مغامرات آنسلم لانترلو

الهندسة المتعددة الأبعاد المحيرة

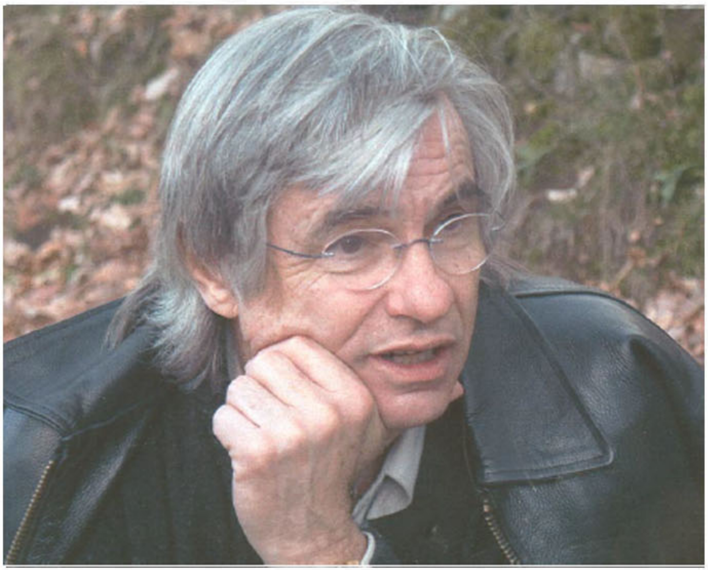
تأليف جون بيار بوتي

ترجمة نصرالدين عزوزي

معرفة بلا حدود

Villa Jean-Christophe, 206 Chemin de la Montagnère, 84120 France

http://www.savoir-sans-frontieres.com



جان بيار بوتي، **رئيس الجمعية**، مدير البحث السابق في المركز الوطني للبحث العلمي، فلكي - فيزيائي ومبدع فن أدبي جديد: الشريط الرسمي. قرّر في سنة 2005 أن يمنح مؤلفاته (أكثر من عشرين) في متناول الجمهور يمكن إقتناؤها مجانا في موقعه على الأنترنت. قام أيضا بتأسيس جمعية «معرفة بلاحدود» التي كان هدفها توزيع المعرفة مجانا، بما في ذلك المعرفة العلمية والتقنية عبر العالم. تشتغل هذه الجمعية بفضل العطايا وتكافئ المترجمين بمقدار 150 يورو (2006) بتحملها نفقات القبض البنكي. عدة مترجمين من شتى أسقاع الأرض يزيدون كل يوم من عدد الالبومات المترجمة (في 2005 ثمة 18 لغة بما فيها اللاووسي والرواندي).
يمكن مضاعفة وإستنساخ هذه النسخة، كليا أو جزئيا، ويمكن إستعمالها من طرف المعلمين في دروسهم شريطة أن تكون هذه العمليات دون أهداف تجارية مربحة. يمكن أيضا وضع النسخة في المكتبات العمومية والمدرسية والجامعية، سواء أكانت مطبوعة أو إفتراضية عبر شبكات الانترانت. لقد قام المؤلف بإكمال هذه المجموعة بألبومات بسيطة (مستوى 12 سنة) وأيضا ألبومات «ناطقة» للأميين وذوي لغتين لتعلم اللغات الأخرى إنطلاقا من لغتهم الأم. تبحث الجمعية بكدّ عن مترجمين جدد نحو لغاتهم الأصلية ويمتلكون الكفاءات التقنية تتيح لهم القدرة على إنتاج ترجمات جيدة للألبومات.
ترحب الجمعية بالعطايا (شيكات محررة لأمر معرفة بلاحدود). الموارد المالية للجمعية سنة 2006 هي مخصصة للترجمات الجديدة.

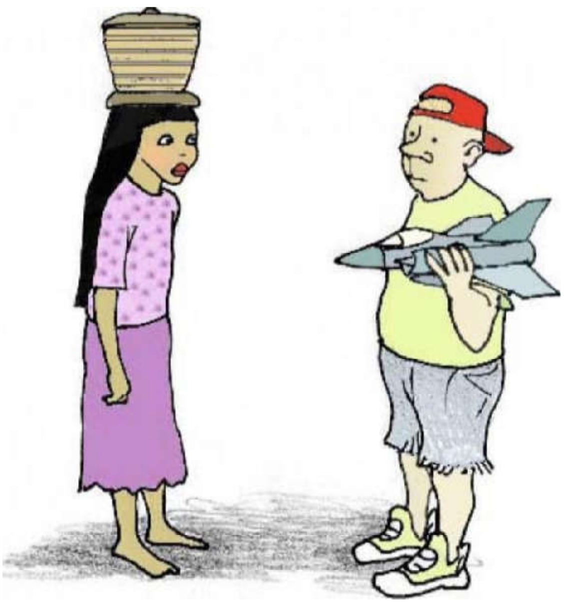
حدود بلا معرفة

.فرنسيان عالمان ويديرها 2005 عام تأسست ربحية غير جمعية
من رسمه تم الذي النطاق باستخدام العلمية المعرفة نشر :الهدف
تم :2020 عام في .مجانًا للتنزيل قابلة PDF ملفات خلال
عملية 500000 من أكثر مع .لغة 40 في ترجمة 565 تحقيق
.تنزيل

Jean-Pierre Petit **Gilles d'Agostini**

بالمال التبرع تم .تماما تطوعية الجمعية
.للمترجمين بالكامل

زر استخدم ، تبرع لتقديم
:الرئيسية الصفحة في PayPal



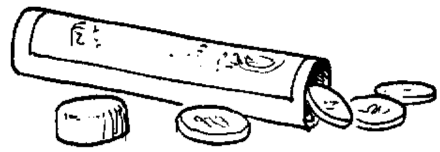
http://www.savoir-sans-frontieres.com

PayPal
FAIRE UN DON

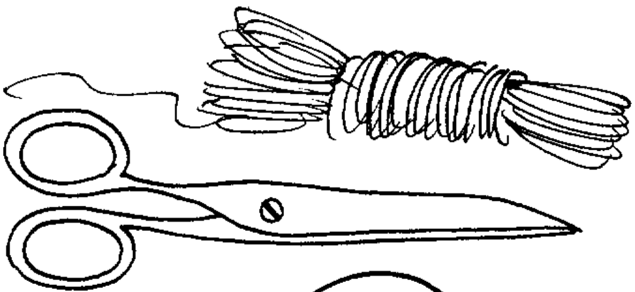
تحذير:

هذه ليست محاضرة ولا بالطبع رسالة بحث.
إنها ببساطة قصة من قصص آنسلم،
قصة رحلة من رحلاته إلى أرض الهندسة.

لقراءتها يفضل التزود :

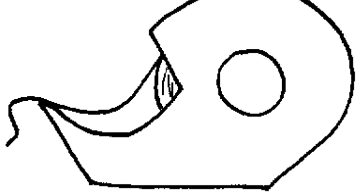


* بالأسبرين أولا

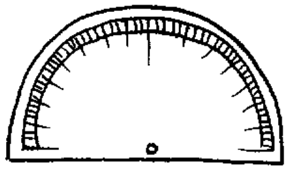


* ثم بمكب خيطان

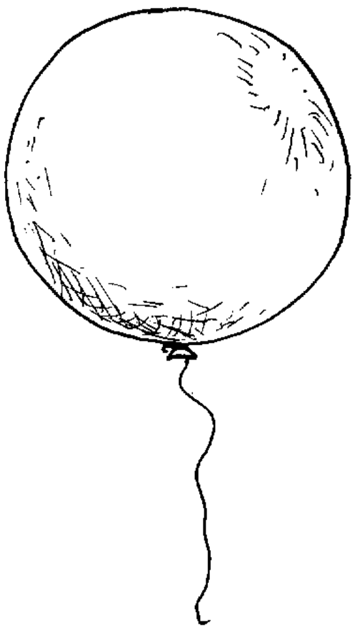
* و بمقص



* و بشريط لاصق

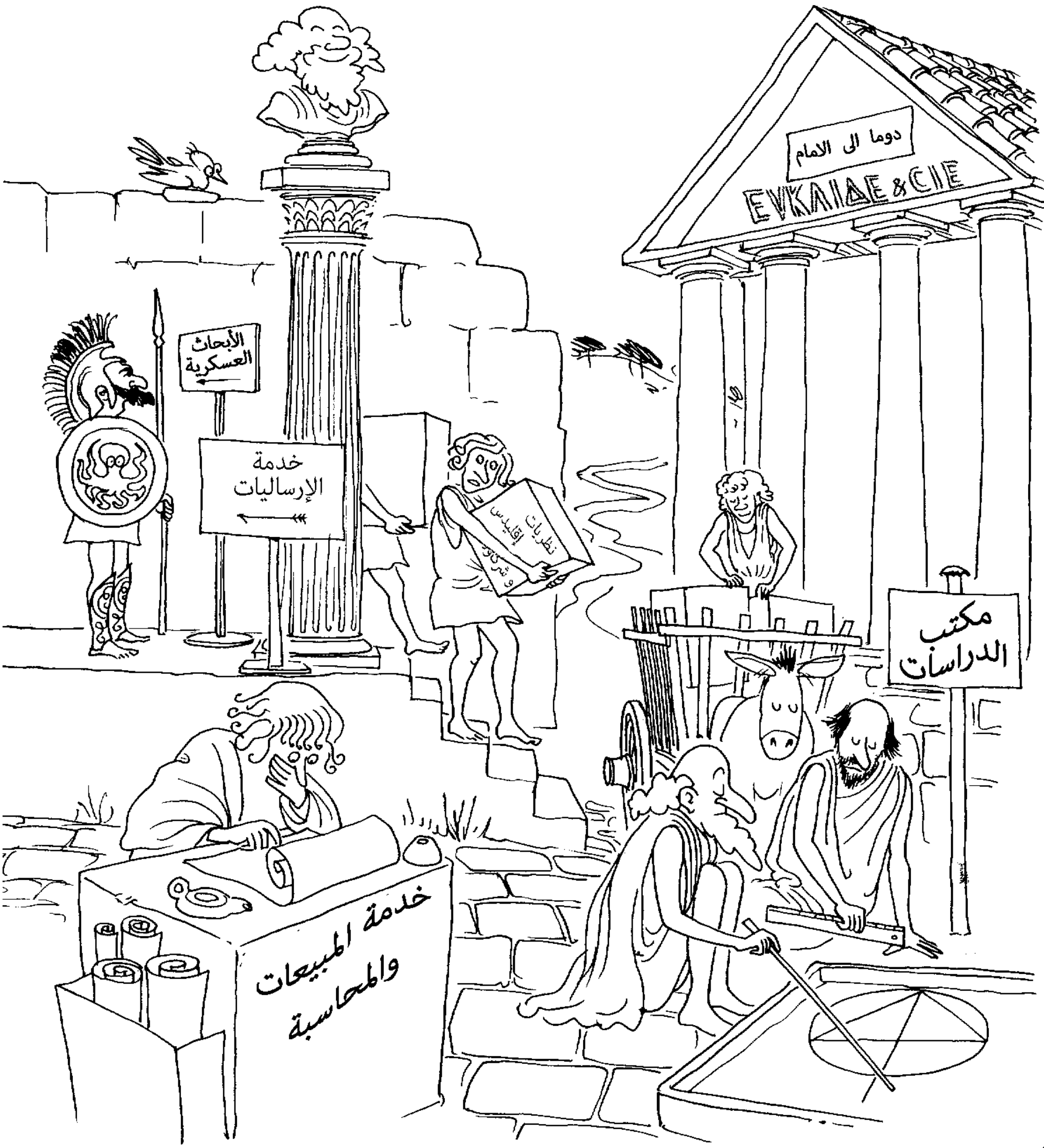


* و بمنقلة لقياس الزوايا



* وأخيرا بكرة جميلة و مستديرة.

تكونت شركة " إقليدس و شركاؤه " بالاسكندرية في
القرن الثالث قبل الميلاد. و ازدهرت أعمالها خلال ألفي و مائتي عام،
حيث أعرب الزبناء عن ولائهم المستمر
بعد رضاهم على منتجات وخدمات الشركة.

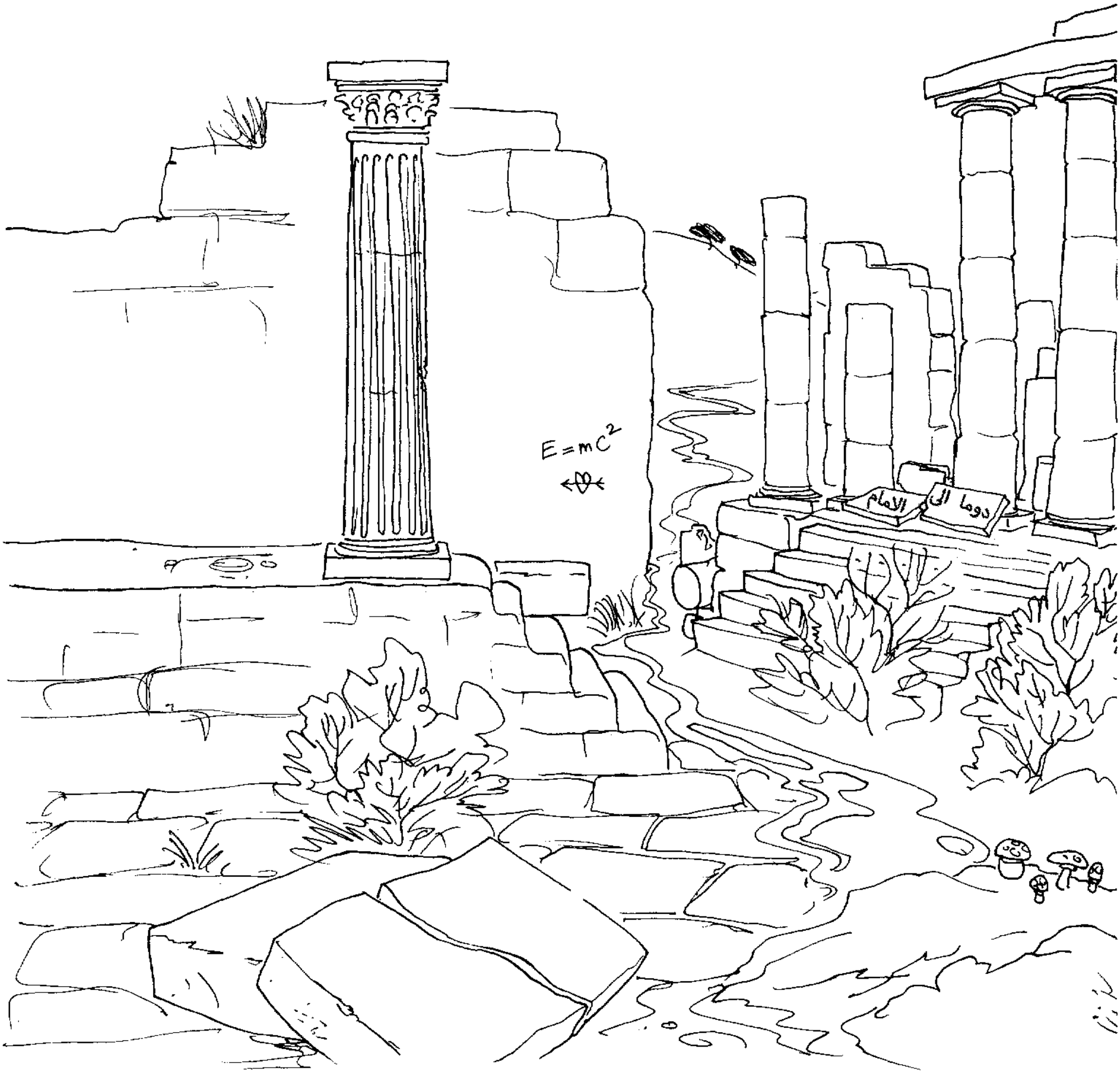


وبعدها تدريجيا، تغيرت أذواق الزبناء.

فأصبح بعض المولعين بمنتجات و خدمات الشركة يتساءلون :

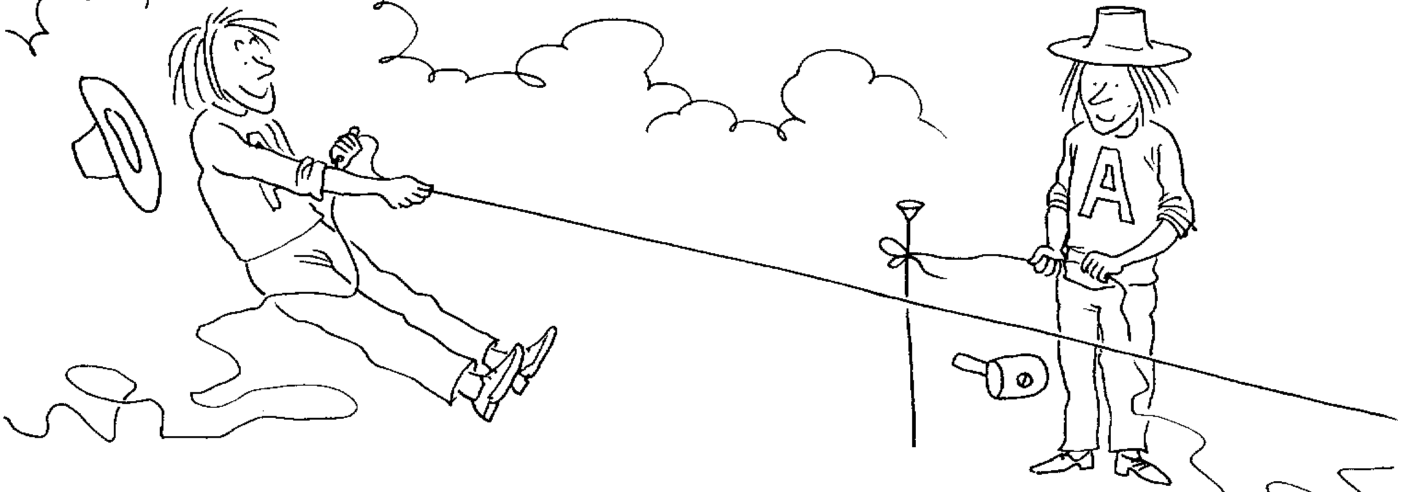
أحق أن رمز " إقليدس " يشيرلأسمى منتج بأي زمان و مكان؟

ها هنا نحكي لكم قصة أحدهم.



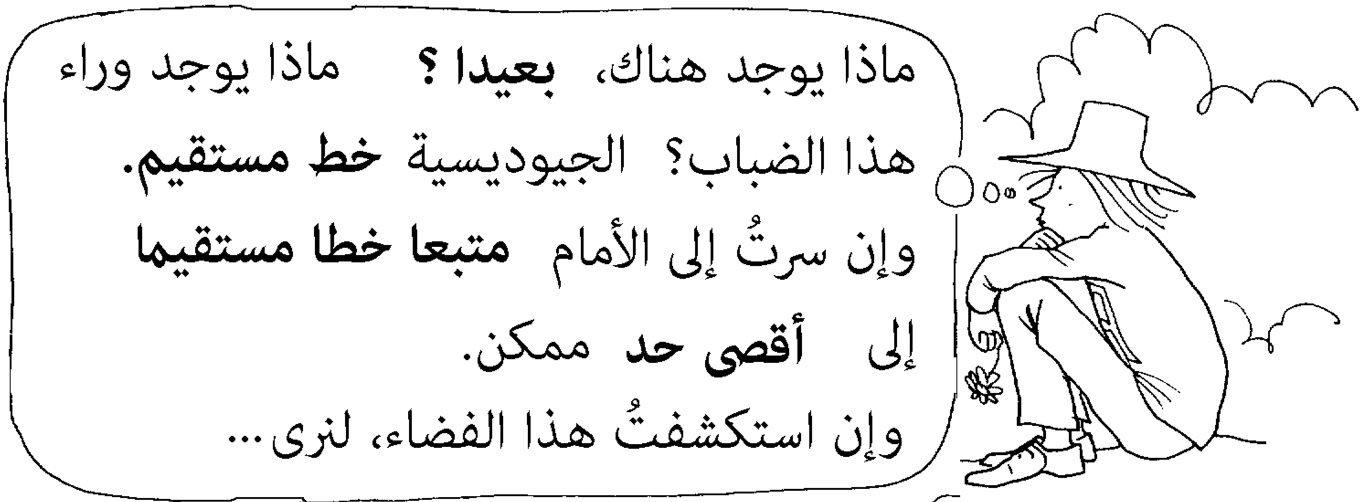
مقدمة : في يوم من الأيام، قرر آنسلم

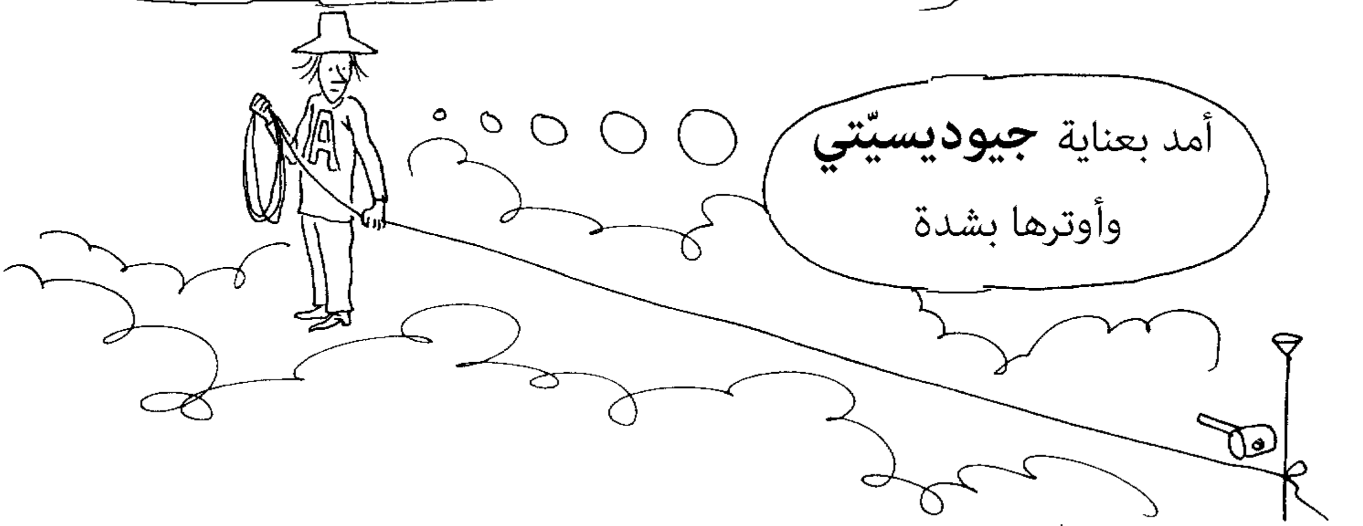
إمداد خيط بين وتدين :



بثلاثة خيوط متوترة،
أي بثلاث **جيوديسيّات**،
B
A
كوّن آنسلم **مثلثا**
بعد وضع منقلته على القمم الثلاثة **للمثلث**،
قاس الزوايا "Â" ،"B̂" و "Ĉ"، ثم حسب مجموعها
طبقا لنظرية
"إقليدس و شركاؤه" البارعة،
ساوى مجموعها 180°.
حسنا ...
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ ευκλιδε

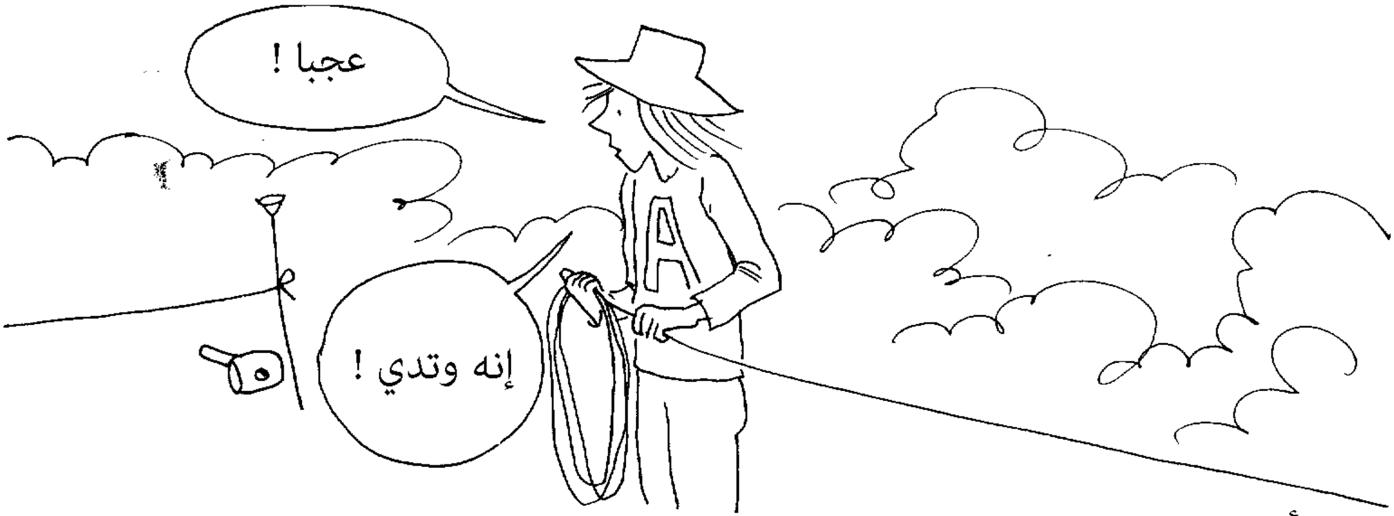
كان عالَم آنسلم كثير الضّباب،
لدرجة أنك تكاد عدم رؤية يدك مبسوطة أمام عينيك!



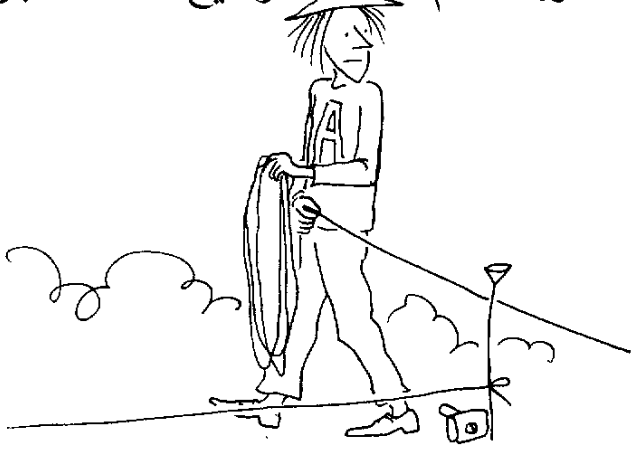


مشى آنسلم لوقت طويل، طويل جدا...
مدّ وراءه خيطه متوترا كفاية كي لا يهتم بارتياب النتيجة الذي قد يحصل إثر مشيته في الضباب :
كان يجعل **جيوديسيّته** بغاية الإتقان

ولكن ألا لاحظت معي، هناك أيام لاتجري فيها الرياح بما تشتهيه السفن



بما أنه مازال لديه المزيد من الخيوط،
قرر آنسلم توضيح هذه الأعجوبة



بعزم قوي وفضول واضح،
واصل تمديد خيطه،
وتابع إلى الأمام، **حسب خط مستقيم**

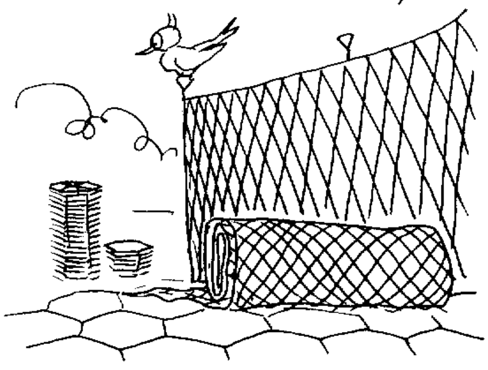
ومع الأسف ...
أُغلِق **مستقيم**
آنسلم مجدّدا !


؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟
لنحاول مُبَرْهَنَةً من لدن إقليدس.
إذا مددت ثلاث **جيوديسيّات** متساويات الطول،
سأحصل على **مثلث** متساوي الزوايا.
كل زاوية تساوي 60° و مجموعها 180°.
هذا ما ذُكر بدليل إقليدس.
B 60 A 60 60 C
Â + B̂ + Ĉ = 180°
و عندها سوف نرى ...
RATIO OMNIA VINCIT
A
هاهنا نضع النقطة "B".
تبقى أن نمدّ الخيطين التاليين لتحديد النقطة "C".
A
B
ما أعظم العلوم !
ياللغرابة!
الزوايا متساوية بالفعل
و لكنها تفوق 60°!
ما المشكلة؟
A
وبالطبع مجموعها يفوق 180°!
الهندسة الإقليدية


ولكنني قد تأكدت باستعمال المسطرة
أن الخيوط فعلا **مستقيمة.**
إقليدس
ألو، أهذه شركة "إقليدس"؟
لدي مشاكل ببعض معداتكم.
ثانية واحدة، سأوصلك بمصلحة
الخدمة التقنية.
مشاكل مع مثلاتنا، سيدي؟
هذا غريب! لم لا تجرب دائراتنا؟ نأكد لك ارتياح زبنائنا لهذا المنتج.
... الدائرة إذن هي مجموع النقط التي تبعد بنفس
المسافة "L" عن نقطة معينة.
ماذا؟ نعم ... المحيط يساوي $2\pi L$ والمساحة هي πL^2.
أجل سجلت، شكرا.
L
نحن دوما
بالخدمة.

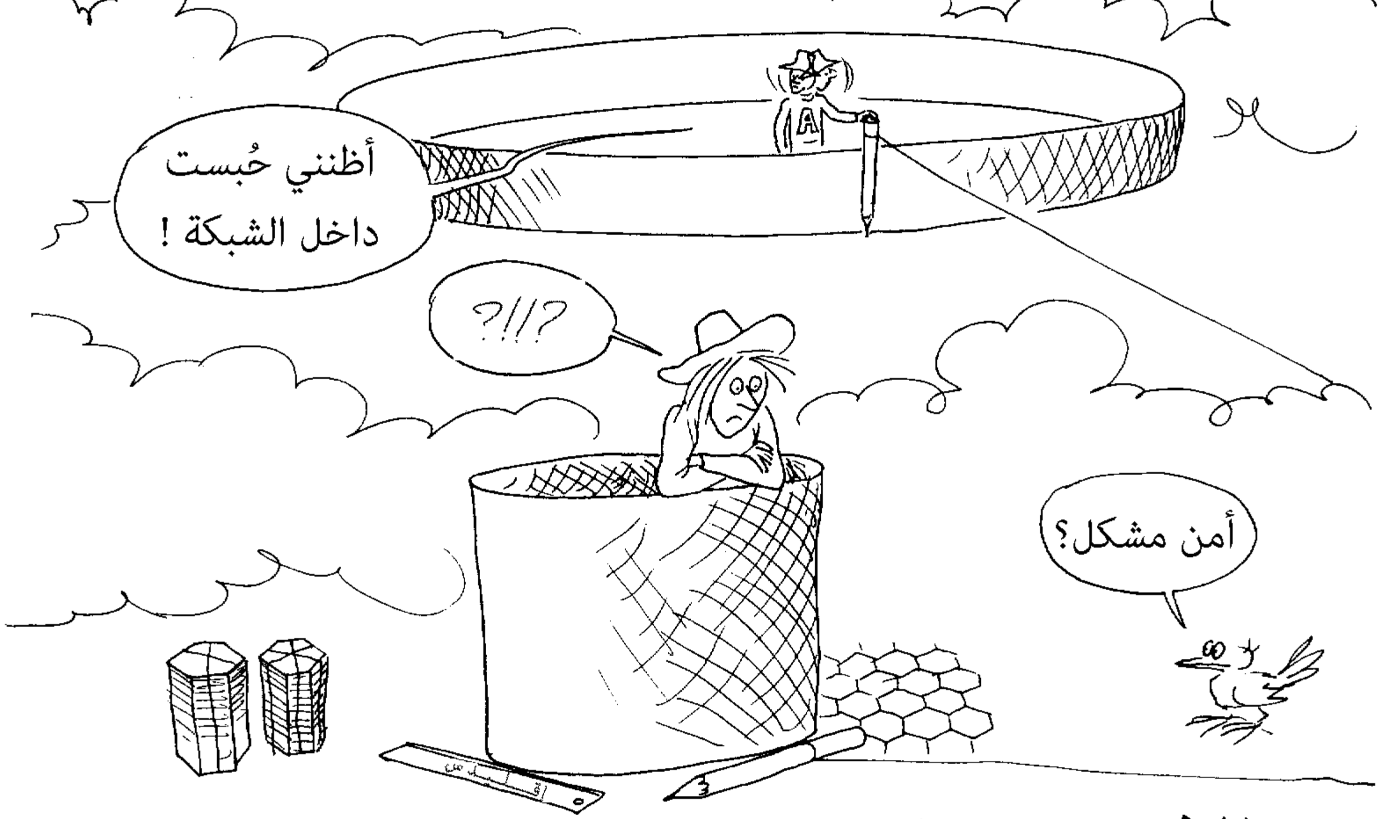

لقياس **المساحة :** نستعمل تبليط "إقليدس". و لأجل قياس **المحيط :** نفتخر بشبكة "إقليدس" إنها أدق منتج في السوق. إرضاء زبنائنا هو ثروتنا.
المساحة هي πL^2.
إقليدس
الهندسة في خدمة الكل
بداية سيئة. لدي فائض من البلاط !
كل شيء هنا جمال ورونق، هدوء وطمئنينة.
لنقس الآن المحيط بهذه الشبكة.
المحيط يساوي $2\pi L$.
L

تابع آنسلم استكشافه بالزّيادة في طول شعاع الدّائرة "L".
لكن الفائض كان يزداد كلما كبرت الدّائرة.



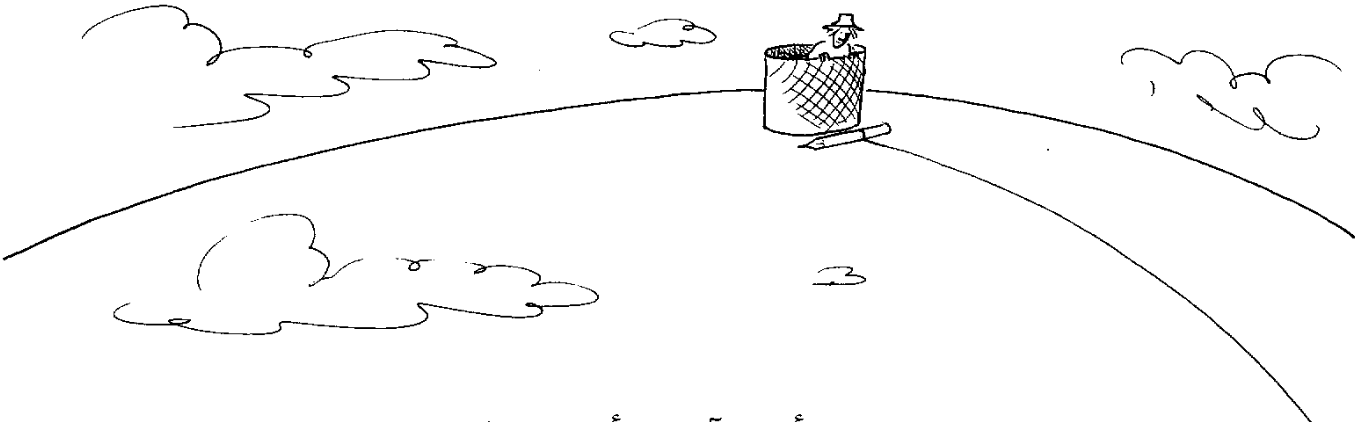

ياللغرابة، لقد حصلت الآن على فائض 36%
من الشبكة، وأزيد من 19% من البلاط !
والدّائرة الّتي أرسم أصبحت ... **خطّا مستقيما** !
لاريب، هذه المسطرة
مستقيمة بالفعل !
أأنا في حلم،
أم ماذا ؟
زاد آنسلم مرة أخرى
في طول الشّعاع "L". وهذه المرة...
انقلب تقوّس الدّائرة إلى
الاتّجاه المعاكس.
ثم كلما **كبَّرتُ** الشّعاع،
صغُر المحيط.
هذا جنوني !

و بعد آخر تبليط.



ما الذي حصل ؟

لِنُزل الضّباب كي نُجب:



و بغتة أدرك آنسلم أنه فوق كرة،

حيث طبق عليها قواعد

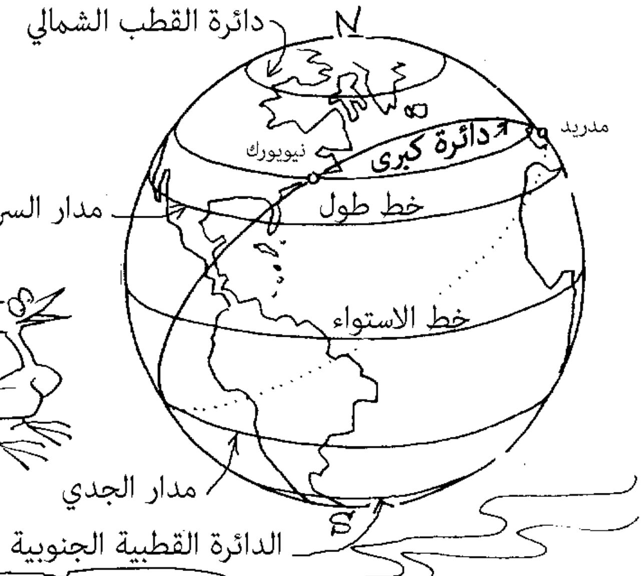
هندسة المسطح.

لكن كيف تمكّن آنسلم من رسم **خطوط مستقيمة** على كرة ؟ لا معنى لهذا.
ماذا تسمي خطّا مستقيما يا عزيزي ؟ إن كنت تقصد أقصر طريق من نقطة لأخرى، فهناك **مستقيمات** على الكرة.
قد يكون هذا فخا ! حذار !
فمفهوم الجيوديسيّة الذي يمثل أقصر مسافة بين نقطتين ليس حكرا على **المسطح**.
مسطح
مَدِّد خيطا مطاطيا بين نقطتين على كرة.
ثم أفلِته !
تحصل على **جيوديسيّة**.

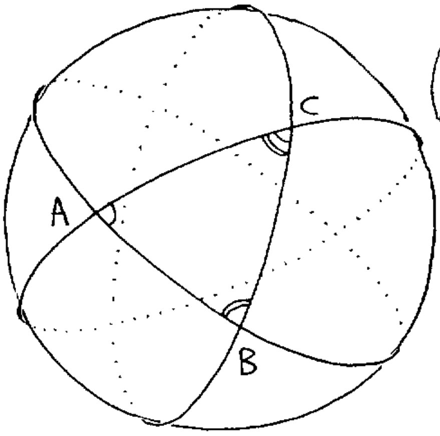

ماذا تقول ؟ ليس **مستقيما** هذا الشيء !
خذ هذه المسطرة وتحقق بنفسك.
أتسمي هذا الشّيء مسطرة ؟
هذه **مسطرة** خاصة **بالمساحات**. تعمل جيدا على **مُسطّح**. انظر ! تُمكِّننا من عدم التزحزح عن مستقيمنا، لا يمينا و لا يسارا.
مُسطّح
مسطرة مضحكة...
ومهما يكن، فكلما رسم آنسلم جيوديسيّته، فهي **تغلق** في النهاية.
إذا، وبكل بساطة، فوق الكرة تشكل الجيوديسيّات دائرات.
فكل الخطوط التي تمثل أقصر طريق فوق شكل كروي، هي قطع من أقواس جيوديسية مغلقة تجسد دائرات على الكرة، ولكنها ليست أية دائرات !

!؟؟؟!
يا لها من حكاية، أنت تتلاعب بالألفاظ. أتود أن تفهمني أنها توجد على الكرة أنواع مختلفة من الدائرات ؟!؟
ظننت أنني فهمت، وهاأنذا لم أفهم شيئا على الإطلاق.
على الكرة، الدائرة عبارة عن مجموعة نقط تبعد بنفس المسافة "L" عن نقطة ثابتة "N" نسميها **قطبا**.
N
L
هممم...
هذه مجموعة دائرات متوازية حول نفس القطب "N"، نسميها **خطوط الطول**.
N
S
L
خط الاستواء
L'
S
نقط كل من هذه الدائرات المتوازية تبعد بنفس المسافة "L'" عن نقطة ثابتة أخرى "S" تدعى **القطب الجنوبي** : نقيض **القطب الشمالي** "N"
من بين هذه الدائرات : أكبرها تتوسطها، سميت بذلك **خط الاستواء**.
فهمت أخيرا لم للدائرة على كرة **مركزان** : "N" و "S" !
ونسمي **خطوط الطول** هاته : **الدائرات الكبرى للكرة**. فتُكوِّن بالفعل **جيوديسيّات** لها.
أول مرة أشاهد فيها **جيوديسيّة** عن قرب. هذا مذهل !

على كوكب **الأرض**،
الدائرات القطبية والمدارات الاستوائية
هي خطوط طول متوازية.
مدريد ونيويورك تقع على نفس خط الطول.
لكننا نعلم جيدا أنه ليس بأقرب طريق.
أقرب طريق هي **الدائرة الكبرى**.



في زماننا كنا نسميها
مسار الطيور.



المثلث مكون من ثلاثة أقواس **مستعارة** حتما من ثلاث دائرات كبرى.

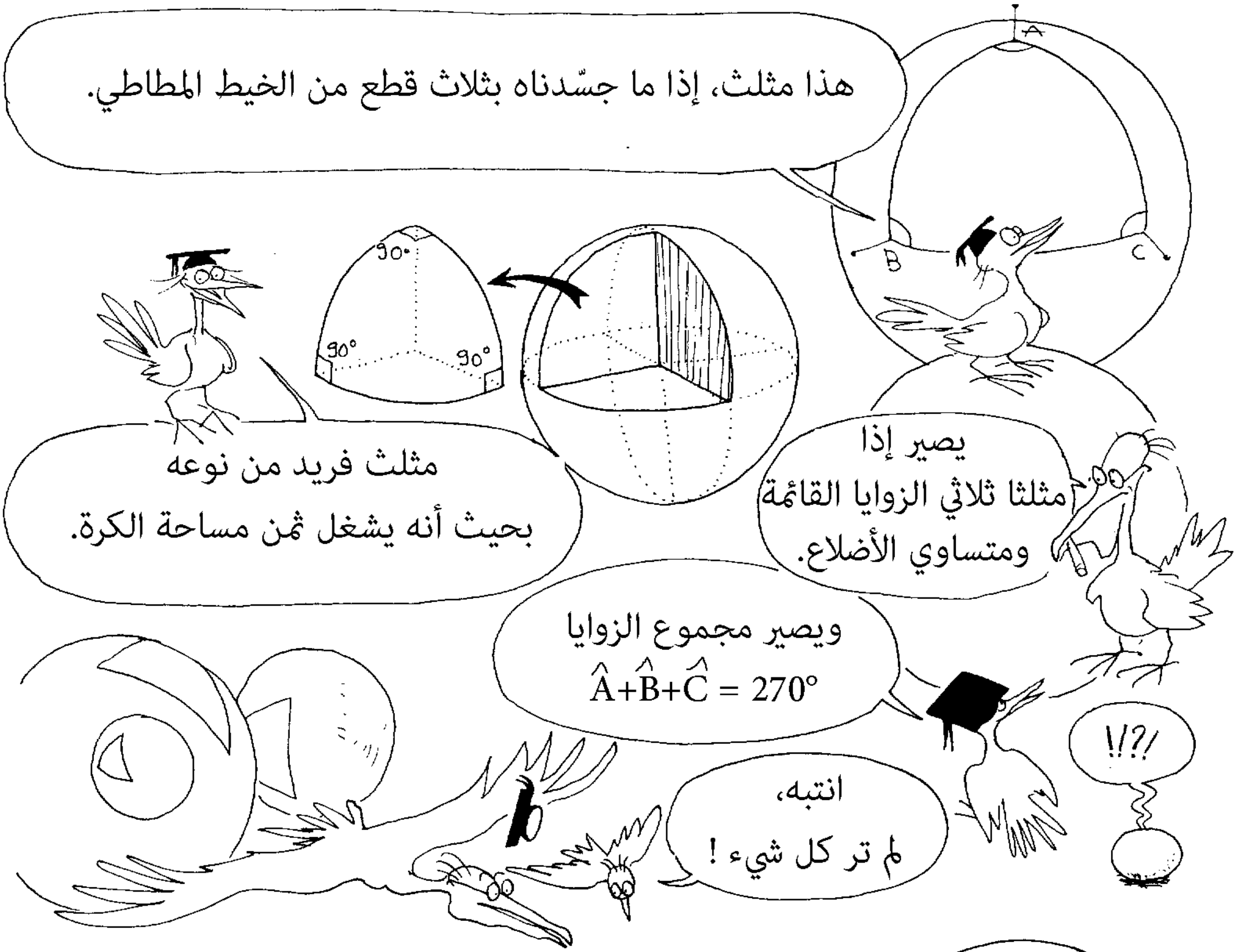
يمكننا تجسيد هذه المثلّثات بشريط لاصق أو بخيوط مطاطية، ثم نقوم بقياس الزّوايا بوضع منقلة فوق سطح الكرة على قمم المثلّثات.

وماذا يعادل
مجموع الزّوايا
"$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$" ؟

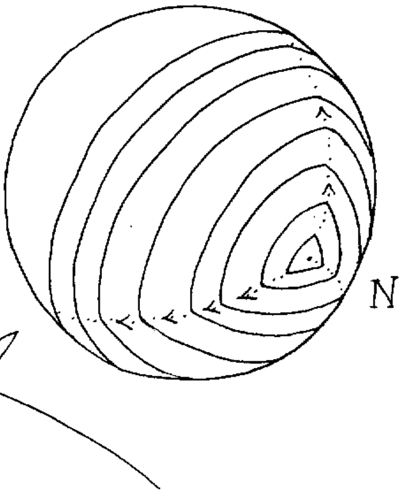
حسب مساحة المثلّث :
بين 180° و 900° !

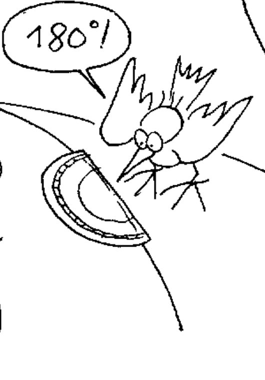
إذا قصُرت المسافات، سطح الكرة لا يختلف كثيرا
على سطح **مُسطّح**. وفي هذه الحال ...

يقارب المجموع 180°.



تخيل معي مثلثا مكونا كسابقه من قطع الخيط المطاطي،
لنبعد قممه شيئا فشيئا :
نلاحظ أن زوايا المثلث تكبر وبالتالي يكبر مجموعها.

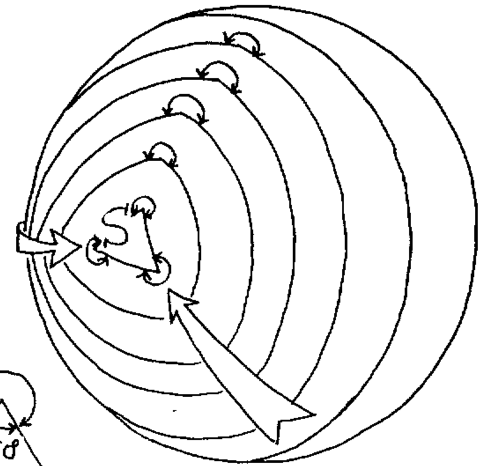


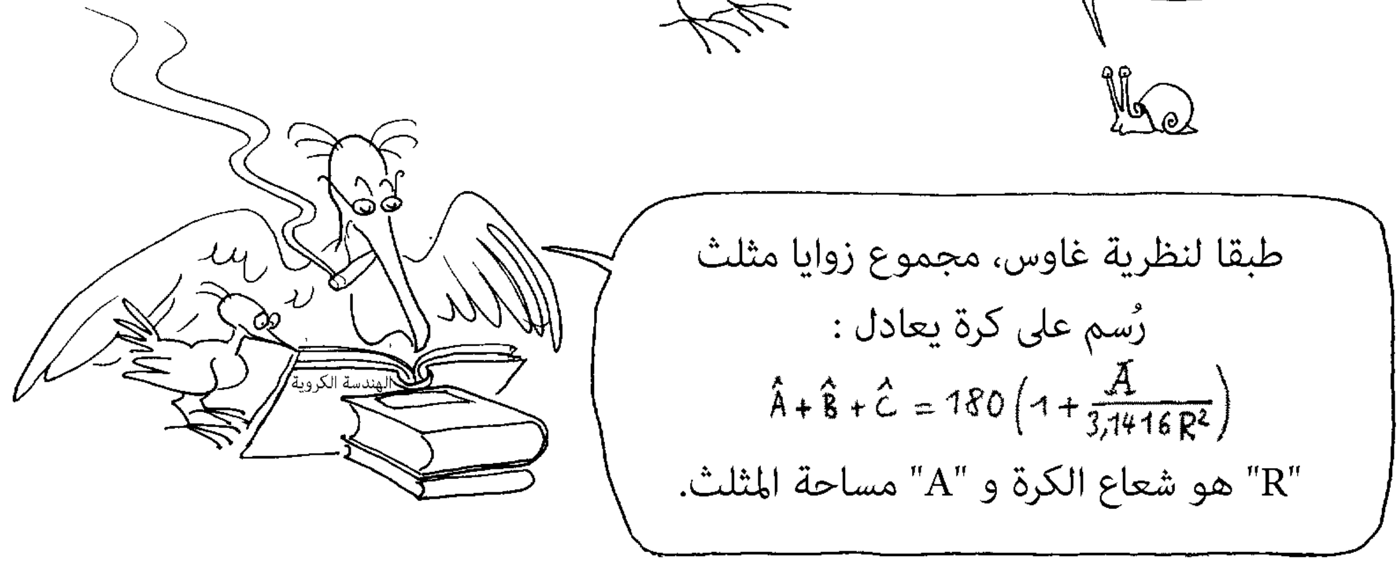


و أخيرا، قد نريد وضع القمم الثلاثة
على خط من خطوط استواء الكرة.

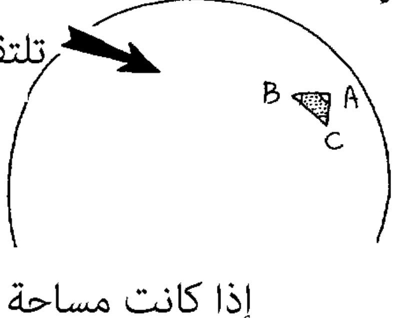
الزوايا الثلاثة "$\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$" تصبح **مسطحة**،
تعادل 180° ومجموعها يصل إلى 540° **!!**

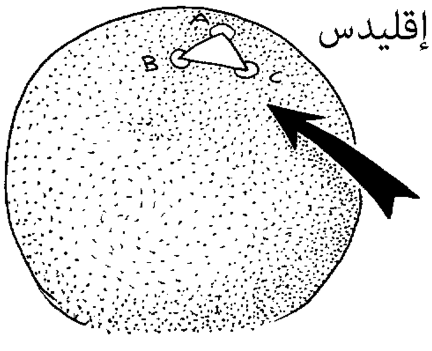
إذا ما واصلنا رحلة قمم المثلث إلى النصف الآخر للكرة.
يرحل المثلث نحو القطب "S" النقيض للقطب "N".
إذا ما احتفضنا لزوايا القمم نفس الخصائص كما في البداية.
ستعادل كل منها أزيد من 180° !
لنكن أكثر دقة : سوف تعادل 360° - 60° = 300°.





إذا كانت مساحة المثلث صغيرة (بالنسبة إلى مساحة الكرة) :
تلتقي نظرية غاوس مع نظرية إقليدس
$(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°)$

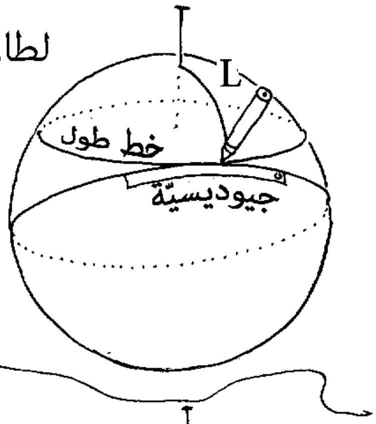




أما، على عكس ذلك،
إذا كانت مساحة المثلث تقارب مساحة الكرة
$(4x\ 3,1416\ x\ R^2)$، يصير المجموع 900°.

مذكرة : يمكن إيصال نقطتان على كرة بمنحنيان جيوديسيّان يشكلان دائرة كبرى.
إذا كانتا النقطتان تشكلان قطبين نقيضين "N" و "S"، فبينهما يمكن تمرير عدد غير متناهي من الجيوديسيّات ! إثنتان من هاته "المستقيمات الدائرية" تشكلان زاويتان مزدوجتان متساويتان و ضلعان متساويان. ومجموع الزوايا يعادل ... أي شيء !
N
S
ما هذا الهراء؟
الإدارة
لنحاول الآن فهم سبب فائض البلاط و الشباك لدى آنسلم.
(γ)
N
L
L
R
(C)
"C" هي الدائرة التي رسمها، و "γ" هي الدائرة التي ظن أنه رسمها.
لقد قدر مساحة الدائرة مستعملا هندسة المسطحات πL^2 ($\pi = 3,1416$).
المساحة الحقيقية تعادل نصف مساحة الكرة : $2\pi R^2$.
"L" هو ربع المحيط : $\frac{1}{2}\pi R$. وحاصل قسمة المساحتين $\pi^2/8 = 1,233$.
وحاصل قسمة المحيطين $2\pi L/2\pi R = \pi/2 = 1,57$.
أما إذا ارتبتم بعد هذا، فحاولوا تلفيف كرة بورق دائري !
ما هذه الانكماشات !
ورق دائري ؟ ماالورق الدائري ؟

لطالما لم يصل آنسلم إلى خط الإستواء، يضل **تقعر** الدائرة طبيعيا

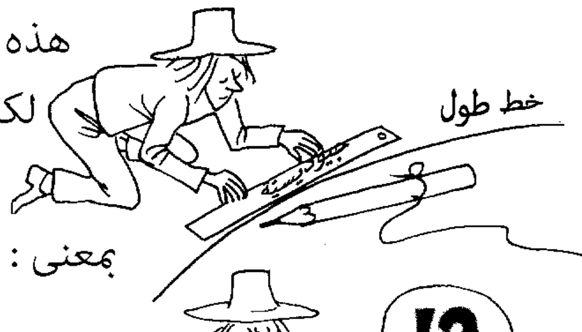


هذه الدائرة تمثل خط طول.

لكن مسطرة آنسلم تتبّع

جيوديسيّة،

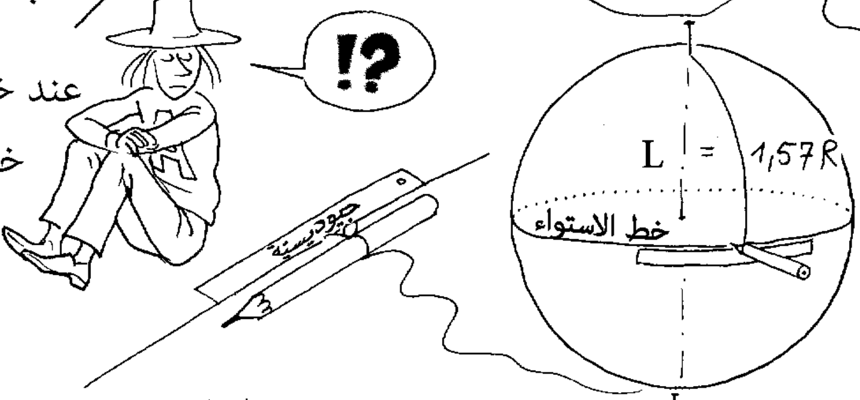
بمعنى : **دائرة كبرى** على الكرة،



عند خط الإستواء : عندما L=π/2R،

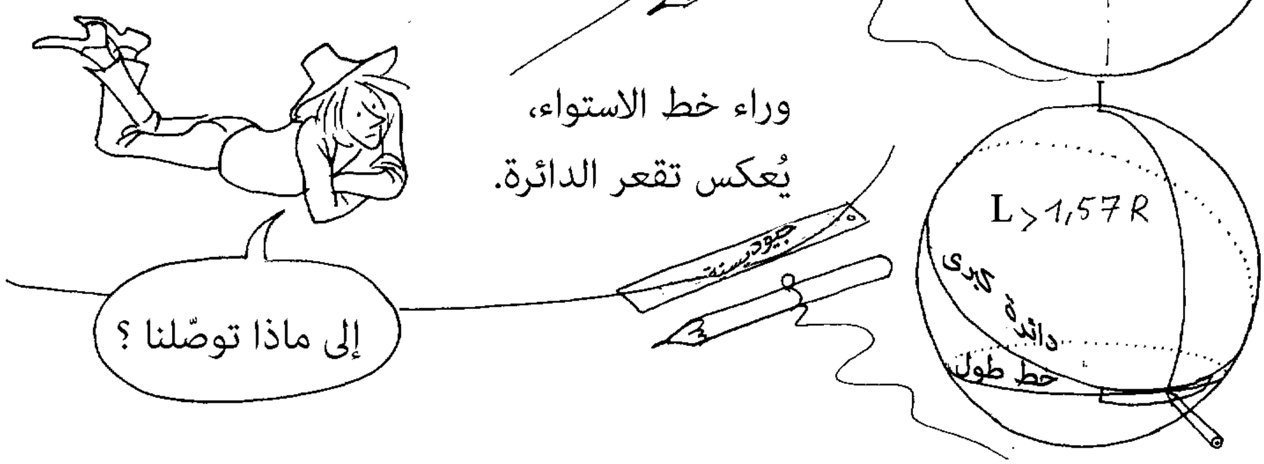
خط الطول يقع على جيوديسيّة،

فتظهر الدائرة "**مستقيمة**".



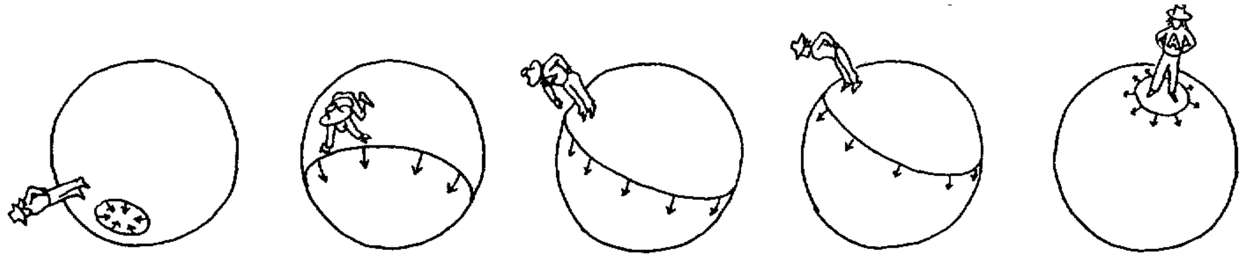
وراء خط الاستواء،

يُعكس تقعر الدائرة.



هذه الخاصية تشرح لنا كيف نتمكن من "الدخول" أو "الخروج" من دائرة مرسومة على كرة، دون تخطيها.

تخيل هذه الدائرة كخاتم مطاطي ينزلق على سطح كرة.



استغرق آنسلم وقتا لابأس به كي يستوعب هذه المعطيات المكتشفة من قبل عالم الرياضيات كاوس (1777-1855). فقرر استكشاف عالم **المساحات** :

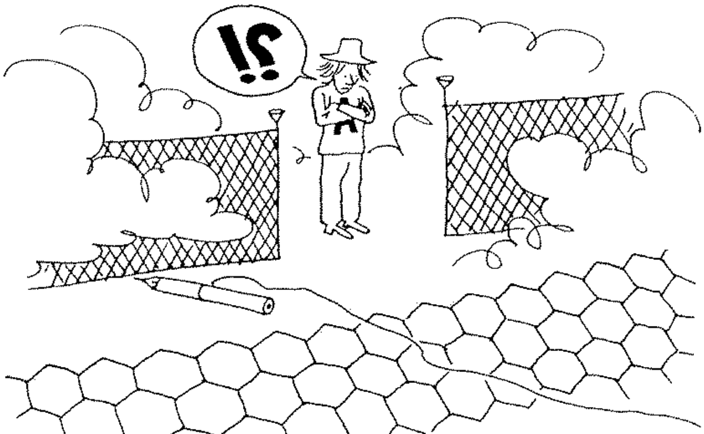
أحيانا، العلم يؤدي
إلى بعض المخاطرة.

عند وصوله إلى عالَم جديد، مد آنسلم جيوديسيّة، لكن بهذه المرة :

الجيوديسيّة لا تغلق.

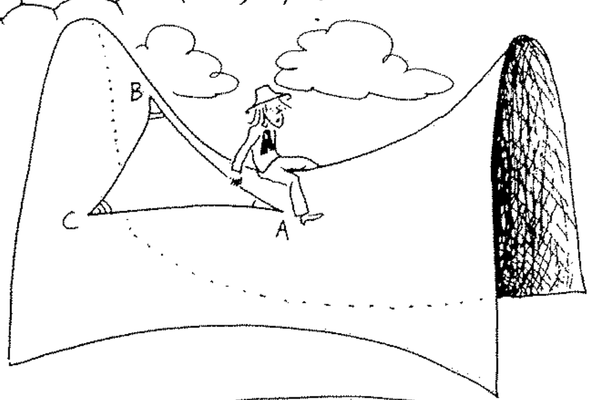
وبثلاثة خيوط ممدودة بإحكام،
أنجز آنسلم مثلثا، غير أن مجموع زوايا قممه
نزلت هذه المرة تحت 180°.

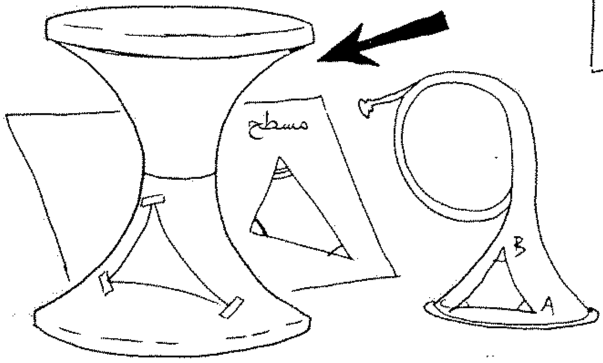
الدا ئرة تبقى هي مجموع النقط التي تبعد بنفس المسافة "L" عن نقطة ثابتة. لاحظ آنسلم أن هذه الدائرة المرسومة على السطح الجديد لها محيط يكبر عن "$2\pi L$" ومساحة تفوق "πL^2".



لنُجلي الضباب :

في هذه المرة السطح يشبه فج جبل أو ظهر حصان. أشياء نراها في حياتنا اليومية قد تمثل لنا هذا السطح : هذا الكرسي مثلا...





التقوس :

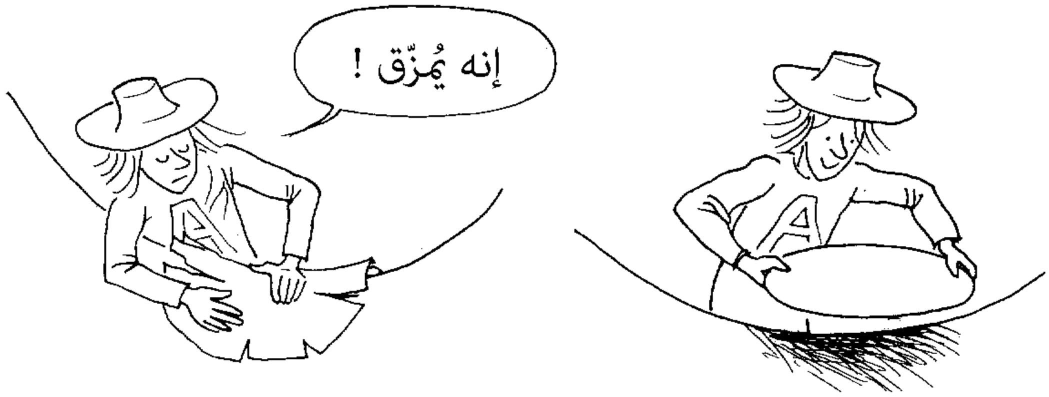
السطح المقوس لا تنطبق عليه النظريات الإقليدية. التقوس قد يكون موجبا أو سالبا.

على سطح ذا **تقوس موجب**، مجموع زوايا المثلث يفوق 180°. وإذا رسمنا عليه دائرة بشعاع "L"، تكون مساحتها أصغر من "πL^2" ومحيطها أصغر من "$2\pi L$".

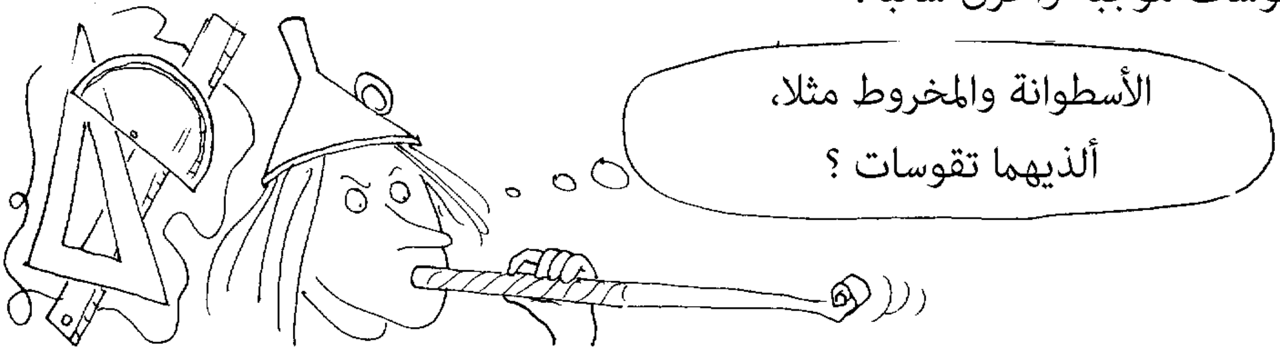
على سطح ذا **تقوس سالب**، مجموع زوايا المثلث يقل عن 180°. وإذا رسمنا عليه دائرة بشعاع "L"، تكون مساحتها أكبر من "πL^2" ومحيطها أكبر من "$2\pi L$".

لاحظ سابقا آنسلم عندما أراد **تغليف** كرة (سطح ذا تقوس موجب)،
بشئ مسطح، أن انكماشات تحدث على الورق.
تغليف سطح ذا تقوس سالب بورق مسطح هو غير ممكن كذلك : تحدث تمزّقات.

هذا اختبار بسيط لمعرفة اتجاه التقوس.



كما لاحظنا على الصفحة السابقة، السطوح قد تكون لها أماكن ذات تقوسات موجبة وأخرى سالبة.

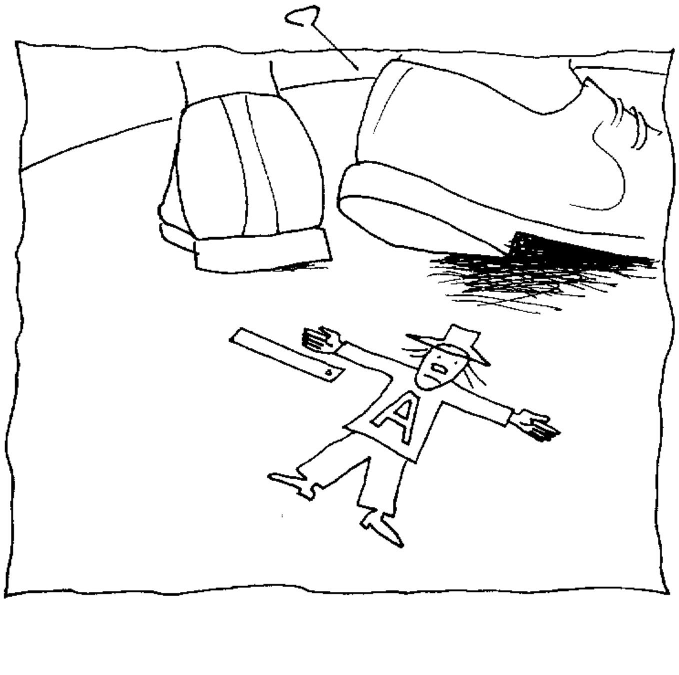



اختبار التغليف.
الأسطوانة والمخروط تُغلَّف بمسطح بلا مشكلة !
بدون تسرع. أُلصق بواسطة شريط لاصق ثلاثة خيوط مطاطية : أعني ثلاث جيوديسيّات، على الأسطوانة...
و الآن أرسم الجيوديسيّات على سطح الأسطوانة.
أنشر الأسطوانة جيدا لتصبح مسطحا.
!..
طبقا لقاعدتنا، الأسطوانة والمخروط، ممتثلان للقاعدة الإقليدية، يشكلان **مسطحين !!!**

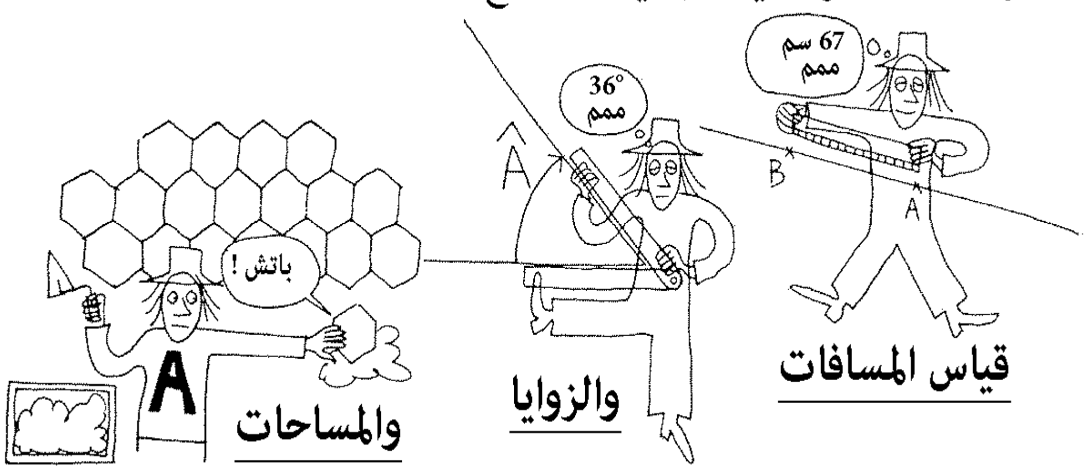
مفهوم الفضاء :

آنفا، كان الضباب يحجب رؤية آنسلم...
لولاه لكشف **تقوس فضائه الكروي**.

هناك طريقة أخرى **تُحجب** التقوس عن آنسلم :
هي أن يسكن هذا الفضاء و**يصير جزءا منه**.



لنذكر أن هذه الوضعية الجديدة لا تمنع مطلقا ...



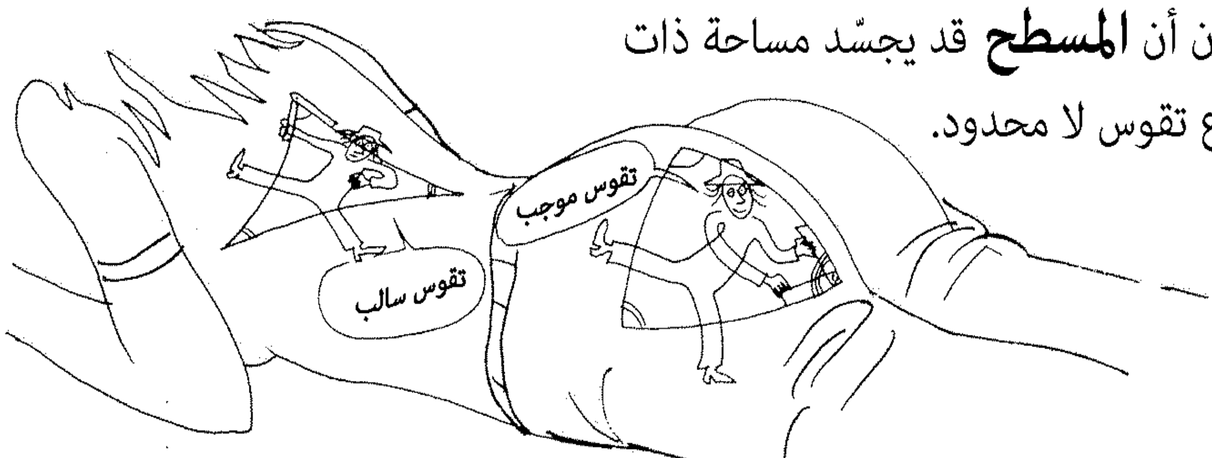
رغم انحصاره داخل هذا الفضاء، قد يتمكن آنسلم من إدراك التقوس وعلامته (سالبة أم موجبة)، وكذلك قياس خاصياته، دون التمكن من **رؤيتها**.

فإذا عادل مجموع زوايا المثلث 180°، تكون المساحة **مسطحة**.

وإذا فاق مجموع زوايا المثلث 180°، يكون التقوس موجبا، ويتمكن آنسلم حساب شعاع التقوس "R" باستعمال المعادلة " $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 + \frac{A}{3,14 R^2}\right)$ "
بحيث "A" تشكل مساحة المثلث.

أما إذا قل مجموع زوايا المثلث عن 180°، يكون التقوس سالبا، ويتمكن آنسلم تحديد شعاع التقوس "R" باستعمال المعادلة " $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 - \frac{A}{3,14 R^2}\right)$ "
لكنها لا تحمل **المعنى الفيزياءي المعتاد**.

لندون أن **المسطح** قد يجسّد مساحة ذات شعاع تقوس لا محدود.

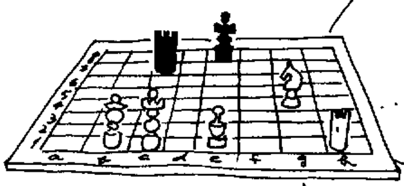


نستعيد هكذا كل نظريات إقليدس.

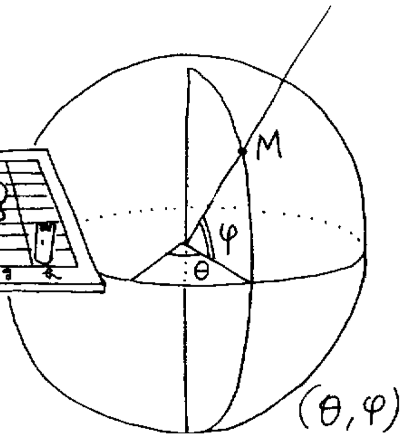
مفهوم الأبعاد.

عدد الأبعاد هو ببساطة عدد الإحداثيات اللازمة، في فضاء معين، لتحديد **نقطة**.

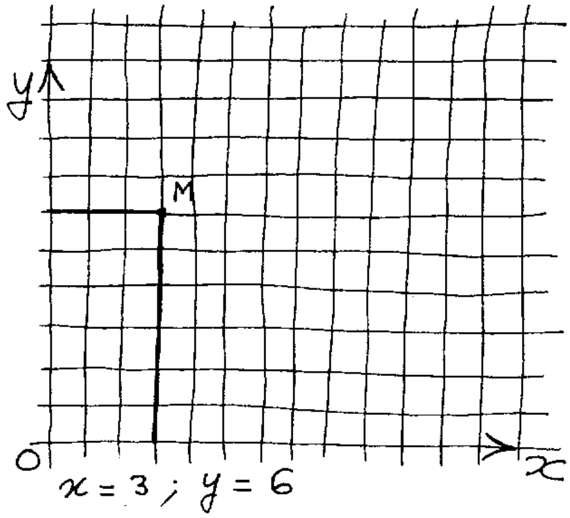
والسطوح تمثل فضاءات ذات بعدين. الكميات اللازمة للتحديد هي مسافات وزوايا...



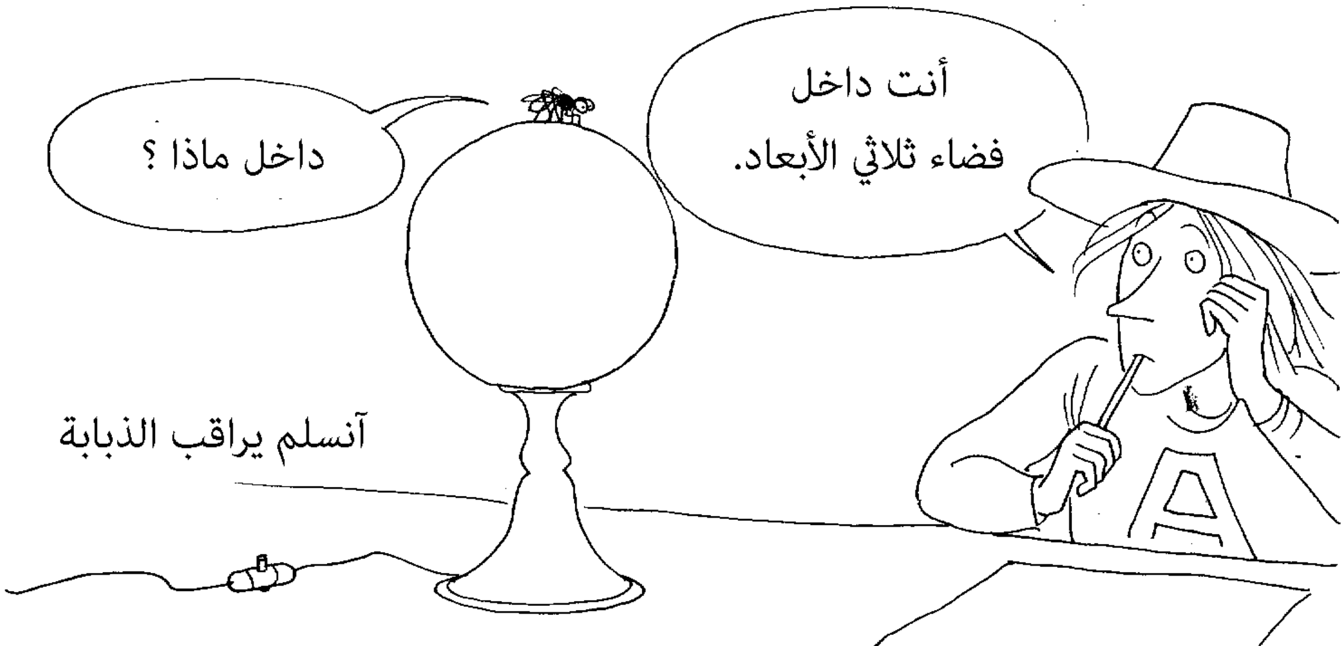
الفارس الأبيض
فوق الخانة "g4"

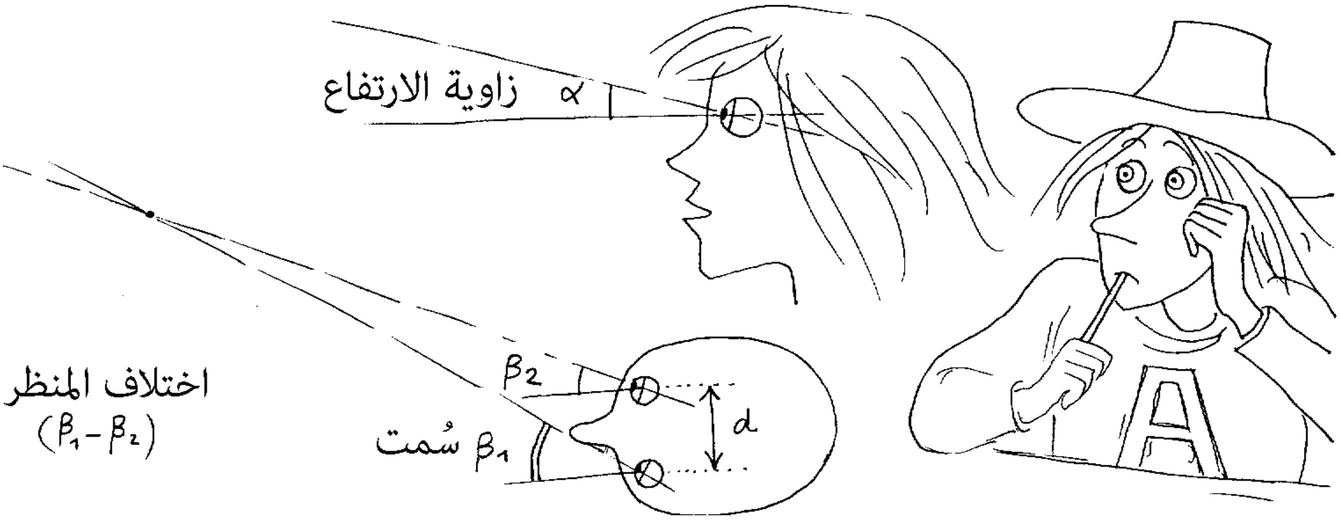


طول، عرض



اعتدنا قول أن فضاءنا لديه ثلاثة أبعاد، إذا استثنينا البعد الزمني.

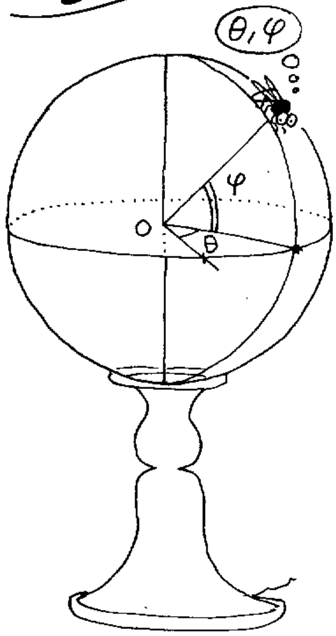




يحدد آنسلم مواقع الأشياء بالنسبة إلى رأسه. موقع النقطة يحدد بثلاث **زوايا** :
الارتفاع "α" وطرح سمتي «$\beta1$ و $\beta2$» عينيه المسمى باختلاف المنظر «$\beta1-\beta2$»

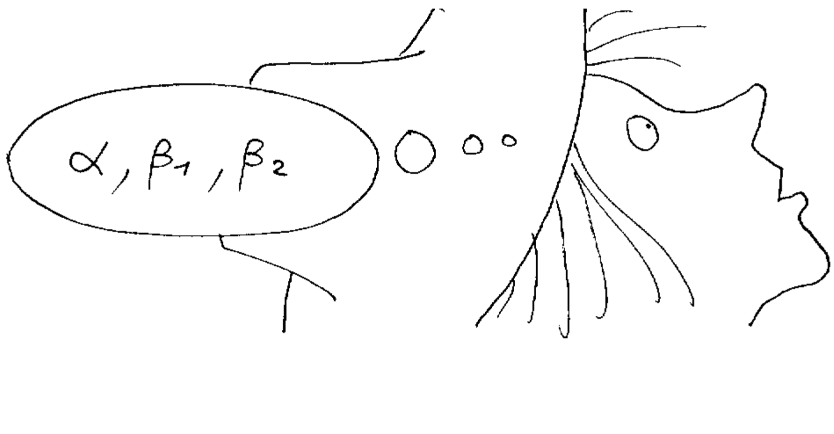
داخل دماغ آنسلم، تحصل ترجمة زاوية اختلاف المنظر إلى مسافة.

الانغماس :

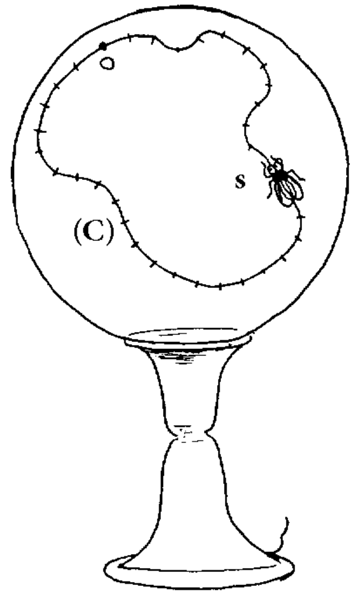


ولكن الذبابة تتحرك على السطح الكروي للمصباح، بحيث يمكننا تحديد مكانها، بهذا الفضاء الثنائي الأبعاد، بزاويتين "θ" و "φ" سميتا بالطول و العرض.

نقول أن هذا الفضاء الثنائي الأبعاد **منغمس** داخل فضاءنا الثلاثي الأبعاد.



لو افترضنا أن الذبابة اتبعت قوسا **(C)** مرسوما على الكرة.
قد نحدد مكانها بإحداثية واحدة : المسافة "S" التي تفصلها، بِعَدّ جبري، عن نقطة بداية "O".

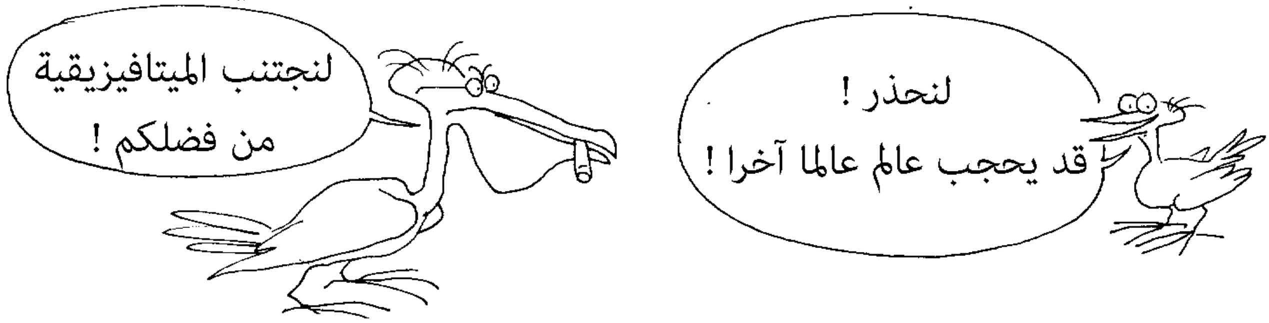


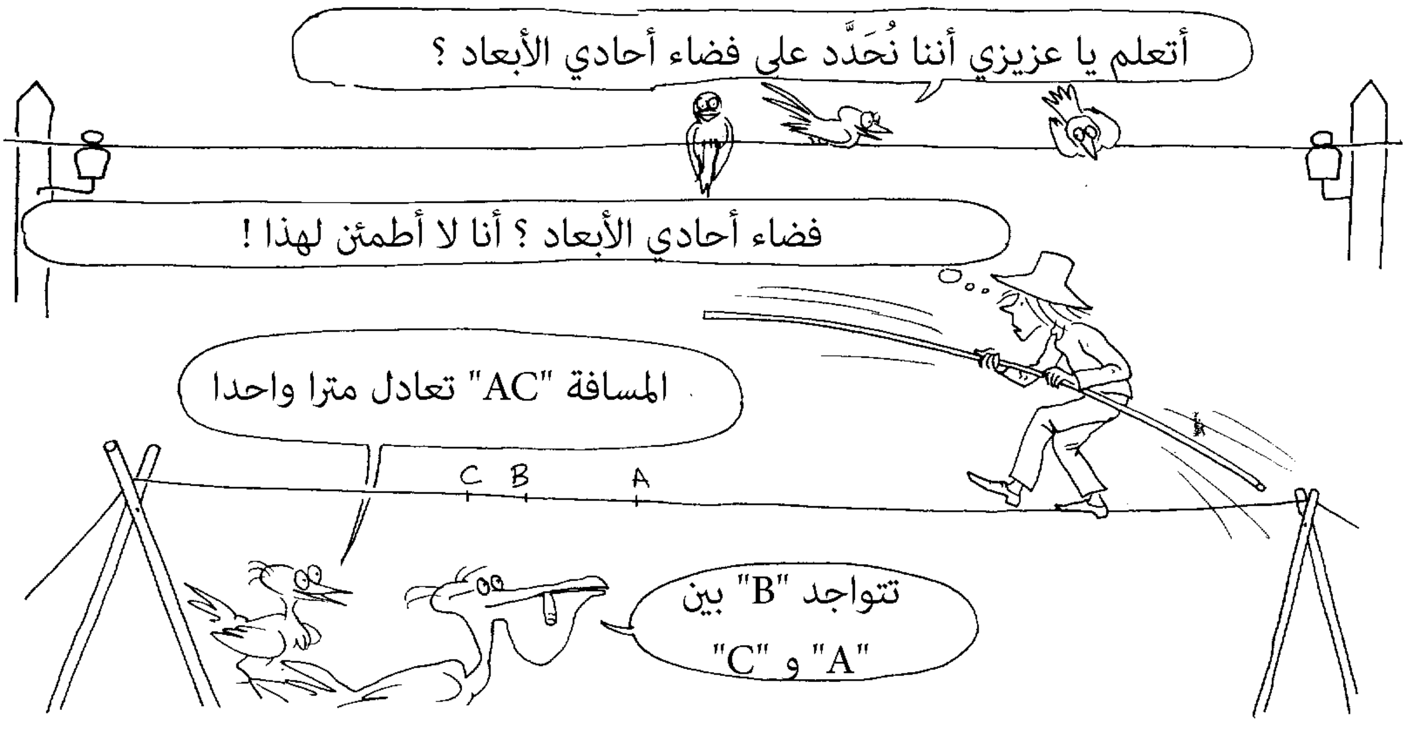
القوس هو صورة لفضاء ذا بعد **واحد.**

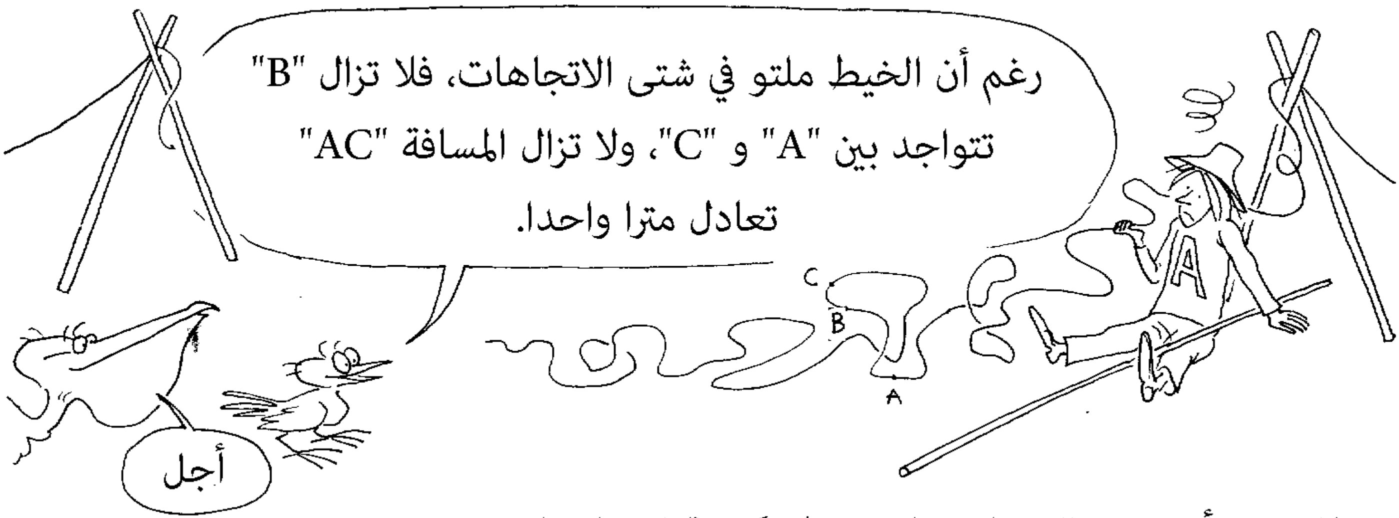
هذا الفضاء الأحادي الأبعاد منغمس داخل فضاء ثنائي الأبعاد (كرة)،

وهذا الأخير **منغمس** داخل فضاء ثلاثي الأبعاد.

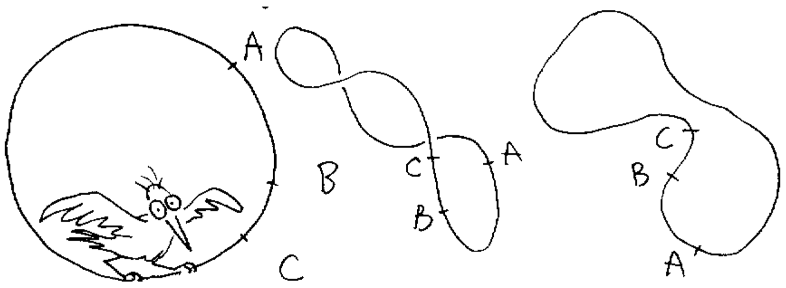
وبذلك قد ينغمس فضاءنا داخل فضاء أبعاده تزيد ببعد واحد عن فضاءنا بدون أن نعي ذلك.







هذا يعني أن بعض الخصائص لا ترتبط بكيفية انغماسها.

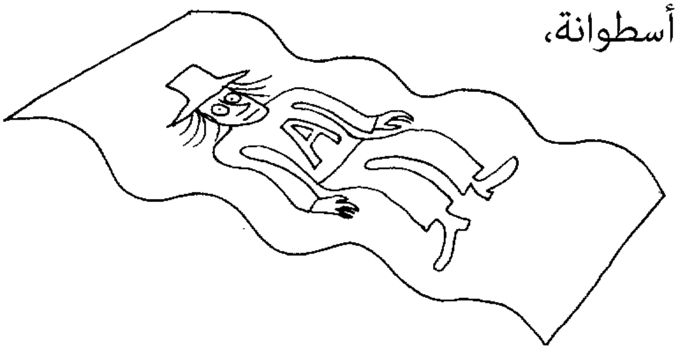


هذه طرق مختلفة **لغمس قوس مغلق** في الفضاء العادي. هذا **الإغلاق** خاصية مختلفة عن الانغماس.

لقد حرصنا على عدم مد أو تقليص الخيط للحفاظ على **المسافات** بين النقط المتتالية.
لنحاول الآن **غمس سطح** داخل فضاء ثلاثي الأبعاد عادي.

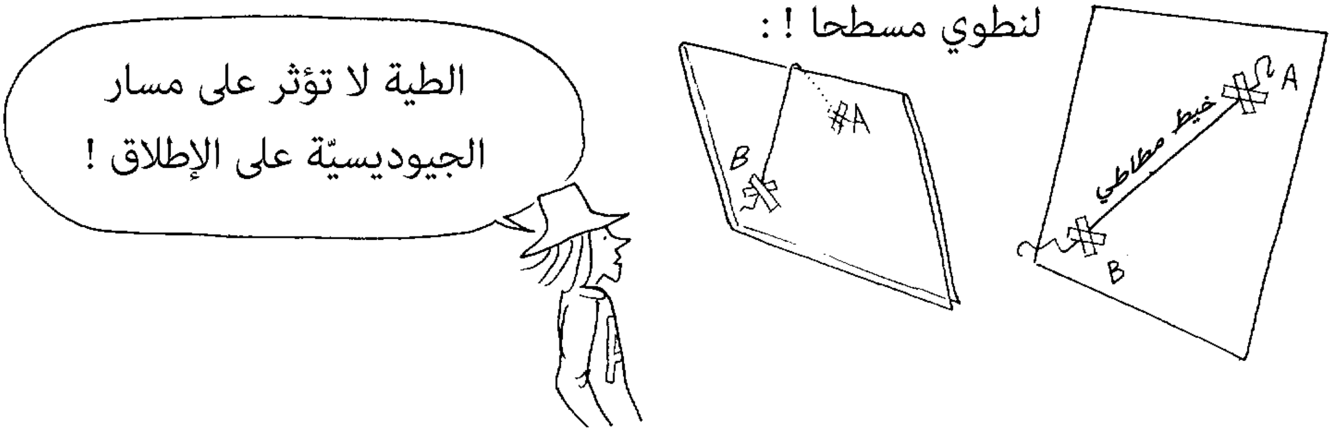
إذا **غمسنا مسطّحا** داخل فضاء ثلاثي الأبعاد عادي،
سوف نتمكن من تحريكه وتدويره بدون تغيير **شكله**.

رأينا أنه إذا ما بسطنا شكلا مسطحا على أسطوانة،
لا يطرؤ أي تغيير لا على جيوديسيّاته
ولا على زواياه.

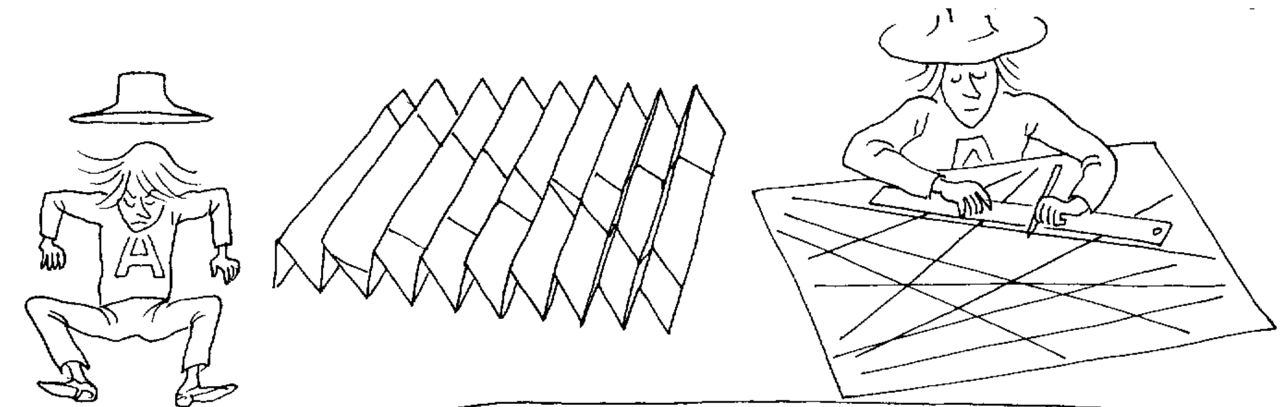


لذا فصفيحة مُموّجة تنطبق عليها
هندسة المسطحات الإقليدية.

فالمقيم بهذا الفضاء الثنائي الأبعاد الإقليدي لن يعي بالإزاحة أو الدوران أو التموج، التي لا تمثل إلا تنوعات في كيفية الانغماس داخل الفضاء الثلاثي الأبعاد.



على ورقة، سُطّرت بمسطرة مجموعة مستقيمات ثم كُمّش الورقة.
مازالت لديك الجيوديسيّات التي رسمت بـِ أو بدون انكماشات.




السيد لانتورلو ؟
بالتأكيد.
أنا ممثل شركة إقليدس، نعلم أنك واجهت ... هم ... بعض الهموم مع منتجاتنا ...
إقليدس و شركاءه
لدي هنا منتجات جديدة، نطمح أن تنال رضاك هذه المرة.
أرني ذلك !
المستقبل زاهر لثلاثي الأبعاد. تعلم أن الهندسة الثنائية الأبعاد ... أسلوب قديم.
سائل كوني لاختبار الفضاءات
هذه لوازم جيوديسيّاتنا...
... تتكون من قضبان صلبة تضبط فيما بينها بمتانة.
والتي تمنعك من الإزاحة إلى اليمين أو إلى اليسار
أو إلى الأعلى أو إلى الأسفل،
وتقودك **دوما إلى الأمام** !


لأجل قياس المساحات لدينا هذا الطلاء :
100غ للمتر المربع بالضبط.
لأجل قياس الأحجام :
إملأها بالغاز ثم إقرأ القيمة مباشرة على
جهاز قياس الصبيب **للسائل الكوني**.
ياللذكاء !
وتذكّر : مساحة الكرة "$4\pi L^2$"
و حجمها "$4/3\pi L^3$".
فهمت.
إقليدس وشركاؤه
يالها من
مهنة !
نزل آنسلم داخل فضاء ثلاثي الأبعاد.
لنتابع استكشافه.


أدوات جميلة
وطول هذه القضبان
متر مضبوط.
لكن بعد وضع كمية لابأس بها من القضبان...
هانحن نعيد الكرة !!
تنغلق الجيوديسيّة
على نفسها !
فضاء ثلاثي الأبعاد مغلق ؟
هذه نهاية
كل شيء !
عند توقفه لتناول
وجبة على كويكب،
اتخذ آنسلم قرار
العودة إلى
قياس الزوايا.
إقليدس وشركاوه
كما في السابق،
سأستعمل ثلاث
جيوديسيّات
لتركيب مثلث.


?!?
الجيوديسيّات مركبة بإحكام،
ومع ذلك مجموع زواياي يفوق 180° !!
حسنا
سائل
شششش فششش
كرة بشعاع "L" هي مجموع النقط التي تبعد بمسافة "L" عن نقطة ثابتة مسمات "N"
إذا ما صنعت واحدة وقست مساحتها وحجمها ؟
والمساحة كذلك تقل عن "4πL²" !
هاذا الحجم يصغر عن "4/3πL³" !
ها أنذا في ورطة أخرى.


كبّر آنسلم شعاع الكرة "L" مجددا.
سائل كوني
فششش
مسطح
ما هذا ؟ كرتي صارت مسطحة !؟
ثم أكبر فأكبر...
والآن ينعكس تقعرها !
لا أفهم شيئا !
مسطح
إقليدس وشركاؤه
وبعدها :
آه ... غلاف الكرة
ينغلق حولي !
إقليدس وشركاؤه
فشش فششش فش
بسرعة،
لأُغلق القنينة !

وهكذا بنفخ كرة داخل فضاء ثلاثي الأبعاد،
أصبح آنسلم... **داخلها** !

لو لم يغلق القنينة في الوقت، لمات مضغوطا بكرة تجاربه،
كما سبق و أن سجن داخل شبكته، (ص13).

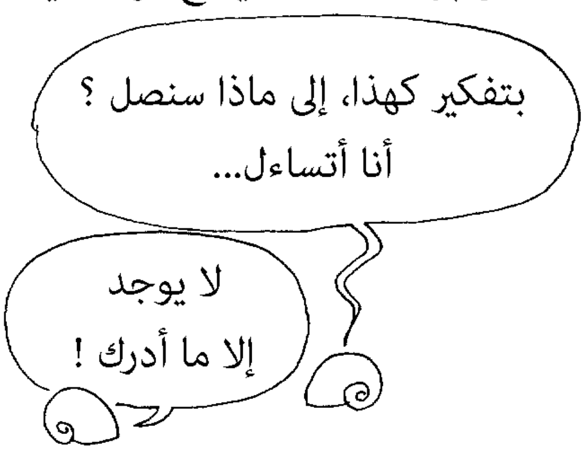
رغم طموحنا العالي، لن نتمكن من **رؤية تقوس** هذا الفضاء الثلاثي الأبعاد.

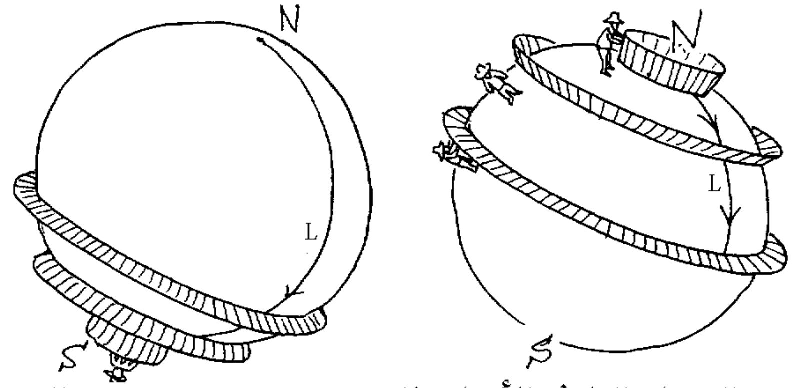
جيوديسيّاته تنغلق وحجمه لا يشكل إلا عددا **محدودا** من المترات المكعبة،

كما هي المساحة المغلقة لكوكبنا التي لا تشكل إلا عددا **محدودا** من المترات المربعة
مجموع زوايا مثلث هذا الفضاء الثلاثي الأبعاد، يفوق 180°.

"**لرؤية**" تقوسه يجب علينا التمكن من إدراك الأبعاد الأربعة !

قد نتمكن من القول أن **عالمنا** الثلاثي الأبعاد يشكل **سطحا شديد التسطح** منغمسا داخل فضاء رباعي الأبعاد. وهذا بدوره ينغمس داخل فضاء خماسي الأبعاد... الخ
ولكن بزماننا هذا لا يصح قول أشياء كهذه.





على سطح كروي، بالزيادة في شعاع "L" شبكته الدائرية، وصل آنسلم إلى النقطة "S" نقيضة النقطة "N" مركز دائرته، فحُبس بداخل الشبكة.

وداخل الفضاء الثلاثي الأبعاد ذا تقوس موجب : نفس الشيء.

داخل هذا الفضاء الثنائي الأبعاد الذي يمثل كرة، التقى آنسلم ب**خط الاستواء** بعدما أوصل شبكته نصف مساحة الكرة.

فالكرة الشديدة التكور الثلاثية الأبعاد لذيها كذلك **استواء** وهو كروي، وصل إليه آنسلم لما ملأ حجم كرته نصف الحجم المتاح. كما على الكرة، خط الاستواء ظهر له **خطا مستقيما**، فعلى الفضاء الشديد التكور، "الكرة الاستوائية" ستظهر له **مسطحا**.

وبعد تجاوز الاستواء، ينعكس **تقعر** الكرة فتتمركز تلقائيا على النقطة "S" النقيضة للنقطة "N"

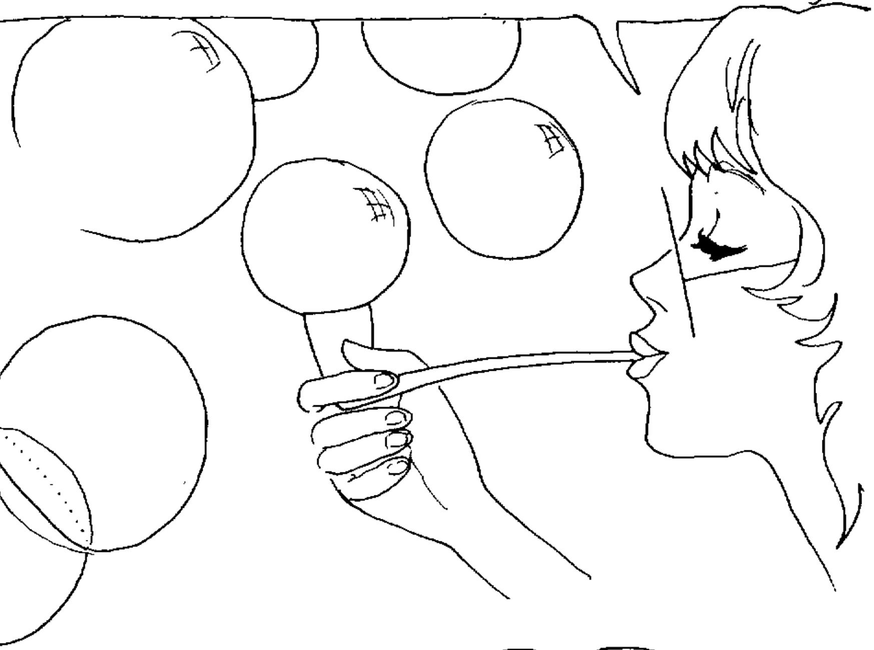

متاعب ؟
أعني، همم ... الأشياء تختلط علي ...
أدعى صوفيا. أنا بارعة في التقوسات بشتى أنواعها.
الريادة على الكرات الشديدة التكور تفاجئ شيئا ما في البداية، تجنب الاستسلام وتدرب شيئا فشيئا.
لقد فقدت نوعا ما... رأس الخيط...
همم... نعم

ولكن... أين يتواجد مركز هذه الكرة الشديدة التكور ؟
إذا مارسمنا دائرة على **مسطح**، نتفق على أن الرسم مثل فضاء أحادي الأبعاد، مغلق و **منغمس** داخل فضاء ثنائي الأبعاد : **المسطح**.
وأن مركز الدائرة **ليس على** الدائرة.
همم...
والكرة تكون فضاء مغلقا **ثنائي الأبعاد**، **منغمسا** داخل فضاء ثلاثي الأبعاد. ومركز هذه الكرة **ليس** بدوره على الكرة، لأنه داخل الفضاء الثلاثي الأبعاد.
ومركز فضاء شديد التكور ثلاثي الأبعاد قد يتواجد داخل فضاء رباعي الأبعاد، إذا ما افترضنا **انغماسه** بداخله. الخ ... وهكذا مركز فضاء أشد تكور رباعي الأبعاد قد يتواجد داخل فضاء خماسي الأبعاد...

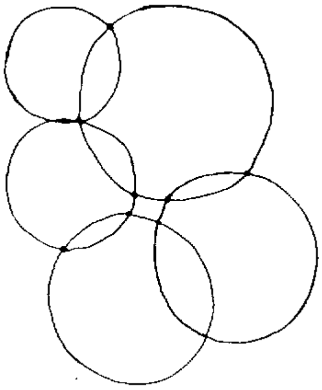

هاأنتذا داخل عالمك الثنائي الأبعاد،
ملصق عليه كملصقة مصورة.
ثم تنفخ دائرتك التي تجسد
كرة ذات بعد واحد.
بفضاء ثنائي الأبعاد،
الحد يحيط بمساحة،
بيد أنه يحيط بحجم
داخل فضاء ثلاثي الأبعاد.
هذا لما أصل إلى منتصف هذا الفضاء الكروي.
بفضاء رباعي الأبعاد،
الحد يكون ثلاثي الأبعاد ويحيط بحجم شديد ذا أربعة أبعاد.
هاهو يعيد الكرة !
لنهرب !
انظر ! هاهنا دائرتك التي تجسد "كرة أحادية الأبعاد"،
بدأت تحوي أزيد من نصف الفضاء المتاح.
حيث بدأ ينغلق عليك متجها نحو النقطة "S"
النقيضة للمركز "N".
N
N
A
N


وبنفس الكيفية، داخل الفضاء المقوس الثلاثي الأبعاد،
لما نفخت فيه أزيد من نصف الحجم الكلي،
انغلقت علي الكرة في اتجاه النقطة النقيضة.
وهذا طبعا لأن للكرة، داخل
هذا الفضاء الثلاثي الأبعاد المقوس،
مركزان متناقضان.
فهمت !
?!!?
في الواقع، لا أعلم
ماذا فهمت بالضبط،
لكني أضنني فهمت شيئا ما.
ياللتوتر !
لا لا ياآنسلم، عندما تزيد الأبعاد عن الثلاثة، الفهم مجرد استنباط
أستنبط دون
أن أعلم
و الرسم،
سوف تنجزه بنفسك...
داخل دماغك !

داخل فضاء ثلاثي الأبعاد أضع كرات ثنائية الأبعاد :
العديد من العوالم الصغيرة الثنائية الأبعاد.



قد تتقاطع هذه العوالم فيما بينها.
والنقط المشتركة تشكل دائرات،
أشياء ذات بعد واحد.



كما أن، الدائرات، هاته الأشياء ذات البعد الواحد،
إذا ما وضعت على ورقة ذات بعدين،
تشترك **بنقط** عند تقاطعها.
اعتدنا القول بأنه ليس **للنقطة** بعد.

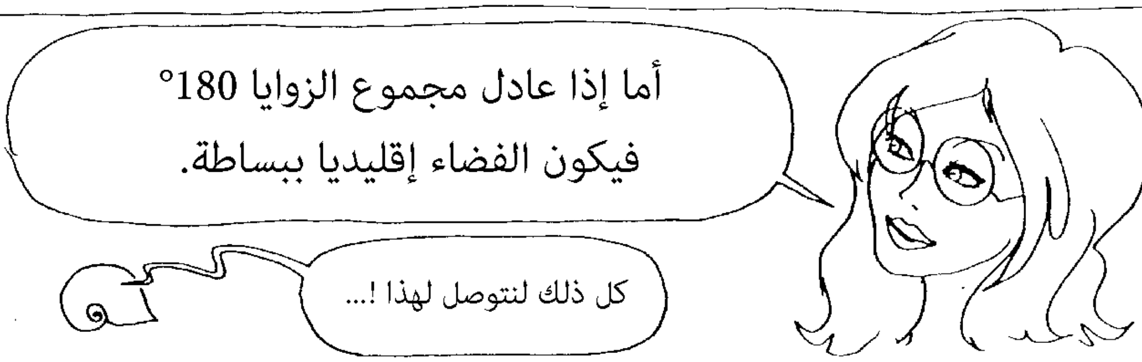
تعتبر إذا الكرة متقاطع "فقاعتين" ثلاثية الأبعاد
تسبح بفضاء رباعي الأبعاد.

وإلى ذلك :
فالفضاء الثلاثي الأبعاد المقوس، الشديد التكور،
قد يعتبر تقاطع فقاعتين رباعية الأبعاد
تسبح بفضاء خماسي الأبعاد.

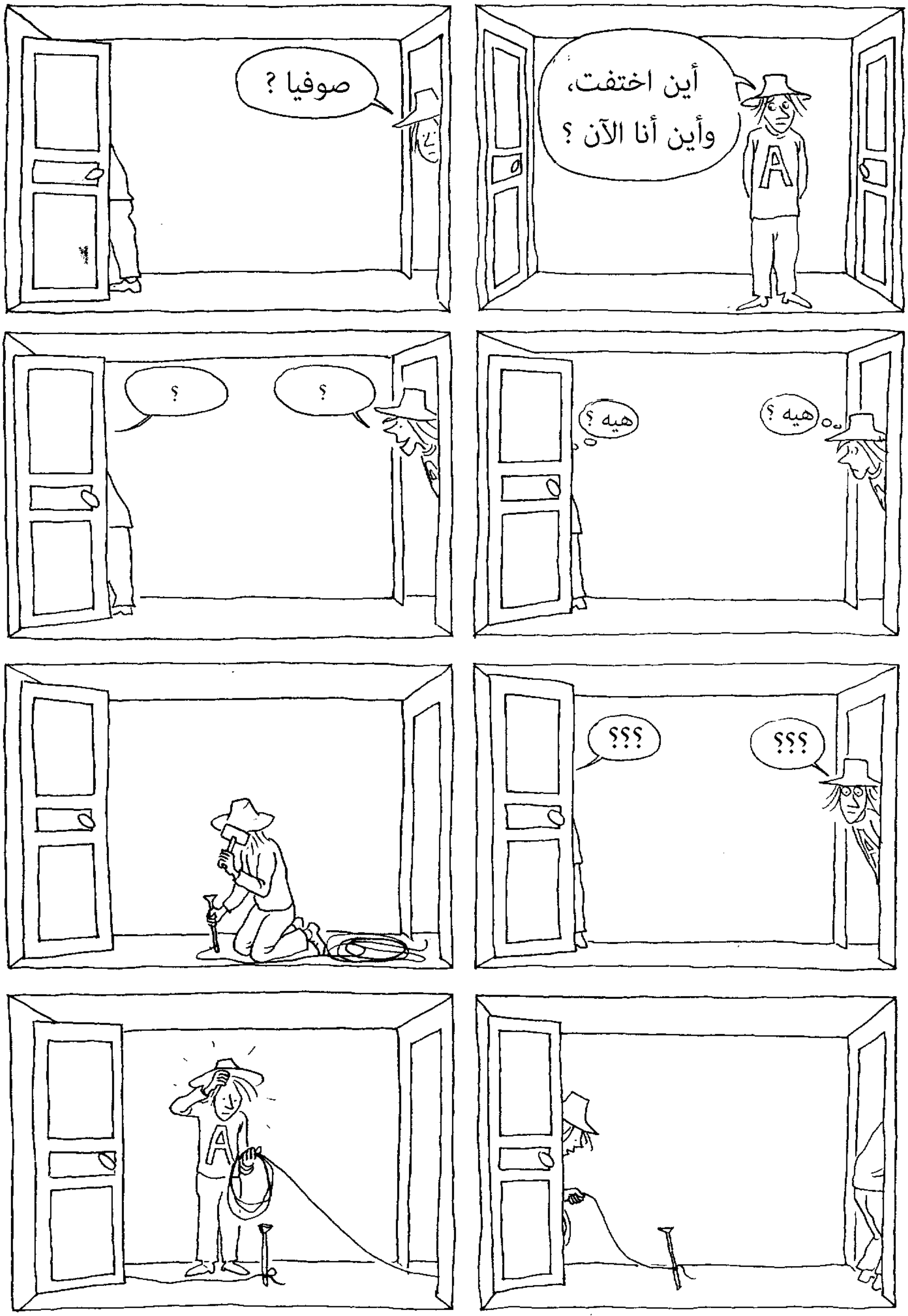

بعدما جرب آنسلم وصوفيا الصداع الناتج عن الاستنباط، تابعا استكشافهما لعوالم ثلاثية الأبعاد جديدة.
لم تعد الرياضيات كما كانت
أرأيت ؟ هذا شريط لاصق ثلاثي الأبعاد، يستعمل للجيوديسيّات. الجزء اللاصق بالمؤخرة... طبعا.
ماهذا مجددا ؟ بهذا الفضاء، لا تنغلق الجيوديسيّات. والآن عندما أنفخ الكرة **بالسائل الكوني**، الحجم يفوق "$4/3\pi L^3$" والمساحة تفوق "$4\pi L^2$"، أما مجموع زوايا مثلث فهي تقل عن 180°.
تذكر الصفحة 23، أنت هنا مجددا داخل فضاء ذا تقوس **سالب**.

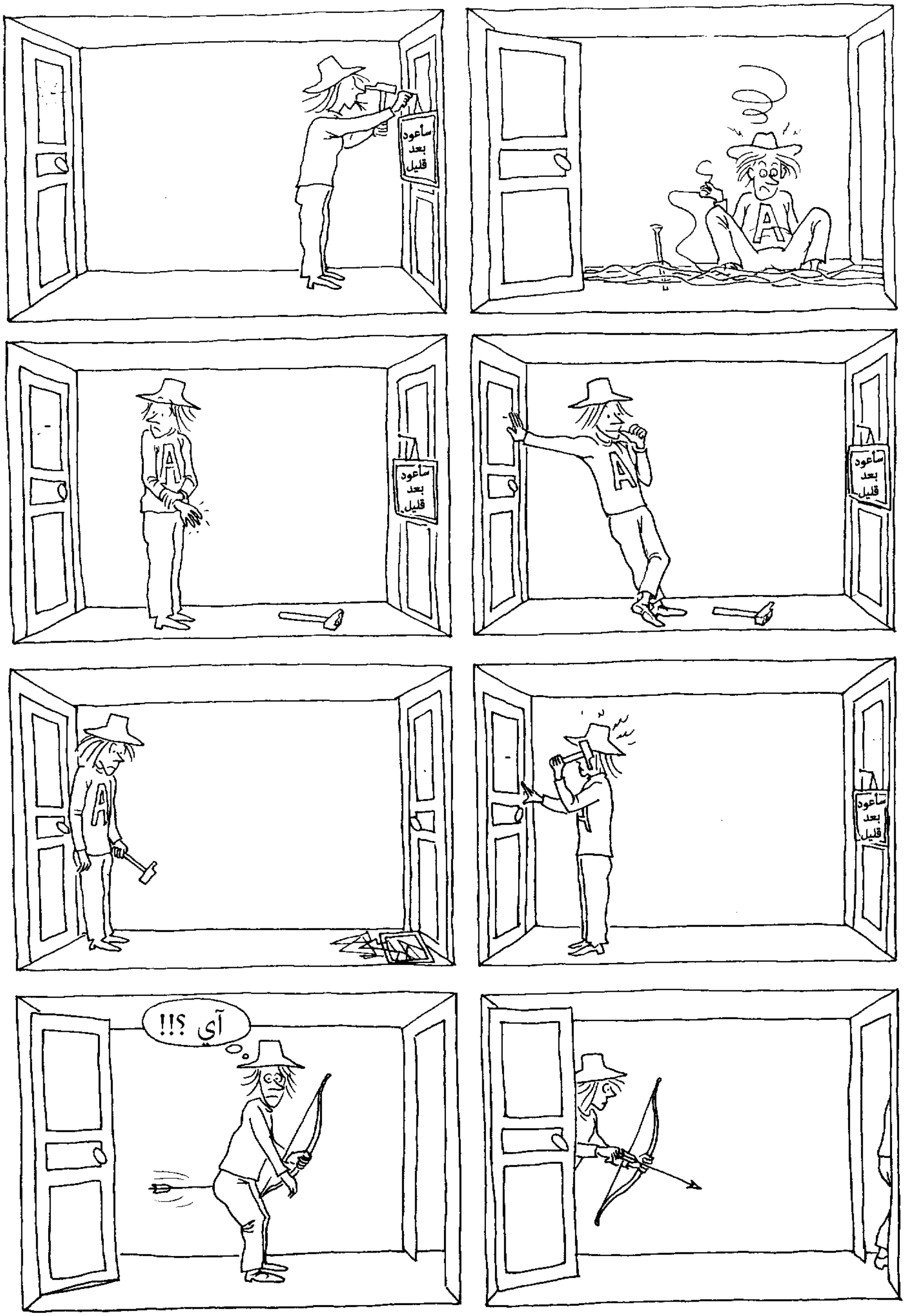
ملخص .

داخل الفضائات الثلاثية الأبعاد،
قد يحصل الكثير، أتعلم ذلك ؟ كما في المساحات
التي تمثل فضائات ثنائية الأبعاد. وهكذا، إذا كان مجموع زوايا **مثلث**،
داخل فضاء ثلاثي الأبعاد، يفوق 180°، نقول بأن التقوس موجب،
وإذا شكلت داخله كرة بشعاع "L"، ستجد حجمها يقل عن "$4/3\pi L^3$"
ومساحتها تقل عن "$4\pi L^2$". هذا الفضاء المسمى **الشديد التكور**، ينغلق على نفسه.
وإذا كان مجموع زوايا مثلث، داخل فضاء ثلاثي الأبعاد، يقل عن 180°،
نقول بأن التقوس سالب، وحجم الكرة بشعاع "L"، يفوق "$4/3\pi L^3$"
ومساحتها تفوق "$4\pi L^2$". يكون هذا الفضاء لا محدود.



يجب على الفضاء أن يكون مفتوحا أو مغلقا ! ...


أين اختفت،
وأين أنا الآن ؟
صوفيا ؟
هيه ؟
هيه ؟
؟
؟
؟؟؟
؟؟؟


سأعود
بعد
قليل
سأعود
بعد
قليل
سأعود
بعد
قليل
سأعود
بعد
قليل
آي !!؟


أجل، اندفع آنسلم داخل فضاء أسطواني ثلاثي الأبعاد.
رغم أنه إقليدي بدون تقوس :
مجموع زوايا مثلث مرسوم عليه يعادل 180°،
فهو ينغلق على نفسه.
آي ؟!!
لنفترض إذا... عوالم كروية وعوالم تتخذ شكل الصّحن وأخرى أسطوانية. آنتهينا أم لا ؟
أتظن ذلك ؟
لنقم بجولة في الثنائي الأبعاد !
هيه !

بدون واجهة :

عزيزي آنسلم
هذا حلزون أليف. إذا أغمضت عينيه، فلن يَزيح يمينا ولا يسارا. وهكذا، سيرسم لك **جيوديسيّة** مثالية.
إلى اللقاء. صوفيا
لننطلق !
نقطة انطلاق الجيوديسيّة
وبالمناسبة، السير إلى الأمام أو اتباع أقصر طريق بين نقطتين، يعني نفس الشيء
أين اختفى حيواني ؟!
إلى هنا !


إنها تنغلق مجددا.


مجموع الزوايا : 180°.
إقليدي هذا الشيء.
هذه أسطوانة إذا !

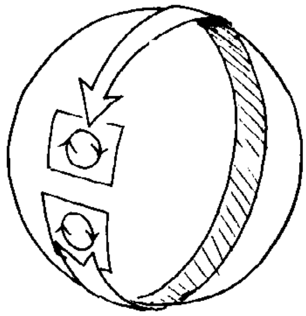

ليست كذلك!
!؟!
ياللعجب !


سأوضح لكم : هذه المرة، صار آنسلم داخل
فضاء ثنائي الأبعاد غير قابل للتوجيه.
المثال الأكثر شهرة هو شريط موبيوس (1830).
الفكرة لم تتضح للإغريق رغم إبداعاتهم.
نقطة انطلاق الجيوديسية
صوفيا، أخرجيني من هنا !

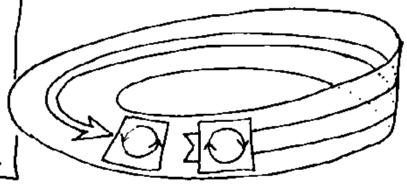
فلنرسم دائرة على سطح، ثم نضع له اتجاها برسم أسهم عليه.

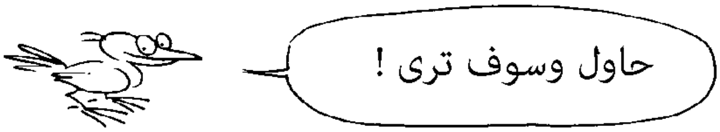
تخيل أن الدائرة ملصق مصور صغير ندفعه على هذا السطح حسب رغبتنا.
إذا وجدنا الملصق، بعد دورة كاملة، كما كان عليه،

نقول أن السطح **قابل للتوجيه**. هذا حال الكرة والأسطوانة والمسطح...
أما إذا دفعنا هذا الملصق على شريط موبيوس، تتغير الأحداث :



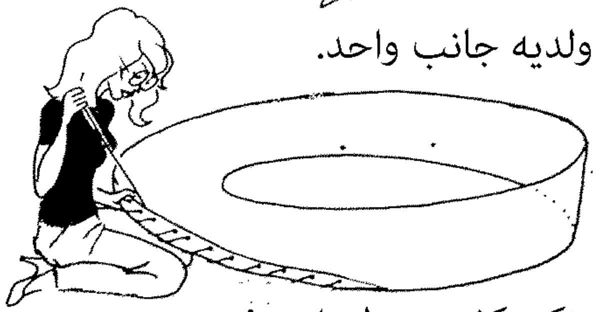
كلما دار دورة كاملة على هذا العالم الثنائي الأبعاد، يغير الملصق اتجاهه.





وبنفس السياق، لن نتمكن من صباغة الشريط بلونين مختلفين : فللشريط **وجه واحد.**

ولديه جانب واحد.



يمكن كفه بخيط واحد !

قرر آنسلم زرع مسامير لتمييز الجانب الداخلي من الخارجي.

ولكن العملية فشلت، لأنه ليس للشريط :


لنحاول قطعه
إلى نصفين !
قول ذلك أسهل من فعله يا صديقي آنسلم.
وإذاً مالعمل إذا أردنا تقطيعه لجزءين ؟
بسيط، قطعه
إلى ثلاثة أجزاء !
لاحظ بأنه خلال
هذه العملية صار
الشيء ذا وجهين.
لاحظ بأن لدينا الآن
شريط أحادي الأوجه (الأبيض) وآخر ثنائي
الأوجه (الرمادي) أطول من الأول مرتين.
أحس أنني فقدت اتجاهي.

بعد هذه الجولة على شريط موبيوس، لنعد إلى داخل الفضائات الإقليدية (بدون تقوس) الثلاثية الأبعاد.

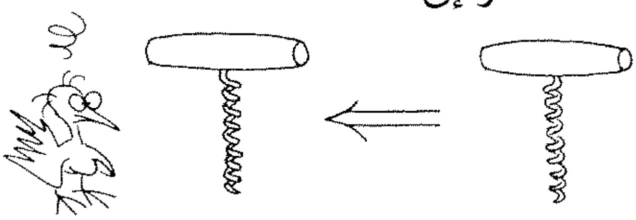
لناتبع آنسلم خلال استكشافه داخل عالم جديد إقليدي (بدون تقوس) ثلاثي أبعاد.


! يه! يه
! يه! يه ! يه
سوف أجري بعض الاختبارات.
مجموع الزوايا 180°
المساحة "$4\pi L^2$"
الحجم "$4/3\pi L^3$"
حسنا لنعد.
هذا إقليدي.
أنا محظوظ : أرى قنينتي.
ماذا يحصل مع هذا المبرم ؟
ولكنه فعلا مبرمي، أعرفه.
ماذا حصل له ؟
لاحظوه جيدا !
متاعب ؟
همم...

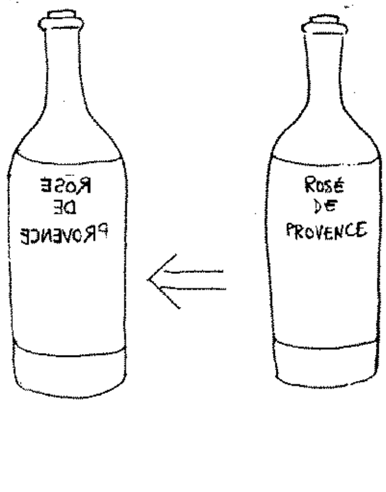
إنها خمر فرنسية بجودة متوسطة ...
ألديك مبرم ؟
هممم... أجل
نحن الكناغر نحن الكناغر
نجري و نقفز في كل العوالم
قرقرقر
ألم تلاحظ شيئا غريبا ؟
لا، فقط وجهك
شاحب شيئا ما.
تناول حبة الأسبرين مرتين في اليوم.
حظ موفق
طق
طق
طق
طق
أحدهم تلاعب بمبرمي، وهذا الكنغر الأخرق
يشرب كل خمري. ما الذي يحصل هنا ؟
ياللهول !
قرششش
ننصحكم بشدة لتفحص هذا المفتاح بانتباه شديد.

إذا فلشريط موبيوس (فضاء ثنائي الأبعاد غير قابل للتوجيه) نظير ثلاثي الأبعاد. ففوق شريط موبيوس، لما يُنجز الملصق "دورة كاملة" حول هذا الفضاء الإقليدي، يتغير اتجاهه :

انظر إلى الصفحة 54



نلاحظ أن هذه الأشياء صارت معكوسة "كما على المرءاة" المبرم وكذا آنسلم بنفسه، نشبههما بـ "ملصقات ثنائية الأبعاد". كلما أنجز شيء "دورة كاملة" حول هذا الفضاء الثلاثي الأبعاد، ينعكس اتجاهه. بما أننا رافقنا آنسلم خلال مغامرته حول الفضاء، فمن الطبيعي أن نجد معه القنينة كأنها معكوسة على مرآة، والمبرم يفتح في اتجاه الإغلاق. "دورة" أخرى لهذا الفضاء يعيد الرؤية الأولية للأشياء، شرط تركها بمكانها.



آنسلم و الكنغر (من فصيلة النقيضيات) مقيمان بنفس الفضاء، ولكنهما يختلفان بما هو بالاتجاه الصحيح للأول فهو معكوس للآخر.

خاتمة :


كل المفاهيم انقلبت، لم يتبق لا يمين ولا شمال، لا صحيح ولا مقلوب. إلى أي مجهول نحن سائرون ؟ وإلى أي طريق نهتدي ؟
يجب اتباع الجيوديسيات، آنسلم، جيوديسيات حياتك !
لن يتم إقناعي أبدا أن الكون معقد هكذا. إنها فقط حماقات علماء الرياضيات.
إنها قصص مصورة !
لِمَ نهتم بكل هذه الأشياء، مهما أن الفضاء إقليدي بالتأكيد (*)
" (*) قالها سنة 1830 أوستروغرادسكي، أستاذ عالم رياضيات ببتروغراد، بعد قراءته لأبحاث ريمان ولوباتشفسكي "

لنفترض أن الكون لا يشبه ما هو عليه.
أتتخيل هذه الأشياء في برامج المدارس !!؟
كارثي !
وبالنهاية، فهْمُ الحياة هو الأهم.
فلفهم حياتنا اليومية، تتفق معي أن ...
ولكن، ما وراء كل هذا ؟
الفيــزيـــاء، يا عزيزي ...
أريد توضيح هذا !
فلنتجه نحو عالم المحسوس.
أمن أحد هنا ؟


إذا كان معدل كثافة المادة يقل عن 10^{-29} غرام بالسنتمتر المكعب ...
؟
سيكون إذا تقوس الكون سالبا ويكون امتداده غير محدود ...
أما إذا كان معدل الكثافة يفوق 10^{-29} غرام بالسنتمتر المكعب ...
!..
سيكون حينها الكون شديد التكور وينغلق على نفسه...
وأما إذا كانت الكثافة 10^{-29} غرام بالسنتمتر المكعب، فسيكون الكون إقليديا.
همم
دكتور أينشتاين، أليس كذلك ؟
هو... عينه ؟
النهاية


أَمِن عالم رياضيات هناك ؟