim estirar o contractar la corda, intentant no modificar les LONGITUDS entre dos punts succesius. Ara SUBMERGIREM SUPERFÍCIES a dins de l'espai de tres dimensions ordinari.

Si SUBMERGIM un PLA a dins de l'espai de tres dimensions ordinari, podem desplaçar-lo, fer-lo girar, sense modificar la seva GEOMETRIA.

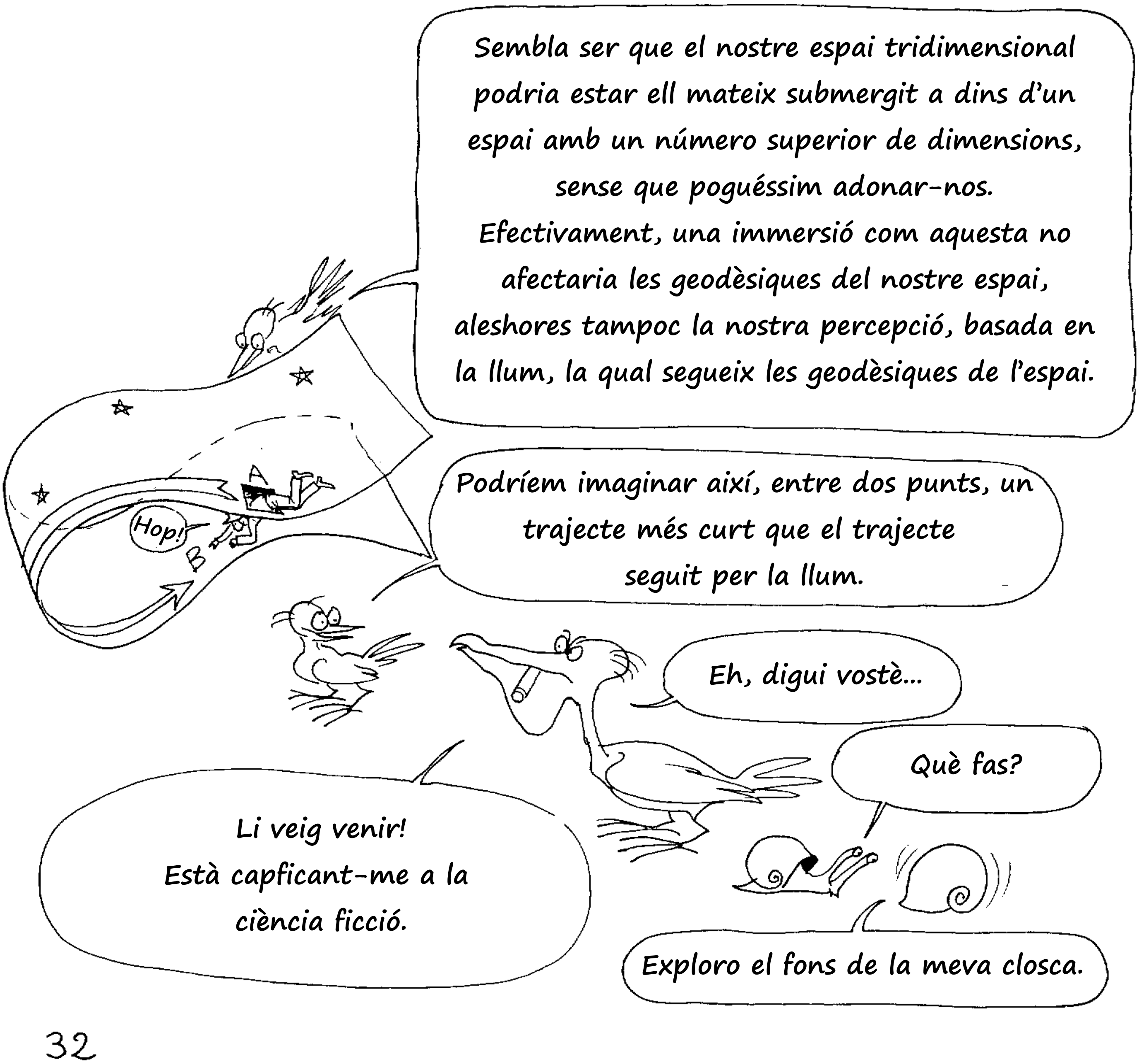




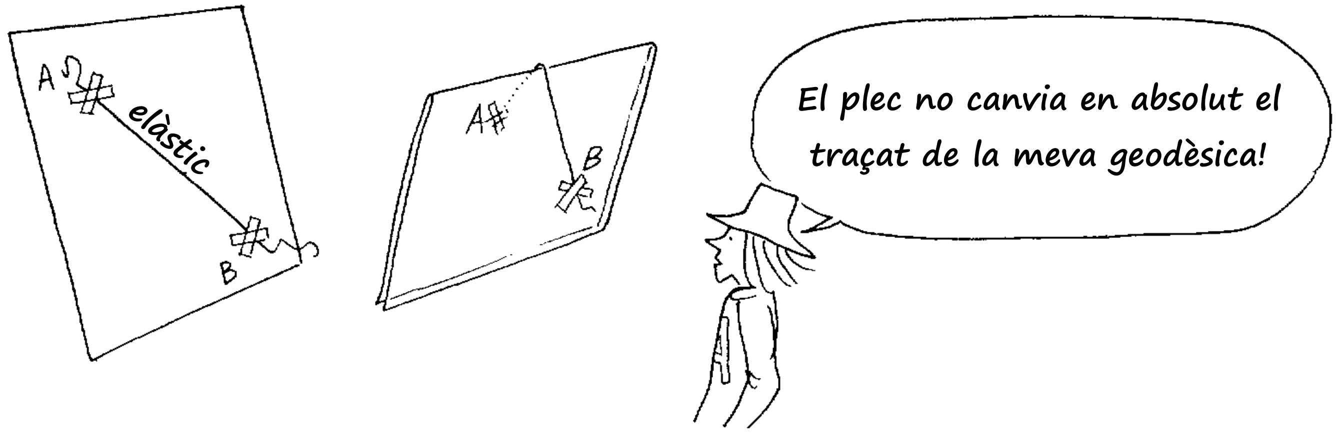
Hem vist que el fet de deformar un pla seguint un cilindre no modificava ni les seves geodèsiques, ni els angles.
Segons aquesta òptica, una xapa ondulada sempre té una geometria PLANA, EUCLIDIANA.



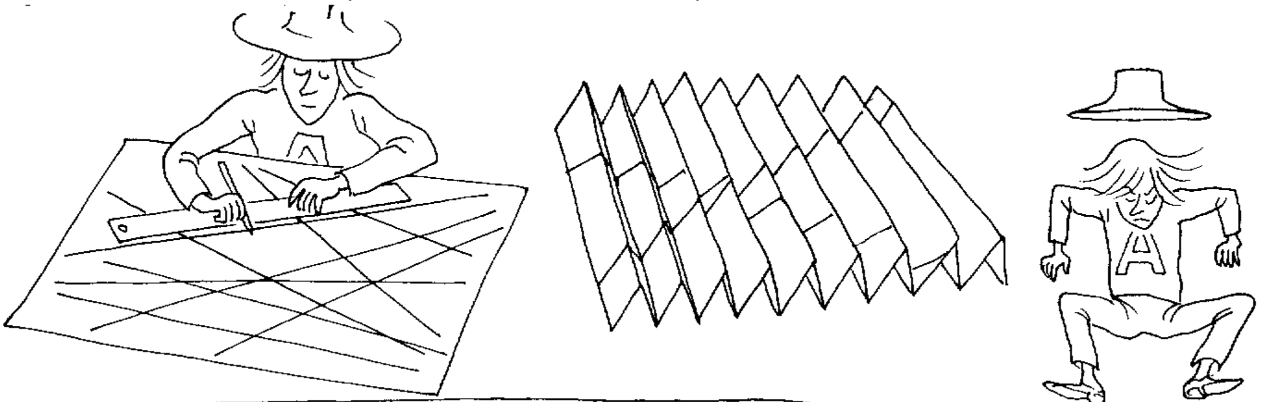
Un habitant d'un espai com aquest bidimensional, euclidià, no tindria cap consciència de les translacions, rotacions o ondulacions, que tan sols serien variacions de la forma d'immersió a dins de l'espai tridimensional.



Agafem un element de pla i pleguem-lo:



A sobre d'un full de paper, amb l'ajuda d'un regle, dibuixeu tot un munt de rectes, de geodèsiques, després plegui el paper en acordió. Sempre continuarà veient les geodèsiques de la superfície, amb o sense plecs.



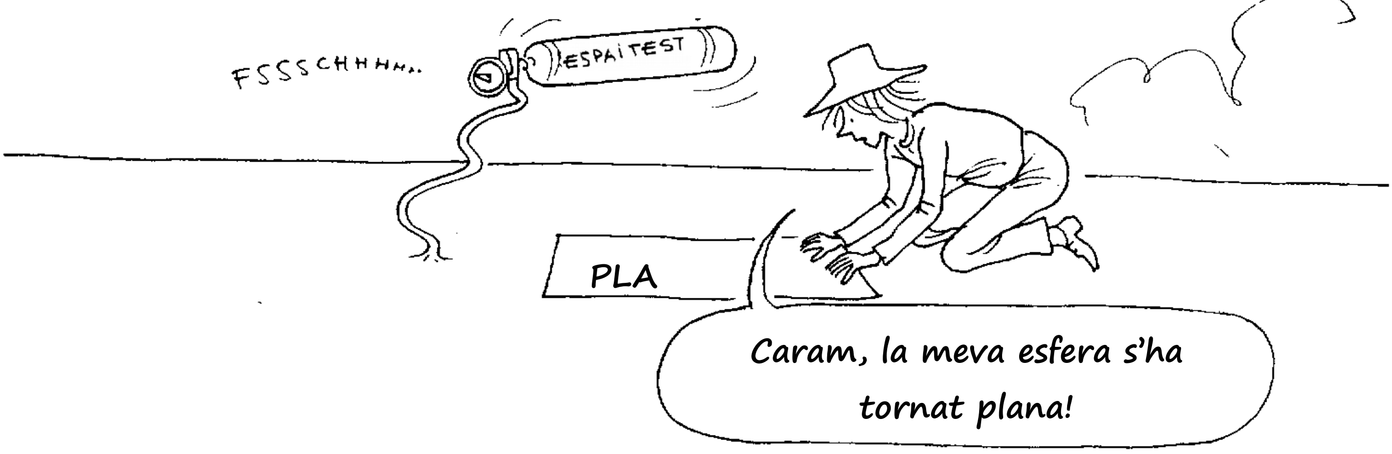

Senyor Lanturlu?
I tant.
Sóc el representant de la casa Euclides i Cia. Sabem que vostè ha tingut... mmm... alguns problemes amb el nostre material.
EUCLIDES I Cia
Tinc aquí nous articles que, aquest cop, haurien de donar-li plena satisfacció.
Mostri'm.
El Futur és tridimensional, veu? La geometria de dues dimensions està una mica... ... obsoleta.
FLUID CÒSMIC ESPAITEST
El nostre nou instrument de geodèsiques...
... està compost de barres rígides, ajustant-se perfectament les unes a dins de les altres.
Que us permetran d'anar no a dreta, ni a esquerra, ni a dalt, ni avall sinó TOT RECTE!


Per mesurar les superfícies, aquesta pintura. Cent grams per metre quadrat, exactament.
Enginyós.
Per mesurar els volums, ompli aquest de gas. Pot llegir el valor directament al cabalímetre de l'ESPAITEST.
I recordi: superfície de l'esfera: $4\pi\ell^2$, volum: $\frac{4}{3}\pi\ell^3$.
Molt bé.
EUCLIDES & Cie
Quin ofici.
Anselm ha aterrat, aquest cop, a dins d'un espai tridimensional i el seguirem en la seva exploració.

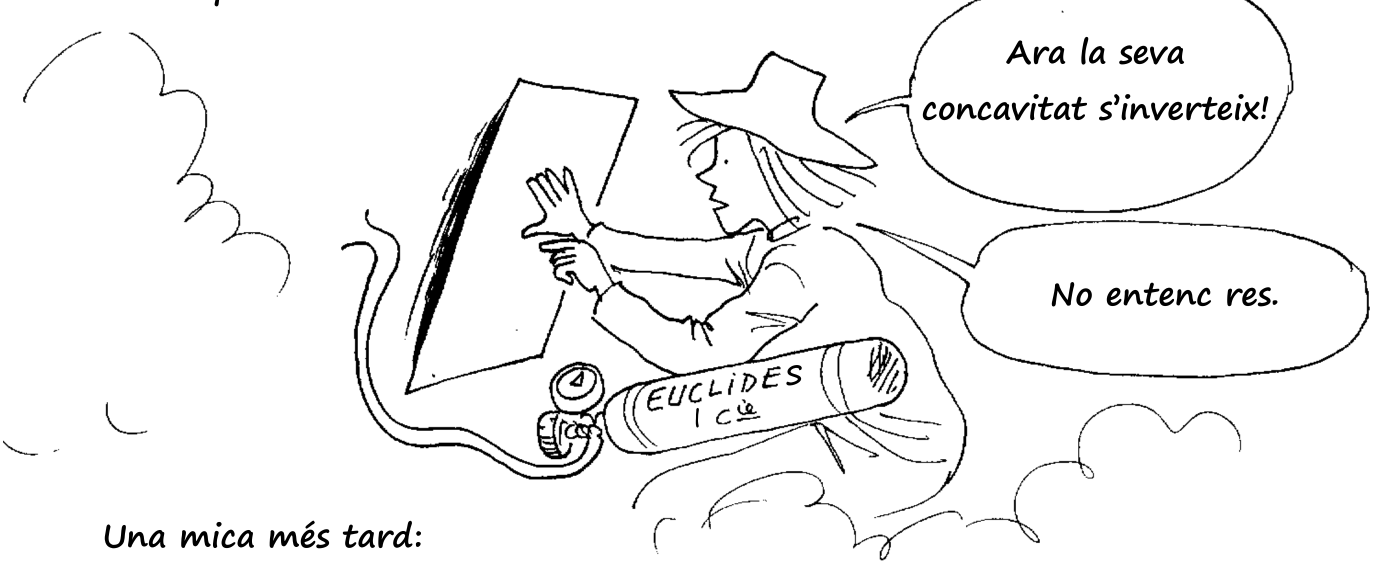
És un bon material. I aquestes vares fan tan sols un metre.
Però, després d'haver posat una bona quantitat de vares...
Ja comença un altre cop!
La meva geodèsica es tanca sobre ella mateixa!
Un espai tridimensional tancat?
És el fi de tot.
Anselm, que havia parat per menjar a sobre d'un asteroide, va decidir tornar al mètode de mesura dels angles.
Igual que fa un moment, utilitzaré tres GEODÈSIQUES, per formar un TRIANGLE.
EUCLIDES I CIA


?!?
Les meves geodèsiques estàn convenientment empaquetades, i encara i així la suma dels meus tres angles és superior a 180º
Bé...
ESPAITEST
FSCHHHHHHHHH
Fabricaré una i mesuraré el seu volum i la seva superfície.
Una esfera de radi ℓ és el conjunt de punts situats a una distància ℓ d'un punt fix, que anomenaré N.
La superfície és inferior a 4πℓ².
Això és, el volum ja és inferior a 4/3 πℓ³!
M'han estafat un altre cop.

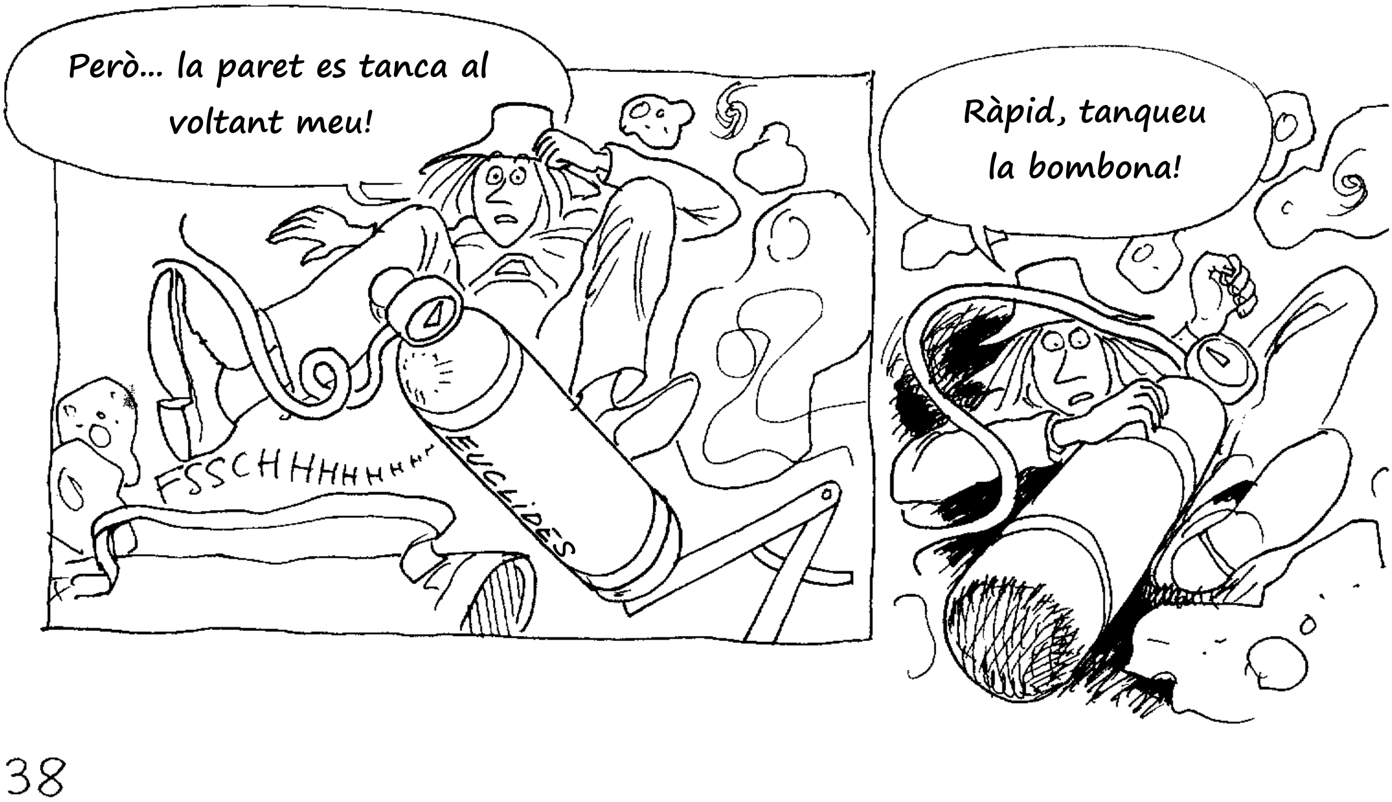
Anselm incrementa encara més el radi ℓ de l'esfera.



Un cop i un altre...



Una mica més tard:



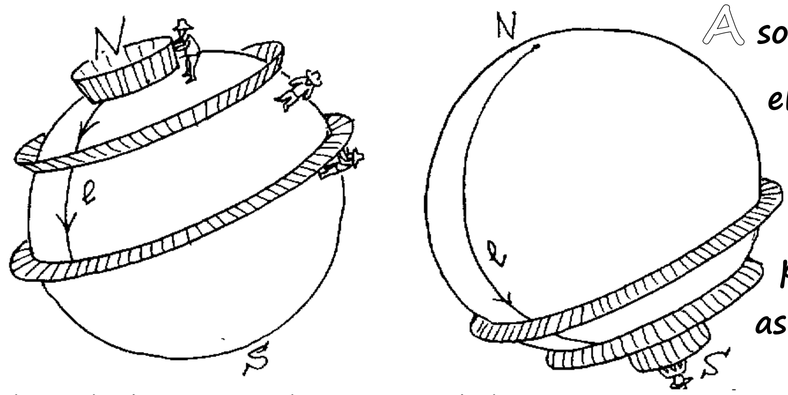
Així, inflant un senzill globus a dins d'un espai de tres dimensions, Lanturlu ha acabat per trobar-se... A DINS!

Si no hagués tancat la bombona a temps, hauria mort esclafat, així com va acabar per trobar-se emprisonat per la seva tanca, pàgina 13.

Amb la millor voluntat del món, ara ja no podem VEURE la CURVATURA d'aquest espai tridimensional. Les seves geodèsiques es tanquen i el seu volum tan sols representa un nombre FINIT de metres cúbics, al igual que la superfície del nostre planeta, superfície tancada, solament dona un nombre FINIT de metres quadrats.

La suma dels angles d'un triangle, d'aquest espai de tres dimensions, és superior a 180°. Per "VEURE" la seva corba, hauríem de ser capaços de percebre a dins de les quatre dimensions.

Podem pensar que el nostre UNIVERS de tres dimensions és una HIPERSUPERFÍCIE submergida a dins d'un espai de quatre dimensions, ell mateix pot ser hipersuperfície submergida a dins d'un espai de cinc dimensions, etc... Però, avui dia, no podem dir aquestes coses.

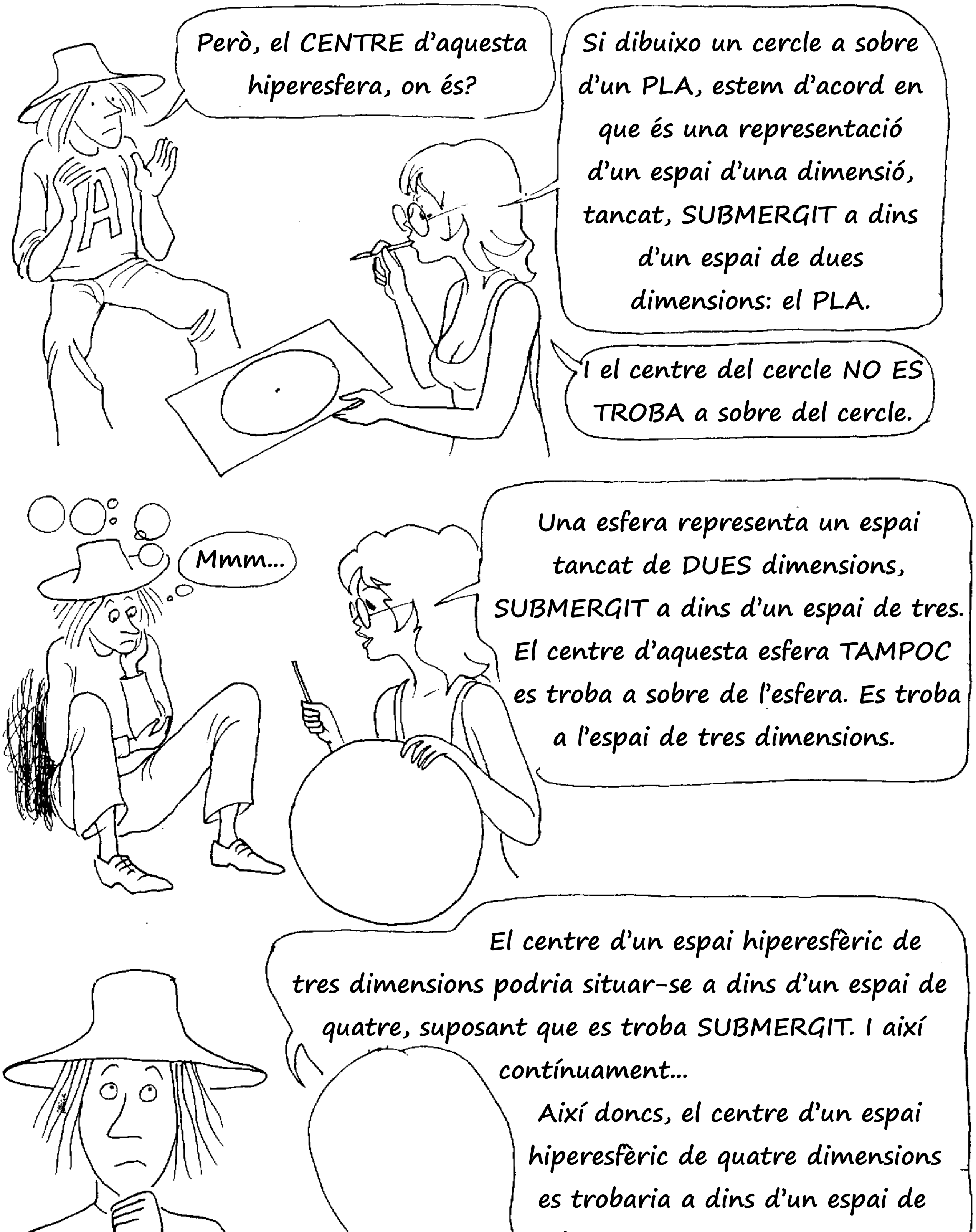


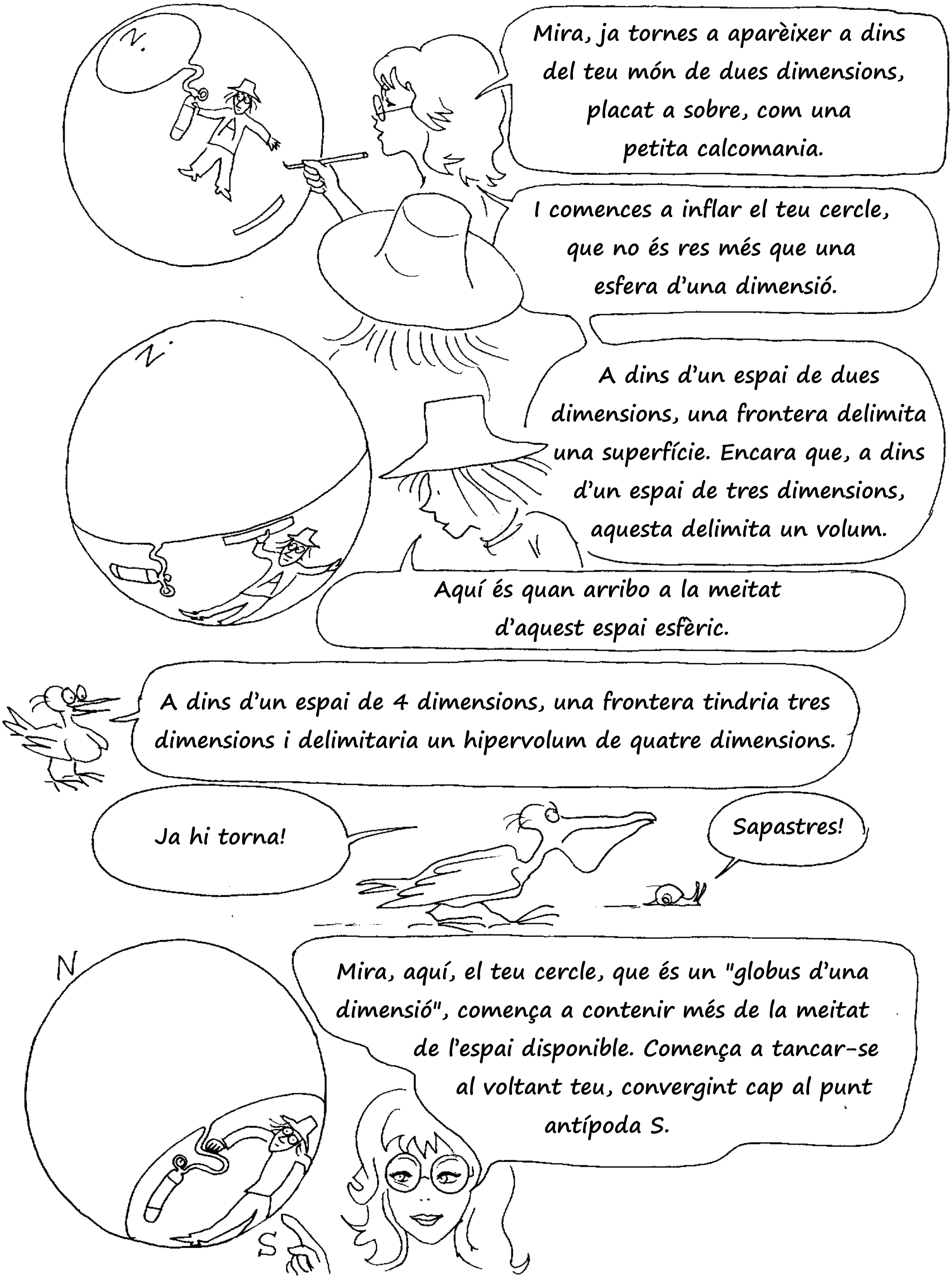
A sobre de la seva esfera, agrandint el radi ℓ del seu domini, Lanturlu havia acabat per trobar-se a les antípodes S del punt N, centre del seu cercle, i asfixiat per la seva pròpia tanca.

A dins de l'espai tridimensional de curvatura positiva passa el mateix. A dins d'aquest espai bidimensional que és l'esfera, Anselm va trobar l'EQUADOR quan ja havia tancat la meitat de la superfície disponible. L'EQUADOR de l'espai tridimensional HIPERESFÈRIC també existeix. Anselm ho aconsegueix quan el seu globus ocupa la meitat del volum disponible. A sobre de l'esfera, el cercle equador apareixia com una RECTA. Així mateix, a dins de l'espai hiperesfèric, el "globus equador" tindrà per ell una aparença de PLA.

Més enllà de l'equador la CONCAVITAT d'un globus s'inverteix i automàticament es centra a sobre del punt antípoda S del punt N, centre del globus.

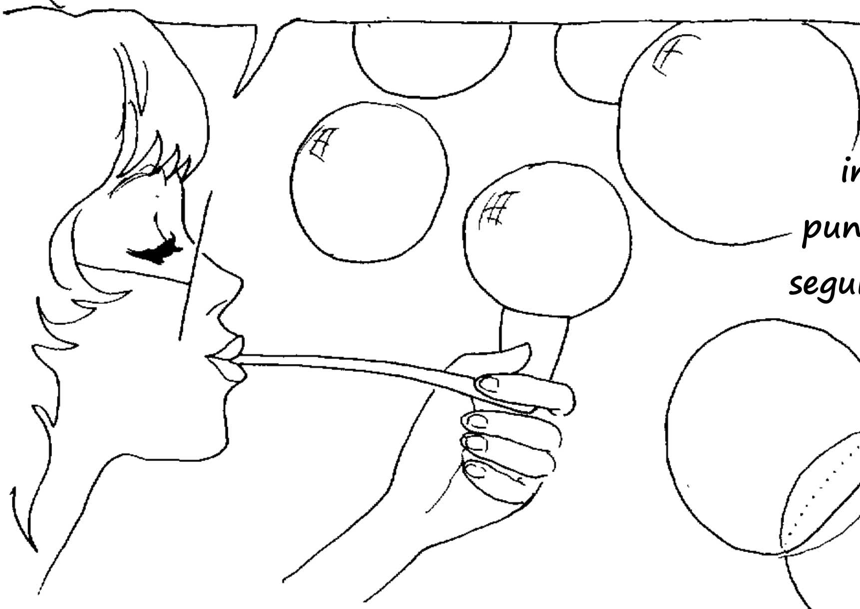

Problemes?
Doncs, eh... tot es barreja una mica a dins del meu cap.
Em dic Sofia. Les curvatures, de tot tipus, són la meva especialitat.
La navegació a les hiperesferes, sempre sorprèn una mica al principi. S'ha d'evitar bloquejar-se. Ho comprenem de mica en mica.
Sí...
He perdut una mica el fil...


Però, el CENTRE d'aquesta hiperesfera, on és?
Si dibuixo un cercle a sobre d'un PLA, estem d'acord en que és una representació d'un espai d'una dimensió, tancat, SUBMERGIT a dins d'un espai de dues dimensions: el PLA.
I el centre del cercle NO ES TROBA a sobre del cercle.
Mmm...
Una esfera representa un espai tancat de DUES dimensions, SUBMERGIT a dins d'un espai de tres. El centre d'aquesta esfera TAMPOC es troba a sobre de l'esfera. Es troba a l'espai de tres dimensions.
El centre d'un espai hiperesfèric de tres dimensions podria situar-se a dins d'un espai de quatre, suposant que es troba SUBMERGIT. I així contínuament... Així doncs, el centre d'un espai hiperesfèric de quatre dimensions es trobaria a dins d'un espai de cinc, etc...

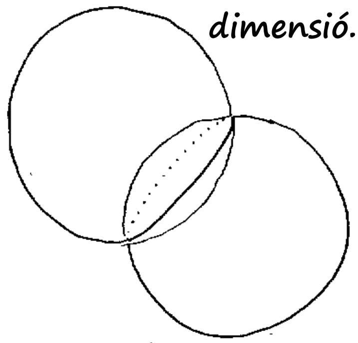

N.
Mira, ja tornes a aparèixer a dins del teu món de dues dimensions, placat a sobre, com una petita calcomania.
I comences a inflar el teu cercle, que no és res més que una esfera d'una dimensió.
N.
A dins d'un espai de dues dimensions, una frontera delimita una superfície. Encara que, a dins d'un espai de tres dimensions, aquesta delimita un volum.
Aquí és quan arribo a la meitat d'aquest espai esfèric.
A dins d'un espai de 4 dimensions, una frontera tindria tres dimensions i delimitaria un hipervolum de quatre dimensions.
Ja hi torna!
Sapastres!
N
Mira, aquí, el teu cercle, que és un "globus d'una dimensió", comença a contenir més de la meitat de l'espai disponible. Comença a tancar-se al voltant teu, convergint cap al punt antípoda S.
S

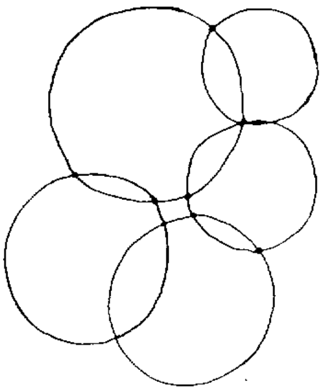

Així mateix, a dins del meu espai corb de tres dimensions, quan injecto més de la meitat del volum total, el globus es tanca al voltant meu, convergint cap al punt antípoda.
Ho entenc!
Ja que l'esfera, en aquest espai tridimensional corb, té, evidentment, dos centres, que són antípodes.
?!!?
Bé, no sé exactament què és el que he entès, però tinc l'impressió d'haver entès alguna cosa.
Quina angoixa!
Però no, Anselm, quan hi han més de tres dimensions, ENTENDRE ÉS EXTRAPOLAR.
Extrapolo sense saber-ho.
El dibuix el farà vostè...
... a dins del seu cap!

Ara, agafo un espai de tres dimensions a on fico esferes de dues dimensions, un munt de petits univers bidimensionals.



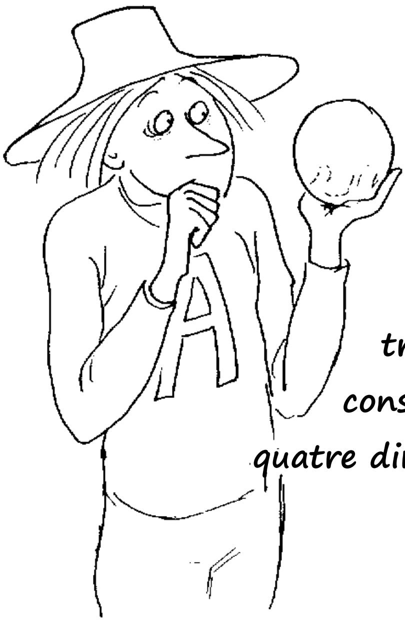
Aquests univers poden interpenetrar-se. Els seus punts comuns es reparteixen seguint cercles, objectes d'una dimensió.





Tanmateix, cercles, objectes d'una dimensió, situats a sobre d'un full de paper (2 dimensions) es tallarien seguint PUNTS.
(Tenim costum de dir que el PUNT té dimensió zero).

Una esfera podrà, doncs, ser considerada com l'intersecció de dues "bombolles" tridimensionals, evolucionant a dins d'un espai de quatre.

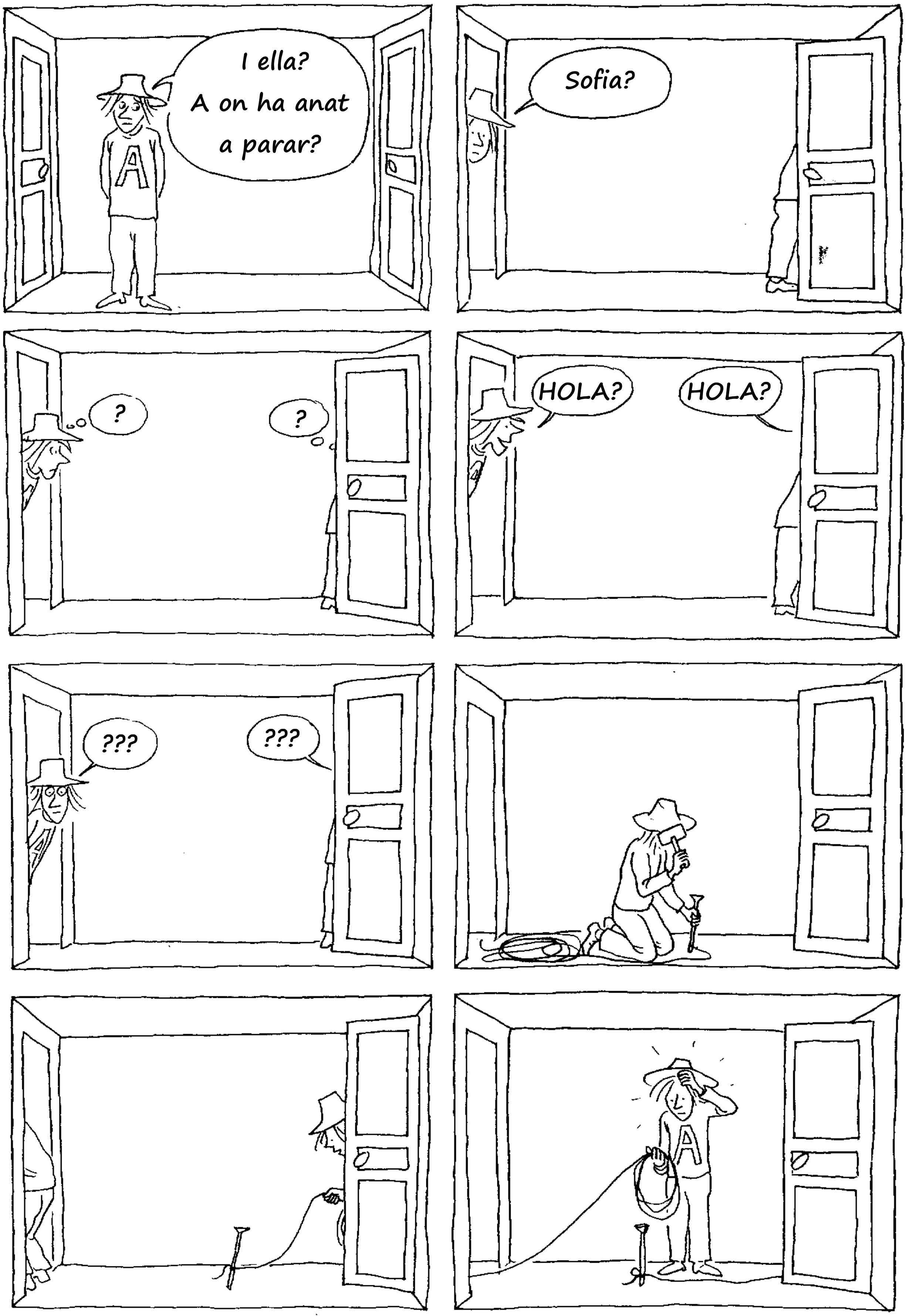


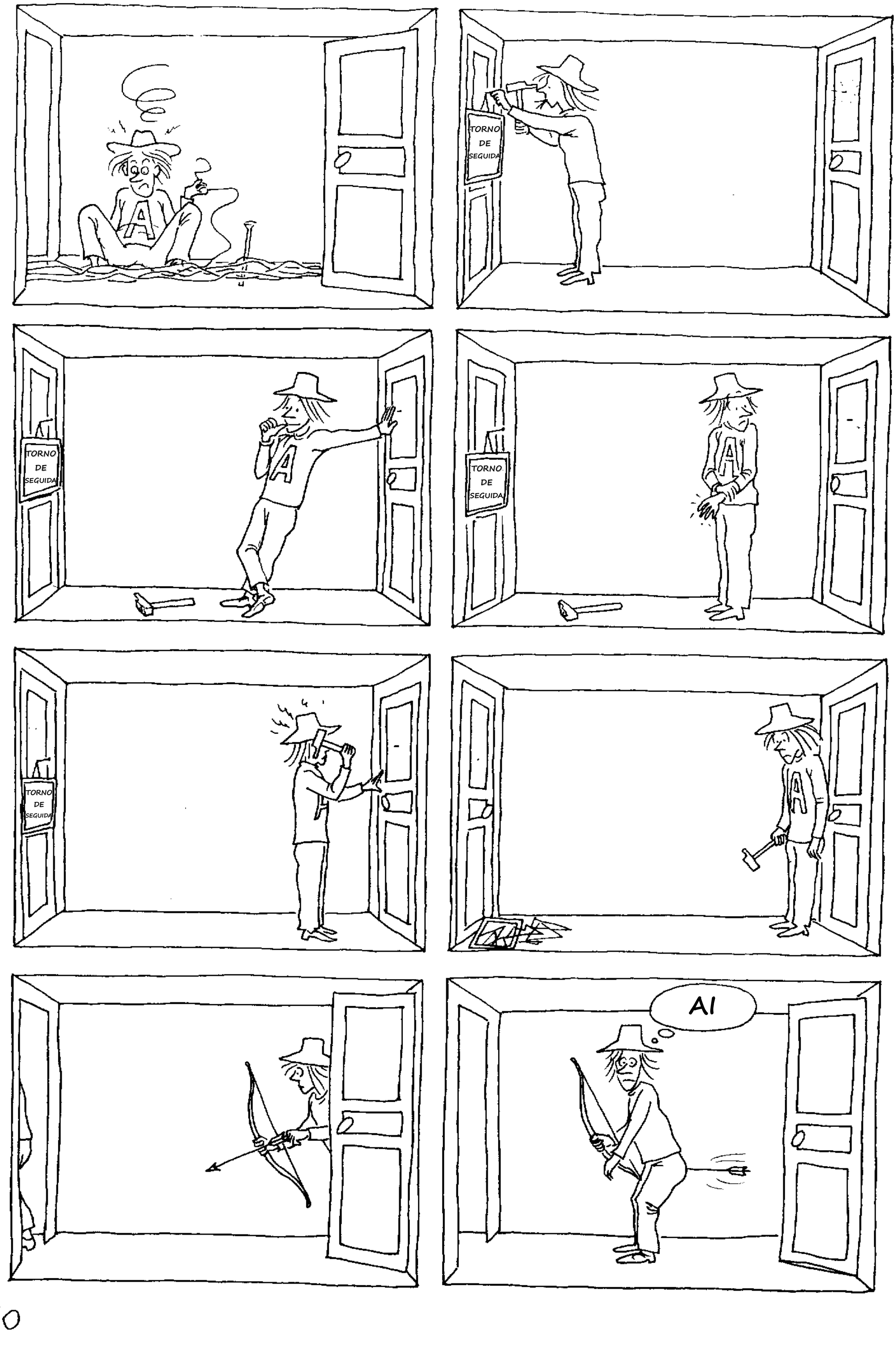
I així consecutivament: un espai tridimensional corb, hiperesfèric, podrà ser considerat com l'intersecció de dues bombolles de sabó de quatre dimensions, evolucionant a dins d'un espai de cinc.


Anselm i Sofia, després d'haver conegut els mareigs de l'extrapolació, reprenen l'exploració de nous mons tridimensionals.
Les matemàtiques ja no són el que eren.
Mira, això és una cinta adhesiva tridimensional, per les geodèsiques. La part adhesiva es troba a l'extrem... evidentment.
Carai, en aquest espai, les geodèsiques no semblen tancar-se. I ara quan inflo el globus de l'ESPAITEST, el volum debitat és superior a $\frac{4}{3}\pi\ell^3$, mentre que la superfície és superior a $4\pi\ell^2$. En quant a la suma dels angles d'un triangle, aquesta vegada és inferior a 180°.
Recorda la pàgina 23, tornes a estar a un espai de curvatura NEGATIVA.


RESUM:
A dins dels espais de tres dimensions, poden passar moltes coses, saps? És com amb les superfícies, que són, elles mateixes, espais de dues dimensions. Així doncs, si la suma dels angles d'un TRIANGLE, a dins d'un espai de tres dimensions, és superior a 180°, direm que la curvatura és positiva. Formant una esfera de radi ℓ trobaràs amb l'ESPAITEST un volum inferior a $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ i una superfície inferior a $4\pi\ell^2$. Aquest espai, anomenat HIPERESFÈRIC, es tancarà sobre ell mateix. Si la suma dels angles d'un triangle, a dins d'un espai tridimensional, és inferior a 180°, aleshores la curvatura serà negativa. El volum d'una esfera de radi ℓ serà superior a $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ i la seva superfície superior a $4\pi\ell^2$. Aquest espai tindrà una extensió infinita.
Però si la suma dels angles val 180°, aleshores l'espai és estúpidament euclidià.
Tot això per arribar aquí!...

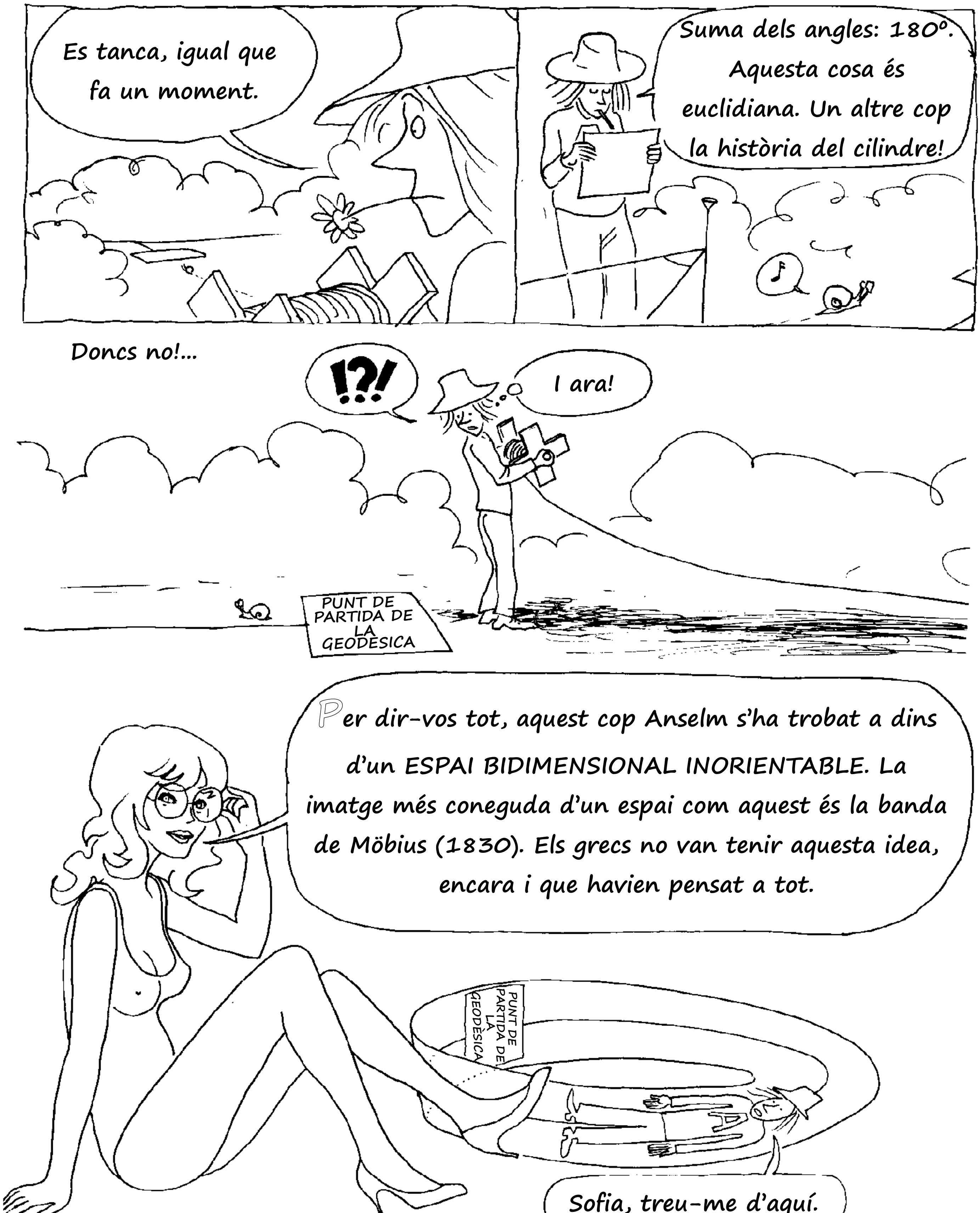
FA FALTA QUE UN ESPAI ESTIGUI OBERT O TANCAT!...


I ella?
A on ha anat a parar?
Sofia?
?
?
HOLA?
HOLA?
???
???

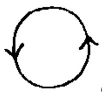

TORNO DE SEGUIDA
TORNO DE SEGUIDA
TORNO DE SEGUIDA
TORNO DE SEGUIDA
AI


I sí, Lanturlu havia estat projectat a dins d'un espai cilíndric de tres dimensions. Com és euclidià, sense curvatura, (les sumes dels angles d'un triangle és igual a 180°) aquest món es tanca sobre ell mateix.
AI
Bé, admetem-lo... Mons esfèrics, hiperbòlics, cilíndrics. Ho em repasat tot, no?
GEOMETRIA
Vostè creu?
Tornem una mica enrere a dins del món bidimensional.
EH?!
BOIRA

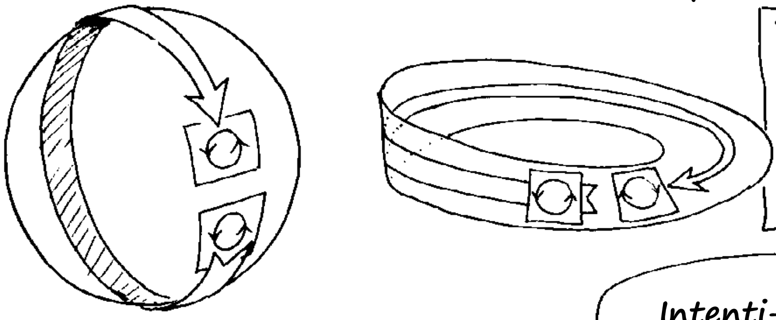
SENSE A DALT A SOTA:


Es tanca, igual que fa un moment.
Suma dels angles: 180º. Aquesta cosa és euclidiana. Un altre cop la història del cilindre!
Doncs no!...
!?!
I ara!
PUNT DE PARTIDA DE LA GEODESICA
Per dir-vos tot, aquest cop Anselm s'ha trobat a dins d'un ESPAI BIDIMENSIONAL INORIENTABLE. La imatge més coneguda d'un espai com aquest és la banda de Möbius (1830). Els grecs no van tenir aquesta idea, encara i que havien pensat a tot.
PUNT DE PARTIDA DE LA GEODESICA
Sofia, treu-me d'aquí.

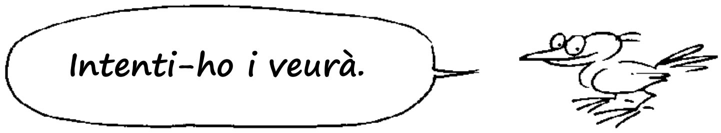
Dibuixem un cercle a sobre d'una superfície i li posem fletxes de forma

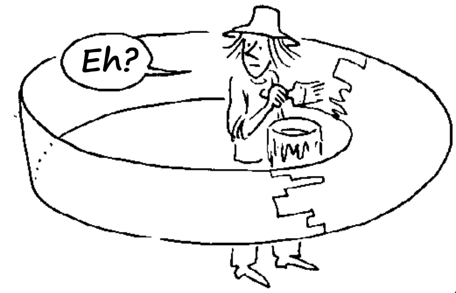


arbitrària. Imaginem que aquest cercle és una petita calcomania que podem fer relliscar a voluntat a sobre d'aquesta superfície. Si el cercle es troba idèntic a ell mateix, direm que aquesta superfície és ORIENTABLE (és el cas de l'esfera, del cilindre, del pla, etc...). Però si aquesta calcomania rellisca a sobre d'una cinta de Möbius, tot passa d'una altra manera:



Cada cop que fa una volta a aquest univers de dues dimensions, el cercle canvia d'orientació.

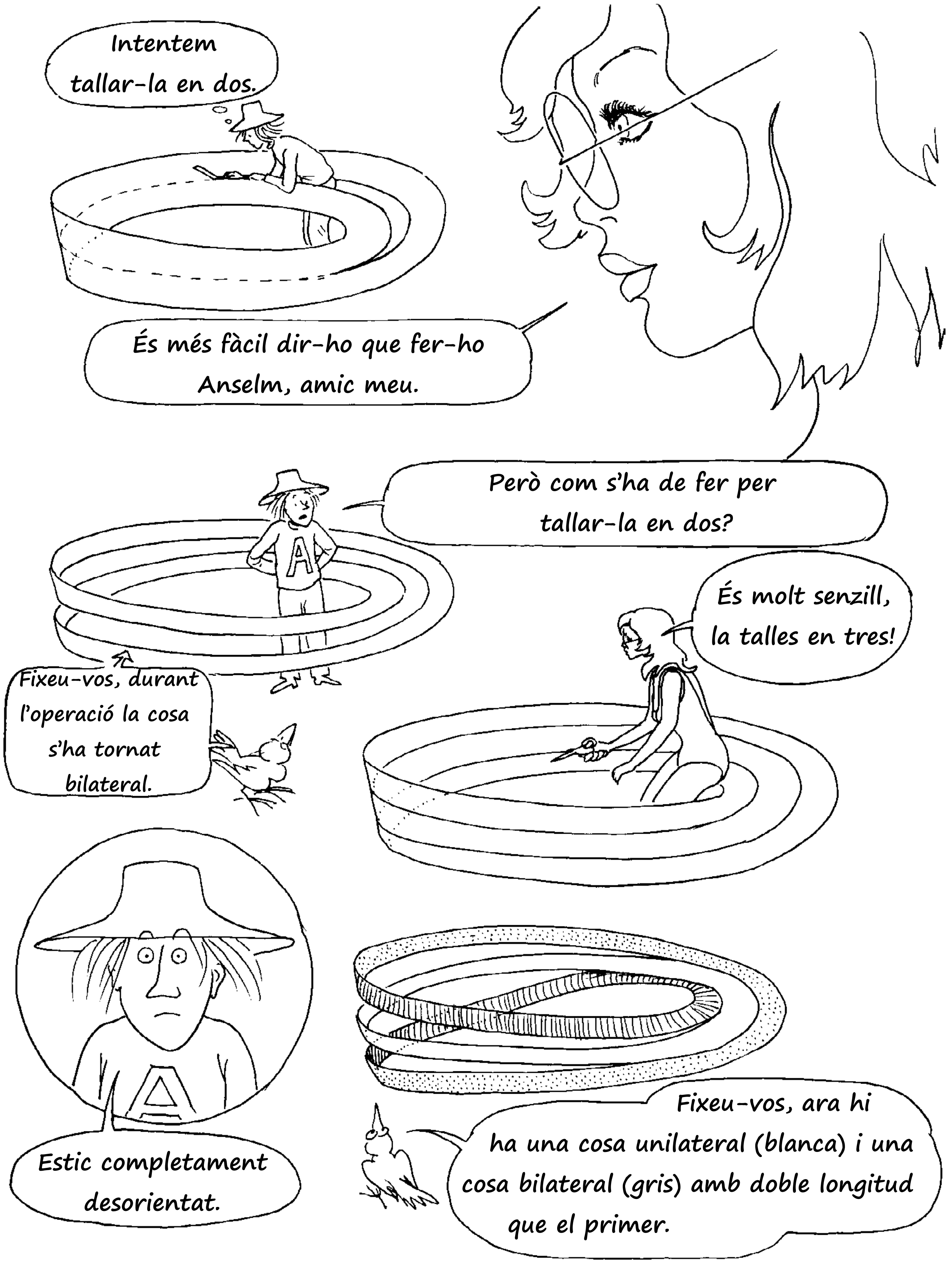




Correlativament, no podem pintar una cinta de Möbius de dos colors diferents: solament té una banda, és UNILATERAL.

Solament hi ha una VORA:

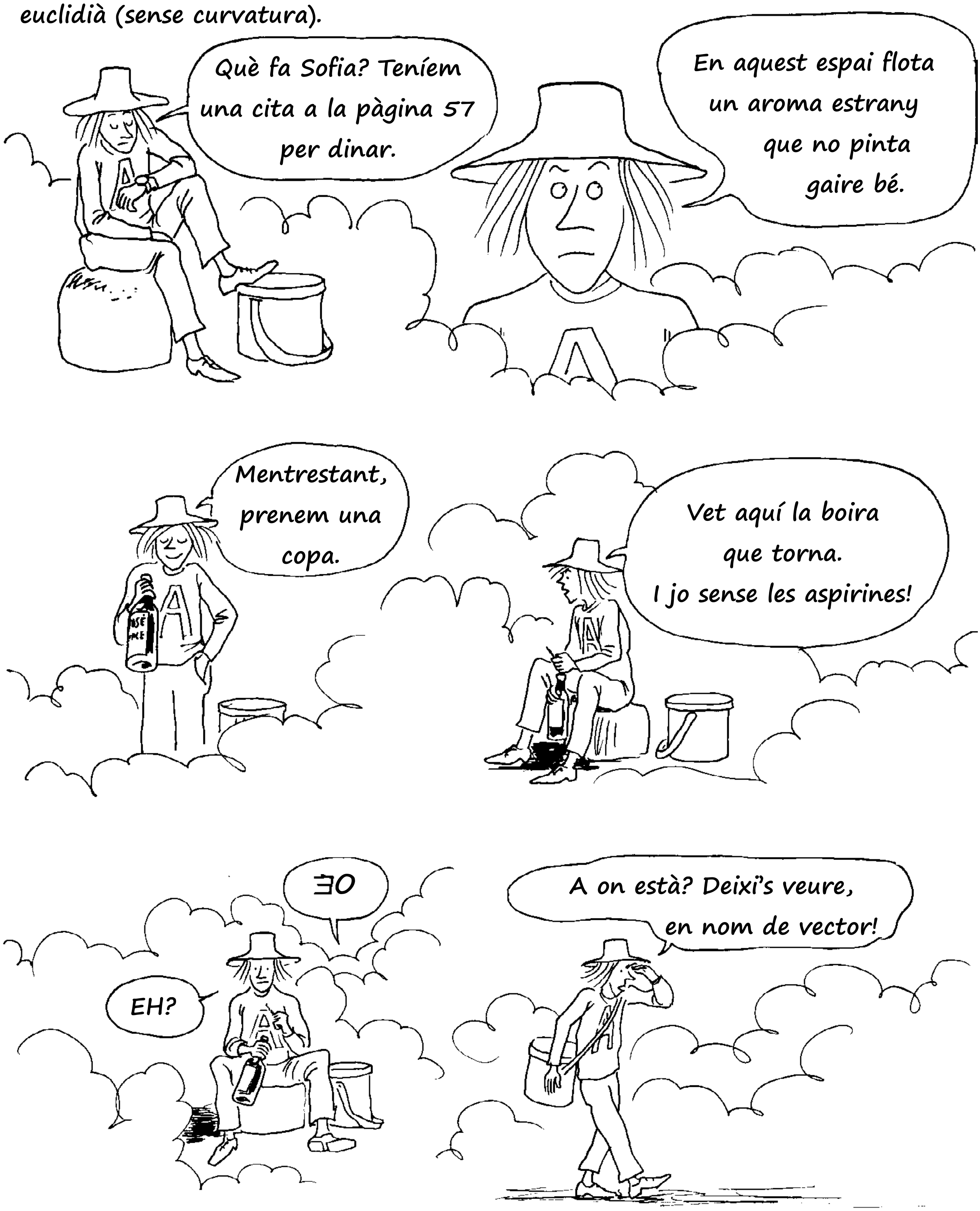
Podem doblegar-la d'un sol cop!

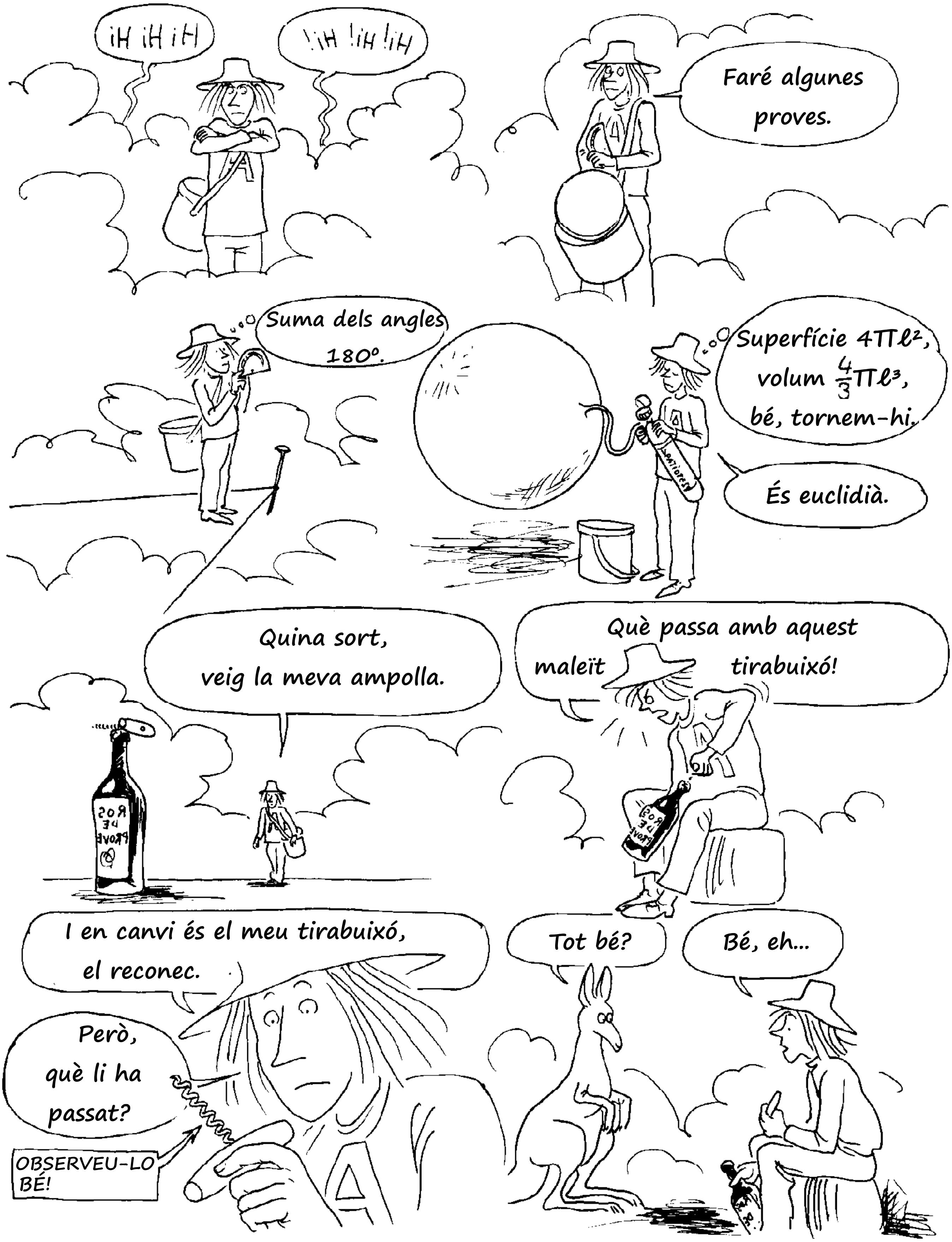

Intentem tallar-la en dos.
És més fàcil dir-ho que fer-ho Anselm, amic meu.
Però com s'ha de fer per tallar-la en dos?
Fixeu-vos, durant l'operació la cosa s'ha tornat bilateral.
És molt senzill, la talles en tres!
Estic completament desorientat.
Fixeu-vos, ara hi ha una cosa unilateral (blanca) i una cosa bilateral (gris) amb doble longitud que el primer.

Després d'aquest passeig per la cinta de Möbius, tornem als espais euclidians (sense curvatura) de tres dimensions:

L'ORIENTACIÓ DE L'ESPAI:

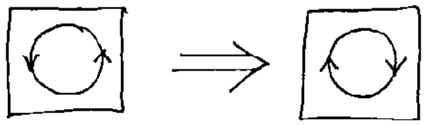
Acompanyem Lanturlu en la seva exploració d'un món nou tridimensional euclidià (sense curvatura).



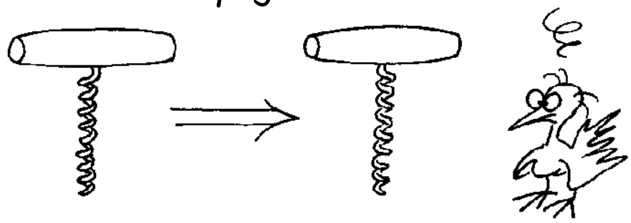

Hi! Hi! Hi!
Hi! Hi! Hi!
Faré algunes proves.
Suma dels angles 180°.
Superfície $4\pi\ell^2$, volum $\frac{4}{3}\pi\ell^3$, bé, tornem-hi.
És euclidià.
Quina sort, veig la meva ampolla.
Què passa amb aquest maleït tirabuixó!
I en canvi és el meu tirabuixó, el reconec.
Però, què li ha passat?
OBSERVEU-LO BÉ!
Tot bé?
Bé, eh...

És un rosat de Provença de qualitat bastant normal, després de tot...
Té un tirabuixó?
Eh... sí.
Si tots els cangurs del món es donessin la mà.
No ha notat res d'estrany?
No, que vostè fa mala cara, és tot.
Prengui una mica de bisulfit de parmesà dos cops al dia.
Que vagi bé.
Algú manipula el meu tirabuixó i un cangur borratxo es beu el meu rosat. Què és tot això?
Dimonis!
BLING!
VOLEM INSISTIR EN DEMANAR QUE OBSERVIN AMB MOLTA ATENCIÓ AQUEST TIRABUIXÓ.

La cinta de Möbius (espai inorientable de dues dimensions) té, aleshores, un equivalent tridimensional. A la banda de Möbius, quan el cercle calcomania feia la "volta" d'aquest espai euclidià, la seva orientació canviava:

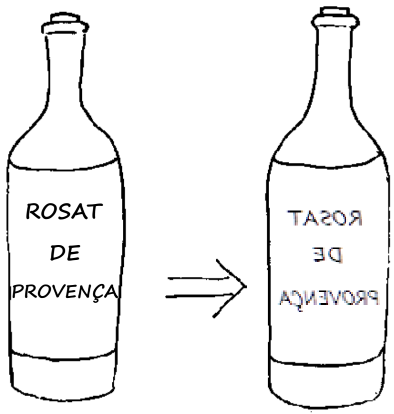


Veure la pàgina 54.



Observarem que els objectes estan "en mirall".

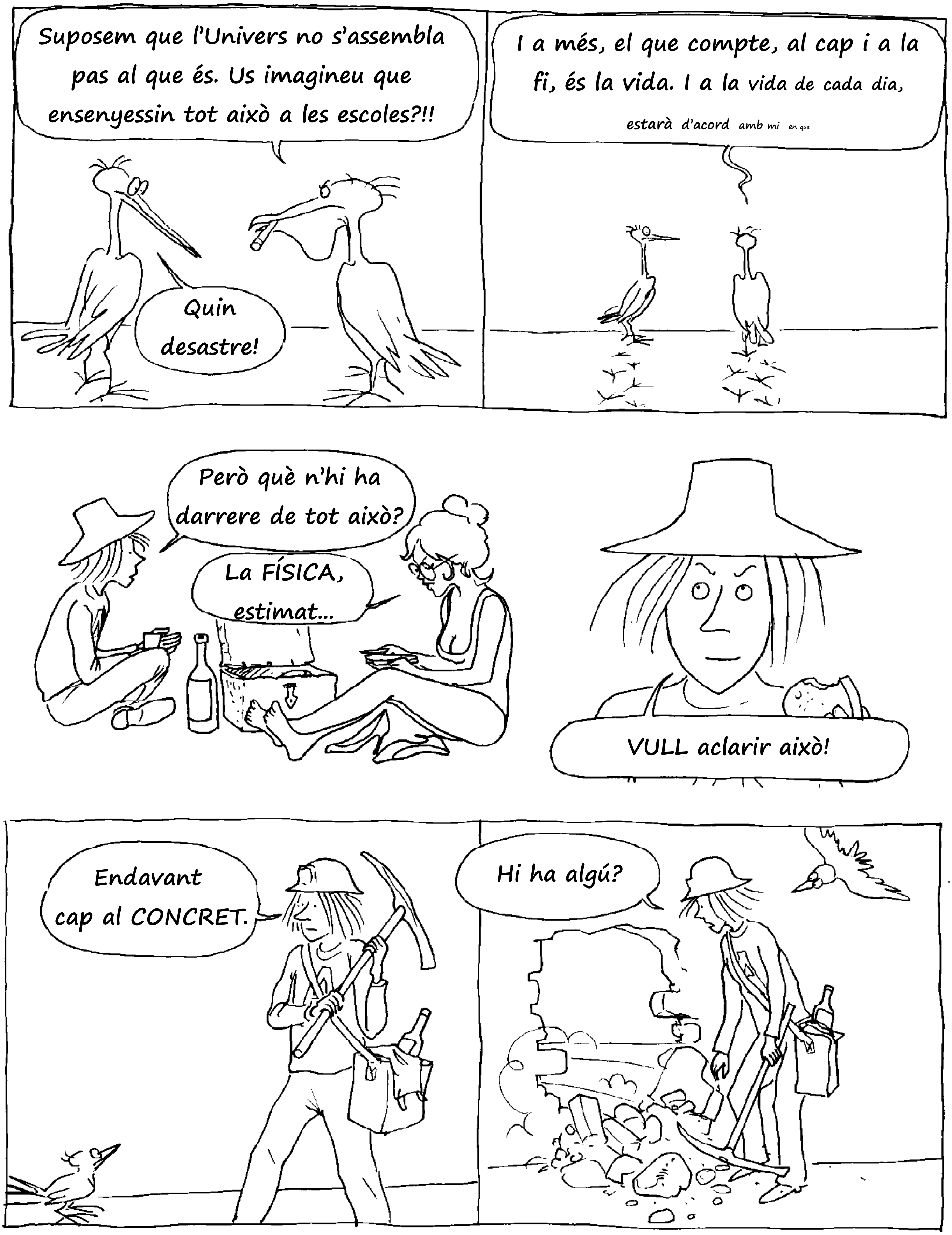
El tirabuixó, o el mateix Anselm, poden ser considerats com "calcomanies de tres dimensions". Cada cop que un objecte fa una "volta" a aquest espai tridimensional, la seva orientació s'inverteix. Ja que, en principi, hem acompanyat Lanturlu en el seu periple circumspacial, és normal que hàgim trobat l'ampolla "en mirall" i el tirabuixó girant en un sentit inusual. Una segona "volta" d'aquest univers ens tornaria a donar la visió inicial de les coses (amb la condició de deixar els objectes al seu lloc).



Anselm i el cangur (de l'espècie dels antipodes) viuen al mateix espai, però difereixen en el fet de que el que està "del dret pel cangur" està "al revés per Lanturlu", i viceversa.

EPÍLEG:


Tot va del revés. Ja no hi ha ni dreta, ni esquerra, ni revés, ni dret. Cap a on ens porta tot això? I quin camí s'ha de seguir?
S'han de seguir les geodèsiques, Anselm, les geodèsiques de la teva vida.
A mi no em farà creure que l'Univers és tan estrafolari. Tot això són deliris de matemàtic.
És un còmic!
Per què preocupar-se de tot això si és evident que l'espai ÉS euclidià (*).
(*) Propòsits sostinguts en 1830 per Ostrogradsky, professor titular de la tribuna de matemàtiques a Petrograd, després de llegir treballs de Riemann i Lobatchevsky.



Suposem que l'Univers no s'assembla pas al que és. Us imagineu que ensenyessin tot això a les escoles?!!
Quin desastre!
I a més, el que compte, al cap i a la fi, és la vida. I a la vida de cada dia, estarà d'acord amb mi en que
Però què n'hi ha darrere de tot això?
La FÍSICA, estimat...
VULL aclarir això!
Endavant cap al CONCRET.
Hi ha algú?


... si la densitat mitja de la matèria a l'Univers és inferior a 10^{-29} grams per cm^3...
?
... aleshores l'Univers tindrà una curvatura negativa i serà d'extensió infinita...
... per contra, si la densitat és superior a 10^{-29}g/cm^3
!..
... l'Univers serà hiperesfèric i es tancarà sobre ell mateix...
Però si aquesta densitat iguala 10^{-29}g/cm^3, aleshores l'Univers serà euclidià.
MMM...
Doctor Einstein, suposo?
Msí?...
Fi