

Janus kosmologiska modell

Bimetriskt universum: perspektiv och utmaningar

Hicham ZEJLI¹

¹ Högskoleingenjör från ENSISA - hicham.zejli@manaty.net

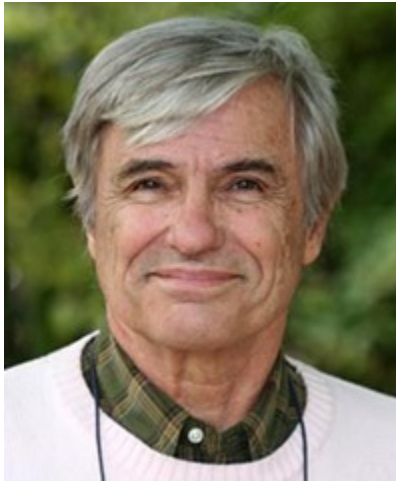
Innehållsförteckning

Förord av Jean-Pierre Petit (Frankrike)	5
1 Inledning	12
1.1 Presentation av bakgrunden till och syftet med boken	12
1.2 Kort introduktion till den kosmologiska Janus-modellen och dess betydelse.....	12
2 Teoretiska grunder.....	14
2.1 Newtons gravitationslag	14
2.2 Introduktion till speciell relativitetsteori.....	14
2.2.1 Minkowskis tidsrymd & egen tid	14
2.2.2 Ljusets hastighet som en gräns.....	15
2.2.3 Grundläggande begrepp	16
2.2.4 Ekvivalens mellan massa och energi	16
2.3 Introduktion till allmän relativitetsteori	17
2.3.1 En revolution inom fysiken	17
2.3.2 Observerbara effekter och experimentella bekräftelser	18
2.3.3 Tidsrymndsgeometri och geodetiska ekvationer.....	19
Tröghetsram och koordinater.....	20
Samordna övergången till en påskyndad referensram för laboratorier	20
2.3.4 Metriska tensorer.....	23
2.3.5 Christoffel-symboler	24
2.3.6 Tillämpning av den geodetiska ekvationen i det svaga fältets gräns.....	30
2.3.7 Karl Schwarzschild & Ludwig Flamm's lösningar	34
2.3.8 Konstruktion av geodesier för Schwarzschilds yttre metrik	35
2.3.9 Roy Kerr-lösningen.....	41
2.4 Andrei Sacharovs och Jean-Marie Souriaus arbete.....	42
2.5 Bimetrisk metod introducerad av hyperbolisk riemannsk geometri.....	43
3 Janus kosmologiska modell.....	46
3.1 Beskrivning	46
3.2 Konsekvenser	47
3.3 Dipolrepellern	55
3.3.1 Inledning.....	55
3.3.2 Några försök till tolkning	55

3.3.3	Tolkning av luckor i mörk materia.....	56
3.3.4	Tolkning av den kosmologiska Janus-modellen.....	57
3.3.5	Framtidsutsikter.....	75
4	Bidrag till kosmologi och partikelfysik.....	76
4.1	Introduktion till dynamiska grupper	76
4.2	Olika symmetrier associerade med varje reverseringsoperatör.....	78
4.3	Lorentz Dynamics-gruppen	79
4.4	Begränsad Poincaré-dynamikgrupp.....	80
4.5	Dynamiska Kaluza & Janus Begränsade grupper.....	80
4.6	Janus Dynamiska Grupp	80
4.7	Konsekvenser	83
5	Alternativ tolkning av maskhålsmodellen i kombination med en vit fontän som ett <i>envägsmembran</i>	85
5.1	Lösningar av Einstein-ekvationen som återspeglar olika topologier.....	85
5.2	<i>Staticitetshypotesen</i> : frånvaro av korsterm $dr dt$	88
5.3	Konstruktion av en Lorentzisk geometrisk oändlig lösning med två ark.....	89
5.3.1	Symmetri T	89
5.3.2	Symmetri P.....	90
5.3.3	Identifiering av de två plåtarna	91
5.4	En annan representation av denna geometri.....	91
5.5	Slutsats.....	93
5.6	Tillägg.....	93
6	Topologisk tolkning av modellen.....	95
6.1	Definition.....	95
6.2	Maskhålsmodell.....	95
6.3	Modell av universum	96
7	Alternativ tolkning av de supermassiva subkritiska objekten M87 och Sagittarius A*. 101	
7.1	Inledning.....	101
7.2	Alternativ tolkning av fenomenet.....	105
7.2.1	Jämförelse av fysiska och geometriska kritikaliteter	105
7.2.2	Gravitationell rödförskjutning nära fysisk kriticitet	106
7.2.3	Variation av ljushastighet och tryck i plasma med konstant densitet.....	109
7.3	Slutsats.....	109

8	Utmaningar och debatter	111
8.1	Utmaningar i kommunikation och acceptans av modeller	111
8.2	Diskussion av kritik och svar.....	112
	Svar från <i>Gravitation och kosmologi</i>	112
	Mitt svar till denna recensent	113
	Kritisk analys av <i>Astronomische Nachrichtens</i> avkastning	114
9	Slutsats och diskussion.....	116
	Bibliografi	118

Förord av Jean-Pierre Petit (Frankrike)



Året är 2024. Gör matematiken. Jag föddes 1937. När jag skriver dessa rader kommer jag att vara 87 år gammal. Tiden går så fort att när du läser detta kanske jag inte längre finns bland oss. Jag skriver dessa sidor, och jag tror att Hicham känner likadant, som att kasta en flaska i havet som innehåller ett vädjande budskap.

När jag skriver dessa rader är Janus-teamet nere på tre man. Förutom Hicham, född 1979, finns det en ung matematiker, David, född 1985, och det är allt. År 2022 var jag den enda som hade varit ansvarig för detta Janusprojekt i fyrtio år. Dessa två anslöt sig till mig efter att ha lyssnat på en föreläsning som jag höll i januari 2023 i Paris.

Jag känner för att säga: Vad händer i den vetenskapliga världen?

För över hundra år sedan vändes, som ni vet, den vetenskapliga världen upp och ned av den plötsliga uppkomsten av två nya discipliner: kvantmekanik och kosmologi. Så under sjuttio år avlöste de vetenskapliga framstegen varandra i en fantastisk takt. Antingen gav teoretikerna en förklaring till ett sedan länge känt faktum, t.ex. att Merkurius perihelium rörde sig framåt, ett fenomen som Newtons mekanik hade visat sig oförmögen att förklara. Eller så handlade det om nya observationer, som upptäckten av universums expansion, som ryssen Alexander Friedman var snabb att förklara genom att ta fram den första instabila lösningen på den ekvation som Einstein introducerade 1915 och som nu utgör grunden för denna nya vision av världen, den allmänna relativitetsteorin.

Ibland kommer teoretiker med en ny vision och föreslår märkliga objekt som de använder

för att göra sina beräkningar mer balanserade. Ett exempel är antimateria, vars existens förutspåddes av engelsmannen Paul Dirac 1928.

Låt oss som en anekdot citera dansken Niels Bohrs reaktion efter att ha läst denna artikel:

"Den här teorin verkar idealisk för att fånga elefanter i Afrika. Vi hänger Diracs artikel på ett träd. En elefant kommer förbi och läser Diracs artikel. Den blir så förvånad att den är lätt att fånga.

Men naturen visade sig vara en god vän till Dirac och 1931 bekräftade den förekomsten av antielektroner i kosmisk strålning. Vid den tidpunkten kunde vi inte återskapa detta antimateria i partikelkollisioner. Det var därför gammafotoner från djupet av kosmos som omvandlades till ett elektron-antielektronpar, ett objekt som kallas positron.

Denna revolution, som beskrivs som ett paradigmskifte, inleddes 1895 med Conrad Röntgens, Henri Becquerels och J.J. Thomsons upptäckter, som blev startskottet för det dramatiska intåget av partiklar och atomära fenomen på den vetenskapliga scenen. Under årtionden liknade teoretikerna på ena sidan och experterna och observatörerna på den andra två grupper av fullblod som galopperade sida vid sida, vissa en kort bit före andra.

Allt detta fortsatte under några få årtionden efter andra världskriget. Bland dessa stora upptäckter fanns den oavsiktliga upptäckten 1967 av den kosmiska mikrovågsbakgrunden, en population av fotoner med låg energi som bevisade att en fantastisk förintelse av materia-antimateria-par hade ägt rum i början av universum.

I slutet av 1960-talet var det som vi nu kallar kosmologer helt enkelt intresserade av att bestämma värdet på den genomsnittliga densiteten i universum. Om den var större än 10^{-29} gram per kubikcentimeter, då utvecklas universum cykliskt. Efter en expansionsfas kollapsar det in i sig självt, vilket ger upphov till en Big Crunch. Om denna densitet är lägre kommer galaxerna i universums avlägsna framtid att röra sig bort från varandra i all oändlighet, med hastigheter som blir konstanta. Och om denna densitet är lika med detta värde, låt oss då säga att evolutionen ligger mellan dessa två ytterligheter.

Jag minns det perfekt: det var vid den här tiden som jag inledde min forskarkarriär, i slutet av 1960-talet.

Vad händer nu?

Mycket snabbt gick mekaniken i baklås och allt gick från dåligt till värre. Teoretikerna inom partikelfysiken, som växte fram under århundradet tack vare de ökade

energierna i acceleratorerna, förutspådde uppkomsten av nya objekt, som de kallade superpartiklar.

Men ingenting hände.

I början av 1980-talet föreslog man att det fanns mörk materia, som stod för fyra femtedelar av universums totala massa, för att förklara den hastighet med vilken stjärnor roterar i galaxer och varför centrifugalkraften inte får dem att explodera.

1989 avslöjade observationer gjorda av COBE-satelliten att det tidiga universum var extremt homogent. För att rättfärdiga detta föreslog en ung ryss, Andrei Linde, sin inflationsteori, enligt vilken universum, när det bara var några sekunder gammalt, genomgick en plötslig expansion med en faktor på en 10^{-33} sekunder, genomgick en plötslig expansion med en faktor 10^{26} . Detta orsakades av ett nytt fält bestående av nya partiklar, så kallade inflatoner. Idag finns det lika många modeller av inflatoner som det finns forskare som specialiserat sig på detta område.

År 2011 tilldelades Nobelpriset för en annan upptäckt: accelerationen av den kosmiska expansionen, som tillskrivs mörk energi. Genom att översätta dess betydelse med hjälp av Einsteins uttryck $E = mc^2$ den här gången undgår 75 % av det kosmiska innehållet observation.

År 2024, när jag skriver dessa rader, finns det ingen trovärdig modell för mörk energi. Om man räknar på det så utgör vanlig materia som är möjlig att observera nu bara 4 % av den kosmiska soppan.

Olika kandidater har föreslagits för mörk materia, den viktigaste är neutrino, en representant för den hypotetiska familjen av superpartiklar. Men förutom att det är omöjligt att få fram den i kraftfulla kolliderare, undgår den alla försök att upptäckas i dyra experiment som utförs i tunnlar och gruvor, skyddade från kosmisk strålning av ett tjockt lager sten.

Och på den teoretiska fronten?

I början av 1970-talet, när bristen på resultat från experiment inom högenergifysik ledde till ett nytt paradigmskifte, föreslog en grupp forskare att både materiella partiklar och partiklar som associeras med strålning skulle representeras av en ny modell bestående av vibrerande strängar, antingen öppna eller slutna. Majoriteten av teoretikerna omfamnade vad de såg som en ny och lovande riktning. Forsknings- och lärartjänster inrättades i alla länder. Grupper bildades. De som stod i centrum för denna rörelse gick till och med så långt

att de drömde om att konstruera en teori om allting. Denna tankeströmning gav upphov till mängder av artiklar och doktorsavhandlingar.

Hur ser situationen ut i början av det tredje årtusendet?

Ingenting: Berget föder en mus.

Den nuvarande situationen påminner om Hans Christian Andersens novell "*Kejsarens nya kläder*". När ett barn i slutet av berättelsen skriver: "*Han är naken!*"

Hichams bok är berättelsen om ett paradigmskifte som kan sammanfattas i en mening: *Universum består av positiva och negativa massor.*

Varför inte, när allt kommer omkring?

Men denna idé är som en tråd som sticker ut. Du drar i tråden: ett snöre följer. Du drar i snöret och ett rep fäster. Du drar i repet och det som följer är en tung kabel, vars drag skakar byggnaden.

Vilken byggnad?

Albert Einsteins heliga allmänna relativitetsteori, vars ekvation finns inristad i sten på fysikinstituten världen över.

Betyder detta att teorin är felaktig?

Nej, det är bara en sida av myntet. Den måste integreras i ett system av två kopplade fältekvationer. På sidorna i den här boken hittar du allt som har kommit ur denna hädiska idé.

I januari 2023, efter att ha varit den enda personen som genomfört detta stora projekt under fyrtio år, höll jag en konferens i Paris där David och Hicham deltog.

David är en ung matematiker. Trots att han har en doktorsavhandling lockas han inte av forskningsarbetet utan föredrar att undervisa i matematik på universitetet.

Ibland sägs det att det är forskarna som tar över idéerna. I själva verket är det tvärtom. Det är idéerna som griper tag i forskarna. Idén om en annan topologi för universum, grunden för min Janusmodell, har gripit tag i David. Under de senaste tio månaderna har han kämpat för att publicera den matematiska grunden för denna modell i tidskrifter för matematisk

fysik. När du läser dessa rader kanske publiceringen av detta arbete äntligen har hittat sin väg till dessa tidskrifter på toppnivå. I så fall kommer fällan att vara på plats, i hopp om att andra matematiker kommer att bli överraskade.

Nya idéer är som de fällor som används i Afrika för att fånga små apor. Ett ihåligt skal med ett hål i placeras inom räckhåll för dem. Inuti skalet finns en fruktbit, som de tycker mycket om, men vars diameter är exakt densamma som hålet. När apan skjuter in handen i hålet är det omöjligt för den att dra ut både handen och frukten. Jag föll själv offer för en liknande fälla för fyrtio år sedan. En idé passerade förbi som grep tag i mig och tog mina neuroner i besittning. När en idé är logisk, funktionell och fruktbar är det mycket svårt att bli av med den. Och slutligen, om idén stämmer överens med observationer blir det helt enkelt omöjligt att förkasta den, vilket komplicerar ditt liv en hel del genom att göra dig till en slags mutant, en outsider inom ditt vetenskapliga samfund. Såvida du inte bestämmer dig för att stanna kvar i labyrinten.

År 1959 skrev engelsmannen Arthur Koestler en bok med titeln *Les somnambules* (Sömngångare). Han beskrev vetenskapsmän som människor som i sömnen går med slutna ögon och båda händerna utsträckta framför sig för att försöka hitta vägen. Utan att veta om det går de genom en labyrint. Omedvetna om hur den är uppbyggd går de ibland förbi en dörr som är vidöppen, utan att kunna se den, medan de ger sig in på en väg som visar sig vara en återvändsgränd. Denna idé är inte ny. En liknande, mer statisk idé finns i Platons myt om grottan.

Jag skulle nu vilja tala om vad som hände med Hicham Zejli. I januari 2023, när han arbetade som dataingenjör på ett franskt företag, blev han fascinerad av innehållet i den konferens jag höll i Paris om min kosmologiska Janus-modell. Han tittade sedan på de cirka trettio videor som jag hade skapat 2017 och läste alla böcker i ämnet för att presentera huvuddragen i denna modell. Han gör om alla beräkningar som han hittar i de pdf-filer som jag lagt ut på Internet och som åtföljer mina videor. Och sedan slår fällan igen.

Om du läser hans bok, var försiktig! Du kan själv falla offer för den. Dessa sidor kan leda dig till att klättra uppför en av labyrintens väggar, genom att öppna dina ögon. Vetenskapens värld kommer då att se annorlunda ut för dig. Som fallet var med Hicham kommer du plötsligt att se människor, ibland vinnare av de mest prestigefyllda utmärkelserna, vandra som sömngångare, gå runt och runt i en slinga av labyrinten. Modeller som har accepterats av dem som utgör det så kallade vetenskapliga samfundet kommer sedan att framstå för er som den uppenbara konsekvensen av uppenbara felberäkningar. Du kommer att se hur dessa somnambulister om och om igen passerar nya vägar som är vidöppna, magnifikt i linje med en massa observationer, oförmögna att se dem, klamrar sig fast vid idéer som inte är mer än plankor, ruttna, feberaktigt spikade på de brott som den hårda verklighetens rev har orsakat i en standardmodell som läcker på alla sidor.

Och du kommer att vilja ropa, som Andersen-karakteren, "*Kungen är naken!*"

Det arbete som Hicham har utfört på mindre än ett år är betydande, och detta trots att han har gjort allt utanför sin yrkesverksamhet, på vad som skulle kunna beskrivas som hans fritid. På tolv månader har han förstått och tagit till sig på djupet, snarare än ytligt, en häpnadsväckande mängd saker som rör de olika områden som påverkas av min Janusmodell. Jag har aldrig sett någon svälja och smälta så mycket, så komplicerat, på så kort tid.

Han har blivit den första krönikören av detta fantastiska äventyr som Janusmodellen och allt som hör till den är, och han vittnar om det i denna bok, som var tvungen att skrivas. Han har redan varit aktivt involverad i att skriva artiklar i flera månader och vill inte missa något av detta äventyr. Mer än bara ett vittne, han vill vara en av spelarna, och vi vill att han ska bli det, genom att bidra med sina idéer och personliga bidrag till byggnaden. För att säkerställa största möjliga spridning finns den bok han har skrivit tillgänglig som en gratis nedladdningsbar pdf på alla språk, och bör fortsätta att utvecklas i denna anda. Det är något speciellt med kunskap: när man väl har gett bort den kan man inte ta tillbaka den, och i viss mån är det svårt att göra den till sin egen.

Bilden föreställer tre män som sitter på en provisorisk flotte och stoppar meddelanden på olika språk i flaskor och lämnar över dem en efter en till havets slumpmässiga strömmar. Jag kanske inte längre är vid liv när ni läser dessa rader. Tiden går så fort. Vad kommer det att bli av allt detta? Jag vet det inte.

Jag har en vag känsla av att mänskligheten i dag har ett möte med sitt öde, att bortom denna kosmologiska modell håller en annan, ännu mer vidsträckt vision av universum på att ta form. För att illustrera detta kommer jag att citera slutet av Andréi Sakharovs tacktal för Nobels fredspris 1975. Ord som jag gör till mina egna:

"För tusentals år sedan drabbades mänskliga stammar av stora svårigheter i sin kamp för tillvaron. Då var det viktigt att inte bara kunna svinga en batong, utan att ha förmågan att tänka intelligent, att ta hänsyn till den kunskap och erfarenhet som stammen samlat på sig och att utveckla de band som skulle lägga grunden för samarbete med andra stammar. Idag står mänskligheten inför ett liknande test. Flera civilisationer kan existera i den oändliga rymden, inklusive samhällen som kan vara klokare och mer "effektiva" än vårt eget. Jag stöder den kosmologiska hypotesen att universums utveckling upprepar sig ett oändligt antal gånger, i enlighet med väsentliga egenskaper. Andra civilisationer, inklusive några av de mest "framgångsrika", finns inskrivna ett oändligt antal gånger på "nästa" eller "föregående" sida i Universums bok. Trots detta bör vi inte minimera våra heliga ansträngningar i denna värld, där vi likt svaga ljus i mörkret för ett ögonblick har trätt fram ur det dunkla medvetlöshetens intet och in i den materiella tillvaron. Vi måste respektera förnuftets krav och skapa ett liv som är värdigt oss själva och de syften som vi knappt uppfattar."

Jean-Pierre Petit, världsmedborgare - jean-pierre.petit@manaty.net



Hicham ZEJLI - 22 september 1979 - fransk medborgare

1 Inledning

1.1 Presentation av bakgrunden till och syftet med boken

I det nuvarande landskapet av kosmologi och teoretisk fysik är utforskandet av nya modeller för att förklara de fenomen som observeras i vårt universum fortfarande ett livligt och kontroversiellt forskningsområde. Den här boken utforskar och presenterar en innovativ och revolutionerande kosmologisk modell, Janus Cosmological Model (JCM), som utvecklats av fysikern Dr. Jean-Pierre Petit.

Som ingenjör med en avancerad bakgrund inom matematik och fysik har jag i studien av Janus kosmologiska modell identifierat en innovativ och intellektuellt givande metod för att utforska och tolka några av de mest gåtfulla fenomenen i universum. Detta tillvägagångssätt banar också väg för utvecklingen av många praktiska tillämpningar på lokal nivå, baserade på de grundläggande principer som härrör från denna modell.

Denna bok har två huvudsyften:

För det första att ge en detaljerad förklaring av Janus kosmologiska modell, dess grunder och dess konsekvenser genom vissa studier, tillgängliga för forskare med en bakgrund som liknar min, dvs. en avancerad nivå inom matematik och teoretisk fysik.

För det andra vill jag, trots det intensiva, givande och mångsidiga samarbetet inom vårt team, lyfta fram den tydliga kontrast som orsakades av bristen på kommunikation med de granskare som konsulterades av de stora vetenskapliga tidskrifterna med referentgranskning. Denna situation belyser de utmaningar som innovativa idéer kan möta när de växer fram och utvecklas utan en meningsfull och konstruktiv dialog mellan forskare.

1.2 En kort introduktion till den kosmologiska Janus-modellen och dess betydelse

Janus kosmologiska modell sticker ut i den teoretiska fysikens landskap med sitt djärva förslag: att beskriva universum som en Riemannsk varietet med två metriker. Denna konstruktion bygger på Einsteins allmänna relativitetsteori och innehåller element från partikelfysik och symplektisk geometri. Modellen har sina rötter i Andrei Sakharovs och Jean-Marie Souriaus arbete, där de etablerade en koppling mellan inverteringen av tid, inverteringen av energi och, följaktligen, inverteringen av massa.

Ett av modellens viktigaste bidrag är dess förmåga att lösa problemet med universums baryonsymmetri. Denna fråga, som står i centrum för de aktuella debatterna inom kosmologin, gäller den observerade dominansen av materia över antimateria, vilket strider mot förutsägelserna i Big Bang-modellen. Den kosmologiska Janus-modellen erbjuder ett nytt perspektiv på detta problem genom att postulera existensen av ett tvådimensionellt universum som härstammar från samma singularitet, dominerat av materia och antimateria.

Modellens originalitet ligger också i dess bimetriska syn på universum, där två "*lager*" av rumtid interagerar genom gravitationseffekter, vilket ger alternativa förklaringar till fenomen som mörk energi och mörk materia, och potentiellt öppnar upp för nya förståelser

av interstellära resor.

Kort sagt syftar denna bok till att presentera denna modell som ett innovativt tillvägagångssätt som utmanar nuvarande perspektiv inom kosmologi och teoretisk fysik och inbjuder till djup reflektion över utforskade möjligheter för vår förståelse av universum.

2 Teoretiska grunder

2.1 Newtons lag om gravitation

Newtons lag, formulerad i den euklidiska rymden, säger att när en massa m utsätts för påverkan av gravitationskraften G som alstras av en annan massa M är denna kraft F är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet d som skiljer de två massorna åt. Den kan uttryckas med följande ekvation:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2}$$

Ju större massa, desto större kraft, men denna kraft minskar snabbt när avståndet ökar på grund av termen d^2 i nämnaren. Denna lag är avgörande för förståelsen av gravitation och himlakroppars rörelser.

Inom fysiken har denna gravitationslag varit grundläggande för att förstå gravitationsinteraktionerna mellan himlakroppar, från jorden till planeterna och stjärnorna. Den är fortfarande en grundläggande lag inom den klassiska mekaniken och har spelat en avgörande roll för utvecklingen av astronomi och astrofysik. Den har också bekräftats av många observationer och experiment under århundradenas lopp, vilket har stärkt dess giltighet i vår förståelse av universum.

Men även om Newtons gravitationslag visade sig vara extremt kraftfull och korrekt i många scenarier, började den visa sina begränsningar när den tillämpades på situationer som involverade hastigheter som närmade sig ljusets eller fenomen på en astronomisk skala. Detta var startpunkten för Albert Einsteins speciella relativitetsteori, som innebar ett paradigmskifte i vår förståelse av de grundläggande begreppen rum, tid och gravitation. I nästa avsnitt kommer vi att göra en djupdykning i de grundläggande principerna för speciell relativitetsteori, vilket kommer att lägga grunden för vår efterföljande utforskning av allmän relativitetsteori. Detta kommer att leda oss till en djupare förståelse av komplexiteten i kosmos.

2.2 Introduktion till speciell relativitetsteori

I början av 1900-talet^{ème} genomgick fysiken en begreppsmässig revolution som utmanade de grunder som lades av Sir Isaac Newton på 17^{ème} århundradet. I takt med att observationer och experiment blev alltmer exakta började anomalier dyka upp när man studerade hastigheter nära ljusets hastighet och i extrema kosmiska miljöer. I detta sammanhang kom Albert Einsteins speciella relativitetsteori in i bilden och omkullkastade vår traditionella förståelse av rum, tid och gravitation.

2.2.1 Minkowskis tidsrymd och egen tid

Den speciella relativitetsteorin uppmanar oss att överge tanken att universum utspelar sig i en tredimensionell euklidisk rymd där tiden är en separat enhet. Istället föreslås en modell där vi befinner oss i en fyrdimensionell hypersurface, där de tre rumsdimensionerna är vinkelräta mot en tidsdimension. Denna sammansmältning av rum och tid bildar vad som kallas Minkowskis rumtid, med en metrisk signatur $(- + + +)$. Med andra ord är den metriska signaturen en viktig egenskap hos rumtiden som anger hur tids- och

rumsintervallen kombineras i den speciella relativitetsteorins ekvationer. I denna signatur $(-+++)$ motsvarar den första termen tidsintervallet, som subtraheras från de tre följande termerna som motsvarar rumsintervallen. Detta innebär att tiden har ett negativt tecken i metriken, medan de tre rumsdimensionerna har positiva tecken. Denna specifika signatur är avgörande för att förstå hur avstånd och tidsintervall mäts i den speciella relativitetsteorin.

För att bättre förstå detta koncept kan du föreställa dig en punkt M som rör sig i denna rumtid som beskrivs av två koordinater: tid (t) och rumslig position (x). När denna punkt rör sig kommer en närliggande punkt M' motsvarar något modifierade värden: $(t + dt, x + dx)$, där dt och dx representerar små steg i tid och rum. Om vi tänker oss att detta steg sker längs en bana som beskrivs av $x = ct$ (där c är ljusets hastighet), då $dx = cdt$.

Här introducerar vi begreppet *ren tid*. Den kvantitet som kallas egentid, är ett tidsmått som styr livet för ett objekt som rör sig med hastigheten v . För att beräkna använder vi följande ekvation:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

Denna ekvation visar hur den korrekta tiden (s) är kopplad till förändringar i tid (dt) och rummen (dx) när ett föremål rör sig med hastigheten v . Den visar också att den korrekta tiden kan variera som en funktion av objektets hastighet och bana, vilket leder till fenomen som tidsdilatation.

I Einsteins speciella relativitetsteori är tiden inte absolut utan beror på observatörens relativa hastighet. Följande matematiska utveckling beskriver förhållandet mellan egentid τ som är den tid som mäts av den rörliga klockan (ombord på rymdfarkosten), och koordinerad tid t som är den tid som mäts av klockan på marken (i vila i förhållande till observatören):

$$\begin{aligned} s = c\tau &\Rightarrow ds = cd\tau && \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \\ &\Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 && \Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} && \Rightarrow \tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Detta innebär att i ett scenario där t representerar den tid som mäts av en stationär observatör utrustad med en klocka på marken, och v är hastigheten för ett objekt utrustat med en inbyggd klocka som rör sig med denna hastighet i förhållande till denna antagna orörlighet, då kommer den korrekta tiden τ i detta objekt påverkas av den tidsdilatation

som beskrivs av $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ känd som *Lorentzfaktorn*.

2.2.2 Ljusets hastighet som en gräns

Det är viktigt att notera att i denna rumtid begränsas ljusets hastighet av egenskaperna hos den rumtid (och dess innehåll) i vilken det utbreder sig.

Om vi antar att x är den rumsliga koordinaten t är tidskoordinaten, och c är ljusets hastighet, då kan vi definiera en hastighet v med hjälp av uttrycket $v = \frac{dx}{dt}$.

Om man antar att variationen i egentiden alltid är större än eller lika med 0, dvs, $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \geq 0$ följer att ljushastigheten i vakuum är den ultimata hastighetsgränsen för rörliga föremål med positiv vilomassa, eftersom $v \leq c$. Fotoner, å andra sidan, följer banor för vilka $v = c$ vilket leder till unika egenskaper förknippade med ljus.

Speciell relativitetsteori är en teori som är begränsad till studier av tröghetsreferensramar, särskilt sådana som rör sig likformigt rätlinjigt (i utrymmen utan krökning, rör sig i en rak linje med konstant hastighet).

2.2.3 Fundamentala begrepp

Den speciella relativitetsteorin bygger huvudsakligen på tre begrepp:

- **Postulat om ljushastighetens invarians:** Detta postulat säger att ljushastigheten i ett vakuum är en universell konstant och förblir densamma för alla observatörer, oavsett deras relativa rörelse. Med andra ord kan ljusets hastighet inte adderas till eller subtraheras från en observatörs hastighet. Denna grundläggande idé bekräftades av det berömda Michelson-Morley-experimentet (Michelson och Morley 1887).
- **Kosmologiska principen:** Den kosmologiska principen postulerar att universum är homogent och isotropiskt. Detta innebär att dess egenskaper är enhetliga och identiska i alla riktningar och på alla skalor. Denna princip gör att vi kan utvidga tillämpningen av den speciella relativitetsteoris lagar till den kosmiska skalan, genom att betrakta universum som en helhet.
- **Principen om speciell relativitet:** Den speciella relativitetsprincipen innebär att fysikens lagar är konsekventa i alla inertiella referensramar. Inertiella referensramar är sådana som rör sig med konstant hastighet i förhållande till varandra. Denna princip generaliserar Galileos relativitetskoncept och ifrågasätter idén om en absolut referensram. Den visar att fysikens lagar förblir sammanhängande och invariants, oavsett observatörernas relativa hastigheter.

2.2.4 Ekvivalens mellan massa och energi

En av de mest symboliska ekvationerna inom fysiken är Albert Einsteins ekvation för ekvivalens mellan massa och energi. Denna ekvation innebär ett djupgående samband mellan massa (m) och energi (E) och avslöjar att de är utbytbara i universum.

Albert Einsteins revolutionerande intuition, som ledde till formuleringen av denna ekvivalens, härrör från hans teori om speciell relativitet. I denna teori postulerade Einstein att energi och massa är intimt förknippade med varandra, och ekvationen fungerar som hörnstenen i denna förening.

Det centrala konceptet i ekvationen är enkelt: det säger att energin (E) hos ett objekt är direkt proportionell mot dess massa (m), med ljusets hastighet i vakuum (c) som proportionalitetskonstant. Matematiskt kan detta uttryckas på följande sätt:

$$E = mc^2$$

Låt oss utforska denna ekvation mer i detalj med hjälp av ett enkelt exempel. Antag att vi har ett litet föremål med en massa på 1 gram (0,001 kilogram). Genom att tillämpa Einsteins ekvation kan vi beräkna energiequivivalenten för denna massa:

$$E = (0.001 \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

Denna häpnadsväckande stora mängd energi understryker den djupgående effekten av ekvation (1). Den visar att en liten massa kan producera en enorm mängd energi när den omvandlas med hjälp av denna ekvation. Ekvationen spelar en avgörande roll för förståelsen av kärnreaktioner, t.ex. de som sker i stjärnor och kärnkraftverk, där små förändringar i massan resulterar i stora energiflöden.

Einsteins ekvation, med dess förmåga att koppla samman massa och energi, är fortfarande en hörnsten i modern fysik och har på ett genomgripande sätt påverkat vår förståelse av hur universum fungerar.

Även om den speciella relativitetsteorin har gjort det möjligt för oss att utforska fascinerande aspekter av kosmos genom att guida oss på resor i hastigheter nära ljusets hastighet och avslöja hur rumtiden böjs som svar på vår rörelse, är den begränsad till ett specifikt ramverk, nämligen inertiella referensramar och likformig rätlinjig rörelse. Men vad händer när gravitationen kommer in i bilden? Hur utvecklas rumtidens struktur i närvaro av massiva objekt eller betydande krökning? Det är här Albert Einsteins allmänna relativitetsteori kommer in i bilden, i nästa avsnitt.

2.3 Introduktion till allmän relativitetsteori

2.3.1 A Revolution inom fysiken

Newtons lag är en teori som fungerar bra i många situationer, vilket förklaras i avsnitt 2.1, men den kan inte förklara vissa fenomen som observeras vid hastigheter nära ljusets hastighet eller i närvaro av intensiva gravitationsfält. Albert Einsteins allmänna relativitetsteori (GR) är en mer komplett teori som omfattar dessa gravitationseffekter. Den allmänna relativitetsteorin är en hörnsten i den moderna fysiken och har revolutionerat vår förståelse av gravitationen och universum. Teorin lades fram av Albert Einstein 1915 och bygger på principen att gravitationen är en manifestation av rumtidens krökning, som orsakas av närvaron av massa och energi. Einsteins fältekvation, som är kärnan i denna teori, beskriver hur materia och energi påverkar rumtidens geometri och, i sin tur, hur denna krökta geometri styr materiens och energins rörelser.

Einsteins fältekvation, som först publicerades den 25 november 1915, är den viktigaste partiella differentialekvationen i den allmänna relativitetsteorin:

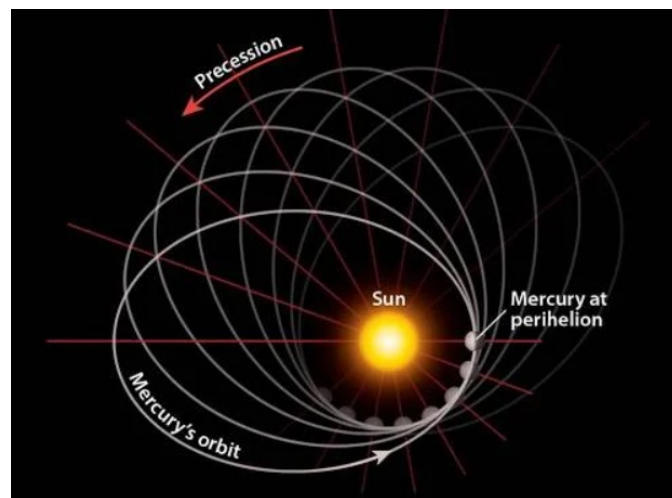
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Denna krökning av geometrin runt en materiekälla tolkas sedan som källans gravitationsfält. Objektens rörelse i detta fält beskrivs mycket exakt av deras geodetiska ekvation. Den metriska $g_{\mu\nu}$ producerar en familj av geodesier. Observera att partiklar med positiv eller negativ gravitationsmassa skulle bete sig på samma sätt genom att följa samma geodesier när de avböjs av den gravitationella potential som skapas av en betydande massa M till exempel i jord- eller solgravitation. Ett massivt objekt, t.ex. en stjärna, påverkar alltså rumtiden inte bara genom sin massa utan även genom den energi som den avger, t.ex. strålning. I den allmänna relativitetsteorin är ett objekts energi - inklusive dess vilomassa som representeras av mc^2 och alla ytterligare former av energi såsom strålning - bidrar till det gravitationsfält som det producerar. Detta kombinerade bidrag av energi och massa är det som kröker rumtiden runt objektet. Dess andra term tar hänsyn till universums innehåll vid varje punkt i rumtiden:

- **Om den är skild från noll** kommer den geometriska lösning som uppstår ur denna ekvation att beskriva det inre av en massa.
- **Om den är noll** kommer lösningen som framkallas av denna ekvation att referera till en helt tom del av universum runt denna massa.

2.3.2 Observerbara effekter och experimentell bekräftelse

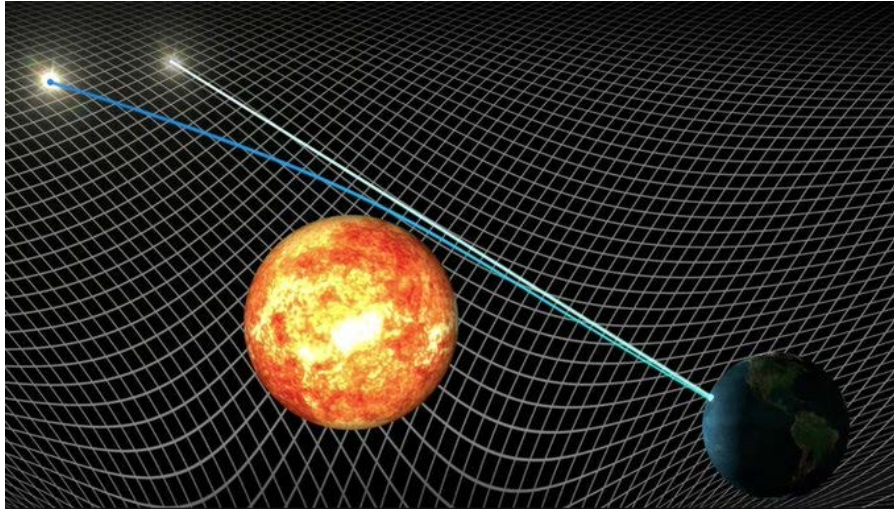
Bland de fenomen som förklaras av GR finns avvikelser i planeten Merkurius rotationsplan när den är som närmast solen, känd som periheliumprecession. Detta fenomen uppmättes med en noggrannhet på 45 bågsekunder per århundrade, ett värde som inte kunde förklaras med Newtons lag.



Figur 2.1 - Kvicksilvers periheliumprecession

Ett annat observerat fenomen är ljusets skenbara krökning runt solen. Under solförmörkelsen 1919 lade Sir Arthur Eddington märke till att ljusstrålarna såg ut att böja sig runt solen. I verkligheten följer dessa ljusstrålar de kortaste vägarna i den krökta

rumtiden, så kallade geodesier. Denna skenbara krökning av ljuset beror på den deformation av rumtiden som orsakas av närvaron av massa, en effekt som GR har förklarat exakt ((Dyson, Eddington, and Davidson 1920)).



Figur 2.2 - Bekräftelse av Einsteins teori med stjärnljusets krökning under solförmörkelsen

Dessa fenomen betraktas som icke-linjära eftersom de endast kan förklaras med GR-teorin. Under förhållanden där relativistiska effekter är försumbara kan dock Newtons lag ge giltiga approximationer. GR har därmed utökat vår förståelse av gravitationen bortom gränserna för Newtons lag, vilket banar väg för en bättre förståelse av gravitationsinteraktioner på stora skalor och vid höga hastigheter.

2.3.3 Geometri i tidsrymden och geodetiska ekvationer

Minns Einsteins ekvivalensprincip för ett inertialsystem i fritt fall:

"I ett gravitationsfält är det alltid möjligt att vid varje punkt i rumtiden välja ett lokalt inertiellt koordinatsystem så att, i en tillräckligt liten region, fysikens lagar är identiska med dem i frånvaro av gravitation".

I denna referensram för fritt fall upphäver den tröghetskraft som en kropp i fritt fall känner av gravitationskraften, vilket innebär att objektet inte utsätts för någon kraft (viktlöst tillstånd). Följaktligen är tröghetsramen den grundläggande ramen för att studera interagerande objekt (känd som den speciella relativitetsramen) innan de analyseras i en andra Galileisk ram som kallas "laboratorieramen", där dessa objekt utsätts för gravitationens effekter. Den senare ramen är i själva verket accelererad uppåt ($a = -g$) jämfört med den naturliga tröghetsramen (tänk dig att "marken på jorden accelererar dig uppåt").

I den speciella relativitetsteorin beskrivs en inertiell ram av Minkowski-metriken, som är en matematisk representation av platt rumtid. Denna metrik gäller i regioner där gravitationen är frånvarande. I ett sådant sammanhang bestäms objektens banor av rörelseekvationerna som härrör från den speciella relativitetsteorins principer. Medan

termen "geodetisk" används i den allmänna relativitetsteorin för rumtid som kröks av gravitationen, beskrivs dessa banor i den speciella relativitetsteorins Minkowski-metrik bättre som raka linjer som representerar rörelse med konstant hastighet. I detta ramverk rör sig objekt i inertiella ramar i raka linjer med konstant hastighet, ett specialfall av en geodetisk i platt rumtid.

Tröghetsram och koordinater

Låt oss först placera oss i detta tröghetsramverk och definiera koordinaterna för en punktmassa i detta ramverk: Vi betraktar koordinaterna ξ^α med $\xi^0 = ct$, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$ för vår analys. Eftersom denna kropp inte utsätts för någon kraft (konstant hastighet) kan vi dra slutsatsen att :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

$$d\tau^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Där τ motsvarar metriken eller intervallet i denna rymd, som vi också kan beteckna soch det är viktigt att notera att denna metrik är invariant oavsett referensram.

Omvandling av koordinater till en accelererad referensram för laboratorier

Låt oss nu tillämpa en koordinattransformation i en ny Galileisk laboratoriereferensram som "accelererats uppåt" i förhållande till den tidigare tröghetsreferensramen:

$$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Varje koordinat i den nya Galileiska ramen beror dock på koordinaterna i tröghetsramen och vice versa:

$$x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Och kom ihåg att ξ beror på τ :

$$\xi^\mu(\tau)(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Varje parameter i ξ i den nya referensramen beror också på τ . Vi kan därför dra slutsatsen att :

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} + \frac{dx^1}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^1} + \frac{dx^2}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^3}$$

Detta kan uttryckas med hjälp av summeringsnotation för upprepade index :

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

NB: Inom matematiken är summeringsnotation ett kompakt sätt att representera summeringen av en serie termer. När ett index förekommer både som ett lägre och ett högre index i ett uttryck innebär detta i allmänhet att man summerar över indexet, vilket

innebär att alla möjliga värden för indexet adderas. Denna notation används ofta inom olika områden av matematik och fysik för att förenkla representationen av ekvationer som innehåller upprepade index.

Nu vill vi härleda detta uttryck igen för att härleda den geodetiska ekvationen (2), då :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

$$\frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

För att utföra summeringen på de upprepade indexen enligt följande :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$$

Vi måste utföra denna operation:

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) = 0$$

För $\beta \neq \mu$ är de partiella derivatorna av en koordinat med avseende på en annan koordinat i samma koordinatsystem noll (t.ex, $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$), och för $\beta = \mu$ är den partiella derivatan lika med

1. Detta motsvarar Kroneckersymbolen (δ_μ^β):

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta$$

NB: När β och μ representerar olika koordinater i samma koordinatsystem, är den partiella derivatan av β med avseende på μ noll, eftersom detta innebär att dessa koordinater är oberoende av varandra i systemet. När däremot β och μ representerar samma koordinat är den partiella derivatan lika med 1, vilket indikerar att koordinaten ändras med sig själv, vilket representeras av symbolen δ_μ^β .

Detta ger oss :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Men om vi ersätter μ med β ($\beta = \mu$), då $\delta_\mu^\beta = \delta_\beta^\beta = 1$ då $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$. Detta ger :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

Genom att införa *Christoffel-symbolerna* enligt följande:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

Vi kan härleda följande *geodetiska ekvation*:

$$\frac{d^2 x^{\beta}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0$$

Detta representerar ett allmänt uttryck för Christoffel-symboler $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$ i termer av derivatan av koordinattransformationsfunktioner. Christoffelsymboler, som vi ska se senare, används inom matematiken för allmän relativitet och differentialgeometri för att beskriva hur koordinatsystem förändras lokalt.

Vad kan vi lära oss av den geodetiska ekvationen?

- Den andra derivatan av koordinaterna i den "accelererade" Galileiska referensramen är inte längre noll utan är lika med ekvivalenten av de tröghetskrafter som tillämpas i den allmänna relativitetsteorin (i detta fall gravitationen). Från (3) kan vi härleda :

$$\frac{d^2 x^{\beta}}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

Om μ och ν är rumskoordinater, så motsvarar deras derivata med avseende på τ motsvara en hastighet.

- Varje objekt som rör sig i laboratoriets "accelererade" Galileiska referensram kommer att följa denna ekvation när det utsätts för jordens gravitationskraft.
- Formen på denna ekvation ger oss information om de kortaste eller längsta vägarna (extrema) på en krökt yta (variation). Mer exakt motsvarar geodetik stationära banor vars fysiska egenskaper förblir konstanta över tiden (frånvaro av yttre krafter).
- Vi kan beskriva gravitationen som en rent geometrisk effekt som är kopplad till de geodesier som objekt färdas i krökt rumtid (hur rumtiden är krökt beskrivs av Christoffelsymbolerna). En analogi skulle vara att betrakta två objekt som färdas parallella och identiska banor med samma hastighet från en punkt på jorden mot norr; de kommer att korsa varandra vid nordpolen på grund av jordens krökning. Denna korsning kan analyseras antingen genom att en kraft har attraherat dem (analogi med Newtons mekanik) eller genom en rent geometrisk effekt som är kopplad till jordens krökning (analogi med relativistisk mekanik). Enligt den allmänna relativitetsteorin är gravitationen alltså en krökning av rumtiden som får objekt i lokal rätlinjig rörelse att följa dessa geodetiker. Den allmänna relativitetsteorin gör det möjligt att bestämma rumtidens krökning som en funktion av dess komponenter (materia, energi) och sedan beskriva banorna för partiklar som rör sig i denna rumtid.

- Christoffelsymboler beräknas från metriken och dess partiella derivata, och fångar information om rumtidens krökning. De gör det möjligt för oss att beräkna hur geodetikerna påverkas av rumtidens krökning.

2.3.4 Metriska tensorer

Vi ska nu titta på metriska tensorer och hur de relaterar till Christoffel-symbolerna som fastställdes tidigare.

Betrakta Minkowski-metriken som beskrivs med hjälp av rumtidskoordinaterna för ett rörligt objekt i en tröghetsreferensram, som visas i ekvation (4) och uttrycks på följande sätt:

$$d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2$$

Den kan också skrivas på detta sätt, där den kan uttryckas som en summering över indexen α och β :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Denna ekvation använder den metriska tensorn $\eta_{\alpha\beta}$ i Minkowski-rymden (som beskriver den plana rumtiden i den speciella relativitetsteorin) för att beräkna rumtidsintervallet $d\tau^2$ i termer av koordinatdifferentialerna $d\xi^\alpha$ och $d\xi^\beta$. Minkowskis metriska tensor $\eta_{\alpha\beta}$ har komponenter som är -1 för tidlika intervall och +1 för rymdlika intervall på diagonalen, och 0 utanför diagonalen enligt följande :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kom ihåg att följande uttryck representerar reglerna för differentiell transformation mellan två koordinatsystem. De visar hur en liten förändring av koordinaterna x^μ och x^ν leder till en liten förändring i en annan uppsättning koordinater ξ^α och ξ^β .

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

$$d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Om vi nu substituerar dessa två differentialformer i uttryck (5) kan vi härleda följande uttryck:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Från detta kan vi extrahera följande metriska tensor:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Den metriska tensorn spelar en fundamental roll i den allmänna relativitetsteorin eftersom den bestämmer rumtidens geometri och hur gravitationen verkar mellan två objekt som befinner sig vid koordinaterna x^μ och x^ν i samma referensram. Den gör det möjligt att omvandla koordinaterna för dessa objekt till avståndet mellan dem, samtidigt som man tar hänsyn till den lokala krökningen av rumtiden, som kan variera beroende på fördelningen av materia och energi. I motsats till konventionell intuition beror avståndet mellan två punkter i krökt rumtid på denna krökning och kan variera avsevärt. Den metriska tensorn är därför ett viktigt matematiskt verktyg för att beräkna intervallet mellan två händelser, vilket även inkluderar att mäta tiden som förflutit mellan dem i närvaro av ett gravitationsfält.

Eftersom indexen μ och ν är stumma och upprepade, omfattas de av Einsteins summeringskonvention och kan därför bytas ut i uttrycket för den metriska tensorn. Detta innebär att den metriska tensorn $g_{\mu\nu}$ är symmetrisk, dvs. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

NB: Från och med nu tar vi $g^{\mu\nu}$ som inversen till $g_{\mu\nu}$ som uttrycks genom följande relation med summering över det upprepade indexet α vilket ger Kroneckersymbolen :

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$$

där δ_ν^μ är Kroneckersymbolen, som, vilket vi såg tidigare, är lika med 1 när $\mu = \nu$ och 0 annars. Denna relation definierar karaktären hos inversen av den metriska tensorn i differentialgeometri och allmän relativitetsteori.

2.3.5 Christoffel-symboler

Christoffel-symbolerna, betecknade $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ är härledda från den metriska tensorn och ger viktig information om rumtidens geometri. De är inte själva tensorer utan härleds från den metriska tensorn, som är en verklig tensor.

För att beräkna Christoffelsymboler tar vi de partiella derivatorna av komponenterna i den metriska tensorn och tillämpar sedan en specifik kombination av dessa derivator. Formeln för Christoffelsymboler av det andra slaget ges av :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Varje term innehåller en partiell derivata av den metriska tensorn med avseende på koordinaterna, och $g^{\beta\alpha}$ är inversen av den metriska tensorn, vilket säkerställer att vi summerar över lämpliga index. Som vi kommer att se senare spelar Christoffel-symboler en central roll i bestämningen av geodesier, som beskriver banan för partiklar och ljus i krökt rumtid och som används i rörelseekvationerna i den allmänna relativitetsteorin.

Bevis. Vi kommer nu att uttrycka Christoffel-symbolerna i termer av den metriska tensorn $g_{\mu\nu}$. För att göra detta betraktar vi den partiella derivatan av $g_{\mu\nu}$ med avseende på koordinaterna x^λ . Denna operation introducerar andraderivatan av koordinattransformationsfunktionerna ξ^α som sedan kan integreras i uttrycket för

Christoffelsymbolerna (6).

Innan vi börjar våra beräkningar kommer här några preliminära tips för att förenkla dem:

- Den metriska tensorn är symmetrisk, så $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
- Att ersätta ν med α måste vi först ersätta det befintliga tysta indexet α med σ .

Vi erhåller den metriska tensorn enligt följande:

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha}$$

Genom att tillämpa produktregeln för härledning och komma ihåg att $\eta_{\sigma\beta}$ är en konstant, får vi :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right)$$

De förväntade andra partiella derivatorna visas på höger sida av ekvationen (två gånger):

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

För att integrera Christoffelsymbolens uttryck (6) i detta samband, måste vi tillämpa följande transformation på båda sidor för att isolera den partiella derivatan och införa en summa över det upprepade indexet β :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right)$$

Vi vet dock att :

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma$$

och enligt (7) är denna Kroneckersymbol lika med 1 när $\sigma = \lambda$ då :

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Vi kan sedan ersätta det i uttryck (8) och se till att omformulera motsvarande index i det nya uttrycket på ett liknande sätt:

$$\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

$$\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

OBS: Vi placerar inte β på Christoffel-symbolen eftersom det är ett tyst summeringsindex i den term där vi vill tilldela det, så vi kommer att välja en annan bokstav, ρ :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

Slutligen kan vi dra slutsatsen från (8) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

Differentieringen av den metriska tensorn kan således uttryckas på 3 olika sätt (de 2 sista innebär nya index genom att byta ut ν och μ och ersätta μ med α) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu} \Gamma_{\alpha\nu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

Dessa tre sätt att uttrycka denna differentiering gör att vi kan få ett förenklat resultat genom att addera de två första och subtrahera det sista: (9a) + (9b) - (9c) :

$$g_{\alpha\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$g^{\beta\alpha} g_{\alpha\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

$$\delta_\rho^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

Så, äntligen :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Detta uttryck för Christoffelsymbolen gör att vi kan upprätta ett samband mellan krökningen av rumtiden som orsakas av gravitationskraften och de rumsliga derivaten av den metriska tensorn. Det är nödvändigt för att formulera de ekvationer som styr geodetikerna i den allmänna relativitetsteorin. □

Exempel på beräkning av Christoffelsymboler för en sfärisk metrik :

I sfäriska koordinater uttrycks linjeelementet ds^2 för ett tredimensionellt utrymme uttryckas på följande sätt

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

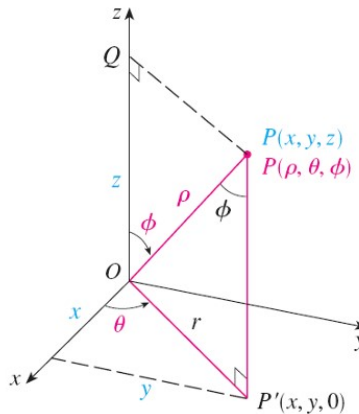
$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + 2g_{13} dx^1 dx^3 + g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} (dx^3)^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

där dr , $d\theta$ och $d\phi$ är differentialerna för den radiella koordinaten r den polära vinkeln θ och azimutvinkeln ϕ respektive. Den motsvarande metriska tensorn $g_{\mu\nu}$ i sfäriska koordinater är diagonal och ges av :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Bevis. Sambandet mellan kartesiska och sfäriska koordinater kan utläsas ur figur 2.3 :



Figur 2.3 - Punktens position on P definieras av avståndet ρ och vinklarna θ (kolatitud) och ϕ (longitud)

Om vi betraktar trianglarna OPQ och OPP' har vi : $z = \rho \cos\phi$, $r = \rho \sin\phi$ där $x = r \cos\theta$ och $y = r \sin\theta$. Därför gäller :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

Med hjälp av de fysikaliska beteckningarna i figur 2.6 ges övergången till kartesiska koordinater av :

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\phi \sin\theta \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

Metriken i kartesiska koordinater ges dock av :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

För att uttrycka detta i sfäriska koordinater ersätter vi x , y och z med deras motsvarigheter i sfäriska koordinater, vilket ger (11). \square

För att beräkna Christoffel-symbolerna $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$ finner vi först inversen av den metriska tensorn, som för en diagonal metrik helt enkelt är :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

För den givna metriska tensorn beräknar vi de partiella derivator som krävs för Christoffel-symbolerna:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} &= 2r, \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} &= 2r \sin^2(\theta), \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} &= 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned}$$

Genom att sätta in dessa partiella derivator i Christoffels symbolformel (10), beräknar vi dem genom att summera över det upprepade indexet α . För den givna metriska tensorn kommer de flesta Christoffel-symbolerna att vara noll eftersom den är diagonal och endast beror på r och θ . Christoffel-symbolerna som inte är noll är :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2(\theta) \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot(\theta) \end{aligned}$$

NB:

- Christoffel-symbolen $\Gamma_{\theta\theta}^r$ beräknas enligt följande:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} \right)$$

eftersom den enda derivatan icke-noll för $g_{\theta\theta}$ är med avseende på r . Genom att substituera värdena får vi :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial(r^2)}{\partial r} \right) = -r.$$

- Ett annat exempel är Christoffel-symbolen $\Gamma_{r\theta}^\theta$ som beräknas enligt följande:

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} \right)$$

där den enda termen som är skild från noll är $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}$. Detta ger oss :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) (2r) = \frac{1}{r}.$$

Beräkning av Riemann Tensor, Ricci Tensor och Ricci Scalar

I denna sfäriska rymd är alla komponenter i Riemann- och Ricci-tensorerna, liksom Ricci-skalären, noll, vilket illustrerar geometrin hos en platt rymd.

Bevis. Riemanns krökningstensor definieras av uttrycket :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

Ta till exempel Christoffel-symbolerna som ges av (12):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna komponenterna i Riemann-tensorn. Till exempel kan vi beräkna $R_{r\theta r}^\theta$:

$$R_{r\theta r}^\theta = \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta \Gamma_{rr}^\lambda - \Gamma_{r\lambda}^\theta \Gamma_{\theta r}^\lambda$$

För att beräkna komponenten i Riemann-tensorn $R_{r\theta r}^\theta$ har vi :

- Den första termen $\partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta$ är noll eftersom Γ_{rr}^θ är noll.
- Den andra termen $\partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta$ innebär den partiella derivatan av $\Gamma_{\theta r}^\theta$ med avseende på r vilket är $-\frac{1}{r^2}$.
- Den tredje termen är summan av λ av $\Gamma_{\theta\lambda}^\theta \Gamma_{rr}^\lambda$ men eftersom Γ_{rr}^λ är noll för $\lambda \neq r$ är denna term noll.
- Den fjärde termen är summan över λ av $\Gamma_{r\lambda}^\theta \Gamma_{\theta r}^\lambda$ vilket för $\lambda = \theta$ ger $\left(\frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$.

Summan av de två termerna som inte är noll (termerna 2 och 4) är :

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

Således är $R_{r\theta r}^\theta$ för Riemann-tensorn noll.

Ricci-tensorn, som erhålls genom att kontrahera Riemann-tensorn på dess första och tredje index, ges av :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$$

Slutligen beräknas Ricci-skalären, som är spåret av Ricci-tensorn, enligt följande:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Eftersom Riemann-tensorn är noll följer att Ricci-tensorn och dess skalär också är noll. \square

Beräkningskod för Mathematica :

```
(*Importera paket*)
(*-----*)
Needs["OGRe` "]
(*Definition av koordinater*)
TNewCoordinates["Sfärisk", {r, \[Theta], \[Phi]}]
(*Definition av den metriska tensorn*)TShow@
  TNewMetric["SfäriskMetriskTensor", "Sfärisk",
    DiagonalMatrix[{1, r^2, r^2 Sin[\[Theta]]^2}]]
(*LineElement*)
TLineElement["SfäriskMetriskTensor"]
(*Beräkning av Christoffel-symboler*)
TList@TCalcChristoffel["SfäriskMetriskTensor"]
(*Beräkning av Riemann-tensorn*)
TList@TCalcRiemannTensor["SfäriskMetriskTensor"] (*Beräkning av Riemanns
tensor*)
(*Beräkning av Ricci Tensor*)
TList@TCalcRicciTensor["SfäriskMetriskTensor"]
(*Ricci beräkning av skalär*)
TList@TCalcRicciScalar["SfäriskMetriskTensor"] (*Ricci Scalar-beräkning*)
```

2.3.6 Tillämpning av den geodetiska ekvationen i det svaga fältets gräns

Vi skriver ner uttrycket för Christoffelsymbolen och den geodetiska ekvationen enligt följande (om $\nu = 0$ tidskoordinat, annars en rymdkoordinat x, y, z) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

där

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = g_{\mu\sigma,\nu}$$

NB:

- Denna ekvation representerar den partiella derivatan av komponenten i den metriska tensorn $g_{\mu\sigma}$ med avseende på koordinaten x^ν och skrivs ofta med ett kommatecken följt av differentieringsindexet, som i detta fall är ν . Kommanotation $g_{\mu\sigma,\nu}$ kommanotation är en vanlig förkortning inom allmän relativitetsteori för partiella derivator av tensorkomponenter.

- I samband med speciell relativitetsteori är det vanligt att använda ett enhetssystem där ljushastigheten c definieras som lika med 1 ($c = 1$). Detta förenklar ekvationerna och gör det lättare att uttrycka vissa storheter. I detta enhetssystem uttrycks avstånd i tidsenheter (t.ex. ljusår i stället för meter) på grund av ekvivalensen $c = 1$. För att göra detta måste tiden uttryckas i sekunder, och längdenheterna blir den sträcka som ljuset färdas på en sekund, vilket uttrycks i ljussekunder (motsvarande "ljusår"). Vi kan alltså uttrycka metriken på följande sätt:

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Vi kommer dock nu att anse att den tid t som uttryckts hittills, kommer att vara den korrekta tiden τ i uttrycket av det metriska, för att uttrycka det på följande sätt:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Vi ska nu visa att ekvation (13) reduceras till Newtons rörelseekvation när gravitationsfälten är svaga och statiska (dvs. i den speciella relativitetsteorin där $g_{\mu\nu}$ är mycket nära $\eta_{\mu\nu}$ och oberoende av tiden), och när hastigheterna är mycket mindre än ljushastigheten, dvs. $v/c \ll 1$ vilket kan uttryckas på följande sätt:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$$

NB: I teorin om linjäriserad gravitation antar vi att rumtiden är nästan platt. För att göra detta representerar vi den totala metriska tensorn $g_{\mu\nu}$ som summan av Minkowski-metriken $\eta_{\mu\nu}$ som beskriver den plana rumtiden som vi sett tidigare, och en liten "störning" $h_{\mu\nu}$ som representerar avvikelserna från denna planhet på grund av närvaron av massa eller energi. Vi kommer att se detta senare i studien av dipolrepellern för ett stationärt system (avsnitt 3.3).

Genom att integrera denna metriska tensor i uttryck (14) inser vi att de partiella derivatorna av den metriska tensorn endast beror på $h_{\mu\nu}$ eftersom $\eta_{\mu\nu}$ är konstant och dess derivata är noll. I den linjäriserade gravitationsteorin kan Christoffelsymbolerna således approximeras genom att endast beakta bidragen från störningen $h_{\mu\nu}$. Detta beror på att Christoffelsymbolerna definieras av de första derivatorna av den metriska tensorn, och i ett svagt gravitationsfält, $h_{\mu\nu}$ är liten jämfört med $\eta_{\mu\nu}$. Så när vi beräknar Christoffelsymbolerna för ett svagt gravitationsfält försummar vi derivatorna av $\eta_{\mu\nu}$ och tar bara hänsyn till derivaten av $h_{\mu\nu}$. Vi får därför:

$$g_{\mu\sigma,\nu} = h_{\mu\sigma,\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma} \quad \text{et} \quad g_{\nu\sigma,\mu} = h_{\nu\sigma,\mu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma}) (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Med tanke på att $h_{\mu\nu}$ är liten, inser vi att produkten av $h^{\lambda\sigma}$ med dess partiella derivata kommer att bidra till termer av ordning två eller högre (t.ex. h^2 , h^3 etc.). Dessa termer av högre ordning kommer att vara betydligt mindre än de termer av första ordningen som vi letar efter. När vi beräknar Christoffelsymbolerna försummar vi därför produkterna av $h_{\mu\nu}$

och dess derivat, vilket innebär att bidragen från $h^{\lambda\sigma}$ är försumbara jämfört med bidragen från $\eta^{\lambda\sigma}$. Vi får således:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Denna approximation förenklar beräkningen av rumtidens krökning i svaga gravitationsfält och är grundläggande för analysen av gravitationsvågor, där störningarna $h_{\mu\nu}$ representerar böljningar i rumtidens krökning.

Låt oss nu betrakta två fall:

- För $\lambda = 0$ som motsvarar tidskoordinaten i den allmänna relativitetsteorin, blir ekvationen för Christoffelsymboler av första slaget specifik för tidskoordinaten. Med hjälp av Minkowskis metriska tensor η metriska tensor och störningen h Christoffelsymbolen för $\lambda = 0$ ges av ekvationen :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}\eta^{0\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Eftersom $\eta^{0\sigma}$ inte är noll endast när $\sigma = 0$ vilket leder till $\eta^{00} = 1$ får vi följande samband :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0})$$

Men eftersom gravitationsfältet är statiskt, dvs. rumtidsmetriken varierar inte med tiden, är den partiella derivatan av den metriska tensor med avseende på tiden ($\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$) noll. Detta gör att vi kan betrakta systemet som stationärt med avseende på rymdmetriken :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu})$$

- För rumsliga koordinater som betecknas med $\lambda = i$ (där i, j, k representerar rumsliga index), kan Christoffelsymboler beräknas med hjälp av störningsmättet $h_{\mu\nu}$. Minkowskis metriska tensor $\eta^{i\sigma}$ används för att höja indexet, och är lika med -1 när indexen matchar varandra. Christoffelsymbolerna för rumsliga koordinater ges således av :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Med tanke på det negativa tecknet på de rumsliga komponenterna i $\eta^{i\sigma}$ ekvationen för $\sigma = i$ förenklas till :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2}(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i})$$

Detta negativa tecken återspeglar den motsatta teckenkonventionen för de rumsliga komponenterna i Minkowskis metriska tensor i förhållande till den temporala

komponenten.

Låt oss nu integrera dessa resultat i den geodetiska ekvationen (13) för varje fall:

- För $\lambda = 0$ vi vet att $x^\lambda = x^0 = ct$ då :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Följande produkt kommer dock att generera en summa över de upprepade indexen μ och ν kvantiteter av order 0, 1 och 2 :

$$(h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

Med tanke på att de större orderkvantiteterna, särskilt order 1 och 2, är mycket försumbara, särskilt som de baseras på den redan lilla kvantiteten $h_{\mu\nu}$ som är mycket mindre än $\eta_{\mu\nu}$ kommer vi endast att behålla termerna av ordning noll. I detta sammanhang avser nollordning termer där μ och ν båda är lika med 0, vilket motsvarar tidskomponenterna. Denna förenkling leder oss till följande ekvation:

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{00,0} + h_{00,0}) c^2 \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

I denna approximation är det bara de termer som involverar tidskoordinaten som bidrar väsentligt till rörelseekvationen, vilket förenklar analysen av rumtidsgeodesier i ett svagt gravitationsfält.

Men eftersom gravitationsfältet är statiskt är dessa storheter noll, så :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} = 0$$

Detta innebär att t är proportionell mot s vilket betyder :

$$s = ct$$

- För de rumsliga koordinaterna betecknade med $\lambda = i$ från (15) får vi :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} (h_{\mu i, \nu} + h_{\nu i, \mu} - h_{\mu\nu, i}) \frac{1}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

Som nämnts tidigare kommer vi dock endast att behålla 0-ordningsvärdena för μ och ν som är lika med 0. På grund av gravitationsfältets statiska natur får vi följande ekvation :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} h_{00, i} = 0$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}$$

Eftersom i är ett rumsligt index med värdena 1, 2 eller 3, finner vi en form av "Acceleration - Kraft"-ekvivalens som kan representeras i vektorform:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{grad}\phi$$

med

$$\phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$$

Kopplingen mellan gravitationspotentialen och tidskomponenten i den metriska tensorn kan fastställas genom att införa (16) i (17):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

Gravitationspotentialen ϕ är ekvivalent med hastigheten i kvadrat (c^2). Genom att veta att $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ kan vi kontrollera lokalt att för jorden, $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = \frac{2G \cdot M_t}{R_t \cdot c^2} = 10^{-9} \ll \eta_{00} = 1$ med hjälp av det välkända uttrycket för beräkning av gravitationspotentialen :

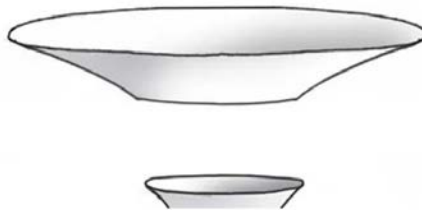
$$\phi = \frac{GM}{R}$$

2.3.7 Karl Schwarzschilds och Ludwig Flamms lösningar

Karl Schwarzschild utvecklade en komplett geometrisk lösning till ekvation (18), bestående av två metriker som publicerades i två separata artiklar ((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a)) :

- **Den första lösningen** beskriver, med hjälp av metriken nedan, den yttre geometrin hos en sfäriskt symmetrisk massa, t.ex. en stjärna med radien r_n i vakuumet utanför objektet där det inte finns någon materia, dvs. figur 2.4 :

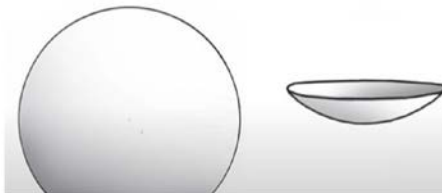
$$ds^2 = \left(1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$



Figur 2.4 - Del av en Flamm-hypersurface

- **Den andra lösningen**, som ofta kallas den inre Schwarzschild-lösningen, struktureras av följande metrik, som beskriver rumtidens geometri inuti en statisk, sfäriskt symmetrisk kropp av inkompressibel vätska som en stjärna med radien r_n dvs. figur 2.5 :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^2}{3c^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2$$



Figur 2.5 - Portion av en sfär

Detta tillvägagångssätt innebär att två segment av rumtidslösningar sammanfogas, närmare bestämt två regioner av hypersurfaces, som var och en kännetecknas av sina distinkta metriker. Sammanfogningen sker vid en gemensam gräns, vilket säkerställer kontinuiteten i rumtidsgeometrin och den kombinerade lösningens fysiska konsistens över gränssnittet.

Samma år erbjöd en ung matematiker sin egen tolkning av Schwarzschilds arbete. Hans namn var Ludwig Flamm. Hans arbete och hans namn har förblivit i stort sett okända för kosmologispecialister av en enkel anledning: hans artikel översattes inte till engelska förrän 2012. Han hade ett perfekt grepp om geometrin hos objekt som tredimensionella Riemannska hypersurfaces ((Flamm 1916)).

Baserat på Schwarzschilds yttre metrik utvecklade Kruskal sin berömda modell, som anses vara grunden för teorin om svarta hål. Genom att analytiskt utvidga Schwarzschilds exteriörlösning eliminerar han "algebraiskt" den koordinatsingularitet som finns vid "händelsehorisonten" för $r = R_s$ (Schwarzschilds radie), genom att introducera ett nytt koordinatsystem. Detta system är utformat för att göra metriken regelbunden överallt utom vid den "centrala fysiska singulariteten" för $r = 0$ ((Martin D. Kruskal 1960),(Jean-Marie Souriau 1965)). Men är denna modell verkligen fysikaliskt meningsfull?

2.3.8 Konstruktion av geodesier för Schwarzschilds yttre metrik

Betrakta Schwarzschilds yttre metrik (6.53) hämtad från (Adler, Bazin och Schiffer 1975) (sidan 194) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

där m är en enkel integrationskonstant (en längd), x^0 är en kronologisk markör (också en längd), och s är den längd som mäts på 4D-hypersurface.

Författarna skriver:

$$x^0 = ct$$

En geodetisk är en väg inskriven i hypersurface, som motsvarar en minsta längd :

$$\delta \int ds = 0$$

Detta innebär att denna längd :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\}$$

har ett minimivärde längs en väg som parametriseras på detta sätt : $t(s), r(s), \theta(s), \phi(s)$.
Låt oss skriva :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$$

Detta innebär att man söker efter banor som minimerar :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) \right\} ds$$

Mängden inom hakparentes är :

$$L = L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad \text{ou} \quad L = L(x^i, \dot{x}^i)$$

Detta problem löstes av den franske matematikern Lagrange, vilket ledde till vad som nu är känt som Lagrange-ekvationerna.

Beräkningen av geodesier är ett "*bound extremum*"-problem. Detta beror på att vi beaktar alla vägar som förbinder två punkter a och b och är därför kopplade till dessa punkter. Geodetikerna ges då av ekvationerna :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

Med :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2$$

De tre första Lagrange-ekvationerna (6.75), (6.76), (6.77) från (Adler, Bazin och Schiffer 1975), som motsvarar variablerna θ , ϕ och t är följande:

$$\frac{d}{ds}(r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{ds}(r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}) = 0$$

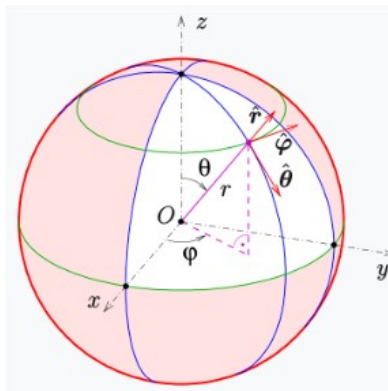
$$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}\right] = 0$$

Om vi dividerar varje term i metriken (25) med ds^2 :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

I den allmänna relativitetsteorin kan man utnyttja den sfäriska symmetrin hos en lösning för att förenkla analysen av geodesier. I fallet med Schwarzschild-metriken, som faktiskt är sfäriskt symmetrisk, kan denna symmetri utnyttjas för att reducera problemet till två dimensioner.

Schwarzschild-metriken, i sfäriska koordinater, beror på variablerna r , θ , ϕ och t . Sfärisk symmetri innebär att metriken inte ändras när man roterar kring centrum. Denna egenskap gör att vi kan förenkla problemet genom att välja geodikter som håller sig i ett konstant plan. Det är vanligt att välja ekvatorialplanet för att förenkla beräkningarna, vilket motsvarar att sätta $\theta = \pi/2$. I detta plan ändras inte θ inte förändras, vilket innebär att $d\theta = 0$ och därmed försvinner den del av metriken som $d\theta$ försvinner (se figur 2.6).



Figur 2.6 - Vektors i sfäriska koordinater

Genom att undersöka Lagrangian (som är en funktion som sammanfattar dynamiken i ett system) som är kopplad till denna metrik, kan vi sedan hitta rörelseekvationerna för

geodetikerna. För ett objekt som rör sig i ekvatorplanet är den azimutala komponenten av dess rörelsemängdsmoment, kopplad till $\dot{\phi}$. Detta är en följd av metriken axialsymmetri med avseende på axeln vinkelrätt mot ekvatorplanet. Matematiskt uttrycks detta genom ekvationen :

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{constante}$$

där h är en rörelsekonstant (rörelsemängdsmoment per massenhet), r är den radiella koordinaten, och $\dot{\phi}$ är derivatan av azimutkoordinaten ϕ med avseende på egentiden s (den tid som mäts av en klocka som rör sig med objektet).

Detta säger oss att storheten $r^2 \dot{\phi}$ förblir konstant längs geodetiken.

Ekvation (19) ovan kan integreras för att ge :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l = \text{constante}$$

Genom substitution får vi differentialekvationen :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

som ger r som en funktion av parametern s . Men med hjälp av en ekvation som presenterats tidigare kan vi gå vidare till en differentialekvation med derivatan :

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

Från (20) och (21) får vi :

$$\dot{r} = \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

Vi kan då erhålla differentialekvationen som länkar r och l :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 \dot{t}^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

Vi kan då göra övergången från variabeln r till en variabel u som t.ex:

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad r' = -\frac{u'}{u^2}$$

Från (22) kan vi sedan härleda :

$$d\phi = \frac{dr}{r'} = \frac{du}{u'}$$

Vilket leder oss till :

$$(1 - 2mu) = c^2 \dot{t}^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu)$$

som reduceras till:

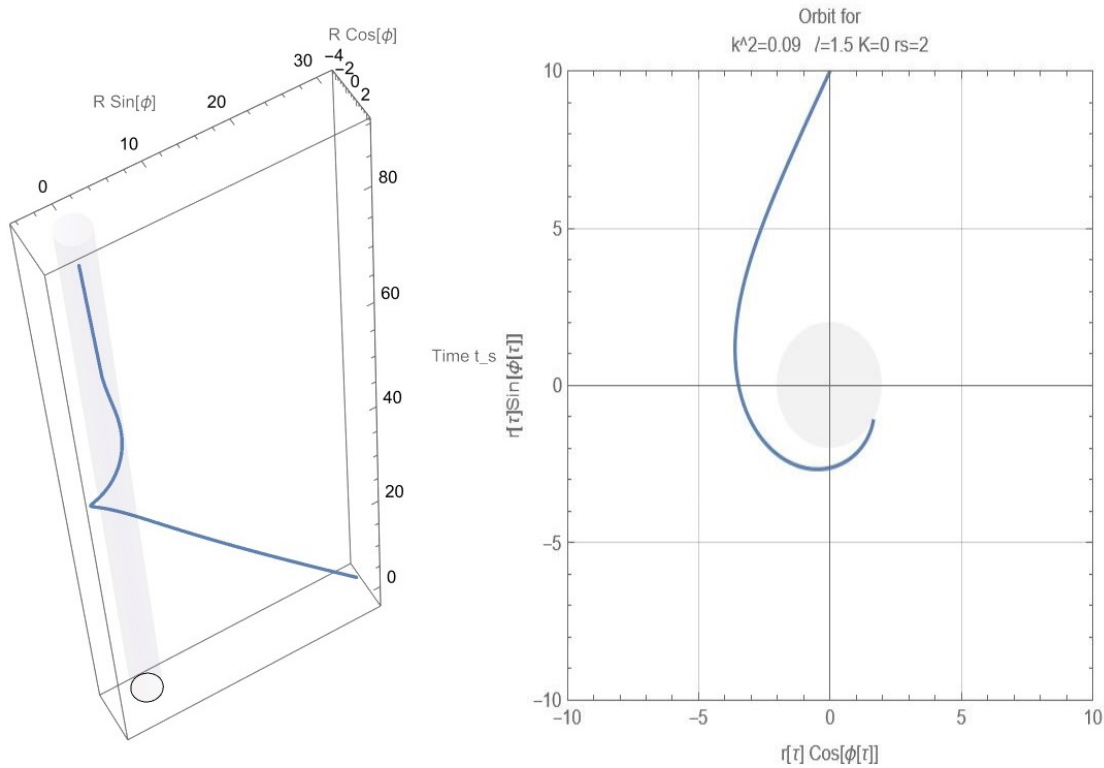
$$u'^2 = \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} \right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3$$

Från (23) ger integrationen således :

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{dv}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} v - v^2 + 2mv^3}}$$

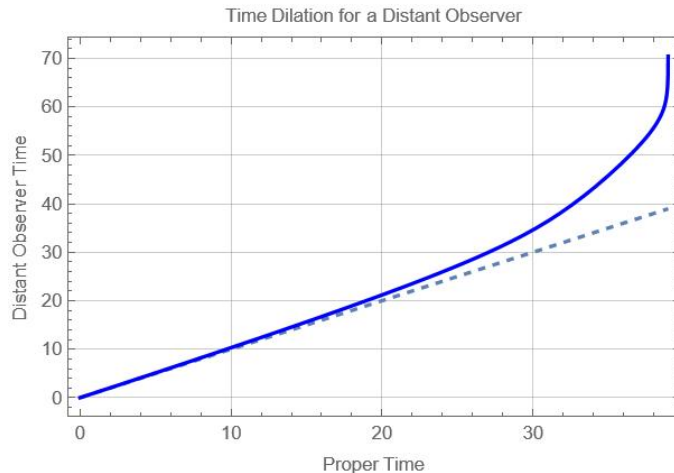
Detta är en exakt lösning på Einsteins ekvation, som uttrycker vinkeln ϕ som en integral av $u = \frac{1}{r}$ och omvänt ger detta oss u som den (implicita) inversa funktionen av ϕ och resulterar i "kvasi-elliptiska" geodesier, beroende på de två integrationskonstanterna l och h .

Om h är stort innebär detta att den geodetiska bana som en testpartikel färdas i kommer att avvika från en radiell fritt fall-bana eftersom den kommer att ha en betydande mängd specifik rörelsemängdsmoment. Som ett resultat kommer dess bana att påverkas mindre av gravitationskraften direkt mot den centrala kroppen, vilket gör att den avviker från ett direkt radiellt fall och följer en mer böjd eller "kvasi-elliptisk" bana. Om man bortser från området innanför Schwarzschilds sfär ($r < 2m$) är det möjligt att i 3D representera de plana geodesier som är associerade med denna stationära metrik. Representationen av Schwarzschilds sfär kan ses som en cirkel som projiceras in i rumtiden längs Schwarzschilds tidsdimension t_s . Om vi betraktar en neutronstjärna med en radie på 10 km kommer den att förbli stabil vid Tolman-Oppenheimer-Volkoff-gränsen (TOV) på cirka 2 solmassor. TOV-gränsen representerar den maximala kritiska massan som en neutronstjärna kan ha och samtidigt förbli stabil. Detta placerar *horisonten* för en motsvarande punktmassa på ett avstånd från dess centrum på ca 6 km ($r_s = \alpha$). Eftersom stjärnans radie är ungefär 3/2 gånger r_s placerar vi *horisonten* för detta objekt vid $r_s = 2$ för en radie på 3. Denna konfiguration gjorde det möjligt för mig att med Mathematica representera geodetiken för en testpartikel som följer en fallbana mot detta objekt, såsom visas i figur 2.7.

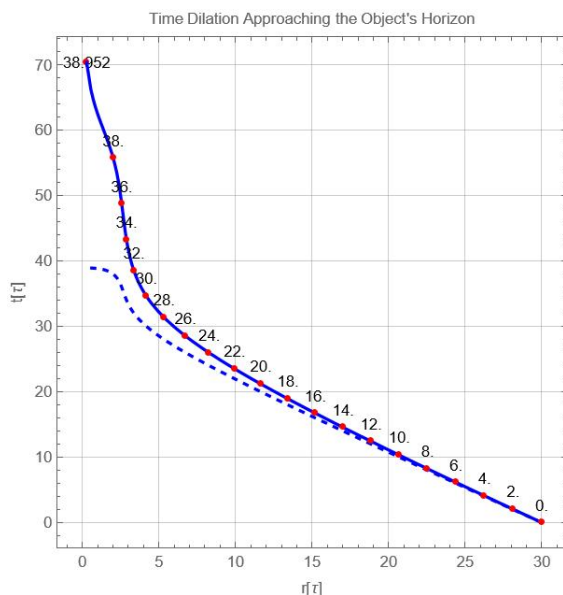


Figur 2.7 - Representation av en fallande geodetisk linje i koordinatsystemet (r, ϕ, t_s)

Oavsett vilken riktning den geodetiska rörelsen har, i detta fall centripetal, skulle det med detta val av tidskoordinat ta oändligt lång tid att närma sig Schwarzschilds sfär. Som vi kan se i figurerna 2.8 och 2.9 skulle ett objekt som närmar sig horisonten för en neutronstjärna nära sin fysiska kritiskhet eller ett supermassivt objekt, såsom de vars alternativa tillvägagångssätt kommer att studeras i kapitel 7, genomgå tidsdilatation nära den så kallade Schwarzschild-radien för en avlägsen observatör. För objektet självt (eller en observatör som rör sig med objektet) skulle dock tiden fortsätta att förflyta normalt (den blå kurvan jämfört med den streckade kurvan).



Figur 2.8 - Tidsdilatation för en avlägsen observatör



Figur 2.9 - Tempo verklig dilatation som närmar sig objektets horisont

Från den avlägsna observatörens synvinkel skulle objektet till synes ta oändligt lång tid på sig att nå horisonten. Som ett resultat skulle det uppfattas som att det gradvis saktar ner, verkar nästan fruset eller fryser nära horisonten.

Detta fenomen är en följd av den allmänna relativitetsteorin, som förutsäger att närvaron av betydande massa kröker rumtiden. Denna krökning påverkar tidens gång, vilket leder till tidsdilatation i intensiva gravitationsfält.

Denna aspekt är en av grundpelarna i teorin om svarta hål. Men finns det något annat alternativ? Vi kommer att utforska detta senare i kapitel 5.

2.3.9 Roy Kerr-lösningen

År 1963 revolutionerade Roy Kerr, en framstående matematiker från Nya Zeeland, förståelsen av den allmänna relativitetsteorin i samband med modellen för svarta hål genom att föreslå en ny lösning på Einsteins fältekvation. Till skillnad från Schwarzschilds yttre metrik ((Schwarzschild 1916b)), som används som grund för den statiska, sfäriskt symmetriska modellen för svarta hål, är Kerrs lösning axi-symmetrisk och representerar ett roterande svart hål ((Kerr 1963)). Denna upptäckt var särskilt betydelsefull på den tiden eftersom den gav en mer realistisk modell för många himlakroppar.

Kerr-metriken uttrycks i Boyer-Lindquist-koordinater (t, r, θ, ϕ) ((Chaskalovic 2009)), och dess linjeelement ges för $c = 1$ genom :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 sin^2\theta}{\rho^2}\right) sin^2\theta d\phi^2$$

där

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2\theta.\end{aligned}$$

M är massan hos det centrala roterande objektet, ofta ett svart hål, som påverkar den omgivande rumtiden, och a är det roterande objektets specifika rörelsemängdsmoment. Den viktiga termen att notera här är $-\frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi$ som representerar dragningen på rumtiden på grund av rotationen av objektet, typiskt ett svart hål. Denna egenskap kan tolkas som en manifestation av Ernst Machs idé om rörelsens relativitet, där rumtiden själv verkar påverkas av närvaron av rörlig materia.

Relevansen av Kerrs lösning underströks ytterligare av upptäckten av pulsarer 1967, som ursprungligen uppfattades som neutronstjärnor som roterade i otroligt höga hastigheter, ibland upp till tusen rotationer per sekund. Även om Kerr-metriken huvudsakligen tillämpas på modellen med svarta hål, är dess betydelse för förståelsen av andra kompakta astrofysiska objekt, såsom neutronstjärnor, också betydande.

Den välkände astrofysikern Subrahmanyan Chandrasekhar hyllade Kerrs lösning som ett stort framsteg inom tillämpad matematisk forskning inom teoretisk fysik ((Chandrasekhar 1983)).

Det som är viktigt att betona med Kerrs tillvägagångssätt är möjligheten att utforska andra representationsegenskaper, som till exempel införandet av en term $drdt$ term i Schwarzschilds yttre metrik, vars implikationer kommer att undersökas i kapitel 5.

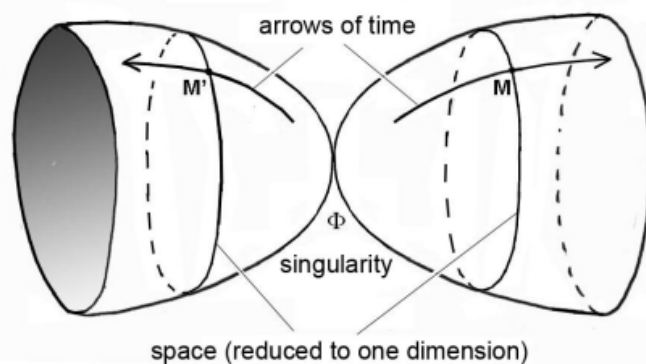
2.4 Andrei Sacharovs och Jean-Marie Souriaus arbete

Janus kosmologiska modell sammanställer Albert Einsteins allmänna relativitetsteori, Andrej Sacharovs arbete inom partikelfysik och kosmologi samt Jean-Marie Souriaus arbete inom symplektisk geometri. Med hjälp av teorin om dynamiska grupper förklarar han hur inverteringen av tiden innebär en invertering av energin och därmed av massan.

Universums baryoniska asymmetri anses vara ett av de viktigaste problemen inom dagens fysik. Mer exakt handlar det om observationen att det finns en nettomängd baryoner (partiklar som består av tre kvarkar, t.ex. protoner och neutroner) i universum, men nästan inga antibaryoner (partiklar som består av tre antikvarkar). Universum borde ha skapats med en lika stor mängd baryonmateria och antibaryonisk antimateria sedan Big Bang, vilket skulle ha lett till att de ömsesidigt förintades och deras massa omvandlades till fotoner. Men vad hände med den ursprungliga antimaterian? På 1960-talet upptäckte forskare att produktionen av materia (från kombinationen av de ursprungliga kvarkarna) sker något snabbare än produktionen av antimateria (från kombinationen av antikvarkarna), ett fenomen som kallas "*CP-kränkning*" ((Cronin 1964)). Detta var paradoxalt eftersom sådana kombinationsprocesser tidigare hade ansetts vara symmetriska. Men som ett resultat av denna *CP-kränkning* syntetiserades mer materia i det

ursprungliga universum och dominerade över antimateria.

Den ryske fysikern Andrei Sakharov var den förste, från 1967 och framåt, att återställa den globala symmetrin och menade att universum inte bestod av en enda enhet utan av två tvillinguniversum som härstammade från samma Big Bang-singularitet, med två motsatta tidspilar från ögonblicket för $t = 0$. Den ursprungliga singulariteten Φ vänder inte bara tiden (*T-symmetri*) utan även paritet (*P-symmetri*, även kallad "enantiomorfi") och laddningskonjugation (*C-symmetri*, som omvandlar en partikel till dess antipartikel och vice versa), vilket leder till fullständig *CPT-symmetri* ((Sakharov 1967),(Sakharov 1980),(Sakharov 1982)). *CP-symmetribrottet* är också omvänt i tvillinguniversum, vilket innebär att antimateria har segrat över materia. Det bör noteras att Sacharov koncentrerade sig på att beskriva *CPT-symmetri* endast i samband med partikelfysik, så utan att involvera gravitation i sin modell, så att tvillinguniversumen aldrig interagerar förutom i det ögonblick då de föds som i figur 2.10:



Figur 2.10 - Sakharovs kosmologiska modell

2.5 Den bimetriska metoden som introducerades genom hyperbolisk riemannsk geometri

Hyperbolisk Riemannsk geometri spelar en avgörande roll i den kosmologiska Janus-modellen. Denna gren av geometrin studerar krökta rum med konstant negativ krökning. Denna geometri gör det möjligt att conceptualisera rum med både positiv och negativ krökning. Det är dock viktigt att notera att det för närvarande inte finns någon bimetrisk eller multimetrisk matematisk teori inom hyperbolisk riemannsk geometri som kan ligga till grund för en bimetrisk kosmologisk modell. De nuvarande teoretiska modellerna är fortfarande heuristiska. Till exempel gjordes två försök 2002 och 2008 av Thibault Damour ((Damour och Kogan 2002)) respektive Sabine Hossenfelder ((Hossenfelder 2008)). Den ena baserades på införandet av tunga och lätta gravitoner i ett system av bimetriska fältekvationer, och den andra var mer eller mindre lik vår modell.

Damour och Kogan försöker faktiskt konstruera en teori med "två membran", som involverar ett spektrum av massiva gravitoner, men detta 40-sidiga dokument stannar av på ett skrikande sätt. I förbigående visar de att sådan bigravity måste lyda ett system av två kopplade fältekvationer:

$$2M_L^2 \left(R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^L R(g^L) \right) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L = t_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^L$$

$$2M_R^2 \left(R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^R R(g^R) \right) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R = t_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^R$$

Därefter föreslog Sabine Hossenfelder en förfinad modell som behandlar konceptet med negativ massa i universum. Men 1957 försökte Hermann Bondi införa dessa massor i Albert Einsteins modell. Men det så kallade läckagefenomenet avslöjade fysiska motsägelser, så att modellen bröt mot grundläggande fysikaliska principer, såsom aktion-reaktionsprincipen och ekvivalens ((Bondi 1957)). Hossenfelder gick vidare och formulerade ett par nya kopplade fältekvationer:

$$R_{vk} - \frac{1}{2} g_{vk}^{(g)} R = T_{kv} - \underline{V} \sqrt{\frac{h}{g}} a_v^v a_k^k \underline{T}_{vk}$$

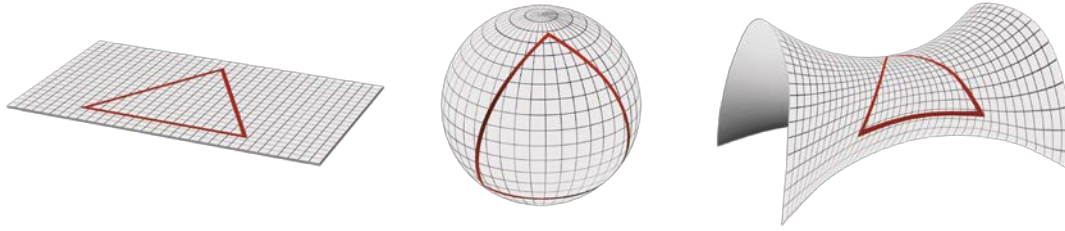
$$R_{\underline{vk}} - \frac{1}{2} h_{\underline{vk}}^{(h)} R = \underline{T}_{vk} - W \sqrt{\frac{g}{h}} a_k^k a_v^v T_{kv}$$

När hon sedan inte kunde lösa inkonsekvensen med fysikaliska principer och trodde att den var ouplösligt kopplad till "*bimetrisk gravitation*", gav hon upp.

Vad dessa två tillvägagångssätt har gemensamt är att de är rent teoretiska och inte har gett resultat som validerats av observationer. Det enda som kan sägas om vår kosmologiska modell, jämfört med de två föregående, är att den har många förankringspunkter med observationer och flera fysiska förutsägelser som vi kommer att se i avsnitt 3.2

Hyperbolisk Riemannsk geometri är en gren av Riemannsk geometri som studerar krökta rum med konstant negativ krökning, vilket matematiskt motsvarar en hyperbolisk form som ofta beskrivs som "*sadelformad*". Mer exakt kan den konstanta negativa krökningen i ett hyperboliskt rum beskrivas som hyperbelns asymptotiska beteende i båda riktningarna: hyperbelns grenar divergerar i det oändliga utan att någonsin konvergera. Detta är en viktig egenskap hos den hyperboliska rymden och kan användas för att skilja den från euklidisk geometri och sfärisk riemanniansk geometri.

I figur 2.11 är t.ex. de röda linjerna som drar trianglarna ytans *geodetiska* linjer. Enkelt uttryckt är en *geodesi* den kortaste vägen mellan två punkter i rymden. Föreställ dig att du befinner dig i en platt euklidisk rymd, som på ett stort pappersark; här är denna väg bara en rak linje. Men på böjda ytor, oavsett om de är positivt böjda (sfärisk geometri) eller negativt böjda (hyperbolisk geometri som en hästsadel), kan en *geodesi ritas* med hjälp av ett snöre eller gummiband som sträcks mellan två punkter på ytan, vilket representerar den kortaste vägen. Till skillnad från euklidisk geometri där summan av vinklarna i en triangel är lika med 180 grader, överstiger denna summa 180 grader i sfärisk (Riemannsk) geometri och är mindre än 180 grader i hyperbolisk geometri (också en typ av Riemannsk geometri).



Figur 2.1 1 - Typer av rumslig krökning

Det är viktigt att notera att en "platt" euklidisk rymd, dvs. en rymd med noll krökning, inte nödvändigtvis är ett platt plan. Ta det tidigare exemplet med ett pappersark: även om det viks flera gånger, som korrugerat järn, förblir dess krökning noll överallt. Detta innebär att den *geodetiska linjen som dras* på dess yta inte förändras, eftersom arket inte sträcks ut. Detsamma gäller för slutna euklidiska ytor som en cylinder eller en kon: tvärtemot vad du kanske tror har de ingen krökning. Enligt den euklidiska geometrin kan de, även om de ser krökta ut, betraktas som "platta" eftersom deras yta kan vecklas ut till ett plan utan att sträckas ut.

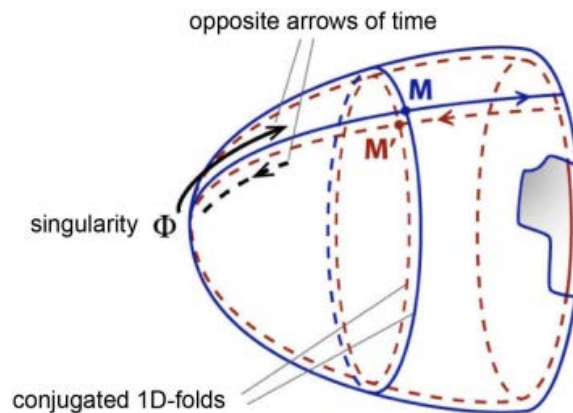
Tanken med Janus kosmologiska modell, som kommer att utvecklas i nästa kapitel, är att associera den med en "gemellär geometri" som definieras av en relation mellan utrymmen med positiv krökning och utrymmen med negativ krökning, enligt ett system av två kopplade fältekvationer.

3 Janus kosmologiska modell

3.1 Beskrivning

Den kosmologiska modellen Janus föreslår en revolutionerande vision av universum, som kännetecknas av en Riemannsk variation med två distinkta mätvärden. Dessa metriker hanterar positiva och negativa massor på ett unikt sätt och erbjuder en sammanhängande tolkning inom ramen för den allmänna relativitetsteorin, som bekräftas av observationer, samtidigt som de traditionella paradoxerna undviks.

Baserat på Andrei Sakharovs kosmologiska modell med två icke-interagerande bimetriska universum har en ny modell utvecklats som ett enda universum bestående av en enda Riemannsk varietet med två metriker, nämligen en fyrdimensionell hypersurface med två lager vikta ovanpå varandra i *CPT-symmetri* men denna gång interagerande genom gravitationell effekt.



Figur 3.1 - Janus kosmologiska modell

Det första lagret är uppdelat i rutnät med en viss längdenhet som utgör ett mått genom vilket materia med positiv energi och massa passerar mellan två punkter i denna rumtid med en hastighet c som begränsas av den speciella relativitetsteorin (avsnitt 2.2.2). Och dess motsvarighet, vikt men kvadrerad enligt en längdenhet som är 100 gånger kortare och en hastighet som är 10 gånger högre för materia med negativ energi och massa (fotoner som utvecklas i samma proportioner), vilket resulterar i en överfartstid som är 1000 gånger snabbare. Denna modell erbjuder således två familjer av geodesier som korsar rumtiden på två olika sätt och med olika hastigheter, vilket gör interstellära resor möjliga och förklarar flera fysiska fenomen som försvinnandet av primordialt antimateria och inneslutningen av galaxer ((Petit och d'Agostini 2014)), (Petit 2018)).

Den visar också att negativa energitillstånd är kompatibla med kvantmekanik. Denna modell bygger på två kopplade fältekvationer som är en förlängning av Einsteins fältekvation, och erbjuder ett trovärdigt alternativ till förekomsten av mörk energi (repulsiv kraft) och mörk materia (utplattning av galaktiska rotationskurvor) i kosmos samtidigt som negativa massor framgångsrikt integreras i den allmänna

relativitetsteorin.

Den baseras på härledningen av ekvationer från ett koncept som kallas "*Lagrangian*". Inom fysiken använder vi ofta principer för att förklara hur föremål eller partiklar rör sig och interagerar med varandra. I vårt fall använder vi oss av variationsprinciper, som är matematiska formler som beskriver hur ett fysiskt system utvecklas över tid genom att minimera en specifik storhet som kallas "*aktion*". Detta variationskoncept måste vara "*kovariant*", vilket innebär att det förblir detsamma oavsett vilken inertiell referensram som väljs. Detta innebär att det gäller för alla observatörer, oavsett deras hastighet.

Den logiska härledningen av dessa principer bör leda oss till ekvationer som beskriver rörelserna och växelverkan hos ett system av partiklar på ett sådant sätt att de är giltiga för alla observatörer, oavsett deras relativa rörelse. "*Aktionen*" definieras som integralen av "*Lagrangian*" under en viss tidsperiod, vilket gör det möjligt för oss att beskriva kinetiken och dynamiken hos ett fysiskt system. *Lagrangian* är en funktion som beräknas utifrån systemets kinetiska och potentiella energi, samt andra faktorer som kan påverka dess beteende. Med hjälp av principen om minsta möjliga verkan försöker vi hitta den bana för systemet som minimerar "*verkan*", vilket innebär den bana för vilken värdet på "*verkan*" är så litet som möjligt. Rörelseekvationerna erhålls genom att differentiera denna bana med minimal verkan med avseende på tiden.

3.2 Implikationer

Kosmologin befinner sig i kris. Det första exemplet är universums expansionstakt, som har svällt som en gigantisk ballong under 13,8 miljarder år. När astrofysiker använde sina teleskop för att mäta den nuvarande expansionshastigheten, känd som Hubblekonstanten (eller H_0), fann de ett värde som var oförenligt med det som förutspåddes av den kosmologiska standardmodellen (Λ CDM), den teori som för närvarande bäst beskriver universums historia, från dess ursprung (Big Bang) och de första atomerna till idag, via de första stjärnorna och galaxerna.

Hubblekonstanten (H_0) är en nyckelparameter inom kosmologin som mäter universums expansionshastighet. Den anger hur snabbt galaxer rör sig bort från varandra som en funktion av deras avstånd. På senare tid har dock två viktiga mätmetoder gett väsentligt olika resultat:

- Å ena sidan ger lokala mätningar genom direkt observation av galaxer och den kosmologiska avståndsskalan baserad på standardljus som cepheider och supernovor av typ Ia, ett värde på H_0 på 73 km/s/Mpc^2 . Denna mätning kommer från Shoes-samarbetet som leds av amerikanen Adam Riess.

² En megaparsec motsvarar cirka 3,26 miljoner ljusår. För varje megaparsec i avstånd ökar universums expansion galaxernas separationshastighet med 73 kilometer per sekund.

- Data från Cosmic Microwave Background³, som analyseras som en del av den kosmologiska standardmodellen, tyder däremot på ett lägre värde på 67,4 kilometer per sekund per megaparsec (km/s/Mpc). Denna metod baseras på data från Planck-satelliten.

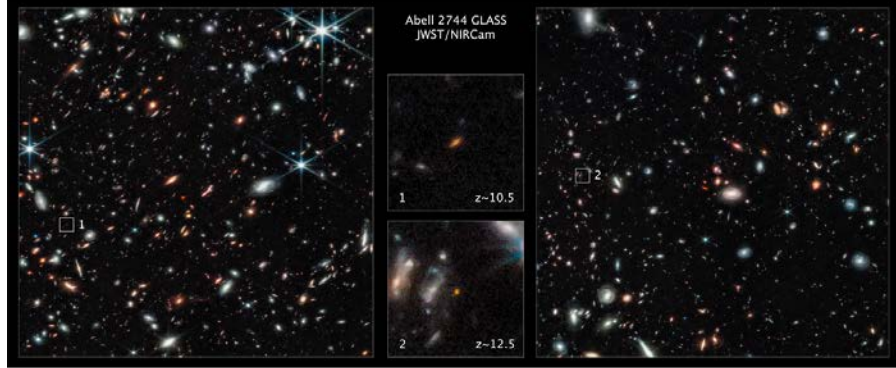
Denna diskrepans, om den inte beror på mätfel, kräver en omvärdering av vissa grundläggande aspekter av standardmodellen, såsom den mörka energins roll i att accelerera den kosmiska expansionen. Janus kosmologiska modell tillskriver denna antigravitationseffekt till negativa massor och specificerar deras natur, ett ämne som vi kommer att utforska mer ingående senare i det dedikerade avsnittet 3.3.

Ett annat exempel är James Webb Space Telescope (JWST), som med sina avancerade infraröda observationsmöjligheter är utformat för att observera universum i mycket tidiga stadier av dess utveckling, inklusive bildandet av de första galaxerna. Nya observationer från JWST avslöjar objekt eller beteenden som inte stämmer överens med standardmodellens förutsägelser, vilket har lett till en fullständig revidering av dess grundvalar.

Enligt den kosmologiska standardmodellen upplevde universum en mörk period efter Big Bang, följt av bildandet av de första stjärnorna och proto-galaxerna några hundra miljoner år senare. Dessa första strukturer utvecklades till stora galaxer under loppet av de första miljarder åren, en process som styrdes av den mörka materians gravitation. Galaxerna fortsatte att utvecklas och klustra ihop sig under miljarder år och bildade de olika typer som observeras idag. Mörk materia och mörk energi tros spela avgörande roller i denna process och påverkar bildandet av strukturer respektive universums expansion.

Den senaste studien som publicerades i tidskriften *Nature Astronomy* (Boylan-Kolchin 2023) hänvisar till Mike Boylan-Kolchins, biträdande professor i astronomi vid University of Texas at Austin, upptäckt av flera galaxer med hög rödförskjutning (mellan 500 och 700 miljoner år efter Big Bang) som är mycket mer massiva än vår egen (10 miljarder solmassor) och som bildats tidigare än väntat. *Abell 2744 Y1* är till exempel ett galaxkluster som ligger i stjärnbilden Skulptören, cirka 13,2 miljarder ljusår bort, och för oss ser det ut som det gjorde när universum bara var 650 miljoner år gammalt (figur 3.2).

³ Den kosmiska mikrovågsbakgrunden (CMB) är den elektromagnetiska strålning som sändes ut cirka 380 000 år efter Big Bang, när universum hade svalnat tillräckligt för att elektroner och protoner skulle kunna bilda atomer.

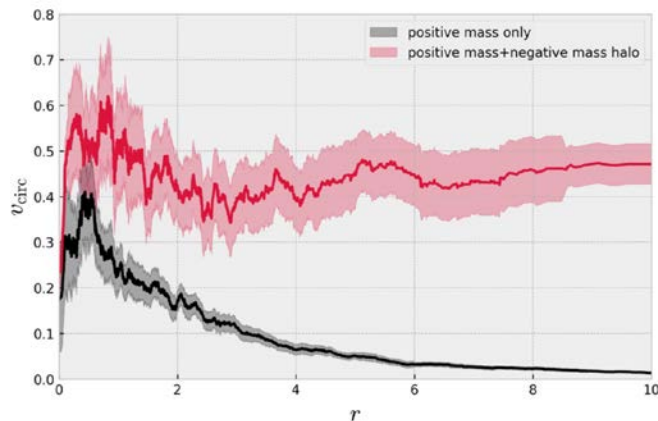


Figur 3.2 - Bild från James Webb Telescope - Abell 2744 Y1

Denna observation av James Webb Space Telescope bekräftar återigen en av förutsägelseerna i Janus kosmologiska modell.

Den kosmologiska Janus-modellen kastar därför nytt ljus över viktiga kosmologiska frågor, vars svar bekräftas av många observationer och förutsägelser, inklusive, men inte begränsat till, följande:

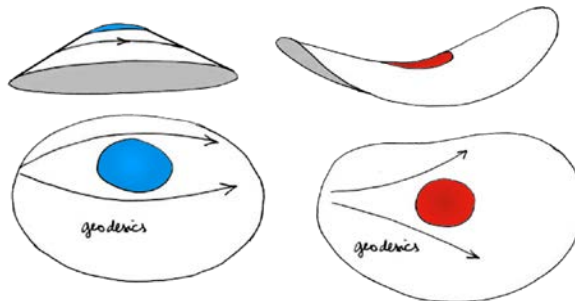
- Förklaring av galaxernas inneslutning av mellanrum som upptas av negativa massor som bidrar till deras stabilitet som i figur 3.3 ((Farnes 2017)).



Figur 3.3 - Skillnad mellan den cirkulära hastigheten v_{circ} för en galax som består av partiklar med positiv massa jämfört med en annan som omges av en halo av partiklar med negativ massa.

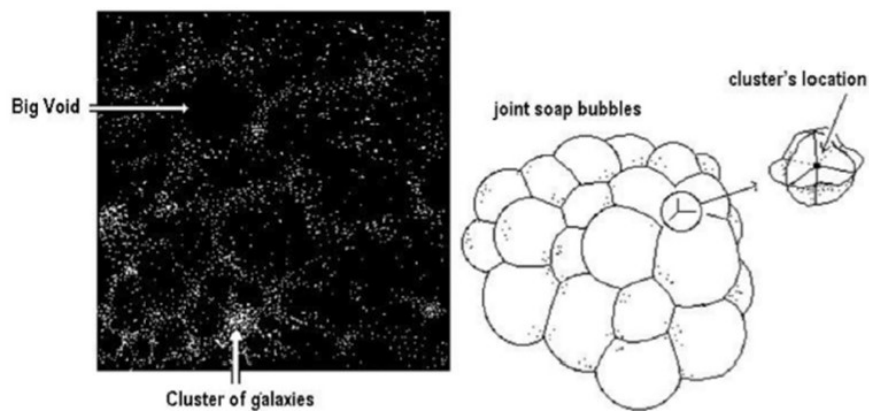
- Förklaring till formen på galaxernas rotationskurvor (förflackning)
- Denna modell förklarar den högre än förväntade gravitationsaccelerationen hos stjärnor som kretsar i utkanten av galaxer på grund av förekomsten av negativa massor.

- Förklaring till den höga hastigheten hos galaxer i kluster på grund av det antigravitatoriska bidraget från negativa massor.
- Han föreslår en matematiskt detaljerad beskrivning av galaxers beteende baserad på ett gemensamt tillvägagångssätt för Vlasov- och Poisson-ekvationerna. Han förutspår att hastigheten hos stjärnor i en galax är organiserad i en ellipsoid orienterad mot det galaktiska centrumet, en hypotes som bekräftas av mätningar av den kvarvarande hastigheten hos stjärnor nära solsystemet.
- Det förklarar gravitationslinsens effekter runt galaxer, som i 3.4.



Figur 3.4 - Gravitationslinsens effekter

- Förklaring av universums lakunära struktur som upptas av kluster av negativa massor i form av sammanlänkade såpbubblor som i 3.5.

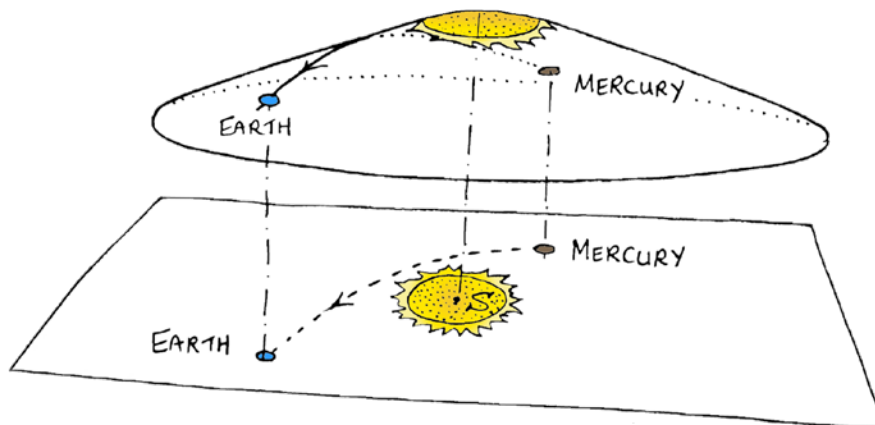


Figur 3.5 - Gap-struktur

Denna struktur fastställdes också 2018 av Tsvi Piran i hans artikel (Piran 2018), där han belyser fördelningen av galaxer i vad han kallar "vägg" på grund av den antigravitationsmässiga komprimeringen av de subtäta regionerna med negativa massor koncentrerade i den mörka materian i tomma utrymmen. Observationer visar att dessa tomma utrymmen upptar en betydande del av universums volym. Korrelationen mellan tomrum i fördelningen av galaxer och regioner med låg densitet av mörk materia visar tydligt att dessa tomrum har sitt ursprung i gravitationen. Primordiala subtäta regioner, kända som "negativa kosmologiska tomrum", fungerar som negativa gravitationsmassor och fungerar som frön för de observerade tomrummen. Centrums i dessa subtäta regioner är effektiva gravitationsmassor som stöter bort materia och anpassar den längs väggarna mellan

centrumen. Tomrummen är centrerade runt dessa massor och omges av väggar av galaxer. Så småningom spricker väggarna, vilket gör att tomrummen smälter samman med andra tomrum och skapar ett större nätverk av tomrum som begränsar galaxerna.

- Förutsägelse och bekräftelse av den tidiga bildningen av alla de galaxer som nyligen observerats av James Webb Space Telescope ((Ferreira et al. 2022)). I själva verket tyder modellen på att alla galaxer bildades tillsammans under de första 100 miljoner åren av universums (ur-)historia. Denna bildning ägde rum när positiv massa komprimerades våldsamt mellan flera kluster av negativ massa, vilket skapade högt tryck. Den starka sammandragningen av materia och gaser på grund av de negativa massornas antigravitationsverkan ledde till kraftig uppvärmning, vilket ledde till snabb nedkyllning som underlättades av en arklignande struktur. Kyltiden gjorde att temperaturen blev tillräcklig för att starta termonukleära fusionsreaktioner, vilket möjliggjorde de första stjärnornas födelse och deras gruppering för att bilda de galaxer vi känner till idag.
- Förklaring till att avlägsna galaxer med hög rödförskjutning (> 7) framträder som dvärgar (minskad luminositet). Detta beror på att kluster med negativ massa (som i Dipole Repeller-regionen, som vi kommer att studera i avsnitt 3.3) skapar en negativ gravitationslinsningseffekt på sina fotoner, vilket har effekten att dämpa deras ljusstyrka.
- Lokala relativistiska verifieringar bekräftas, såsom förflyttningen av Merkurius perihelium eller avböjningen av ljusstrålar från solen. Eftersom de två typerna av massa stöter bort varandra, och med tanke på att den negativa massdensiteten är nästan försumbar nära solen, motsvarar den första ekvationen i systemet Einsteins fältekvation (se avsnitt 3.3.4.2).

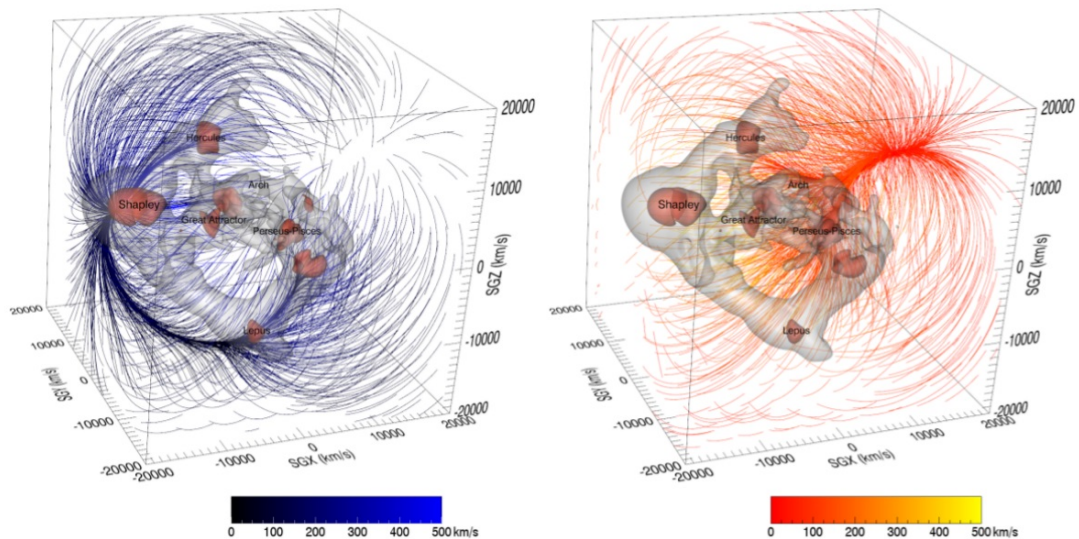
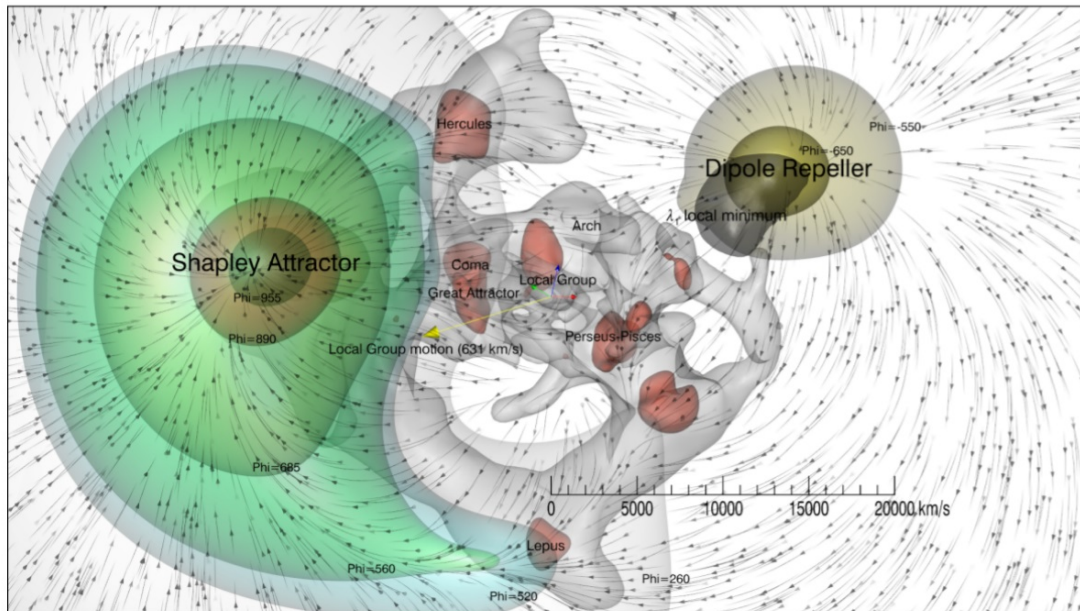


Figur 3.6 - Deformation av rumtiden orsakad av solens massa

- Genom att utnyttja asymmetrin mellan de två populationerna av positiva och negativa massor har man uppnått överensstämmelse med data från observationer av supernovor av typ Ia. Observationen av supernovor av typ Ia har varit ett avgörande verktyg för att bestämma avståndet till himlakroppar och studera universums expansion. Supernovor av typ Ia är supernovaexplosioner som inträffar i

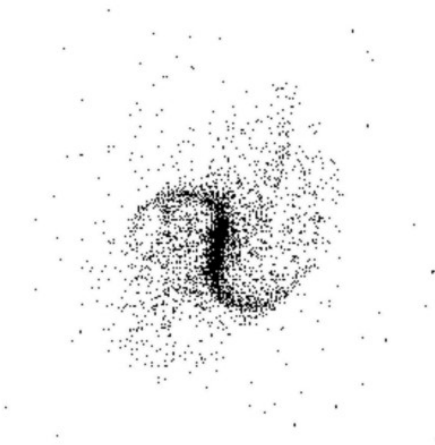
dubbelstjärnesystem där en stjärna som kallas vit dvärg absorberar material från en partnerstjärna tills den når en kritisk massa, vilket får den att explodera. Denna asymmetri kan orsakas av processer som rotation eller kompanjonstjärnans magnetfält, som överför materia till den vita dvärgen. Om asymmetrin finns skulle den kunna leda till en skillnad i luminositet mellan supernovor av typ Ia, vilket skulle kunna förklara observationerna.

- Förklaring av den stora repellerns natur som upptäcktes i januari 2017 (se avsnitt 3.3), där den visade sig existera i en till synes tom region av universum, motsatt Shapley-attraktorn, som verkade stöta bort all materia.

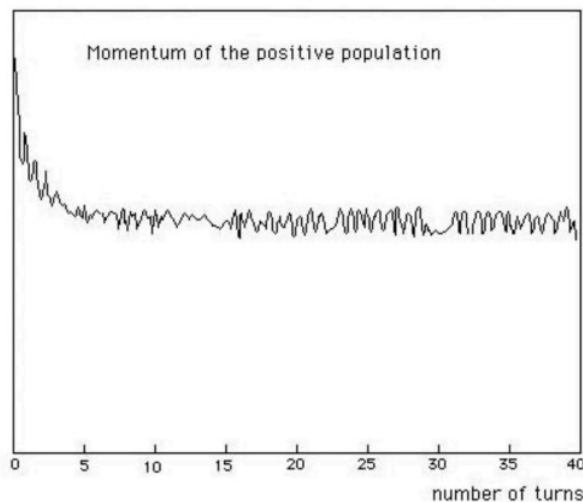


Figur 3.7 - Den stora repellern

- Modellen visar en hållbar galaktisk spiralstruktur som drivs av dynamisk friktion som kontinuerligt överför momentum till den mindre täta miljön med negativ massa, vilket gör att spiralarmarna kan rotera ihållande och stabilt runt galaxen. Som illustreras nedan saktar armarna ner och förlorar energi när de passerar genom områden med hög densitet (positiv massa), medan de accelererar och vinner energi när de passerar genom områden med låg densitet. Detta skapar densitetsvågor som sprider sig genom galaxen och överför momentum till den negativa massmiljön.



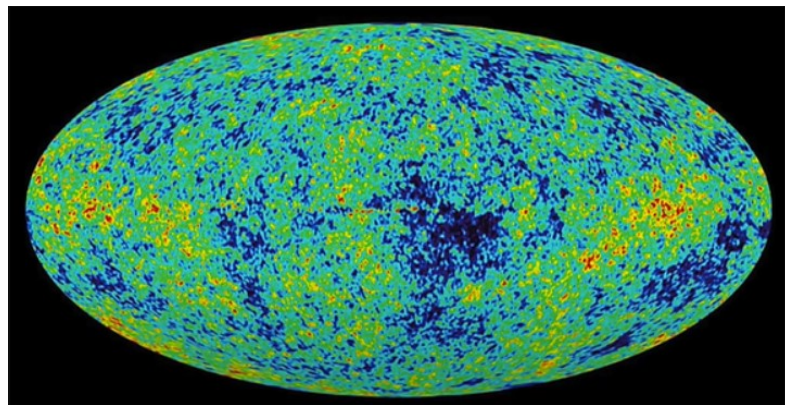
Figur 3.8 - Spärrad spiral i en numerisk simulering (1992: 20.000 punkter)



Figur 3.9 - Utveckling av den kinetiska momentet (1992: 20 000 punkter)

- Förklaring till varför kosmiskt antimateria inte har observerats, eftersom det avger fotoner med negativ energi.
- Förklaring av naturen hos universums osynliga beståndsdelar: antiprotoner, antineutroner, antielektroner, antiväte och antihelium med negativ massa. Dessa element utgör ursprunglig antimateria, som inte kan observeras eftersom de avger fotoner med negativ energi.

- **Konjektur nyligen bekräftad i september 2023 (Anderson 2023):** C-symmetrisk (laddningssymmetrisk) antimateria, som utvecklats i laboratoriet och avger fotoner med positiv energi, trycks ned av gravitationen precis som vanlig materia.
- Modellen erbjuder sin egen tolkning av fluktuationerna i den kosmiska mikrovågsbakgrunden (CMB) genom att tillskriva dem svaret från vanlig materia med positiv massa på densitetsfluktuationer i intilliggande celler i universum som befolkas av en fördelning av materia med negativ massa. Denna situation är kopplad till den gravitationsinstabilitet som uppstår i dessa celler. Genom att analysera dessa fluktuationer kan man bedöma förhållandet mellan skalfaktorerna för de två materietyperna. Vi kan se att förhållandet $\frac{a(+)}{a(-)}$ är i storleksordningen 100. Vi kan därför dra slutsatsen att förhållandet $\frac{c(-)}{c(+)}$ är i storleksordningen 10 ((Petit 2018)). Detta innebär att den övergripande effekten skulle vara att minska den tid som krävs för interstellära resor med en faktor tusen för objekt som lyckas vända sin massa, vilket gör att de kan röra sig längs de geodesier som beskrivs av metriken $h_{\mu\nu}$ i den andra fältekvationen (24), vilket vi kommer att studera i nästa avsnitt.



Figur 3.10 - Kosmologisk diffus Fo nd

- Gravitationell rödförskjutning på 3 som härletts från de två första bilderna av supermassiva objekt i centrum av galaxerna M87 och Vintergatan (se den studie som utförts i avsnitt 7).
- Det finns för närvarande inget svar på frågan "Vad fanns det före Big Bang?" Enligt Janus kosmologiska modell eliminerar en topologisk struktur i universum, som "interagerar med sin antikroniska motsvarighet", denna fråga genom att ogiltigförklara betydelsen av adverbet "före". Som vi kommer att se senare, vänder tidspilen i Big Bang-ögonblicket.

3.3 Dipolrepellern

3.3.1 Inledning

År 2017 publicerade Yehudi Hoffman, B. Tully, H. Courtois och D. Pomarède den första mycket detaljerade kartan över universum (Hoffman et al. 2017). Kartan baserades inte bara på galaxernas positioner, utan integrerade även deras hastighetsfält genom att subtrahera påverkan av Hubble-expansionen från de råa mätningarna av deras rödförskjutning. Resultaten var otroligt imponerande och anses vara en av de viktigaste observatoriska upptäckterna inom kosmologi idag, jämförbar i betydelse med Edwin Hubbles upptäckt för ett sekel sedan. Före denna studie var det känt att vissa galaxer uppvisade konvergenta rörelser mot en region som kallas den stora attraktorn. Analysen 2017 avslöjade påverkan från en annan, större struktur bortom den stora attraktorn, kallad Shapley-attraktorn. Den mest anmärkningsvärda upptäckten var dock identifieringen av en region nästan mittemot dessa två formationer, där inga galaxer upptäcktes. Istället fanns det ett betydande tomrum omgivet av närliggande galaxer som rörde sig bort från denna region och bildade ett "läckande" mönster centrerat kring detta tomrum. Det kallades ursprungligen Dipole Repeller, men fick senare namnet Dipolar Attractor när det stod klart att det var kopplat till attraktiva formationer. För att förstå detta fenomen, som inte kan tillskrivas mätartefakter, krävs utan tvekan betydande framsteg i vår förståelse av den kosmiska dynamiken.

3.3.2 Några försök till tolkning

Fyra år efter den första upptäckten har det gjorts få försök att modellera fenomenet med repellerande dipoler. I sin senaste artikel (Neiser 2020) fokuserar Neiser inte på denna fråga, utan föreslår istället hypoteser om Big Bang, kvantvakuumet och universums ursprung. Neiser spekulerar i att antimateria skulle kunna ha en repellerande gravitationseffekt, vilket leder till bildandet av neutrinostjärnor och antineutrinostjärnor som repellerar varandra. Liknande aspekter av antimaterians repulsion nämns av Benoit-Lévy et al. 2012 ((Benoit-Lévy och Chardin 2012)), men utan ytterligare motivering. Heald nämner i sin artikel (Heald 2020) situationen i Laniakea, som pressas av Dipole Repulsor och attraheras av Shapley Attractor. Återigen föreslås idén om en repulsion mellan materia och antimateria som en möjlig förklaring till universums storskaliga struktur och organiseringen av tomrum. Det finns dock ingen konkret modell för det centrala objektet i det stora tomrummet, och frånvaron av utsänt ljus förblir oförklarad. År 2018 föreslog Vuyk i sin artikel (Vuyk 2018) förekomsten av en hypotetisk femte kraft, medan Hoffman et al. använde numeriska simuleringar för att rekonstruera en fördelning av mörk materia som överensstämmer med observationsdata ((Hoffman et al. 2018)). Två förklaringsmodeller framträder ur dessa undersökningar: en som involverar hypotetiska objekt som består av repulsiv antimateria, som inte kan observeras, och den andra som föreslår en diskrepans i fördelningen av mörk materia. Observationer har visat att universums expansion accelererar, vilket tyder på att det finns en komponent med negativt tryck ((Perlmutter et al. 1999), (Riess et al. 2004), (Schmidt et al. 1998)). En modell som föreslagits för att förklara detta fenomen föreslår förekomsten av negativa massor som kan bidra till dessa antigravitationella effekter, genom att kombinera de repulsiva influenserna från mörk materia och mörk energi på komponenter med positiv massa. Denna hypotes står i centrum

för det arbete som motsvarar referenserna (Petit 1995) (Petit och D'Agostini 2014a) (Petit och D'Agostini 2014b) (Petit, D'Agostini, och Debergh 2018) (Petit, D'Agostini, och Debergh 2019) (Petit och D'Agostini 2021a) (Petit och D'Agostini 2021b).

3.3.3 Tolkning av luckor i den mörka materian

Låt oss undersöka möjligheten att ett vakuum av mörk materia skulle kunna ge upphov till den observerade repulsiva effekten. Vi kan börja med att betrakta ett sfäriskt tomrum i en jämn fördelning av mörk materia och använda Poissons ekvation för att analysera detta system:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} = 4\pi G \rho_{dm}$$

Denna ekvation är linjär och beskriver gravitationspotentialen som en funktion av densiteten. Genom att överlagra två densitetsfördelningar ρ_1 och ρ_2 är den resulterande gravitationspotentialen summan av de potentialer som är associerade med dessa två fördelningar: $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Med en enhetlig densitetsfördelning ρ_{dm}^{unif} erhåller vi en potential ψ_1 som är lösningen till Poisson-ekvationen :

$$\psi_1 = \frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}_1 = -\frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

Genom att nu introducera en volym med motsatt densitet lika med $-\rho_{dm}^{unif}$ skapar vi en potential ψ_2 som är lösningen på följande Poisson-ekvation :

$$\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_2}{dr} = -4\pi G \rho_{dm}^{unif}$$

Denna lösning är :

$$\psi_2 = -\frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

Vi får alltså samma gravitationsfält men med motsatt tecken. Det är därför repulsivt och proportionellt mot avståndet från sfärens centrum.

Genom att sedan beräkna gravitationspotentialerna för dessa två fördelningar kan vi konstatera att den resulterande gravitationspotentialen är noll inuti vakuumet. Med andra ord är den gravitationskraft som utövas av den enhetliga fördelningen av mörk materia exakt balanserad av den gravitationskraft som utövas av den motsatta densiteten som skapar vakuumet:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Men oavsett vilken position som väljs som koordinaternas ursprung förblir gravitationsfältet icke-noll inuti vakuumet. Detta innebär att gravitationskraften inte är

perfekt balanserad, vilket verkar motsäga idén om att ett vakuum skapar ett repulsivt gravitationsfält.

För att lösa denna paradox måste Poisson-ekvationen betraktas som den linjäriserade versionen av Einsteins ekvation i en stationär situation, som definierar gravitationspotentialen i termer av en störning av Lorentz-metriken:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}$$

Den klassiska beräkningen ger för den egentliga densiteten ρ_0 ((Adler, Bazin och Schiffer 1975)) :

$$\varepsilon \sum_{i=0}^3 \gamma_{00|i|i} = -\chi\rho_0$$

NB: I samband med den svaga fältgränsen som studeras i avsnitt 2.3.6, relaterar ekvation (26) de rumsliga andraderivatena av tidskomponenten γ_{00} av den metriska tensorn till gravitationskällorna, representerade av den lokala mass-energitätheten ρ_0 . Detta hjälper oss att förstå hur rumtidens krökning reagerar på fördelningen av massa och energi, samtidigt som vi bibehåller ett exakt förhållande mellan dessa två aspekter.

Gravitationspotentialen definieras således som (27) genom :

$$\psi = -\frac{c^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}$$

Därefter kan (26) identifieras med Poisson-ekvationen. Detta tillvägagångssätt kan dock inte tillämpas på en oändlig enhetlig fördelning av mörk materia. Slutsatsen är att det helt enkelt är omöjligt att definiera en gravitationspotential inom en enhetlig fördelning av materia, eftersom gravitationsinstabilitet tenderar att leda till bildandet av kluster, inte vacua, och det finns inget tydligt ramverk för bildandet av sådana vacua.

3.3.4 Tolkning med hjälp av den kosmologiska Janus-modellen

Låt oss nu betrakta interaktionen mellan två enheter: vanlig materia med positiv massa som interagerar med negativ massa genom gravitationseffekter. Denna modell med negativ massa tar hänsyn till påverkan från både mörk materia och mörk energi.

Vi kan beskriva detta system av två enheter med metrikerna g och h . Låt G och H vara de motsvarande Ricci-skalorna. Vi betraktar sedan följande tvåskiktsverkan:

$$A = \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x$$

Termerna $S_{(g)}$ och $S_{(h)}$ kommer att ge källtermer relaterade till populationerna i de två enheterna, medan termerna $S_{(h,g)}$ och $S_{(g,h)}$ kommer att generera interaktionstensorerna. $\Gamma^{(g)}$ och $\Gamma^{(h)}$ är Einsteinkonstanterna för varje enhet. För $\kappa = \pm 1$ tillämpar vi principen om minsta verkan. Den lagrangianska härledningen av denna verkan ger oss :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta A \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left(\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\varepsilon} \delta \left(\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left[\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x \\
&\quad + \int_{\varepsilon} \delta \left[\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \right] \delta h^{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^4x
\end{aligned}$$

För alla variationer $\delta g^{\mu\nu}$ och alla variationer $\delta h^{\mu\nu}$ erhåller vi lokalt :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0 \\
\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} &= 0
\end{aligned}$$

Låt oss introducera följande tensorer:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(g,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(g)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(h)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \\
T_{\mu\nu}^{(g,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

I den allmänna relativitetsteorin är den kovarianta derivatan ett sätt att generalisera begreppet partiell derivata till krökta rum. Till skillnad från en vanlig partiell derivata tar den kovarianta derivatan hänsyn till rumtidens krökning.

För en tensor $A_{\nu\sigma}^{\rho}$ dess kovarianta derivata längs ett index μ ges av uttrycket :

$$\nabla_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} A_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} A_{\nu\lambda}^{\rho}$$

Vi kan därför härleda följande två uttryck:

$$\nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}$$

$$\nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}$$

NB:

- (28b) erhålls från (28a) genom att helt enkelt byta ut μ och ν .
- Termen $\partial_\mu A_{\nu\sigma}^\rho$ är den vanliga partiella derivatan av tensorn. Om rumtiden vore platt (som i Newtons fysik) skulle detta vara tillräckligt för att beskriva variationen hos tensorn.
- Termer med Christoffel-symboler $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho$, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ och $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$ representerar korrigeringen på grund av rymdtdanslutningen, som tar hänsyn till krökningen av rymdtiden. I själva verket, i krökt rymd, förbindelsen (representeras av Christoffel Γ) en korrigerig. Denna korrigerig är nödvändig eftersom tangentrummets baser (det rum där tensorn lever) ändras från en punkt i rumtiden till en annan. Så, $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\nu\sigma}^\lambda$ är den term som korrigerar förändringen i $A_{\nu\sigma}^\lambda$ när man rör sig i riktningen μ för det högre indexet ρ . $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{\lambda\sigma}^\rho$ och $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\rho$ är termer som subtraherar det bidrag som beror på förändringen i de lägre indexen ν och σ . Dessa termer säkerställer att den kovarianta derivatan respekterar reglerna för tensortransformation. Sammanfattningsvis är den kovarianta derivatan ∇_μ av en tensor en kombination av dess vanliga partiella derivata och termer som kompenserar för förändringar i rumtidens geometri. Den är konstruerad på ett sådant sätt att derivatan av tensorn själv är en tensor, vilket inte är fallet för den vanliga partiella derivatan.

Riemann-tensorn är sedan relaterad till Christoffel-symbolerna genom följande ekvation :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

NB: Riemann-tensorn $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ är en matematisk storhet i den allmänna relativitetsteorin som beskriver rumtidens inneboende krökning. Den definieras som skillnaden mellan de partiella derivatorna av Christoffel-symbolerna och summan av produkterna av Christoffel-symbolerna själva. Termen $\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ är den partiella derivatan av Christoffelsymbolen $\Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ med avseende på koordinaten x^μ . Denna term mäter hur Christoffelsymbolen varierar när den rör sig i riktningen μ . Termen $\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ liknar den första termen, men med den partiella derivatan tagen i en annan riktning, x^ν . Termerna $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ och $\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$ beskriver produkten av två Christoffel-symboler som representerar interaktionen mellan två rum-tid-anslutningar. Den mäter hur krökning i en riktning påverkar krökning i en annan riktning.

Sedan får vi:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

Detta ger oss:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$$

Genom att kontrahera indexen ρ och σ i föregående samband och använda Einsteins summeringskonvention, som säger att ett upprepat index innebär en implicit summering över detta index, kan vi uttrycka den variation av Ricci-krökningstensorn som uppfyller Palatinis identitet ((Tsamparlis 1978), (Palatini 1919)) :

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R^{\rho}_{\sigma\rho\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma})$$

NB: I den allmänna relativitetsteorin beskrivs rumtidens geometri av en storhet som kallas metrisk tensor och betecknas med $g_{\mu\nu}$. Denna tensor innehåller all information om avstånd och vinklar i rumtiden.

Ricci-skalären, betecknad R är ett mått på rumtidens krökning i en given punkt. Den beräknas genom att addera (eller kontrahera) komponenterna i Ricci-tensorn $R_{\sigma\nu}$ med den metriska tensorn $g^{\sigma\nu}$. Matematiskt är det som att multiplicera matriserna för Ricci-tensorn och den metriska tensorn och sedan addera termerna längs diagonalen.

Dessutom måste vi ha den kovarianta derivatan av den metriska tensorn lika med noll, dvs. $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$. Med andra ord, när du rör dig genom rumtiden ändras inte sättet du mäter avstånd och vinklar på. Detta är en grundläggande egenskap hos rumtiden i den allmänna relativitetsteorin, som visar att den lokala geometrin inte förändras när du rör dig, oavsett den globala krökningen.

Sammanfattningsvis ger Ricci-skalären R oss en uppfattning om rumtidens krökning i en punkt, och det faktum att $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$ garanterar att rumtidens form förblir konsekvent när vi rör oss, oavsett den övergripande krökningen, dvs. denna konsekvens säkerställs av metriken kompatibilitet med Levi-Civita-anslutningen, vilket garanterar att geometriska begrepp som längder och vinklar förblir konstanta när de transporteras genom rumtiden. Sedan kan vi dra slutsatsen:

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\delta R_{\sigma\nu} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}(\nabla_{\rho}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma})) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - g^{\sigma\nu}\nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}B^{\rho} \end{aligned}$$

NB: För ovanstående beräkning måste vi ta hänsyn till två regler:

- Egenskaperna hos den kovarianta derivatan och Leibniz regel (regeln för produkten av derivatan). Leibniz regel för den kovarianta derivatan liknar den för den vanliga derivatan och skrivs enligt följande:

$$\nabla_{\rho}(AB) = (\nabla_{\rho}A)B + A(\nabla_{\rho}B)$$

där A och B kan vara skalär-, vektor- eller tensorfält.

- Som tidigare nämnts kallas upprepat index för *tysta* index enligt Einsteins summeringskonvention. Det är bra att komma ihåg att när indexet för en variabel

förekommer två gånger i en term, en gång i den övre positionen och en gång i den nedre positionen, innebär detta en summering över alla de möjliga värden som indexet kan anta. Exempelvis $A^\mu B_\mu$ innebär $\sum_\mu A^\mu B_\mu$. Betrakta Christoffel-symbolerna $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$ och $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$. I dessa uttryck är indexen μ och ρ exempel på stumma index enligt Einsteins summeringskonvention. Detta innebär att uttrycket $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$ där summan görs över alla möjliga värden på μ är identiskt med $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$ där summan görs över alla möjliga värden av ρ . Vi kan alltså använda summationsindexen $(\rho, \nu) \rightarrow (\mu, \rho)$ i den sista termen.

Beräknat på två olika sätt får vi :

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \nabla_\mu (\sqrt{|g|}) B^\mu + \sqrt{|g|} \nabla_\mu (\delta B^\mu) = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu + 0 = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \\ \nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \sqrt{|g|} \delta B^\nu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + 0 = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)\end{aligned}$$

NB: På samma sätt är derivatan av determinanten för den metriska tensor, representerad av $\sqrt{|g|}$ också noll när den tas kovariant, dvs. $\nabla_\mu \sqrt{|g|} = 0$. Denna sista egenskap förenklar uttrycket av volymintegraler och är grundläggande för tillämpningen av divergenssatsen i krökt rumtid.

Därefter kan vi härleda:

$$\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)$$

Låt oss nu överväga bidraget från $\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu$ i åtgärden. Låt n^μ vara en enhetsvektor normal till $\partial\mathcal{E}$, $\varepsilon = n^\mu n_\mu$ och y^a som representerar koordinater anpassade till gränsen $\partial\mathcal{E}$ och h_{ab} den metrik som induceras av g_{ab} på gränsen. Vi har $|\varepsilon| = 1$ och $\sqrt{|h|} d^3 y$ är en volymform av dimension $(n - 1)$ på gränsen, med $h = \det(h_{ab})$. Genom Stokes sats har vi :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g} d^4 x &= \int_\varepsilon \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) d^4 x \\ &= \int_{\delta\mathcal{E}} \varepsilon \delta B^\mu n_\mu \sqrt{|h|} d^3 y\end{aligned}$$

Vi kommer att anta att metriken inte varierar vid gränsen (eller att det inte finns någon gräns). I detta fall bidrar termen $\nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g}$ inte till verkan, så vi har :

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\rho B^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \approx R_{\mu\nu}$$

Enligt korollariet med $a = \frac{1}{2}$ har vi :

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

Så vi kan dra slutsatser:

$$\frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

NB: För ovanstående beräkningar behöver vi förklara två saker:

- Variationen i determinanten för den metriska tensorn, betecknad δg är relaterad till variationen hos den metriska tensorn själv, $\delta g_{\mu\nu}$ genom relationen $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ där g är determinanten för den metriska tensorn och $g^{\mu\nu}$ är dess invers. Detta samband följer av den matematiska egenskapen hos determinanter, där derivatan av en determinant kan uttryckas som determinanten multiplicerad med spåret av produkten av matrisens invers och matrisens derivata. I fallet med en liten variation, variationen av kvadratroten av den negativa determinanten av den metriska tensorn, $\delta \sqrt{-g}$ ges av $\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. Denna formel är nödvändig för att härleda Einsteins fältekvationer från Einstein-Hilberts verkan, eftersom den gör det möjligt att integrera verkan över den fyrdimensionella rumtiden.
- I vår studie använder vi Stokes sats för att förenkla en viktig beräkning. Denna sats fastställer ett intressant samband mellan integralen av derivatan av ett vektorfält över en tredimensionell region och integralen av samma vektorfält längs gränsen för denna region.
Ett enkelt exempel: tänk dig en sluten yta i rymden (t.ex. ytan på en sfär). Om vi vill beräkna något inuti denna yta (t.ex. summan av värdena i ett fält) kan vi med Stokes sats göra det genom att helt enkelt undersöka vad som händer på själva ytan. Ekvation (29), som vi presenterade i vår beräkning, följer denna idé. Den säger oss att integralen av derivatan av ett fält ($\nabla_\mu \delta B^\mu$) över en fyrdimensionell region (\mathcal{E}) kan vara ekvivalent med integralen av divergensen av ett annat fält ($\sqrt{|g|} \delta B^\mu$) över samma område (\mathcal{E}). Denna ekvivalens uppnås genom metriken och ett fyrdimensionellt volymelement (d^4x).
Därefter förenklar ekvation (30) uttrycket ytterligare genom att ta det till regionens gräns ($\delta\mathcal{E}$). Den visar oss att denna ekvivalens kan uttryckas som en integral längs gränsen ($\delta\mathcal{E}$), med hjälp av normalvektorer (n_μ) till denna gräns och den metrik som induceras på den ($\sqrt{|h|} d^3y$). Med andra ord gör denna ekvation det möjligt för oss att förstå vad som händer på ytan av vår region utan att behöva beräkna vad som händer inuti.
Kort sagt, Stokes sats gör det möjligt för oss att rationalisera våra beräkningar genom att visa oss hur fenomen inom en region kan förstås genom att helt enkelt undersöka vad som händer på gränsen till denna region. Detta matematiska trick är nödvändigt för att lösa dessa komplexa problem.

Från ekvationerna (31a) och (31b) får vi :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(h,g)}$$

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(g,h)}$$

Introducerade i (32a) och (32b), med beaktande av (33), kan vi därmed härleda de kopplade fältekvationerna som beskriver systemet med de två enheterna:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = \kappa \Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

Var $T_{\mu\nu}^{(h,g)}$ och $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ är interaktionstensorerna för systemet med två enheter som motsvarar den "inducerade geometrin", dvs. det sätt på vilket varje fördelning av materia på ett lager av universum bidrar till geometrin för det andra (interaktion mellan populationer av positiva och negativa massor). Detta system måste följa Bianchi-villkoren, som uttrycks genom följande relation :

$$\nabla_{\mu}^{(g)} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \nabla_{\mu}^{(h)} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = 0$$

Antag att vätskorna i enheterna g och h är perfekta, med energidensiteter som motsvarar följande källtenorer :

$$T_{\mu\nu}^{(g,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(h,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h)} \end{pmatrix}$$

Vi kommer att ta $\{\alpha^{(g)} > 0, \beta^{(g)} > 0\}$ och $\{\alpha^{(h)} < 0, \beta^{(h)} < 0\}$. Vi kommer att se till att interaktionslagarna är sådana att två partiklar som tillhör samma enhet attraherar varandra, medan de repellerar varandra när de tillhör olika enheter.

Låt oss introducera deras interaktionstensorer:

$$T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h,g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h,g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h,g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h,g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g,h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g,h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g,h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g,h)} \end{pmatrix}$$

För att erhålla de önskade interaktionslagarna under den Newtonska approximationen måste vi välja $\kappa = -1$. Ekvationssystemet blir då:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) = -\Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

3.3.4.1 Kontroll av ett icke-stationärt, homogent och isotropiskt system

Om vi antar att det bimetriska universum, som struktureras av de kopplade fältekvationerna (34a) och (34b), är homogent och isotropiskt, blir Robertson-Walkers metrik enligt (Adler, Bazin, och Schiffer 1975) :

$$(ds^{(f)})^2 = (c^{(f)})^2 dt^2 - (a^{(f)})^2 \left[\frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left(1 + k^{(f)} \frac{r^2}{4}\right)^2} \right] \quad \text{où } f \in \{g, h\}$$

Notera att $a^{(f)}$ är skalningsfaktorn, $k^{(f)}$, $c^{(f)}$ och $\Gamma^{(f)}$ är krökningsindex, ljusets hastighet respektive Einsteins konstant för varje enhet.

Om vi introducerar dessa mått i ekvationssystemet (34a) och (34b) med trycken $p^{(g)} \approx 0$ och $p^{(h)} \approx 0$ får vi följande klassiska ekvationssystem:

$$\frac{3}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(g)}}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} = -\Gamma^{(g)} \left[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(g)}}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} = 0$$

$$\frac{3}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(h)}}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} = \Gamma^{(h)} \left[\Phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(h)}}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} = 0$$

Genom att tillämpa de klassiska matematiska metoderna från (Adler, Bazin och Schiffer 1975) ger kompatibilitetsvillkoren för ekvationerna (35a), (35b), (35c) och (35d) :

$$3 \frac{da^{(g)}}{a^{(g)}} + \frac{d \left[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]}{\left[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]} = 0$$

$$3 \frac{da^{(h)}}{a^{(h)}} + \frac{d[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

Så energi (och massa) är bevarad för ett universum av damm:

$$E = \rho^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^3 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2(a^{(h)})^3$$

Om vi har :

$$\Phi = \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3, \quad \phi = \Phi^{-1}$$

De kopplade fältekvationerna blir :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)} \left[T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)} \left[T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right]$$

Om båda enheterna domineras av strålning. Interaktionstensorn för blandade lägen kommer att vara :

$$T_{\mu}^{\nu(f)} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r^{(f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_r^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_r^{(f)} \end{pmatrix}$$

med

$$\begin{cases} \text{si } \rho_r^{(f)} > 0 \text{ alors } p_r^{(f)} > 0 \text{ pour } f = g \\ \text{si } \rho_r^{(f)} < 0 \text{ alors } p_r^{(f)} < 0 \text{ pour } f = h \end{cases}$$

NB:

- I ett kosmologiskt sammanhang används energiimpulstensorn $T_{\mu}^{\nu(f)}$ för att beskriva fördelningen och interaktionen av materia och energi i universum. För ett specifikt fält f tidskomponenten $T_0^{0(f)}$ energitätheten, som är en viktig bestämningsfaktor för krökningen av rumtiden. De rumsliga komponenterna $T_i^{i(f)}$ å andra sidan, representerar det tryck som utövas i de rumsliga riktningarna, vilket också påverkar rumtidens struktur. I en bimetrisk modell, där två distinkta fält - ett för varje lager i universum - beaktas, beskriver de associerade villkoren förhållandena mellan energitätheten och trycket för varje fält, vilket återspeglar hur dessa enheter samverkar och kollektivt påverkar den kosmiska dynamiken.
- Energiimpulstensorn uttrycks i diagonalform när universum anses vara isotropiskt och homogent, vilket innebär att dess fysikaliska egenskaper är oberoende av riktning och plats. Detta antagande, som är grundläggande för den kosmologiska standardmodellen, är känt som den kosmologiska principen (avsnitt 2.2.3). Isotropi innebär att universum verkar identiskt i alla riktningar; det finns ingen föredragen riktning i vilken fördelningen av materia eller energi skiljer sig åt. Homogenitet innebär att varje region i universum på en stor skala liknar alla andra regioner. Följaktligen saknas tvärgående flöden av energi och rörelsemängd, som skulle representeras av icke-diagonala termer i tensorn, eftersom det inte finns någon privilegierad rörelse eller energiflöde i en specifik riktning. Endast energitätheten och trycket i de rumsliga riktningarna, som är enhetliga och inte varierar med riktningen, visas i matrisen för energiimpulstensorn, vilket förklarar dess diagonala form.

Sedan, genom att införa strålningstrycket som induceras av varje enhet :

$$p_r^{(g)} = \frac{\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2}{3}, \quad p_r^{(h)} = \frac{\rho_r^{(h)}(c^{(h)})^2}{3}$$

Vi kan då tänka oss att den enhet som bärs av metriken h som kallas mörk energi och mörk materia, skulle kunna tillskrivas negativa massor som i den radiativa fasen skulle lyda samma tillståndsekvation :

$$\beta^{(h)} = \frac{\alpha^{(h)}}{3}$$

Under dessa förhållanden uttrycks bevaranderelationen alltid, i sin radiativa form, genom bevarandet av summan av de två energierna, den för fotogasen och den för de negativa massorna :

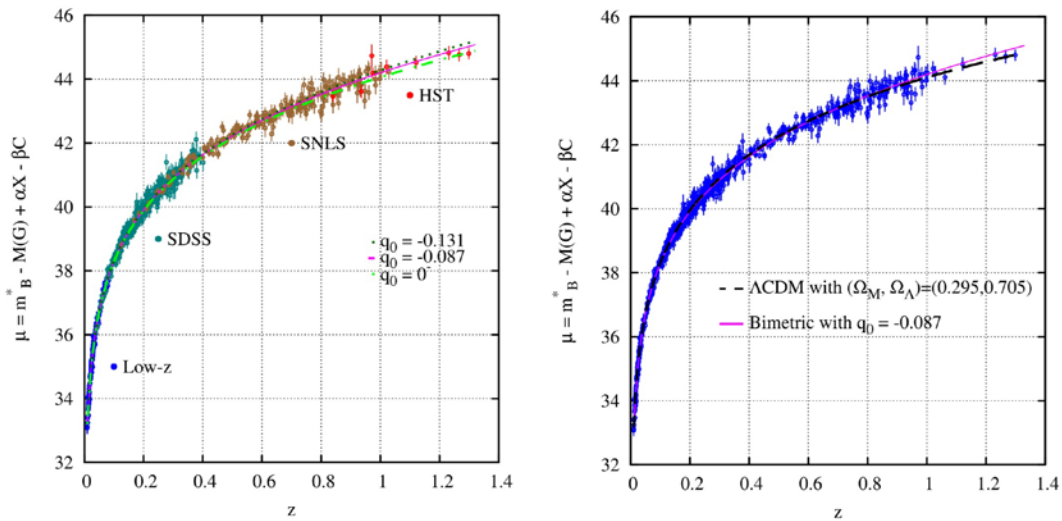
$$\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 + \alpha^{(h)}(a^{(h)})^4 = \rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 = \text{Constante}$$

Den exakta lösningen av systemet, för krökningsindexen $k^{(g)} = k^{(h)} = -1$ och $\Gamma^{(f)} = -\frac{8\pi G}{c^4}$ där $f \in \{g, h\}$ blir en lösning av följande ekvationer :

$$a^{(g)^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} = \frac{\Gamma^{(g)}}{2} E$$

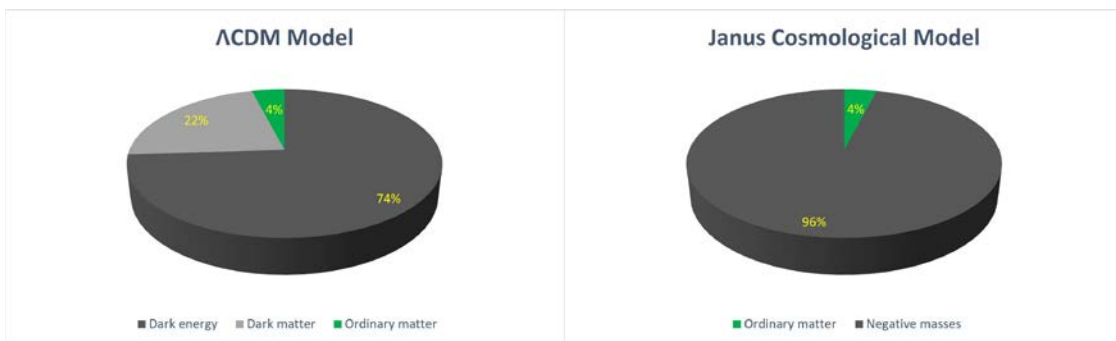
$$a^{(h)^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} = -\frac{\Gamma^{(h)}}{2} E$$

Om vi antar att $E < 0$ då $a^{(g)} > 0$ och $a^{(h)} < 0$. Vi kan alltså dra slutsatsen att den synliga delen av vårt universum accelererar, medan de negativa arterna bromsar in. Här observerar vi effekten av den dominerande negativa arten, vilket leder till fenomenet acceleration av den kosmiska expansionen, eftersom den högra sidan av den första ekvationen blir positiv ((Petit och D'Agostini 2021b)) :



Figur 3.11 - Hubble-diagram för de två modellerna (linjär rödförskjutning)

Detta system med två arter gör det möjligt att konsolidera de effekter som tillskrivs mörk materia och mörk energi till en enda enhet som består av negativa massor som kombinerar de två åtgärderna, vilket illustreras av följande diagram:



Figur 3.12 - Modeller av universum

3.3.4.2 Lokal verifiering av ett stationärt system

När vi studerar universum förenklar vi ofta modellerna för att göra dem mer hanterbara. En vanlig förenkling är att betrakta ett litet område i rymden som effektivt tomt och isolerat från kosmos enorma komplexitet. Detta tillvägagångssätt är särskilt användbart när vi är intresserade av fenomen som inträffar under korta tidsperioder, mycket kortare än de tidsskalor under vilka universum självt förändras. I sådana fall kan vi använda "tidsberoende" mått, vilket innebär att vi antar att rymdens struktur inte förändras med tiden under vår observation.

För att göra modellen

lite mer komplex introducerar vi ibland så kallade "störningar". Dessa störningar är små förändringar i den i övrigt enkla rymd vi betraktar. De gör det möjligt för oss att studera hur små förändringar eller störningar kan påverka systemet. I vårt fall representeras dessa störningar av termer som $\gamma_{\mu\nu}^{(g)}$ och $\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$ som innebär små avvikelser i rummets geometriska struktur, och som potentiellt kan representera olika aspekter eller komponenter i universum.

$$g_{\mu\nu}^{(g)} = \eta_{\mu\nu}^{(g)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(g)}, \quad g_{\mu\nu}^{(h)} = \eta_{\mu\nu}^{(h)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$$

För mätvärdena har vi :

$$(ds^{(g)})^2 = (c^{(g)})^2 dt^2 - (a^{(g)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

$$(ds^{(h)})^2 = (c^{(h)})^2 dt^2 - (a^{(h)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

När vi inom kosmologin talar om "kvasistationära förhållanden" syftar vi på en situation där vissa aspekter av universum antas vara relativt konstanta under den period vi studerar. Mer specifikt, i detta sammanhang, antas universums "skal faktorer", som beskriver hur universums storlek förändras över tiden, vara konstanta. Detta är en användbar approximation för att studera vissa kortsiktiga fenomen.

För att undersöka fysiken i ett sådant scenario använder vi en så kallad "serieexpansion" av fältekvationerna. Detta är en matematisk teknik där vi bryter ner komplexa ekvationer i enklare, mer hanterbara delar. Vi fokuserar dock bara på de mest betydelsefulla delarna - i det här fallet ignorerar vi termer av ordning två och högre, eftersom de har minimal inverkan på resultaten för småskaliga eller kortsiktiga scenarier.

De resulterande två förenklade ekvationerna beskriver hur störningar beter sig i detta kvasistationära universum. Dessa ekvationer innehåller termer som $\varepsilon\gamma_{00}$ och $\delta\rho$ som representerar små förändringar i rummets geometri respektive materiens densitet.

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(g)} = -\Gamma^{(g)} \left[\delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}} \right)^3 \delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(h)} = \Gamma^{(h)} \left[\delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}} \right)^3 \delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 \right]$$

Dessutom definierar vi "gravitationspotentialer" för varje komponent i universum, betecknade med $\psi^{(g)}$ och $\psi^{(h)}$. Dessa potentialer är relaterade till förändringar i rummets geometri och är viktiga för att förstå gravitationseffekter i olika regioner eller komponenter i universum (t.ex. (36)).

$$\psi^{(g)} = \frac{(c^{(g)})^2}{2} \varepsilon \gamma_{00}^{(g)}, \quad \psi^{(h)} = \frac{(c^{(h)})^2}{2} \varepsilon \gamma_{00}^{(h)}$$

Vi erhåller :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(g)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = -\Gamma^{(g)} \frac{(a^{(g)})^2}{2} \left[\delta \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}} \right)^3 \delta \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = \Gamma^{(h)} \frac{(a^{(h)})^2}{2} \left[\delta \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}} \right)^3 \delta \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 \right]$$

Inom fysiken, särskilt i studier av rymden och universum, som vi såg i avsnitt 2.3.8, beskriver de "geodetiska ekvationerna" hur objekt rör sig under påverkan av gravitationen. Enkelt uttryckt säger dessa ekvationer oss vilken bana ett objekt kommer att ta när det rör sig enbart under påverkan av gravitationen. Till exempel hur planeter kretsar kring stjärnor eller hur föremål faller till jorden.

I vårt scenario har vi att göra med två olika lager (eller ark) av universum, vart och ett med sina egna egenskaper. Det första lagret, som vi kan betrakta som universum av vanlig materia, följer en uppsättning regler. Det andra lagret med negativa massor, som förknippas med mörk materia och mörk energi, följer en annan uppsättning regler.

Följande två ekvationer är ett sätt att matematiskt uttrycka hur föremål skulle röra sig i dessa två olika lager (lagret med vanlig materia respektive lagret med negativa massor). Dessa ekvationer liknar den klassiska Poisson-ekvationen inom fysiken, som används för att beskriva gravitationsfält. Ekvationerna har dock en speciell egenskap - de tar hänsyn till olika "ljushastigheter" i varje lager. Denna modifiering är avgörande för att utforska teorier som går bortom vår vanliga förståelse av fysik.

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(g)})^2} \frac{\partial \psi^{(g)}}{\partial \xi_\alpha}$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(h)})^2} \frac{\partial \psi^{(h)}}{\partial \xi_\alpha}$$

De interaktionslagar vi har valt garanterar att entiteterna från de lager som struktureras av metrikerna g och h är ömsesidigt uteslutande (3.13).



Figur 3.13 - Lagar för inter verkan mellan massor

Följaktligen kan vi betrakta en region där endast en av de två enheterna är närvarande. Med fokus på referensramen strukturerad av metriken g som är befolkad av vanlig materia som i solsystemet, förenklas systemet med kopplade fältekvationer till :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} T_{\mu\nu}^{(g,g)}$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)}$$

Den första ekvationen kan identifieras med Einsteins ekvation utan den kosmologiska konstanten Λ . Denna ekvation representerar standardmodellen för gravitation för vanlig materia. Den andra ekvationen fångar vad vi kan kalla den "inducerade geometrieffekten". Den beskriver hur rymdens geometri påverkas av närvaron av vanlig materia i en sfär med radien r och densitet $\rho^{(g)} = \rho$ påverkar geodetiken hos det negativa masslagret. Följaktligen kan vi dra slutsatsen att denna bimetriska modell, där vanlig materia i ett lager interagerar med negativa massor i ett annat, är i linje med standardtesterna av den allmänna relativitetsteorin på lokal nivå. Det är dock fortfarande mycket viktigt att verifiera systemets koherens under stationära och inhomogena förhållanden.

3.3.4.3 Naturen hos den primordiala antimaterian

I enlighet med Sacharovs förslag i (Sacharov 1967), (Sacharov 1980) och (Sacharov 1979), anta att paret materia/antimateria i det första lagret av vårt universum består av kvarkar och antikvarkar med positiv energi. Samtidigt skulle ett materia/antimateria-par i ett andra lager bestå av negativ-energi kvarkar och antikvarkar. Om syntesen av materia i det första lagret (det första paret) var snabbare, medan syntesen av antimateria i det andra lagret (det andra paret) var långsammare, skulle detta kunna leda till hypotesen att de objekt som finns i centrum av de stora tomrummen i universums storskaliga struktur, vilket indikeras av dipolrepellerfenomenet, är sammansatta av antimateria. Detta antimateria omfattar antiprotoner, antineutroner och antielektroner med negativ energi, dvs. negativ massa ((J. M. Souriau 1997)). De senare skulle kunna bilda sfäriska objekt som består av antiväte (lätta element) med repulsiva egenskaper som liknar enorma protostjärnor som bildades under den primordiala strålningsfasen (i början av universum).

Det lakunära nätverket av positiv massa begränsar detta utrymme av negativ densitet och förhindrar deras fusion. Omvänt fungerar dessa konglomerat av negativ massa som förankringspunkter för detta porösa nätverk i universum av positiva massor, vilket säkerställer övergripande stabilitet.

Stjärnor med positiv massa liknar till en början sfäriska gaskluster som värms upp till temperaturer på mellan 1000 och 2000°C. Dessa protostjärnor svalnar gradvis och avger strålning främst i det röda och infraröda spektrat. För att omvandlas till fullvärdiga stjärnor måste materia och gaserna genomgå en gravitationell sammandragning och nå temperaturer och densiteter som är tillräckligt höga för att starta termonukleära fusionsreaktioner. Denna sammandragningsprocess frigör värmeenergi, som strålar ut på stjärnans yta i elektromagnetisk form, inklusive synligt ljus. Denna energifrigörelse är proportionell mot kvadraten på stjärnans radie. Större stjärnor har större ytor och kan avleda mer värme. Den mängd värme som produceras är dock proportionell mot kuben av stjärnans radie, kopplad till dess volym. För mycket massiva stjärnor kan alltså avkylningen ske relativt långsamt, och det kan ta lång tid innan temperaturen når den tröskel som krävs för att utlösa de termonukleära fusionsreaktioner som gör att stjärnan kan lysa.

I vår positiva värld anser man att kärnfusionsreaktioner kan börja i hjärtat av en protostjärna när temperaturen når ett optimum på cirka 10 miljoner grader Celsius. Det är vid denna temperatur som vätekärnorna, som utgör huvuddelen av materia i protostjärnan, får tillräcklig rörelseenergi för att övervinna den elektrostatiske barriären som deras positiva laddning utgör. När denna barriär har övervunnits kan vätekärnorna smälta samman och bilda helium, vilket frigör en avsevärd mängd strålnings- och värmeenergi. Den optimala temperaturen möjliggör en mer effektiv kärnfusionsreaktion, vilket ger stjärnorna deras karakteristiska ljusstyrka.

Till exempel kan det ta lång tid för en mycket massiv och mycket het protostjärna med negativ massa att svalna tillräckligt för att fusionsreaktioner ska kunna påbörjas, eftersom protostjärnans kontraktionsprocess måste generera tillräckligt med värme för att kompensera för värmeförlusten vid ytan.

Som ett resultat av detta har dessa mycket massiva protostjärnor med negativ massa så långa kylningstider att de aldrig kommer att antändas (vilket överskrider universums ålder). Därför kan ingen galax, inget tungt grundämne, ingen molekyl eller någon annan form av materia som är nödvändig för utvecklingen av liv i den negativa världen bildas.

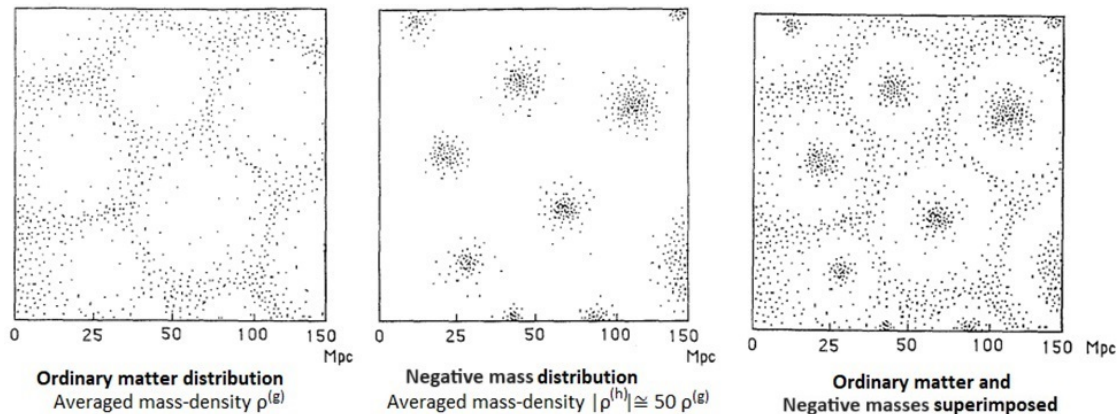
3.3.4.4 Digitala 2D-simuleringar

Tvådimensionella numeriska simuleringar utfördes med två uppsättningar av 5000 masspunkter, som representerar kluster av vanlig materia (populationsdensitet $\rho^{(g)}$) och negativa massor (populationsdensitet $\rho^{(h)}$).

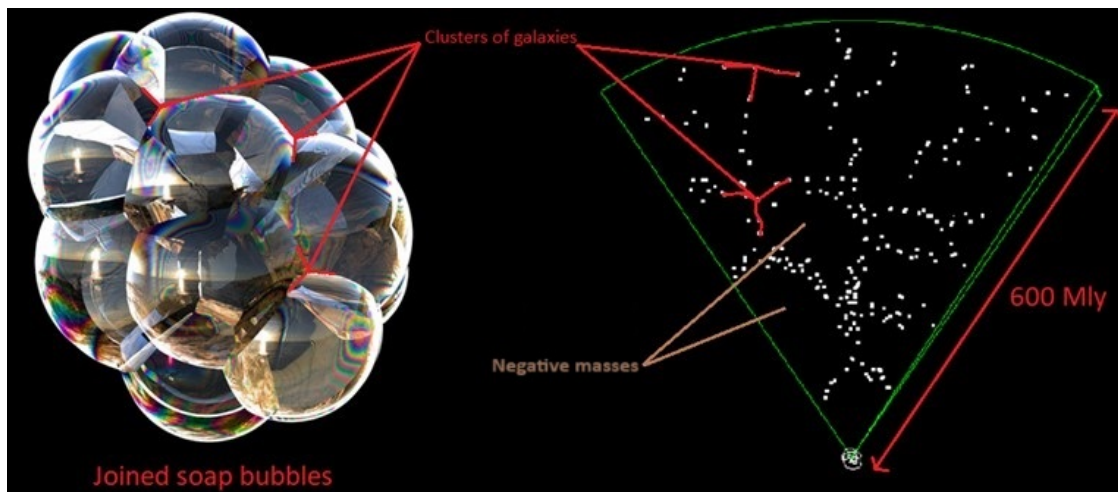
En betydande asymmetri bibehölls mellan de två populationerna, där $|\rho^{(h)}|$ är mycket större än $\rho^{(g)}$. Dessutom tillämpades Maxwellianska 2D termiska hastighetsfördelningar på båda uppsättningarna, där medelhastigheten för den negativa massfördelningen var fyra gånger högre än för vanlig materia.

Dessa simuleringar avslöjade en lakunär struktur av negativa massor i centrum av de stora tomrummen i universums storskaliga struktur. Eftersom jeanstiden varierar omvänt med

kvadratroten av densiteten, är utvecklingstiden för den negativa massfördelningen kortare. Detta leder till bildandet av ett regelbundet nätverk av sfäroida konglomerat. Den vanliga materiefördelningen tvingas därför att uppta det återstående utrymmet, vilket leder till en lakunär struktur som liknar en uppsättning sammanfogade såpbubblor i tredimensionella simuleringar. Denna modell observerades även av Brennen 1995 (Brennen 1995) (figur 3.14 och 3.15), och citerades av El-Ad 1997 ((El-Ad, Piran och Costa 1997)).



Figur 3.14 - Fördelning av vanlig materia och negativ massa när $|\rho^{(h)}| \gg \rho^{(g)}$



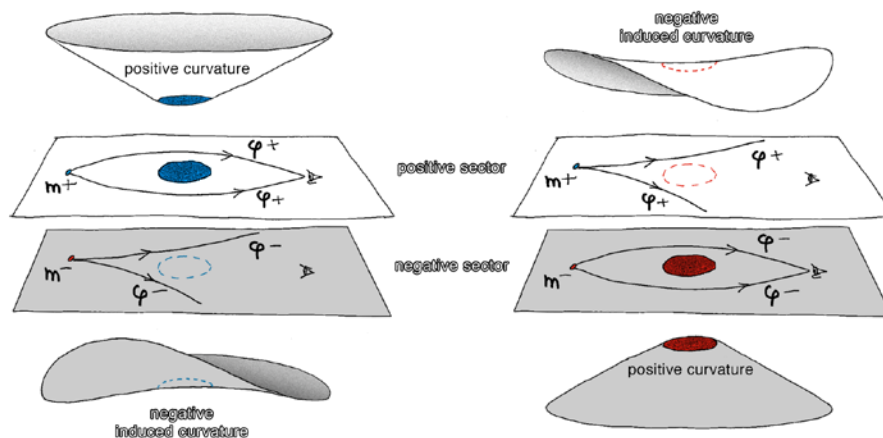
Figur 3.15 - Sferoidal lakunär struktur ture

Det är viktigt att beakta att vi inom ramen för negativ massa saknar observationsdata att jämföra med potentiella numeriska förutsägelser, med undantag för de geometriska effekter som induceras av denna referensram (den med negativ massa) genom gravitationslinsfenomen, som struktureras av metriken $g_{\mu\nu}$.

Följaktligen kommer det tryck som härleds från TOV (Tolman - Oppenheimer - Volkoff) differentialekvation ((Adler, Bazin, och Schiffer 1975)) i rumtid strukturerad av metriken $h_{\mu\nu}$ kommer alltid att förbli hypotetisk. Följaktligen är det inte praktiskt att försöka strukturera växelverkanstensorerna $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ i den andra fältekvationen (34b). Vi kommer aldrig

att kunna jämföra de resultat vi får genom att beräkna geodetiken för $h_{\mu\nu}$ med observationsdata relaterade till rörelsen hos partiklar med negativ massa. Istället måste vi arbeta med en funktion $\beta(r)$ (som inte är kopplad till undertryck) bara för att garantera att det finns en lösning i denna referensram. Den viktigaste aspekten är att säkerställa att den kovarianta derivatan av dess interaktionstensor är noll (37).

För att till fullo förstå denna effekt av inducerad geometri måste vi placera oss i sammanhanget med modellens system med två kopplade fältekvationer. Det är viktigt att komma ihåg att detta strukturerar en 4D hypersurface enligt 2 metriker associerade med 2 distinkta lager av rumtid. Varje typ av massa är associerad med sin egen metrik, vilket innebär att en massa alltid skapar en positiv krökning i rumtiden enligt sin egen metrik (där massan avger fotoner av synlig energi) och alltid en negativ krökning i den konjugata metriken (där massan avger fotoner av osynlig energi), vilket kan ses i följande figur 3.16.



Figur 3. 16 - Inducerad geometrieffekt

Till vänster i figur 3.16 skapar det massiva blå objektet som tillhör det positiva universum en positiv krökning. Som ett resultat ger det en positiv gravitationslinsningseffekt på bilden av en liten positiv massa m^+ som orsakar fotoner av positiv energi ϕ^+ runt det massiva blå objektet. Detta massiva objekt skapar dock en negativ krökning i det negativa universum. Följaktligen, även om det är osynligt, upplevs dess skenbara massa i det negativa universum som negativ.

Omvänt, till höger i figur 3.16, tillhör det massiva röda objektet det negativa universum. Det skapar en positiv krökning i förhållande till sin egen referensram (och inte en negativ krökning). Detta massiva objekt ger upphov till en negativ krökning som uppfattas i vårt universum, även om dess energifotoner är osynliga. Vi drar därför slutsatsen att dess skenbara massa är negativ. Detta beror på att det ger en negativ gravitationslinsningseffekt på bilden av en liten massa m^+ som orsakar fotoner av positiv energi ϕ^+ runt det osynliga massiva negativa objektet, vars gravitationseffekt alltid är närvarande.

Vi kan dra flera slutsatser från begreppet negativ massa:

- I grund och botten finns det ingen negativ massa (och därför ingen negativ energi). Åtminstone är "*massans negativitet*" (och "*energins negativitet*", eftersom de två uppenbarligen är kopplade till varandra) inte en inneboende fysisk egenskap hos en "*partikel med negativ massa*". I själva verket är massans "*negativitet*" eller "*positivitet*" helt enkelt en krökning som mäts lokalt i rumtiden av en observatör. Tecknet på denna krökning är relativt till referensramen för den hypersurface eller metrik i vilken denna massa mäts. Det är i själva verket en skenbar massa vars närvaro endast avslöjas av den krökning den ger upphov till i rumtiden.

Med andra ord har alla partiklar med massa i universum uteslutande positiv tröghetsmassa, men deras gravitationsmassa är relativ. Tecknet för deras gravitationsmassa är motsatt (positivt eller negativt) beroende på vilket perspektiv som antas: en massa förvränger rumtiden i sin egen metrik, vilket ger upphov till en viss krökning som alltid är positiv. Den kommer dock att uppfattas som skenbar massa i det motsatta universumet, från vilket en observatör kommer att uppfatta denna krökning som negativ. Detta beror på fältekvationernas kopplade natur och resulterar i en effekt som kallas *konjugerade krökningar*. Det kan beskrivas som att "*samma massa ger upphov till två motsatta krökningar*".

Till exempel har jorden, sett från vår referensram, positiv massa. Tänk dig att du genom någon okänd process skulle kunna vända på din energi (vända på din massa). Jorden (och alla stjärnor på himlen) skulle försvinna eftersom du inte längre skulle kunna uppfatta fotoner med positiv energi. Men du kan fortfarande uppfatta och mäta den krökning som den fortsätter att framkalla i rumtiden. Genom att göra denna mätning skulle du upptäcka att den nu osynliga jorden har negativ massa.

Men det finns inga distinkta universum av positiva energier och universum av negativa energier. Det är helt enkelt ett godtyckligt val av nomenklatur. De två är likvärdiga. Av konvention kallar vi den sektor i vilken vi lever för det positiva universumet. Inverteringen av tidspilen innebär inte att vi börjar leva "*upp och ned*" och att vi blir yngre. Det är fysiskt manifesterat genom inverteringen av partikelenergi. Återigen är denna inversion en relativ observation. I praktiken innebär den en förskjutning till det motsatta universum.

- Det är viktigt att notera att partiklar med negativ energi (och deras fotoner) inte kan upptäckas med optiska instrument eftersom de följer geodetiska linjer i sin egen metriska $h_{\mu\nu}$ som skiljer sig från geodetiken i vår metrik $g_{\mu\nu}$. Det finns därför två uppsättningar geodesier som aldrig "*korsar varandra*". Eftersom arter med positiv och negativ energi inte kan se varandra och utvecklas längs två distinkta familjer av geodesier, kallas de två referensramar för rumtid som de befinner sig i för referensramen för positiv massa respektive referensramen för negativ massa. De är därför två referensramar inom samma 4D-hypersurface, strukturerade av två kopplade fältekvationer, snarare än en enda. Men även om negativa massor är osynliga för oss eftersom de inte interagerar elektromagnetiskt med vårt universum och inte utbyter fotoner, avslöjar de bara sin närvaro genom en antigravitationell effekt, eftersom de inducerar motsatta krökningar i rumtiden.

- Negativa massor är utbredda i universum, men deras proportioner varierar beroende på vilken region av rymden vi befinner oss i, och de existerar enbart för att bidra till dess stabilitet genom en antigravitorisk effekt. Universum definieras av en enda rumtid som är strukturerad av två mått som gör att vi kan mäta längden eller avståndet mellan två punkter i denna rumtid på två olika sätt, med hjälp av två olika uppsättningar referenspunkter (tre rumsliga referenspunkter och en tidlig referenspunkt). I undervisningssyfte kan vi tänka oss denna rumtid som ett pappersark med två olika rutnät på var och en av de två sidorna.

3.3.5 Utsikter för framtiden

Det vetenskapliga tillvägagångssättet för att förstå ett fenomen kan sammanfattas med förmågan att reproducera och mäta det. Det är viktigt att notera att det är fullt möjligt att demonstrera fenomenet massinversion i laboratoriet genom att invertera en oändligt liten mängd materia, förutsatt att det är möjligt att framkalla en betydande störning i denna materia genom att producera elektromagnetiska parametrar i storleksordningen flera tiotals miljoner teslas under en mycket kort period, till exempel med hjälp av sprängämnen. Sovjetunionen hade redan på 1950-talet producerat 100 miljoner ampere genom att komprimera ett magnetiskt flöde med hjälp av sprängämnen, med hjälp av en magneto-cumulativ generator ((Pavlovskii 1994)). Det skulle sedan vara möjligt att påvisa denna massinversion genom att mäta de gravitationsvågor som sänds ut och detekteras av laserinterferometrarna Virgo och Ligo.

En förening av relativitetsteorin med kvantmekaniken skulle endast vara möjlig genom kvantisering av gravitationen. Det finns dock inget koncept för energikvantisering i relativitetsteorin, med undantag för mass-energi-ekvivalens, eftersom Einsteins fältekvation inte beskriver partiklar i grunden. Det är därför strängteorin är den enda accepterade och godtagbara moderna metoden för att överbrygga klyftan mellan relativitetsteorin och kvantmekaniken. Denna förenkling är dock omöjlig med detta tillvägagångssätt eftersom kvantmekaniken betraktar krafter i termer av fält, och det behövs en partikel i dessa fält för att överföra växelverkan. Fotonen är till exempel den elementarpartikel som överför det elektromagnetiska fältet, och dess kvantifiering är möjlig tack vare införandet av positiva och negativa elektriska laddningar. Å andra sidan är gravitonen den enda partikeln från strängteorin som överför gravitation, men denna pseudopartikel har aldrig observerats experimentellt. Begreppet kvantgravitation förblir i själva verket spekulativt i denna modell. En alternativ hypotes för att kvantifiera gravitation på kvantskalan skulle vara att överväga förekomsten av massor med motsatta tecken som uppvisar repulsiva egenskaper i beräkningsmodellen, liknande modellen med fotoner med elektriska laddningar med motsatta tecken för att överföra interaktionen.

4 Bidrag till kosmologi och partikelfysik

4.1 Introduktion till dynamiska grupper

Dynamisk systemteori är en gren inom matematiken som fokuserar på studier av rörelse och förändring över tid. Syftet är att förstå hur system utvecklas som en funktion av deras initiala förhållanden och de externa krafter som verkar på dem. Symplektisk geometri är en integration av dynamiska systemteori och differentialgeometri, som studerar former och egenskaper hos krökta utrymmen, i synnerhet hur dessa utrymmen deformeras och böjs under påverkan av externa krafter. Detta område, som har sina rötter i Hamiltonmekaniken, undersöker matematiska objekt som kallas "symplektiska varieteter", vilka har en unik struktur som gör att storlekar kan mätas. Till skillnad från Riemannsk geometri, som använder en metrisk tensor för att mäta längder och vinklar, använder symplektisk geometri en matematisk form som kallas en "symplektisk form" för att mäta ytor.

Jean-Marc Souriau var en ledande pionjär inom symplektisk topologisk geometri. Han utvecklade begreppet geometrisk kvantifiering, som omvandlar grundläggande fysikaliska storheter som energi och rörelsemängd till rent geometriska objekt. Souriaus arbete gav fysisk mening åt inverteringen av tidspilen i vår kosmologiska modell ((Bergmann och Einstein 1938), (Kaluza 1921)).

Vad är en grupp?

I matematiska termer handlar det om att vissa matriser påverkar andra matriser. Men vad representerar det rent fysiskt?

Enligt J-M Souriau skapas en grupp för att transporteras, och transportmetoden är viktigare än den transporterade enheten: "*Säg mig hur du rör dig, så ska jag säga dig vem du är*".

Vårt huvudfokus ligger på Lie-grupper (se (Bourbaki 2006)), som är både grupper och differentialvarianter (lokalt projicerade "*krökta rum*" på ett n -dimensionellt euklidiskt rum). De är viktiga för att beskriva rörelser och transformationer i rummet. Två viktiga grupper är den ortogonala gruppen $O(3)$ och den euklidiska gruppen $E(3)$:

- **Den ortogonala gruppen $O(3)$** används för att beskriva rotationer och symmetrier i tre dimensioner, som bevarar avstånd i rummet. Den innehåller en viktig undergrupp som kallas $SO(3)$, rotationsgruppen, som hanterar rotationer runt en axel.
- **Den euklidiska gruppen $E(3)$** beskriver tredimensionella rörelser som rotationer, symmetrier och translationer. Baserat på den ortogonala gruppen $O(3)$ kan den delas upp i en kraft och ett vridmoment som appliceras på ett objekt i solid mekanik. Detta är en grupp där Pythagoras sats kan användas för att beräkna avståndet mellan två punkter. Denna grupp omvandlar en punkt med koordinaterna x, y, z till en ny punkt med koordinaterna x', y', z' . Den unika egenskapen hos denna

dynamiska grupp är dess förmåga att generera en familj av invarianta geometriska objekt inom gruppen. En linje som utsätts för translation förblir t.ex. en linje, vilket gör den till ett endimensionellt invariant geometriskt objekt. En sfär är ett perfekt exempel på ett tredimensionellt symmetriskt objekt. Dess unika egenskap är att den förblir oförändrad vid rotationer runt dess centrum, vilket visar på rotationssymmetri. I geometriska termer innebär detta att en sfär passerar genom sig själv under varje rotationsrörelse och bibehåller sina geometriska egenskaper konsekvent i varje punkt. Inom fysiken, särskilt i studiet av rumtiden i den allmänna relativitetsteorin, är Schwarzschild-lösningen ett viktigt begrepp. Den beskriver gravitationsfältet utanför en sfäriskt symmetrisk, icke-roterande massa, t.ex. ett svart hål. Schwarzschild-metriken, en lösning av Einsteins fältekvationer, är invariant under rotationer och translationer i tid och rum, vilket liknar den invarians som observeras i euklidisk geometri men som tillämpas på den krökta rumtiden i den allmänna relativitetsteorin. I Schwarzschilds rumtid bestäms geodetikerna av rumtidens krökning, som beskrivs av Schwarzschilds metrik. För ett objekt som rör sig längs en geodesi bevaras vissa storheter, såsom dess rörelsemängdsmoment och dess energi i förhållande till den massa som orsakar rumtidens krökning. Detta bevarande är resultatet av symmetrierna i rumtiden, analogt med bevarandelagarna i klassisk mekanik.

Lie-grupper beskriver därför rörelser i rummet med bibehållna avstånd och längder. De är isometri-grupper när de geometriska egenskaperna hos rörliga objekt förblir oförändrade (avstånd och vinklar) i rymden under en transformation. Rotationer är exempel på symmetrier i tredimensionell rymd, eftersom de inte ändrar de geometriska egenskaperna i rymden. Om man t.ex. roterar en kub ändras inte avstånden mellan dess hörnpunkter. Med andra ord förblir objektets geometriska egenskaper oförändrade, även om dess position har ändrats.

Enligt den speciella relativitetsteorin lever vi i stället för i en tredimensionell euklidisk rymd $[x, y, z]$ med en signatur $(+ + +)$ där tiden är en separat enhet, existerar vi faktiskt i en fyrdimensionell rumtid där de tre rumsliga dimensionerna är vinkelräta mot en tidsdimension $[t, x, y, z]$ som kallas Minkowski-rymden, vars signatur är $(- + + +)$.

Den dynamiska grupp som förknippas med denna rymd är Poincaré-gruppen. Den gör det möjligt att generera särskilda rörelser, t.ex. rörelsen hos masslösa partiklar som fotoner (som aldrig är i vila utan alltid rör sig med ljusets hastighet, inte påverkas av gravitationen i fråga om hastighet utan endast kan modifieras i fråga om energi) och en familj av partiklar som inte har noll massa. Denna dynamiska grupp, tillämpad på den speciella relativitetsteorin, omfattar massors eller fotoners rörelse med en möjlig invertering av tidspilen, dvs. från det förflutna till framtiden och vice versa, och kan representeras i matrisform på följande sätt:

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där L är Lorentz-gruppmatrisen som beskriver hur rumtidskoordinaterna ändras mellan olika tröghetsreferensramar. Dessa transformationer inkluderar rotationer i rymden samt Lorentz-transformationer (boosts), som är förändringar av referensramar som rör sig med

en konstant hastighet i förhållande till varandra. C är en vektor som motsvarar rum-tid-translationer i $\mathbb{R}^{1,3}$.

Faktum är att hälften av elementen i den dynamiska gruppen reverserar tiden, vilket innebär att om vi betraktar ett rumtidselement som en massa eller en foton och tillämpar en temporal rörelse från det förflutna till framtiden, kan vi utföra samma rörelse i motsatt riktning med hjälp av Poincaré-gruppen. Enligt Souriaus teori från hans verk "*Structure of Dynamic Systems*" ((Kaluza 1921)), om den dynamiska gruppen kan få fotoner eller massor att röra sig med en tidspil i motsatt riktning, så kan deras energi, och därmed deras massa, också vändas.

N.B.: Den begränsade Poincaré-gruppen behandlar uteslutande "ortokron" relativistisk rörelse i fyra dimensioner av Minkowski-rymden, som går från det förflutna till framtiden. Dess matrisform inkluderar Lorentz submatris L_0 enligt följande:

$$\begin{pmatrix} L_0 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kan vi nu betrakta dessa rörelser med negativ energi och massa och en motsatt tidspil som en del av fysiken? Kan de mätas eller observeras?

Partiklar med negativ energi sänder ut fotoner med negativ energi, så de kan inte observeras eller mätas optiskt. Det har dock observerats och uppmätts att universums expansion accelererar på grund av det negativa tryck som är kopplat till mörk energi ((Perlmutter et al. 1999)). Tryck är en densitet av energi per volymenhet.

Universums expansion är alltså direkt kopplad till negativ energi. Detta tyder på att en betydande del av universum, som för närvarande definieras som mörk materia med mörk energi, påverkar denna expansion genom gravitationseffekten. Detta dynamiska och geometriska tillvägagångssätt ger därför ett svar på dess ursprung och natur. Den skulle kunna innehålla massor eller fotoner som är laddade med negativ energi.

4.2 Diversa symmetrier associerade med varje reverseringsoperatör

Den begränsade Poincaré-gruppen hanterar relativistisk rörelse i fyra dimensioner av Minkowski-rymden. Poincaré-gruppen är gruppen enligt följande matris :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där C är vektorn som motsvarar rymdtidsförskjutningarna i $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Den verkar på punkter i Minkowski-rymden:

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Denna 10-dimensionella grupp är isometrigruppen för denna rymd, definierad av dess metrik :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Lorentzgruppen enligt dess undermatris L som tillhör rymden \mathcal{L} har fyra sammanhängande komponenter:

- \mathcal{L}_n den neutrala komponenten, ändrar varken rum eller tid.
- \mathcal{L}_s reverserar utrymme.
- \mathcal{L}_t vänder på tiden men inte på rummet.
- \mathcal{L}_{st} vänder upp och ner på både rum och tid.

De två första komponenterna grupperas tillsammans för att bilda den undergrupp som kallas "*orthochronous*" eller begränsad Lorentz-grupp:

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_n \cup \mathcal{L}_s$$

De två sista komponenterna bildar "*antichrone*"-setet, vars komponenter vänder tiden:

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_t \cup \mathcal{L}_{st}$$

Observera att :

$$\mathcal{L}_t = -\mathcal{L}_s \quad \mathcal{L}_{st} = -\mathcal{L}_n$$

$$\mathcal{L}_{st} = -\mathcal{L}_n \quad \mathcal{L}_t = -\mathcal{L}_s$$

4.3 Lorentz dynamikgrupp

Tillämpningen av den dynamiska gruppens koadjungerade verkan på den dubbla Lie-algebran, som initierades av matematikern Jean-Marie Souriau, har kastat ljus över vissa aspekter av det tillvägagångssätt som används inom fysiken. Den begränsade dynamiska Lorentz-gruppen, begränsad till sina två ortokrona komponenter, översätter aspekter av den speciella relativitetsteorin genom sina resulterande invariansegenskaper. År 1970 konstaterade J-M Souriau att analysen av komponenterna i dess moment belyser den geometriska naturen hos ett (icke-kvantifierat) spinn ((J. M. Souriau 1964) (J. M. Souriau 1997)). Lorentzgruppen har två ortokrona komponenter, nämligen den första neutrala komponenten, som innehåller gruppens neutrala element, och den andra enantiomorfa komponenten, som inverterar det rum som är synonymt med *P-symmetrin*. I teorin om dynamiska grupper blir en klassificering i termer av rörelser uppenbar. I detta skede illustreras verkan av dessa rumsinverterande element i fenomenet ljuspolarisation, där varje "*höger*"-foton kan omvandlas till en "*vänster*"-foton. Denna grupp kan representeras av en familj av matriser 4×4 L som axiomatiskt definieras som $L^T G L = G$ där L^T är transponenten av Lorentzmatrisen L och G är Minkowskis metriska matris, ofta kallad Gram-matrisen i detta sammanhang. I den speciella relativitetsteorin representeras den i

allmänhet av en diagonal matris med elementen $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Denna ekvation innebär att Lorentztransformationen bevarar Minkowskis skalärprodukt, ett avgörande villkor för koherensen i den speciella relativitetsteorin.

4.4 Restrikerad dynamisk Poincaré-grupp

Produkten av Lorentzgruppen och rum-tid-translationsgruppen gör att vi kan konstruera den begränsade dynamiska Poincaré-gruppen, som alltid är begränsad till sina två ortokrona komponenter. I dess ögonblick finner vi först energin som är relaterad till undergruppen av temporala translationer. Sedan impulsen, som är kopplad till de rumsliga översättningarna, de två är kopplade genom invariansen av modulus för energi-impulskvadratvektorn under inverkan av Lorentz-gruppen. Den matris som associeras med denna grupp måste inkludera den "ortokrona" Lorentz submatrisen L_o av dimensionen 3×3 såväl som translationsvektorn C och ytterligare komponenter för att fullborda dess struktur (se (45)).

4.5 Restricted Kaluza & Janus Dynamiska grupper

Genom att lägga till en translation längs en femte dimension till den begränsade Poincaré-gruppen bildar vi en Lie-grupp som vi kallar den *begränsade Kaluza-gruppen* ((Bargmann, Bergmann och Einstein 1941), (Bergmann 1942), (Bergmann och Einstein 1938), (Kaluza 1921), (Klein 1926)). Denna grupp är inte den 15-dimensionella Kaluzagruppen associerad med en 5-dimensionell Lorentzisk varietet, utan en ny 5-dimensionell grupp som endast räknar translationer. Denna nya dimension ger impulsen en ytterligare skalär som kan identifieras med den elektriska laddningen q som är positiv, negativ eller noll, och som fortfarande är okvantifierad. Vi demonstrerar sedan geometrisk translation enligt en skalär ϕ genom att ge massorna en invariant elektrisk laddning. Genom att sedan införa en ny symmetri som återspeglar inverteringen av den femte dimensionen, synonymt med inverteringen av skalären från q à $-q$ fördubblar vi antalet anslutna komponenter från 2 till 4. Inverkan på momentet kopplar sedan denna nya symmetri till inverteringen av den elektriska laddningen q . Vi härleder alltså den geometriska modellen för laddningskonjugation eller *C-symmetrin*, som översätter den materia-antimateria-symmetri som introducerades av Dirac. Det är därför logiskt att kalla denna nya utvidgning för den *begränsade Janusgruppen*.

4.6 Dynamiska Janus Group

Genom att införa en ny symmetri i den tidigare gruppen, som vi beskriver som symmetri T och som omvandlar materia till antimateria med negativ massa - ett begrepp som vi skulle kunna kalla *antimateria i Feynmans mening* - konstruerar vi *Janus dynamiska grupp*. På detta sätt fördubblar vi antalet anslutna komponenter från fyra till åtta, grupperade i två undergrupper: "*orthochronous*", som behåller tids- och energiegenskaper, och "*antichronous*", som vänder på tid och energi. Som ett resultat av detta lyfter vi fram den geometriska översättning som består i att ge massorna en oföränderlig elektrisk laddning. Som Jean-Marie Souriau, en pionjär inom teorin om dynamiska grupper, visade redan 1970 ((J. M. Souriau 1964), (J. M. Souriau 1997)), har detta tillvägagångssätt gjort det möjligt att ge en rent geometrisk karaktär åt nyckelelement som har präglat den relativistiska fysikens

framsteg.

Här är den matris som är kopplad till den dynamiska Janusgruppen, från vilken det är möjligt att rekonstruera alla symmetri grupper:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^\mu & 0 & \phi \\ 0 & T^\lambda S^\nu L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{0,1\}, \phi \in \mathbb{R}, L \in \mathcal{L}, C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}$$

- **Symmetri P:**

Vi måste tillämpa $\mu = 0, \lambda = 0$ och $\nu = 1$ sedan får vi :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Denna symmetrioperatör motsvarar inverteringen av rymden, där ett element i den ortokrona gruppens andra kopplade komponent beaktas. Det är denna symmetri som vänder en foton's helicitet och förvandlar en "högerfoton" till en "vänsterfoton", vilket motsvarar fenomenet ljuspolarisation.

- **Symmetri C:**

Vi måste tillämpa $\mu = 1, \lambda = 0$ och $\nu = 0$.

Med utgångspunkt från elementet L_n i den ortokrona begränsade Lorentz-gruppen, inverterar den femte dimensionen som bär den elektriska laddningen q erhåller vi operatören "C-symmetri" eller "laddningskonjugering" (kvant) :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Det är denna symmetri som står för "materia-antimateria"-omvandlingen.

- **Symmetry T:**

Vi måste tillämpa $\mu = 0, \lambda = 1$ och $\nu = 0$.

Denna operation tar bort C-symmetrin ($Jan_{11} = 1$) och P-symmetrin ($Jan_{22} = -L_s$) enligt följande:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_t & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **CP-symmetri:**

Vi måste tillämpa $\mu = 1$, $\lambda = 0$ och $\nu = 1$.

Denna operation lägger till *C*-symmetrin ($J_{an_{11}} = -1$) och *P*-symmetrin ($J_{an_{22}} = L_s$) enligt följande:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

NB: Det kan också härledas genom att ta bort *T*-symmetrin ($J_{an_{22}} = L_s$) symmetrin från *CPT*-symmetrin med hjälp av denna operation : **CP = T · CPT**

- **CPT-symmetri:**

Vi måste tillämpa $\mu = 1$, $\lambda = 1$ och $\nu = 1$.

Vi vet att elementet L_n i den neutrala gruppen varken vänder på tid eller rum, så elementet $J_{an_{22}} = -L_n$ elementet reverserar både rum och tid för att bilda *PT*-symmetrioperatören. Men om vi lägger till symmetrin *C* ($J_{an_{11}} = -1$), bildar vi Janusgruppen *CPT* med laddningssymmetri enligt följande:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **PT symmetri:**

Vi måste tillämpa $\mu = 0$, $\lambda = 1$ och $\nu = 1$.

Genom att ta bort *C*-symmetrin ($J_{an_{11}} = 1$) från *CPT*-symmetrin med hjälp av : **PT = C · CPT** får vi :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **CT-symmetri:**

Vi måste tillämpa $\mu = 1$, $\lambda = 1$ och $\nu = 0$.

Genom att ta bort *P*-symmetrin ($J_{an_{22}} = -L_s$) symmetrin från *CPT*-symmetrin efter denna operation : **CT = P · CPT** erhåller vi :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Neutral aktör:**

Vi måste tillämpa $\mu = 0$, $\lambda = 0$ och $\nu = 0$.

Objektet rör sig genom de fem dimensionerna utan att ändra sin natur. Endast det neutrala elementet i undergruppen "orthochronous" beaktas ($Jan_{22} = L_n$):

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Det är viktigt att notera att Feynman anser att tillämpningen av *PT-symmetri* på partikelrörelse leder till skapandet av antimateria genom tillämpningen av *C-symmetri*. Följaktligen är *PT-symmetri* ekvivalent med *C-symmetri*, vilket innebär att en materiepartikel som "ses i en spegel" och rör sig bakåt i tiden är antimateria. Detta perspektiv följer av Weinbergs arbete, "Quantum Field Theory" i avsnitt 2.6, med titeln "Inversion of Space and Reversal of Time" ((Weinberg 2000)). I själva verket tillämpas ett godtyckligt val för inversionsoperatören *T*, vilket får *CPT-operatören* att bli identiteten. Således, givet att **CPT = I** följer att **PT = PT · I = PT · CPT = C**. Feynmans uppfattning baseras därför främst på kvantmekaniken, där kvantteoretikerna gör helt godtyckliga a priori-val av operatorerna *P* och *T*, begränsade av "behovet att undvika uppkomsten av negativa energitillstånd (som anses icke-fysiska)". Följaktligen måste *P-operatören* vara linjär och enhetlig, och *T-operatören* antilinjär och antienhetlig. Och för att avsluta med att på sidan 104 lägga till att: "Inga exempel är kända på partiklar som ger okonventionella representationer av inversioner, så dessa möjligheter kommer inte att utforskas ytterligare här. Hädanefter kommer inversioner att antas ha den konventionella verkan som beskrivs i avsnitt 2.6".

Negativa energitillstånd (associerade med negativt tryck) existerar eftersom de är ansvariga för accelerationen av den kosmiska expansionen, vilket framgår av Perlmutter's Nobelprisbelönade arbete 2011 ((Perlmutter et al. 1999)). Vid tiden för kvantfältteoriens uppkomst var detta fenomen dock ännu inte känt.

För Feynman är därför förekomsten av tidsomvändningsoperatören *T* i hans globala *PT-symmetri* inte till massinversion, utan omvandlar materia till antimateria med positiv massa genom laddningsinversion via *C-symmetri*.

Från Janusgruppens perspektiv, med utgångspunkt från rörelsen hos en partikel med positiv massa i 5-dimensionell rymd, omvandlar *C-symmetrin* (som bärs av inversionen av den femte dimensionen) denna partikel (denna rörelse) till en antipartikel med positiv massa som vi kan kalla en "antipartikel av Dirac-typ". Å andra sidan ger *PT* som appliceras på en partikel en antipartikel med negativ energi och massa, på grund av *T-symmetrin*, som kan kallas en "antipartikel av Feynman-typ". Ekvivalensen $PT = C$ enligt Feynman är inte längre tillämplig.

4.7 Implikationer

De betydande bidragen från denna studie påverkar främst områdena kvantmekanik och kosmologi:

- En anmärkningsvärd aspekt av **kvantmekaniken** är inverteringen av energi och massa hos vissa objekt. Detta leder till utforskandet av två kategorier av antimateria:

en typ av antimateria med positiv massa som härrör från *C-symmetri*, känd som antimateria i *Diracs mening*, är den som produceras i laboratoriet och har nyligen visat sig bete sig på samma sätt som vanlig materia under påverkan av gravitation ((Anderson 2023)). Den andra, som härrör från *PT-symmetri* med negativ massa, känd som *antimateria i Feynmans mening*, motsvarar den primordiala antimaterian som finns mellan galaxer och finns i synnerhet i form av konglomerat i den *stora deflektorn* ((Hoffman et al. 2017)). En spännande fråga är om det finns objekt med negativ massa och energi inom fysiken. Sådana enheter skulle tyda på förekomsten av negativa energitillstånd i kvantmekaniken. När det gäller *T-symmetri* antar kvantfysiker traditionellt ett antilinjärt och antiunitärt perspektiv för T-operatoren, för att utesluta negativa energitillstånd, som i allmänhet anses vara icke-intrinsikala för fysiken. På samma sätt väljs en operator P som enhetlig och linjär av liknande skäl (se (Weinberg 2000)). Dessa val ligger till grund för CPT-satsen och förstärker idén att *PT-symmetri överensstämmer* med *C-symmetri*. Å andra sidan visar antagandet av en linjär och enhetlig T-operatör att negativa energitillstånd är ett naturligt resultat i Schrödinger- och Dirac-ekvationerna (se (Debergh et al. 2018)), vilket banar väg för nya forskningsområden. Dessutom har kosmologiska observationer bekräftat att universums expansion accelererar, vilket tillskrivs negativt tryck i samband med mörk energi, vilket framgår av Perlmutters Nobelprisbelönade arbete 2011. Eftersom tryck representerar en energidensitet per volymenhet är detta fenomen direkt kopplat till den negativa energi som påverkar universums expansion.

- **Inom kosmologin** avvisar den allmänna relativitetsteorin bestämt konceptet med negativa massor, med hänvisning till uppkomsten av flyktt fenomenet och konflikter med principerna om aktion-reaktion och ekvivalens (se (Bondi 1957)). Följaktligen skulle varje ny modell som föreslår integrering av negativa energi- och masstillstånd kräva en utvidgning av relativitetsteorins grundläggande geometriska ramverk. Dynamisk gruppteori, centrerad kring olika grupper som Lorentz, Poincaré och Kaluza, ger ett ramverk för att beskriva ett kraftfritt universum som kännetecknas av en platt, icke-krökt struktur. I ett sådant universum följer partiklarna geodetiken i Minkowski-rymden i en Lorentziansk metrik eller navigerar i en fibrerad rymd som påverkas av en femte dimension, oavsett om den är öppen eller stängd. Detta teoretiska tillvägagångssätt tyder på att det finns två olika typer av materia som existerar isolerat utan ömsesidig interaktion. Partiklar i dessa rymder interagerar inte med varandra. Detta innovativa perspektiv öppnar upp för nya sätt att förstå växelverkan mellan partiklar, rum och tid.

5 Alternativ tolkning av maskhålsmodellen kopplad till en vit fontän som ett *envägsmembran*

Studien av den yttre metrik som utvecklades av K. Schwarzschild 1916, som en lösning på Einsteins ekvation i vakuum, avslöjar införandet av en hypotes: invariansen genom tidssymmetri av $t \rightarrow -t$ allmänt känt som "*statiskhet*". Detta antagande, som inte hade någon bevisad fysisk grund vid den tiden, ledde till att en korsterm $dr dt$ eliminerades i metriken. Således gjordes ett godtyckligt val av koordinater, som särskilt markerades av frånvaron av denna $dr dt$ -korsterm. Syftet med denna studie är att utforska de fysiska möjligheterna med ett nytt tillvägagångssätt baserat på införandet av en $dr dt$ -korsterm i metriken och att demonstrera möjligheten att konstruera ett *maskhål* och en *vit fontän* som ett *envägsmembran*, som förbinder två *PT-symmetriska* semi-Riemannska rum via en "*bro*" som bara kan korsas i en riktning.

5.1 Lösningar av Einstein-ekvationen som återspeglar olika topologier

År 1916 publicerade Karl Schwarzschild två på varandra följande artiklar ((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a)). Den första presenterade konstruktionen av lösningen till Einsteins ekvation i vakuum, baserat på följande antaganden:

- *Stationaritet*: Metrikens termer är oberoende av tidskoordinaten, dvs. invariant vid tidsförskjutning.
- *Isotropi* och sfärisk symmetri, dvs. invarians av $SO(3)$.
- Ingen korsad term $dr dt$.
- Lorentzian till oändligheten.

Han kompletterade snabbt denna lösning, kallad Schwarzschilds yttre metrik, med en inre metrik (Schwarzschild 1916a) som beskriver geometrin inuti en sfär fylld med en vätska med konstant densitet ρ_0 och en lösning på Einstein-ekvationen med en andra medlem. Villkoren för att länka samman de två metriker (kontinuitet i geodetiken) var uppfyllda. Fenomenen med förskjutningen av Merkurius perihelium och avböjningen av ljusstrålar bekräftar denna lösning (figur 3.4). K. Schwarzschild arbetade för att säkerställa att de villkor som styr dessa två mätvärden överensstämde med den fysiska verkligheten.

Idag fungerar t.ex. neutronstjärnor, på grund av sin häpnadsväckande densitet och enorma massa, som naturliga kosmiska laboratorier där man utforskar regioner av densitet och gravitation som är oåtkomliga i jordiska laboratorier. Låt oss titta på två olika sätt på vilka en neutronstjärna kan nå ett tillstånd av fysisk kriticitet.

I ett scenario där stjärnans densitet, ρ_0 förblir konstant, kan en karakteristisk radie \hat{r} definieras. Då uppnås fysikalisk kriticitet när stjärnans radie är :

$$R_{cr\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}}$$

med

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_o}}$$

Och så vidare,

- För den yttre metriken måste stjärnans radie vara mindre än \hat{r} .
- När det gäller den inre metriken måste stjärnans radie vara mindre än R_{cr_ϕ} eftersom en större radie leder till att trycket ökar till oändligheten i stjärnans centrum.

För det andra, för massiva stjärnor kan en imploderande järnsfär utgöra ett komplicerat scenario. Om vi antar att sfärens massa M bevaras under implosionen måste vi ta hänsyn till två viktiga kritiska radier:

- I den centrala delen ges den geometriska kritiska radien av *Schwarzschildradien*, som är :

$$R_{cr_\gamma} = R_s = 2 \frac{GM}{c^2}$$

- Utanför denna massa ges den fysikaliska kritiska radien av (38)

Med bevarandet av massan uttryckt som $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$ kan vi undersöka hur den varierande densiteten ρ_o under implosionen påverkar dessa kritiska radier. Om fysisk kriticitet uppnås under implosionen har vi $R = R_{cr_\phi}$.

Genom att ersätta ekvationen för massans bevarande med (38) får vi :

$$R = R_{cr_\phi} = 2,25 \frac{GM}{c^2} > R_{cr_\gamma}$$

Av detta kan vi dra slutsatsen att om fysisk kriticitet uppnås för en massa M inträffar innan den geometriska kriticiteten uppträder.

K. Schwarzschild påpekade också att mätningarna gällde förhållanden som vida översteg vad man förstod inom ramen för den astrofysiska verklighet som rådde på hans tid. Det är också viktigt att notera att topologin för denna geometriska lösning konstrueras genom att förbinda två avgränsade varieteter längs deras gemensamma gräns, en sfär S^2 med en area av $4\pi R_o^2$ (*stjärnans radie*).

År 1916 ansåg

Ludwig Flamm att den externa lösningen potentiellt kunde beskriva ett geometriskt objekt. Det gällde då att försöka beskriva massor som en region av icke-kontraktill rymd ((Flamm 1916)).

1934 var Richard Tolman den förste att överväga en möjlig manipulation av den mest generella metriska lösningen genom att införa en korsterm $dr dt$. Men för att förenkla eliminerade han den omedelbart genom att använda en enkel variabeländring ((Tolman 1934)).

1935 föreslog

Einstein och Rosen en icke-kontraktill geometrisk struktur i samband med en geometrisk modell av partiklar, tack vare följande koordinatförändring ((Einstein och Rosen 1935)):

$$u^2 = r - 2m$$

Den metriska lösningen blir då :

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4u^2(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Författarna erhåller därmed en icke-kontraktill geometrisk struktur, kallad en "*spatial bro*", där en sluten yta med area $4\pi\alpha^2$ som motsvarar värdet $u = 0$ förbinder två "*blad*": ett som motsvarar värdena u från 0 till $+\infty$ och det andra från $-\infty$ till 0. Notera att denna metrik inte är lorentzisk i oändligheten. Även om denna metrik, uttryckt i detta nya koordinatsystem, är regelbunden, påpekar författarna att dess determinant blir noll vid ravinens yta. I denna geometriska struktur urskiljs två avgränsade semiriemanniska ark, varav det första motsvarar $u > 0$ och den andra till $u < 0$. Det motsvarar deras korsning längs deras gemensamma gräns. Den globala rumtiden passar inte in i standarddramen för semi-Riemannsk geometri eftersom den inte uppfyller villkoret $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ vid halsen. Som framgår av (Stoica 2014) passar den in i det mer allmänna ramverket för singular semi-Riemannsk geometri, som tillåter degenererade metriska tensorer.

1939 föreslog Oppenheimer och Snyder, som utnyttjade den fullständiga frikopplingen mellan egentid och den tid som upplevs av en avlägsen observatör, i avsaknad av en korsterm i $dr dt$, att använda den externa metriska lösningen för att beskriva "*frys bilden*" av implosionen av en massiv stjärna i slutet av dess liv. Med tanke på att variabeln t identifieras med en avlägsen observatörs egentid, skapar detta ett "*freeze frame*"-motiv såsom ett kontraktionsfenomen vars varaktighet i egentid, mätt i dagar, för en avlägsen observatör verkar äga rum i oändlig tid ((Oppenheimer och Snyder 1939)). Detta dokument anses ligga till grund för modellen med svarta hål (se avsnitt 2.3.8).

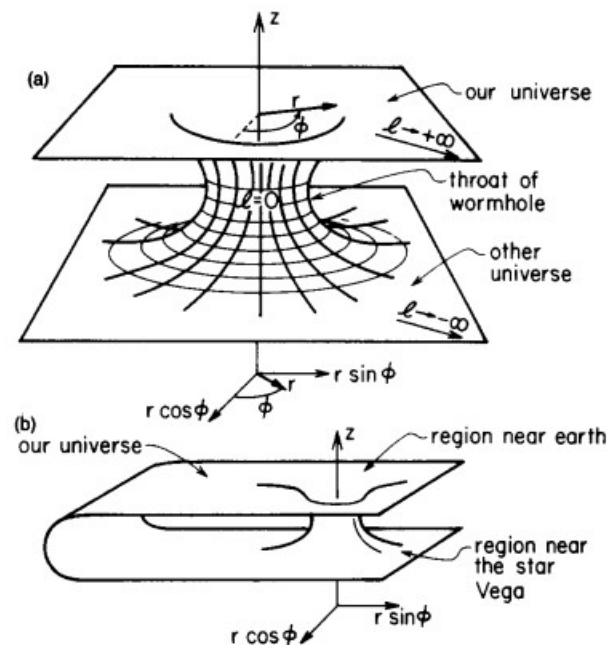
År 1960 utvidgade Kruskal den geometriska lösningen till att omfatta en kontraktill rumtid, organiserad kring en central singularitet som motsvarar $r = 0$. Geodikerna utökas för $r <$

α . Modellen med svarta hål (med sfärisk symmetri⁴) tar sedan sin definitiva form som implosionen av en massa under ett kort ögonblick, som uppfattas som en "stillbild" av en avlägsen observatör ((M. D. Kruskal 1960)). Schwarzschilds sfär kallas då för "händelsehorisonten".

År 1988 återvände M. Morris och K. S. Thorne denna geometriska tolkning genom att överge kontraktiliteten, inte i ett försök att få en geometrisk modell av lösningen, utan för att studera möjligheten till interstellära resor, genom "maskhål", med hjälp av följande metrik ((Morris och Thorne 1988)):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Genom att fokusera på studien av genomförbarheten av interstellära resor belyser författarna de enorma begränsningar som är förknippade med en sådan geometri, liksom dess instabila och övergående natur.



Figur 5.1 - Sida 396 i artikeln av M. Morris och K.S. Thorne (1988)

5.2 Staticitetshypotesen: avsaknad av korsterm $dr dt$

Begreppet "statisk" i allmän relativitetsteori avser en metrik som är stationär, dvs. invariant under den "tidsberoende" tidsförskjutningen $t \rightarrow t + t$, och statisk, dvs. invariant under den

⁴ År 1963 konstruerade Roy Kerr den axisymmetriska stationära lösningen av Einsteins ekvation i vakuum. I denna studie begränsar vi oss dock till tolkningar av den stationära lösningen med sfärisk symmetri (2.3.9).

"tidsreflekterande" symmetrin $t \rightarrow -t$, vilket naturligtvis leder till frånvaron av korstermen $dr dt$. När en metrik har en $dr dt$ -korsterm betyder det att det finns ett blandat beroende mellan rums- och tidskoordinaterna. Detta blandade beroende bryter mot invariansen genom *temporal reflektionssymmetri*, eftersom metriken inte förblir densamma under $t \rightarrow -t$ -*transformationen*. R. Wald nämner denna egendomlighet 1984 i sin bok "*General Relativity*" på sidan 120 (Wald 1984).

Vi kan också notera att på sidan 186 i (Adler, Bazin och Schiffer 1975) är kravet på *tidsreflektionssymmetri* för en linje dx^0 som kan spåras "bakåt" till $-dx^0$ (kallas "staticitet") fastställs som ett första antagande.

I själva verket avser begreppet *statiskhet* i R. Walds mening invarians genom *tidsreflektionssymmetrin* för $t \rightarrow -t$ vilket är en rent matematisk hypotes utan fysikalisk betydelse. Vår studie erbjuder dock ett annat tillvägagångssätt för detta antagande.

5.3 Konstruktion av en oändlig geometrisk lösning av Lorentzian med två ark

Betrakta Schwarzschilds yttre metrik i dess klassiska form under signaturen (+ - - -) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

5.3.1 Symmetri T

Denna metrik som konstruerades 1916 ((Schwarzschild 1916b)), som en lösning på Einsteins ekvation i vakuum, var utrustad med ett ytterligare antagande, som dess författare inte nämnde, nämligen invarians genom tidssymmetri. Det är viktigt att notera att detta antagande inte har någon fysikalisk grund och leder till eliminering av en $dr dt$ korsterm i metriken, vilket Tolman hade tänkt sig redan 1934 (sidan 239 i (Tolman 1934)). Omvänt introducerade A. Eddington den för att eliminera koordinatsingulariteten på Schwarzschildytan i $r = \alpha$ med hjälp av variabelbytet ((Eddington 1925),(Koiran 2021)):

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

Måttet blir då :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Vi vet att under dessa förhållanden, ur en avlägsen observatörs synvinkel, blir tiden för fritt fall ändlig (39), medan flykttiden förblir oändlig. Det mått för vilket flykttiden är ändlig erhålls genom att göra denna ändring av variabeln :

$$t_E^- = -t - \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

Måttet blir därmed :

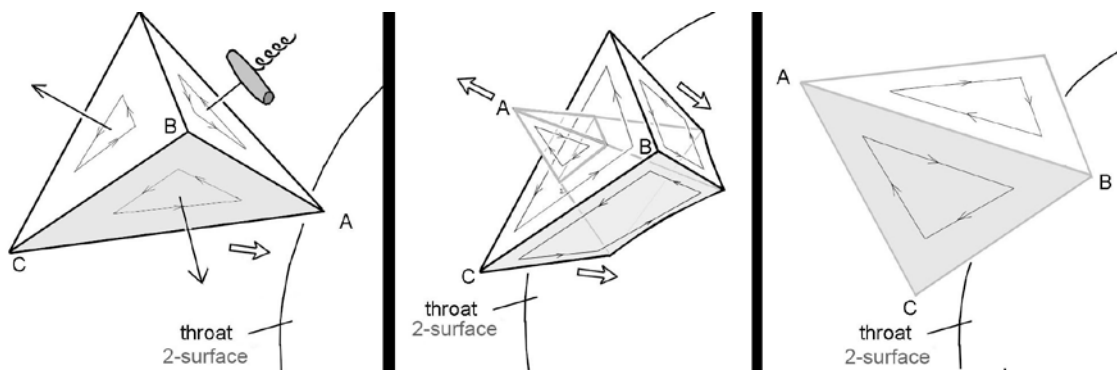
$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Detta är ekvivalent med att invertera tidskoordinaten i (40). Detta val att associera två metriker som beskriver två semi-Riemannska rum leder oss alltså till att överväga en global geometrisk lösning med två *T-symmetriska* ark förbundna med en "bro" i detta speciella koordinatsystem såväl som i Einstein och Rosens koordinatsystem ((Einstein och Rosen 1935)).

Låt oss nu visa att dessa transformationer också åtföljs av en *P-symmetri*.

5.3.2 Symmetri P

I denna representation är de radiella geodetikerna i det första arket ortogonala mot "rymdbrons" tangentplan när de når det. Samma geodeter, när de dyker upp i det andra arket, är också ortogonala mot samma tangentplan. Låt oss nu betrakta fyra punkter som bildar en tetraeder, som konvergerar mot "rymdbron" längs radiella banor. Vi kan definiera en 3D-orientering genom att definiera en korsningsriktning för punkterna på var och en av de liksidiga trianglar som bildar tetraedern. Med avseende på *r* verkar det som om dessa punkter studsar mot en stel yta, vilket gör att tetraederns orientering vänds. Uppströms och nedströms tetraeder blir då *enantiomorfa* (Figur 5.2).



Figur 5.2 - Inversion av rummet när man korsar "rymdbron"

Förändringen i orientering är redan synlig i den förenklade 2D-representationen av ett maskhål i figur 5.1. Låt oss titta på figuren ovanifrån och föreställa oss en triangel som glider längs ytan på det övre arket mot spåret. När triangeln har passerat spåret börjar den glida över det undre arket och vi ser den nu upp och ned från vår position ovanför det övre arket. Från vår synvinkel har dess orientering därför ändrats. Den fysiska betydelsen av denna förändring i orientering kommer att diskuteras i avsnitt 5.3.3.

Den geometriska strukturen hos paret av metriker (41) och (42) representerar således en "bro" som förbinder två *PT-symmetriska* semi-Riemannska rum.

Elementet i denna 2D-yta ges då av :

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} = \alpha^2 \sin(\theta)$$

Eftersom denna metrik beskriver en sfärisk 2D-yta (t.ex. en sfär med konstant radie i en 4D-rymtdid) ges det differentiella ytelementet av :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

För att hitta den minsta ytarean för denna "rymdbro" måste vi integrera detta ytelement i alla möjliga vinklar:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

Den är därför icke-kontraktill med en minsta yta på $4\pi\alpha^2$.

5.3.3 Identifiering av de två skivorna

I avsnitt 5.3.2 beskrev vi orienteringsändringen för en tetraeder som korsar maskhålsspåret i figur 5.2, och för en triangel som korsar spåret i figur 5.1. Triangelns ändrade orientering är endast synlig för en person som betraktar figur 5.1 som en helhet. Följaktligen motsvarar den inte något fysiskt observerbart fenomen, eftersom varje fysisk observatör måste befinna sig på ett av de två bladen och inte kan se det andra bladet direkt. Situationen är densamma i figur 5.2: fotot i mitten representerar situationen från en synvinkel där vi skulle kunna se båda sidorna av maskhålet samtidigt (B och C har ännu inte nått ravinen, medan A redan har korsat den och dyker upp på andra sidan). Återigen är detta omöjligt för en fysisk observatör: det verkar som om *P-symmetrin* som den beskrivits hittills inte motsvarar något fysiskt observerbart fenomen. Vi kan dock ge den en verklig fysisk innebörd med hjälp av en ytterligare ingrediens som introducerades av Einstein och Rosen (Einstein och Rosen 1935).

Man bör komma ihåg att deras motivation inte var att studera interstellära resor, som i figur 5.1, utan att beskriva elementarpartiklar med hjälp av lösningar på den allmänna relativitetsteoriens ekvationer. För att citera sammanfattningen av deras artikel: "*Dessa lösningar innebär att det fysiska rummet matematiskt representeras av ett rum med två identiska ark, där en partikel representeras av en 'bro' som förbinder dessa ark.*" Einstein och Rosen föreslår också att problemet med många partiklar skulle kunna studeras med liknande metoder, men detta arbete utförs inte i deras artikel.

Låt oss citera igen (Einstein och Rosen 1935): "*Om flera partiklar är närvarande, motsvarar detta fall sökandet efter en lösning utan singulariteter av de modifierade ekvationerna (3a), lösningen representerar ett utrymme med två kongruenta ark förbundna med flera diskreta 'broar'.*" Ur deras synvinkel är två punkter i den matematiska representationen (41) med identiska värden på θ, ϕ men motsatta värden på u därför motsvara två punkter i det fysiska rummet med samma värde på r ($r = u^2 + m$). Om vi gör samma identifiering av punkter med motsatta värden på u kan den situation som visas på bilden i mitten i figur 5.2 ses av en fysisk observatör. Den *P-symmetri* som beskrivs i avsnitt 5.3.2 har nu en verklig fysisk innebörd. Vi kommer att utveckla tolkningen av den kombinerade *PT-symmetri* i nästa avsnitt.

5.4 En annan representation av denna geometri

Genom att tillämpa följande variabeländring på ekvationerna (40) och (43) :

$$r = \alpha(1 + \text{Log ch}(\rho))$$

Vi får följande två mått:

$$ds^2 = \left(\frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{+2} - \left(\frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ - 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^+ - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$ds^2 = \left(\frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{-2} - \left(\frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ + 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^- - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

För att erhålla den metrik som strukturerar den andra skivan för $\rho < 0$ för att garantera kontinuiteten hos de geodetiska linjer som översätter materiens passage över "bron" med en ändlig flykttid på detta ark, måste vi tillämpa *symmetrin* T där tidskoordinaten är inverterad under passagen, dvs. $t_E^+ = -t_E^-$

Dessa metriker, som är lorentziska mot oändligheten, strukturerar därför två ark som motsvarar värden på ρ som varierar från 0 till $+\infty$ och från $-\infty$ à 0. På "rymdbron" för $\rho = 0$ komponenterna g_{tt} och $g_{\rho\rho}$ komponenterna i den metriska tensorn försvinna, så att endast de två sista rumsliga komponenterna $g_{\theta\theta}$ och $g_{\phi\phi}$ som är :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

I detta speciella koordinatsystem kan vi härleda att dess determinant är noll. *P-symmetrin* följer av det faktum att intilliggande punkter, denna gång explicit differentierade, härleds av $\rho \rightarrow -\rho$. Denna transformation spelar samma roll som $u \rightarrow -u$ i (41).

Genom att kombinera dessa metriska lösningar under dessa två villkor får vi ett *maskhål* och en *vit fontän* som ett *envägsmembran*, som förbinder två semi-Riemannska rum genom en "bro" som bara kan korsas i en riktning. Antag vidare att maskhålet inte leder till ett annat universum som i figur 5.1.a, eller till en avlägsen punkt i samma universum som i figur 5.1.b; utan att de två kongruenta bladen motsvarar samma punkter i det fysiska universum genom transformationen $u \rightarrow -u$ transformation (eller $\rho \rightarrow -\rho$), såsom föreslås i (Einstein och Rosen 1935) och i avsnitt 5.3.3. Vi kan då dra slutsatsen att de två bladen är *PT-symmetriska*.

I litteraturen har inverteringen av tidskoordinaten analyserats på olika sätt. I synnerhet gäller detta

- Genom J-M Souriaus teori om dynamiska grupper ((J. M. Souriau 1964),(J. M. Souriau 1997)), där det visades att den framkallar en invertering av energi. Följaktligen omvandlar tidsomvändningssymmetrin varje rörelse av en partikel med massan m till en rörelse av en partikel med massan $-m$ ((Oppenheimer och Volkoff 1939), sidan 191). På sidan 192 i samma bok erbjuder författaren en alternativ analys som undviker negativa massor. Souriau betonar att dessa alternativ måste utvärderas utifrån deras förmåga att bekräftas av experiment.
- Feynman föreslog en tolkning av antimateria som vanlig materia som rör sig *bakåt* i tiden.
- Vi vet från teoretiska analyser (*CPT-teoremet*) och experiment att elementarpartiklar följer fysikaliska lagar som är invarianter under *CPT-symmetrin*.

Den *PT-symmetri* som upptäcktes i avsnitt 5.3 kan betraktas som en *CPT-symmetri* följd av en *C-symmetri* (invertering av den elektriska laddningen). Vi skulle därför få antimateria på det andra arket. Om det andra arket redan innehåller vanlig materia skulle den kunna växelverka med antimaterian från det första arket och på så sätt utgöra en energikälla.

5.5 Slutsats

Vi introducerar en ny geometrisk konstruktion baserad på den sfäriskt symmetriska stationära lösningen av Einsteins ekvation i vakuum, med endast två fysikinspirerade antaganden: *isotropi* (invarians genom $SO(3)$) och *stationäritet* (invarians vid translation i tiden). Därmed lägger vi inte till, som gjordes tidigare utan någon verklig fysikalisk motivering, invarians genom den *tidsreversibla* symmetrin hos $t \rightarrow -t$ ("*statisk*" lösning). Denna nya uppsättning av mindre restriktiva antaganden introducerar förekomsten av en korsterm dr/dt , som det *statiska* antagandet tidigare hade förbjudit. Detta nya geometriska objekt beter sig som ett "*envägsmembran*", en kombination av ett *maskhål* och en *vit fontän* över en "*bro*". Med en Lorentziansk metrik i oändligheten förbinder denna struktur två enantiomorfa *PT-symmetriska* semi-Riemannska rum med motsatta tidspilar. Följaktligen motsvarar detta objekt täckningen av två ark av en fyrdimensionell rumtid, som presenterar sig som *PT-symmetrisk*, *ansluten* längs en "*bro*". Inspirerade av Einstein och Rosen föreslog vi att en punkt i den fysiska rymden skulle representeras av ett par kongruenta punkter, en på vardera av de två arken. Vi visade att denna identifiering av kongruenta punkter borde leda till observerbara fysiska effekter när ett objekt korsar rymdbron mellan de två arken.

5.6 Bilaga

Låt oss nu titta på fallet med materieöverföring till ett andra lager av universum, där vi är fria att definiera den utgående metriken till det andra arket. Genom att tillämpa följande nya variabeländring på Schwarzschild-metriken (42), och vända på tecknet för

integrationskonstanten $\alpha \rightarrow -\alpha$ kan vi alltså konstruera en "repulsiv" metrik på det andra arket :

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} + 1 \right|$$

Den säkerställer kontinuiteten hos geodesier från det första arket till det andra med en ändlig tid för fritt fall på det första och en ändlig tid för flykt på det andra.

Den inkommande metriken som strukturerar det första arket blir :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Och den utgående metriken som strukturerar det andra arket blir :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Med den allmänna formen :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

där $\delta = -1$ för metriken som strukturerar det första bladet och $\delta = +1$ för den utgående metriken som strukturerar det andra bladet. Eftersom de två metrikerna är symmetriska genom tidsinversion $t \rightarrow -t$ säkerställs geodesikernas kontinuitet från det ena bladet till det andra med en ändlig fritt fall-tid på det första och en ändlig flykttid på det andra.

Detta innebär att vanlig materia potentiellt skulle kunna omvandlas till antimateria med negativ massa, som sedan skulle överföras till ett separat lager i universum. Denna process innebär i huvudsak att materia omvandlas till antimateria med negativ massa. Genom att kombinera denna geometriska lösning med den lösning som tidigare utvecklats i avsnitt [5.3](#), kan vi undersöka möjligheten till interstellära resor genom att utnyttja de metriska egenskaperna hos detta andra lager.

6 Topologisk tolkning av modellen

6.1 Definition

Inom kosmologin avser topologi studiet av universums grundläggande rumsliga egenskaper som förblir invariants under kontinuerliga transformationer. Till skillnad från geometri, som fokuserar på exakta avstånd och vinklar, är topologi mer intresserad av hur rumden är sammankopplad och strukturerad på en stor skala. Den undersöker aspekter som konnektivitet, kontinuitet och gränser för det kosmiska rummet, oavsett dess exakta form och storlek.

I ett kosmologiskt sammanhang hjälper topologin till att förstå universums övergripande struktur, inklusive frågor som om universum är ändligt eller oändligt, om det har "kanter" eller är obegränsat, och om det kan vara anslutet på icke-triviala sätt (som i modeller av universum med flera anslutningar). Detta inkluderar att undersöka universums storskaliga form och struktur, som bestäms av fördelningen av galaxer, kosmisk strålningsbakgrund och andra astrofysiska observationer.

Topologi är särskilt relevant för avancerade kosmologiska modeller, såsom Janus kosmologiska modell, eftersom den ger ett ramverk för att utforska begrepp som universum i flera lager, konnektivitet mellan olika regioner i rumtiden och andra icke-intuitiva egenskaper som kan uppstå från avancerad teoretisk fysik.

Kort sagt är topologi inom kosmologin ett kraftfullt verktyg för att utforska och förstå den grundläggande strukturen och naturen i vårt universum, bortom begränsningarna i klassisk geometri.

Innan vi fortsätter med detta kapitel är det viktigt att läsa och förstå serietidningen *Topologicon* (Petit 1985), skriven av Dr. Jean-Pierre Petit, som finns fritt tillgänglig på denna webbplats <http://www.savoir-sans-frontieres.com/>. Detta verk populariserar begreppen topologi i förhållande till kosmologi och allmän relativitetsteori. Detta kapitel handlar huvudsakligen om konceptuella verktyg som är ganska kontraintuitiva. Vi rekommenderar därför starkt att du läser denna seriestripp i förväg för att få en bättre förståelse.

6.2 Maskhålsmodellen

Genom att utveckla den nya tolkningen av maskhålsmodellen som diskuterades i föregående kapitel 5, föreslår vi ett djupare topologiskt perspektiv i förhållande till den allmänna relativitetsteorin. Tänk till exempel på ravinens sfär S^2 som förbinder två lager av rumtid genom *PT-symmetri*. Kan denna konfiguration vara analog med ett projektivt plan? Inom topologin är ett projektivt plan en icke-orienterbar yta med unika egenskaper, t.ex. linjer som divergerar vid en punkt men möts vid den andra. Detta tyder på att förbindelsen mellan rumtidens lager genom maskhålsklyftan skulle kunna trotsa den traditionella orienteringen av rummet och påminna om det projektiva planet.

Vår hypotes baseras på att den metriska determinanten är noll på denna yta, vilket skulle kunna tyda på en icke-orienterbar 2D-natur. Om denna sfär är sluten och har en avgränsad yta kan den identifieras med ett projektivt plan. P^2 . Även om denna idé kan verka kontraintuitiv, följer den direkt av objektets topologi såsom den beskrivs av Schwarzschilds yttre lösning (42).

I samband med den allmänna relativitetsteorin är begreppet elementarvolym i krökt rumtid av avgörande betydelse. Den elementära volymen i dimensionerna n definieras av en Riemannsk metrik, ges av $dV = \sqrt{|\det(g)|} d^n x$ där g är den metriska tensorn och $\det(g)$ dess determinant. Denna elementära volym är inte bara produkten av koordinatdifferentialer, som i den euklidiska rummen, utan modifieras av rumtidens krökta struktur. Faktorn $\sqrt{|\det(g)|}$ återspeglar hur rumtiden förvrängs av närvaron av massa och energi, i enlighet med Einsteins ekvationer. I regioner med hög krökning kan denna elementära volym bete sig på kontraintuitiva sätt, vilket avslöjar fascinerande och ibland överraskande topologiska egenskaper hos rumtiden.

Kom ihåg att sfären S^2 har en metrik som definieras av uttrycket :

$$ds^2 = \alpha^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Metriken för en sfär är en matematisk funktion som beskriver avstånden mellan punkter på sfärens yta. Eftersom denna metrik beskriver en 2D-sfär (t.ex. en sfär med konstant radie i en 4D-rymdtid), ges det differentiella ytelementet av :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Och det är faktiskt ett ytelement, eftersom en sfär är en tvådimensionell yta i tredimensionell rymd. När vi integrerar detta ytelement får vi den yta som beskrivs av uttrycket :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

Detta motsvarar ytan på en sfär med radien α . Vi kan också se att denna yta är analog med ytan hos ett projektivt plan P^2 ett begrepp som sällan behandlas i standardgeometri.

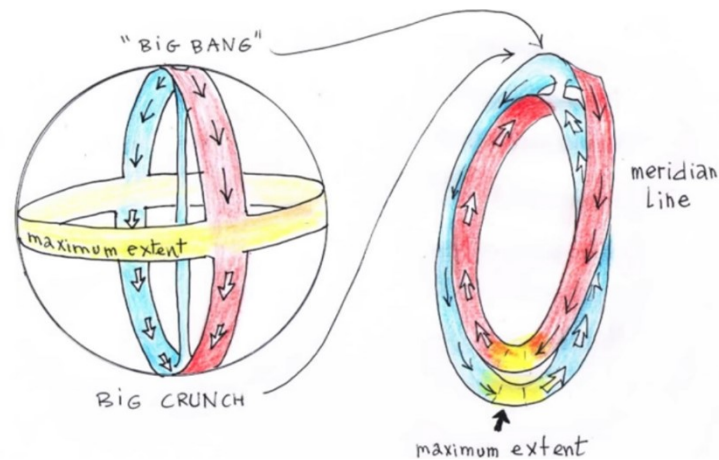
6.3 Modell av universum

I geometrin kan en sfär S^2 lätt att visualisera eftersom vi kan *placera* den i vårt välbekanta tredimensionella rum R^3 . Ett projektivt plan, t.ex. P^2 kan inte *nedsläppas på* samma sätt. Ett projektivt plan är en icke orienterbar typ av yta, vilket innebär att det inte kan läggas ut platt i det tredimensionella rummet utan att korsa sig självt. För att visualisera ett projektivt plan måste vi använda "*immersion*", en metod där ytan *skär sig själv* enligt en uppsättning *självskärningar*. Detta koncept utmanar vår traditionella förståelse av former och utrymmen.

För att förstå mer högdimensionella projektiva plan, t.ex. P^3 eller P^n måste vi överge visuella representationer och börja tänka abstrakt. Denna mentala förändring är nödvändig för att utforska komplexa topologiska strukturer som går bortom våra egna dimensioner.

Till exempel kan en sfär vändas om vi betraktar varje remsa som bildar de meridianer som täcker den som kapabel att korsa sig själv genom "nedsänkning" för att bilda en tvåskiktstäckning av en Möbiusremsa med tre halvvriddningar ((Morin och Petit 1978)). Denna "självkorsande" effekt är endast kopplad till denna beläggnings nedsänkning i vår tredimensionella representationsrymd R^3 .

Vi kan då göra polen M av ett ark av denna sfär S^2 med den motsatta polen M' på det andra arket med samma beläggning. Detta kallas "sammanfogningen av de antipodala punkterna". Denna omvandling gör det möjligt för tidspilarna, som bärs av sfärens meridianer, att mötas men i motsatt riktning på varje ark av samma beläggning som i figur 6.1.



Figur 6.1 - Vända en sfär genom att förena de antipodiska punkterna

OBS: Möbiusbandet är en yta med en enda sida och en enda kant. Det är ett klassiskt matematiskt objekt inom topologin, en gren av matematiken som studerar egenskaperna hos rum som förblir invarianta under kontinuerliga transformationer. Möbiusbandet kan skapas genom att man tar en pappersremsa, vrider den en halv gång och sedan fogar samman de två ändarna av remsan. Denna konfiguration ger en yta som, om du börjar dra en linje längs den, kommer att återvända till sin startpunkt efter att ha korsat båda "sidorna" av remsan utan att någonsin lyfta pennan.

Det som gör Möbiusbandet fascinerande är dess icke-orienterbara natur. I ett normalt utrymme, t.ex. ett pappersark, finns det en tydlig skillnad mellan "ovanför" och "nedanför". På ett Möbiusband finns det dock ingen sådan distinktion: när du rör dig över ytan rör du dig sömlöst från topp till botten och vice versa.

Möbiusbandet används ofta för att illustrera viktiga begrepp inom topologi och geometri, t.ex. idén om en ensidig yta och gränserna för vår rumsliga intuition. Inom teoretisk fysik och kosmologi kan Möbiusbandet också användas som en modell för att utforska komplexa rumsliga strukturer och fenomen, t.ex. rumtidens vriddning eller kopplingen mellan olika dimensioner.

PT-symmetri kan t.ex. tolkas som ett projektivt plans väg från en beklädnadsplåt till en annan (Figur 6.2).

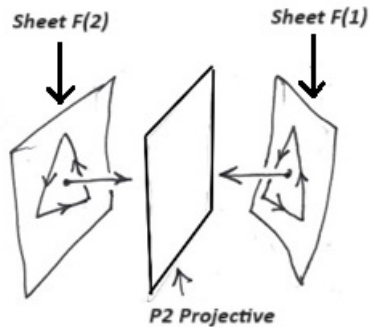
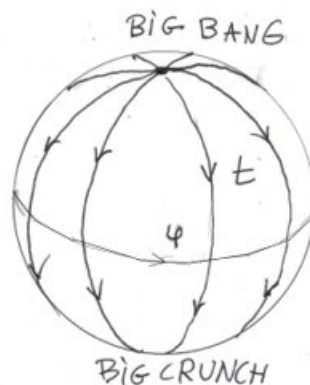


Bild 6.2 - Projektor P^2 Projektor

För att ett geometriskt objekt skall kunna utrustas med ett funktionellt koordinatsystem krävs att determinanten för dess metrik är icke-noll. Särskilt i samband med "gaussiska koordinater" är denna princip avgörande. I en fyrdimensionell rymd gör detta krav att rumden kan folieras av en uppsättning tredimensionella hypersurfaces. Dessa hypersurfaces är "ortogonala" mot geodetiken, dvs. vinkelräta mot de banor som ett objekt i fri rörelse skulle följa, och karakteriseras enbart av tidskoordinaten. Distinktionen mellan "tidspilen" och "egentiden" är viktig här: tidspilen avser en enkelriktad tidsdimension, medan egentiden är ett tidsmått som är specifikt för observatören.

I samband med den tvådimensionella rumtid vi undersöker utförs foliation med hjälp av en serie cirklar. Varje punkt på dessa cirklar kan associeras med en "tidsvektor", som är ortogonal till cirklarna. Ortogonalitet innebär i detta fall att tidsvektorn är placerad vinkelrätt mot ytan av varje cirkel, vilket bildar en distinkt temporal komponent av rumtiden (Figur 6.3).



Figur 6.3 - Illustration av "tidsvektorn" ortogonal mot en cirkel i en familj av cirklar som följer en sfär S^2

Trots detta har detta "objekt" två singulära punkter, nämligen dess poler, där azimuten är odefinierad. Dessa poler representerar oundvikliga "mesh-singulariteter". Det finns två eftersom Euler-Poincaré-egenskapen för detta objekt är lika med 2. Om vi till exempel betraktar en enkel polyeder som en tetraeder som en approximation av sfären, som är en pyramid med en triangulär bas, är dess Euler-Poincaré-egenskap 4 (hörn) $- 6$ (kanter) $+ 4$

(ytor) = 2. Euler-Poincaré-karakteristiken för en sfär S^n är lika med 2 om n är jämn och noll om n är udda (5.3.3).

Ur vår synvinkel skulle universum vara en sfär S^4 med två singulariteter, Big Bang och Big Crunch. En fyrdimensionell sfär S^4 är analog med en vanlig sfär och utvidgar konceptet till högre dimensioner. Om vi betraktar denna sfär med dess två poler, Big Bang och Big Crunch, kan den kartläggas med "paralleller" (liknande parallella cirklar på en 2D-yta S^2). Denna foliationsprocess innebär att lager, eller "skivor", skapas över sfären, vilka är analogs med de linjer som representerar breddgrader på jorden. Orienteringen mellan det förflutna och framtiden blir då enhetlig överallt. I det här sammanhanget syftar den förflutna-framtida orienteringen på tidsriktningen från Big Bang till Big Crunch, som blir sammanhängande i hela denna folierade struktur. I förhållande till denna normal till parallella ytor är rumtiden orienterbar, vilket innebär att det finns en väldefinierad uppfattning om "upp" och "ner" i rumtidens struktur.

Genom att "vika" denna yta (antingen S^2 eller S^4), skapar vi en situation där två paralleller överlappar varandra. Vikning innebär i detta sammanhang att man manipulerar sfärens struktur på ett sådant sätt att olika delar av ytan kommer i kontakt med varandra. Deras tidsvektorer blir då antiparallella eller motsatta, som nämnts tidigare. Tidsvektorn är ett sätt att representera tidens riktning vid varje punkt i rumtiden. När dessa vektorer blir antiparallella betyder det att tidsriktningen är omvänd vid kontaktpunkterna. Detta leder till vad vi skulle kunna kalla en "inducerad orientering". Med inducerad orientering menas här den nya orientering av tidsvektorerna som blir resultatet av vikiningsprocessen. Vid varje punkt i denna rumtid, som är strukturerad som ett tvådubbelt överdrag av en Möbiusremsa med tre halvvriddningar (tvådubbelt överdrag), verkar den "antipodala materian" (både rumslig och tidsmässig) "retrokronisk". En Möbiusremsa med tre halvvriddningar är en enkelsidig yta som kan visualiseras genom att vrida en pappersremsa tre gånger innan ändarna sammanfogas.

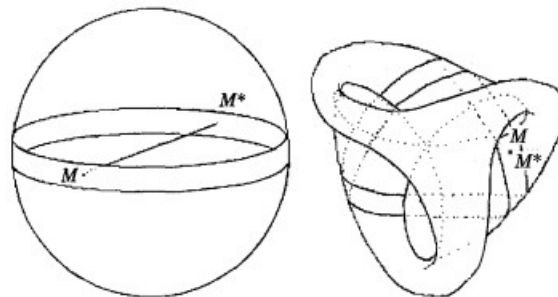
I Jean-Pierre Petits artikel (Petit 1994) behandlas universums interaktion med det gravitationsfält som skapas av dess antipod, med antagandet att interaktionslagarna är :

1. Vanliga massor attraheras av varandra enligt Newton.
2. Enligt Newton attraherar "antipodiska" massor varandra.
3. Vanliga massor och "antipodiska" massor stöter bort varandra enligt en "anti-Newton"-lag.

Denna hypotes ledde honom till att "vika" universum genom att ge det topologin av en "två-arkstäckning" av en 2D-yta.

Sålunda "vikt" blir sfären S^2 (sluten yta) till att täcka en annan sluten yta, Boyytan, som har en enda pol och vars Euler-Poincaré-karakteristik är lika med 1 enligt figur 6.4. Boyytan är

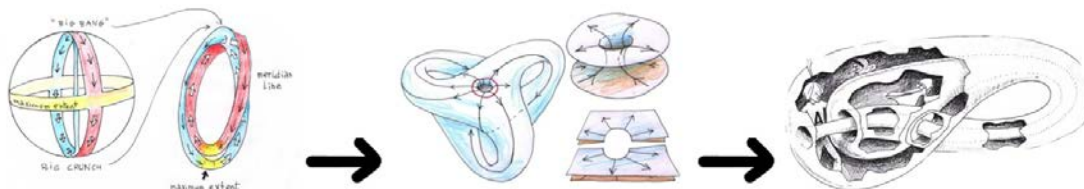
en unik icke-orienterbar 3D-yta med en enda yta och en enda kant, som har en singular punkt där alla antipodala punkter konvergerar. Boyytan är ett exempel på en icke-orienterbar yta i 3D med en enda yta och en enda kant. Den är fascinerande eftersom den, till skillnad från den klassiska sfären, har en singular punkt där alla antipodala punkter konvergerar. Det innebär att om du börjar dra en linje på Boys yta kommer du så småningom att återvända till din startpunkt utan att någonsin ha korsat en kant eller använt den andra sidan, eftersom det inte finns några sådana.



Figur 6.4 - Närområdet till ekvatorn för en 2-sfär och dess läge på en Boy-yta

I detta skede "sammanfaller" Big Bang och Big Crunch.

I stället för denna polära singularitet skulle man då kunna tänka sig ett "rör" som förbinder dessa två mesh-singulariteter:



Figur 6.5 - Pojkens yta i mitten efter foliering av sfären S^2 och Klein-flaskan K^2 till höger

Den singulara karaktären försvinner och objektet blir då fodret i en Klein-flaska K^2 Kleinflaska, en icke-orienterbar yta utan distinkt gräns eller inre, vars Euler-Poincaré-karakteristik är noll, som visas i figur 6.5. Kleinflaskan är en annan icke-orienterbar yta som inte har någon distinkt gräns eller inre. Föreställ dig ett Möbiusband vars kanter också är sammanfogade. Till skillnad från Boy-ytan kan Klein-flaskan inte representeras i vårt tredimensionella rum utan självskärning. Dess intresse ligger i dess topologiska beteende, där begreppen "insida" och "utsida" inte är separerade, vilket ger en användbar representation för vissa idéer inom topologi och teoretisk kosmologi.

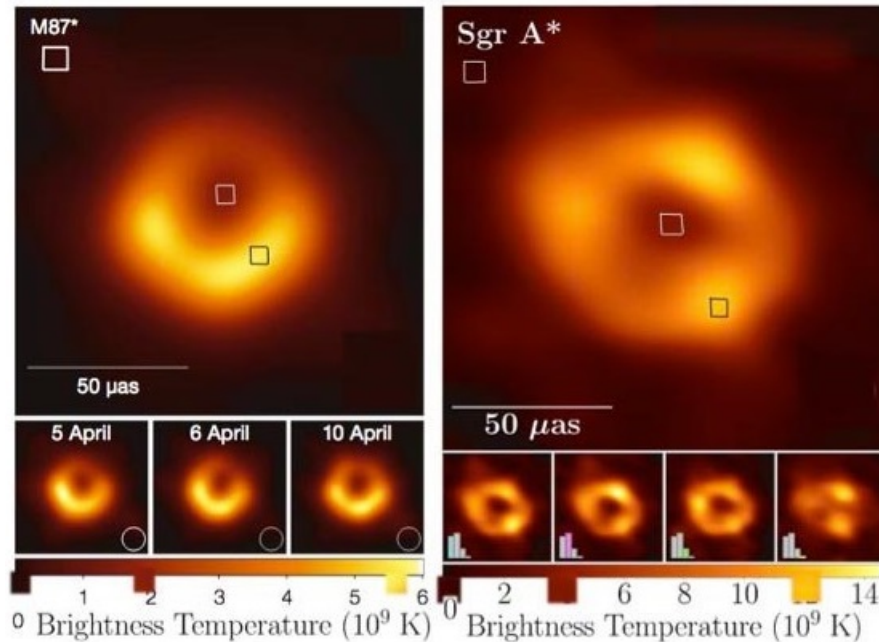
Jag tror att begränsningarna inom teoretisk fysik och kosmologi under 1950-talet kan tillskrivas området försening med att anamma topologi. Topologi, studiet av egenskaper som bevaras genom kontinuerliga deformationer, kunde ha erbjudit nya sätt att förstå universums struktur och dess komplexa strukturer.

7 Alternativ tolkning av de supermassiva subkritiska objekten M87 och Sagittarius A*.

De första bilderna av supermassiva objekt i galaxernas centrum, som publicerades i *Astrophysical Journal*, har huvudsakligen tolkats som gigantiska svarta hål. Denna tolkning bygger på att det inte finns några allmänt accepterade alternativa förklaringar. I denna studie granskas dessa bilder på nytt, särskilt bilderna av objekt i centrum av galaxen M87 och Vintergatan. Den belyser möjligheten av subkritiska supermassiver, vars radie endast är 5,72% kortare än Schwarzschildradien som beräknats utifrån deras massa. Vi kommer också att se att de centrala delarna av dessa objekt är mörkare på grund av den gravitationella rödförskjutningseffekten, som representeras av $z + 1$. Denna förskjutning beräknas som förhållandet mellan våglängden på det ljus som mottas av en avlägsen observatör och det som avges från ytan, vilket motsvarar förhållandet mellan de högsta och lägsta temperaturer som observerats från centrum till koronan hos dessa objekt, ett värde som är anmärkningsvärt nära 3. Vi kommer att undersöka tanken att deras stabilitet kan bero på en balans mellan gravitationell kollaps, på grund av en fysisk kriticitet som inträffar långt före geometrisk kriticitet, och ett extremt högt strålningstryck med konstant densitet som utgår från deras centrum, proportionellt mot kvadraten på ljushastigheten - ett fenomen som först övervägdes av Karl Schwarzschild i hans andra uppsats som publicerades i februari 1916. Vår analys syftar till att berika vår förståelse av supermassiva objekt i galaxernas centrum genom att föreslå en alternativ tolkning.

7.1 Inledning

Bilderna av de två supermassiva objekten i centrum av galaxen M87 och Vintergatan har väckt stort intresse i media och beskrevs omedelbart som "*de första bilderna av gigantiska svarta hål*". Dessa bilder publicerades i den ansedda tidskriften *Astrophysical Journal* (M87 (Akiyama 2019) och Sagittarius A i mitten av Vintergatan (Akiyama 2022)). Nedan visas en stapel som kopplar färgtonen till vad som kallas "*ljushetstemperaturen*":



Figur 7.1 - Bilder av objekten M87 och Sagittarius A

I figur 7.1, till vänster, publicerades den första bilden av objektet i centrum av galaxen M87 1999, med en lägsta luminositetstemperatur på 1,8 miljarder grader och en högsta temperatur på 5,7 miljarder grader, med ett förhållande nära 3. Tre år senare, 2002, publicerades en andra bild till höger, som visar minimitemperaturer på 4 miljarder grader och maximitemperaturer på 12 miljarder grader, också med ett förhållande nära 3. Dessa två objekt har mycket olika massor, det första är 1 625 gånger mer massivt än det andra. Det verkar märkligt att ett moln av het gas i förgrunden för båda objekten under dessa omständigheter har sådana egenskaper att förhållandet mellan högsta och lägsta temperatur är så nära 3 i båda fallen. Om bilden av ett tredje objekt ledde till samma observation skulle det vara klokt att ifrågasätta dessa objekts sanna natur.

De första bilderna av supermassiva objekt i galaxernas centrum associerades med gigantiska svarta hål, och den centrala delen som inte är helt svart verkar bero på ljuset från en skiva av het gas som kretsar kring det svarta hålet. Men som vi kommer att se senare i denna studie kan en neutronstjärna nå kriticitet under två scenarier:

- På ett abrupt sätt, vilket innebär att en supermassiv stjärna plötsligt kollapsar på sin järnkärna innan den omvandlas till en supernova.
- I binära system ackumulerar en underkritisk neutronstjärna långsamt massa genom att absorbera den gas som avges av en kompanjonstjärna genom en "stjärnvind". Den kritiska massan till vilken den potentiellt kan genomgå ytterligare omvandling beror på tillståndsekvationen för materian inuti neutronstjärnan och kan variera. Enligt nuvarande modeller uppskattas den kritiska massa som krävs för ytterligare omvandling ligga i intervallet 2-3 gånger solmassan, nära Tolman-Oppenheimer-

Volkoff-gränsen.

Det speciella med en sådan modell är att det massiva objektet måste ha en ljstemperaturkvot på 3 mellan dess korona och dess centrum (maximi- och minimitemperaturer). Som vi kommer att visa senare skulle en mer sammanhängande alternativ tolkning vara att tillskriva mörkningen av den centrala delen av dessa objekt till en gravitationell rödförskjutningseffekt, som dilaterar eller saktar ner tiden nära deras horisont.

Detta beror på att ett massivt föremål böjer rumtiden runt det, vilket påverkar inte bara massiva föremåls bana utan även ljusets. När en foton passerar nära ett sådant objekt böjs dess bana på grund av denna krökning av rumtiden, ett fenomen som kallas gravitationslinsning (se figur 3.4). Men det är inte bara fotonens bana som förändras: när den rör sig bort från det massiva objektet förlorar fotonen energi för att undkomma det starka gravitationsfältet. Denna energiförlust resulterar i en minskning av dess frekvens, vilket förlänger dess våglängd mot den röda änden av ljusspektrumet, ett fenomen som kallas gravitationell rödförskjutning.

För att beräkna den energi som en foton förlorar på grund av gravitationell rödförskjutning är det viktigt att förstå att en fotons energi är direkt relaterad till dess frekvens f genom ekvationen $E = hf$ där h är Plancks konstant.

Om vi betraktar en foton som sänds ut med en frekvens f_e och observeras med en minskad frekvens f_r på grund av den gravitationella rödförskjutningen, kan den energi som fotonen förlorar uttryckas som skillnaden mellan den ursprungliga och den slutliga energin :

$$\Delta E = h(f_e - f_r)$$

Med hjälp av förhållandet mellan frekvens och våglängd ($f = \frac{c}{\lambda}$), där c är ljusets hastighet, kan denna ekvation skrivas om i termer av våglängder :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_r} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

Och med hjälp av definitionen av gravitationell rödförskjutning $z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}$ kan vi omformulera för att få ett uttryck i termer av z :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_e(1+z)} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

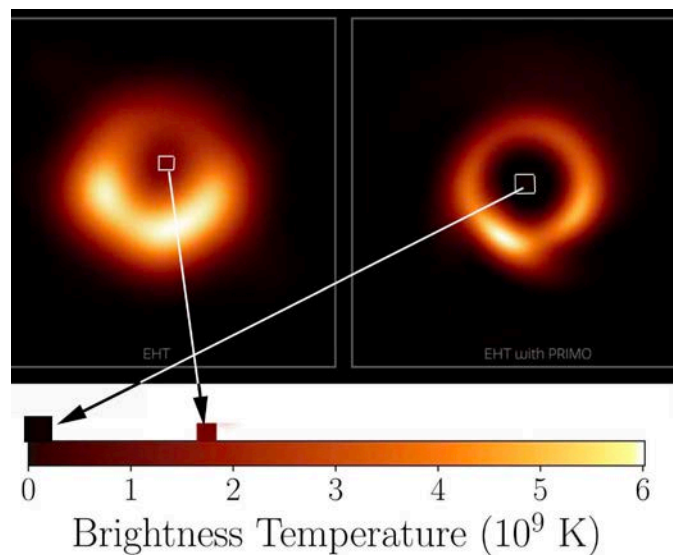
$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda_e} \left(\frac{z}{1+z} \right)$$

Denna ekvation visar att den energi som en foton förlorar på grund av gravitationell rödförskjutning beror på den våglängd vid vilken den sändes ut och värdet på den gravitationella rödförskjutningen z det negativa tecknet indikerar en energiförlust.

Denna energiförlust är inte bara uppenbar. Till exempel är den kosmiska mikrovågsbakgrunden den strålning som har genomgått den största gravitationella rödförskjutningen, med en faktor z på ca 1 100, vilket motsvarar en mycket låg temperatur och energi på ca 3 Kelvin (-270°C), långt under den ursprungliga energin (se figur 3.10).

Det är också viktigt att notera att de mycket fina, kollimerade jetstrålar som observerats nära supermassiva objekt tyder på att det finns ett kraftfullt magnetfält som motverkar objektets kollaps under inverkan av gravitationen genom att utöva ett intensivt motverkande magnetiskt tryck. Dessa objekt, liksom neutronstjärnor vid sin maximala massa, är underkritiska, vilket resulterar i en gravitationell rödförskjutningseffekt som är begränsad till 3. Detta tyder på att dessa objekt skulle kunna vara massiva underkritiska objekt.

När en observation inte stämmer överens med teorin inom vetenskapen är det vanligtvis teorin som ifrågasätts. Men i denna mycket aktuella artikel som publicerades i *Astrophysical Journal* (Medeiros 2023) modifierade forskarna observationerna för att få dem att stämma överens med modellen för svarta hål. De genererade syntetiska bilder av svarta hål genom att manipulera olika parametrar som massa, rörelsemängdsmoment etc. och valde den som bäst matchade de observerade data med hjälp av PRIMO-programvaran som visas i figur 7.2.



Figur 7.2 - Syntetisk bild av det svarta hålet M87 som behandlats av PRIMO till höger jämfört med originalbilden till vänster

Resultatet bekräftade teorin, men väckte frågor om den vetenskapliga stringensen och objektiviteten i forskningen.

7.2 Alternativ tolkning av fenomenet

En alternativ tolkning är att tillskriva denna färgvariation från centrum till utkanten en gravitationell rödförskjutning, med $z = 2$ vilket leder till en förlängning av våglängden med en faktor på $1 + z = 3$. Vad kan vi säga om sådana objekt?

7.2.1 Jämförelse av fysiska och geometriska kritiska egenskaper

I avsnitt 5.1 undersökte vi Schwarzschild-lösningarna till Einstein-ekvationerna och lyfte fram Schwarzschilds yttre metrik och motsvarande inre metrik för en vätska med konstant densitet ρ_0 . Dessa lösningar bekräftades av fenomen som förflyttningen av Merkurius perihelium och gravitationslinsfenomenet (figur 3.4). Karl Schwarzschild ville försäkra sig om att de villkor som styr dessa två mått var förenliga med den fysiska verkligheten.

I ett scenario där stjärnans densitet, ρ_0 förblir konstant, kan en karakteristisk radie \hat{r} definieras. Om vi betraktar den inre metriken som Schwarzschild publicerade i sin andra uppsats i februari 1916 (Schwarzschild 1916a) :

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Schwarzschild ansåg att ljusets hastighet c som lika med ett. Uttrycket $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ skrivs som $\frac{3c^2}{\kappa\rho_0}$. Därefter definierade K. Schwarzschild en konstant κ som lika med $8\pi k^2$ "där k^2 är Gauss gravitationskonstant", vilket sedan gjorde det möjligt för honom att införa den karakteristiska radien \hat{r}^2 lika med $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ vilket också är radien för den cirkel som utgör en del av meridianen för Flammytan ((Oppenheimer och Snyder 1939)). Således leder den tidigare ekvationen oss till:

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \hat{r}^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Sedan, när K. Schwarzschild använder vinkeln χ för att lokalisera punkterna inuti sfären, byter han till variabeln r genom att tillämpa variabeländringen $r = \hat{r}\sin\chi$. Detta ger oss den moderna formen av metriken. Tolman gav en exakt förklaring 1934 och gav följande ((Tolman 1934)) :

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 c^2 dt^2$$

där r_n är stjärnans radie och \hat{r} är en stjärnkonstant som en funktion av dess densitet ρ_0 . Notera att den formulerar ordningen på termerna i metriken enligt signaturen $(- - +)$ men bevarar tecknen för respektive termer.

Betrakta en stationär observatör ($dr = d\theta = d\phi = 0$) som befinner sig inuti en stjärna. Metriken blir :

$$ds = cd\tau = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right] cdt = f(r)dt$$

där τ är den egentid som observeras av den stationära observatören inuti stjärnan och $f(r)$ är tidsfaktorn.

Som vi såg i avsnitt 5.1, när tidsfaktorn är noll i stjärnans centrum, uppnås fysisk kriticitet innan geometrisk kriticitet uppstår, när stjärnans radie bara är 5,72% mindre än den kritiska radien \hat{r} som härleds från dess densitet:

$$r_n = R_{cr\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}}$$

7.2.2 Gravitationsrödförskjutning nära fysisk kritikalitet

Schwarzschilds lösning togs sedan upp, i en annan form, av Tolman ((Tolman 1934)), Oppenheimer ((Oppenheimer and Snyder 1939)) och andra ((Adler, Bazin, and Schiffer 1975)), vilket ledde till tillståndsekvationen, känd som Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) ekvationen, presenterad i sin differentialform:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2} \left(\frac{4\pi G}{c^4} pr^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}$$

Det integrerade värdet av detta gavs av Karl Schwarzschild ett århundrade tidigare (se figur 7.3), där han i sin andra artikel (Schwarzschild 1916a), publicerad i februari 1916, beskriver geometrin inuti en sfär fylld med en inkompressibel vätska med konstant densitet ρ_0 :

$$f_2 = \frac{3}{\alpha \rho_0} \sin^2 \chi, \quad f_4 = \left(\frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right)^2, \quad f_1 f_2 f_4 = 1. \quad (29)$$

$$\longrightarrow \rho_0 + p = \rho_0 \frac{2 \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left(\frac{\alpha \rho_0}{3} \right)^{-3/2} \left[\frac{9}{4} \cos \chi_a \left(\chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi \right) - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \right]. \quad (31)$$

Figur 7.3 - Trycklagen som fastställdes 1916 av Karl Schwarzschild

I denna formel justeras ljusets hastighet alltid till ett enhetsvärde. Följaktligen är denna formel ekvivalent med:

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{\cos \chi - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \right)$$

Sedan, som framgår av avsnitt 7.2.1, ändrade K. Schwarzschild till variabeln r genom följande enkla ändring av variabeln:

$$r = \hat{r} \sin \chi$$

Trycket blir noll vid ytan av stjärnan för $\chi = \chi_a$ med en radie som ges av :

$$r_a = \hat{r} \sin \chi_a$$

Stjärnans centrum motsvarar $\chi = 0$ så trycket blir :

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{1 - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - 1} \right)$$

Detta innebär en maximal gräns för denna radie för $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$ betydelse :

$$r_a = R_{\text{cr}\phi} = \hat{r} \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428 \hat{r}$$

Men om vi betraktar den massa som motsvarar en fysikalisk kriticitet :

$$M_{\text{cr}\phi} = \frac{4}{3} \pi \hat{r}^3 \rho_0$$

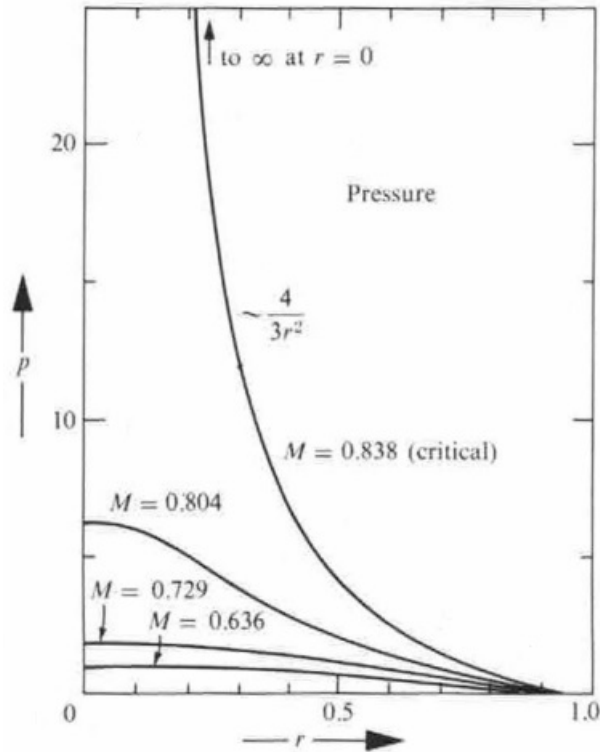
och den som motsvarar geometrisk kritikalitet :

$$M_{\text{cr}\gamma} = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0$$

får vi följande samband :

$$M_{\text{cr}\phi} = \left(\frac{8}{9} \right)^{\frac{3}{2}} M_{\text{cr}\gamma} = 8.838 M_{\text{cr}\gamma} = 2.5 M_{\text{solar}}$$

Detta värde är förenligt med massorna hos vissa neutronstjärnor som vi har kunnat härleda direkt från tillgängliga observationer och för vilka Thorne, Wheeler och Misner i sin bok (sidan 611 i (Thorne, Wheeler, and Misner 1973)) uppskattade den kritiska massan bortom vilken trycket flyger mot oändligheten, vilket visas i figur 7.4 :



Figur 7.4 - Variation av trycket inuti en neutronstjärna med konstant densitet

Naturligtvis kommer vi aldrig att få bilder av neutronstjärnor som är jämförbara med bilderna av objekten i centrum av M87 och Vintergatan. Låt oss därför beräkna den gravitationella rödförskjutningseffekten $z + 1$ (motsvarande massiva himlakroppar nära denna fysiska kriticitet. Denna effekt påverkar ljuset som avges från deras yta i en radiell riktning mot en avlägsen observatör, som kommer att uppfatta det med en utsträckt våglängd (rödförskjutning). λ_r våglängd (rödförskjutningen). Den ges av:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_a}}}$$

I den centrala delen definieras dock den geometriska kriticitetsradien av Schwarzschildradien, som är :

$$R_s = \frac{2GM_{cr\gamma}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \left(\frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \right) = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r_a^3 = \frac{r_a^3}{\hat{r}^2}$$

Då ger den gravitationella rödförskjutningen :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_a^2}{\hat{r}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_a c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3$$

Detta är exakt det värde som kan härledas ur förhållandet mellan den högsta och lägsta temperatur som kan härledas ur de två första bilderna av svarta hål i centrum av galaxerna

M87 och Vintergatan. Bilderna av dessa supermassiva objekt skulle alltså också kunna motsvara subkritiska enheter, där trycket i centrum - definierat som energitätheten per volymenhet - skulle vara antingen oändligt eller åtminstone extremt högt.

7.2.3 Variation av ljushastighet och tryck i plasma med konstant densitet

Låt oss nu betrakta en vätska (väteplasma) med en antagen konstant densitet. Vid en temperatur under 3000° ges trycket inuti av :

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3}$$

där v är den genomsnittliga termiska omrörningshastigheten för de partiklar som utgör plasmat. Således är resonemanget att "om trycket p går mot oändligheten, så bör denna hastighet också gå mot oändligheten, vilket strider mot en central princip i den speciella relativitetsteorin, "kausalitetsprincipen", enligt vilken ingen fysisk effekt kan fortplanta sig med en hastighet $v > c$ " ([Thorne, Wheeler och Misner 1973]), skulle leda till en fysikalisk aberration.

I denna region av rumtiden blir trycket i plasman dock strålände:

$$p_r = \frac{\rho_0 c^2}{3}$$

Om vi vill öka detta strålningstryck vid konstant densitet, kan detta endast uppnås genom att beakta en variation i ljusets hastighet i mediet, vilket Karl Schwarzschild var den förste att tänka på (Schwarzschild 1916a):

Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3 \cos \chi_a - \cos \chi_s}, \quad (44)$$

Figur 7.5 - Variation i ljusets hastighet i en sfär med konstant densitet

Så, som han påpekade i sin artikel, följer ökningen av ljusets hastighet ökningen av trycket. Vad händer när detta tryck stiger, liksom värdet på ljushastigheten? Helt enkelt, det framgår tydligt av Karl Schwarzschild (sidan 433 i (Schwarzschild 1916a)) att dessa två storheter blir oändliga för $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$ vilket motsvarar $r = R_{cr\phi}$ (44) som vi såg i avsnitt 7.2.2.

Vi kan dra slutsatsen från Karl Schwarzschilds studie att stabiliteten hos dessa supermassiva underkritiska objekt beror på att gravitationskollapsen, på grund av fysisk kritikalitet som inträffar långt före geometrisk kritikalitet, kompenseras av ett extremt högt strålningstryck med konstant densitet från deras centrum, proportionellt mot kvadraten på ljushastigheten.

7.3 Slutsats

Vi har analyserat bilder av supermassiva objekt i galaxernas centrum, som ursprungligen presenterades i *Astrophysical Journal* som de första bilderna av gigantiska svarta hål. Genom

vår djupgående studie föreslår vi en alternativ tolkning av dessa objekt, som skulle kunna motsvara subkritiska supermassiva objekt, som uppvisar en maximal till minimal temperatur nära 3. Deras radie är faktiskt bara 5,72% kortare än Schwarzschild-längderna som härleds från deras massa. Denna observation stämmer väl överens med den gravitationella rödförskjutningseffekten, som potentiellt är karakteristisk för neutronstjärnor som närmar sig fysisk kritikalitet, vilket föreslås av Schwarzschilds inre geometriska lösning som publicerades i hans andra uppsats i februari 1916. Denna lösning, som var okänd för de flesta kosmologer under efterkrigstiden och inte översattes till engelska förrän 1999, erbjuder ett unikt perspektiv för att observera dessa fenomen. Genom att undersöka aspekter som tryck, ljusets hastighet och tidsfaktorn i dessa objekt vill vi berika den befintliga bilden av de komplexa astrofysiska fenomen som ligger till grund för galaxerna. Detta inkluderar en undersökning av deras stabilitet, som skulle kunna upprätthållas genom en balans mellan gravitationell kollaps, till följd av fysisk kritikalitet som inträffar långt före geometrisk kritikalitet, och det extremt höga strålningstryck vid konstant densitet som härrör från deras centrum, proportionellt mot kvadraten på ljushastigheten. Karl Schwarzschilds hundraåriga arbete påminner oss om att det fortfarande finns mysterier att lösa inom ramen för väletablerade teorier. De frågor vi ställer, i synnerhet om tidsfaktorns utveckling och dess djupgående konsekvenser för själva tidsbegreppet, är avgörande och kräver ytterligare forskning. Om framtida observationer bekräftar våra hypoteser, särskilt om en bild av ett tredje supermassivt objekt upptäcks med ett liknande temperaturförhållande, skulle detta uppmuntra till en omvärdering av några av våra nuvarande astrofysiska modeller. I slutändan fortsätter universum, i all sin vidsträckthet och komplexitet, att stimulera oss i vår omätliga jakt på kunskap.

8 Utmaningar och debatter

8.1 Utmaningar med att kommunicera och acceptera modellen

I våra ansträngningar att sprida och validera Janus kosmologiska modell har vi stött på stora utmaningar, särskilt när det gäller vetenskaplig publicering. Detta avsnitt syftar till att beskriva dessa svårigheter i detalj och belysa de komplexiteter och fördomar som finns inbyggda i det dominerande internationella publiceringssystemet.

Ett av de största hindren vi stötte på var peer review-processen i ansedda tidskrifter. Vi fann att systemet, som det ser ut idag, ofta är stelbent och oemottagligt för nya idéer, särskilt sådana som utmanar de etablerade grunderna för fysik och kosmologi. Våra försök att publicera oss i prestigefyllda tidskrifter som *Physical Review D*, *Modern Physics Letters A*, *Astrophysical Journal* och *Astrophysics and Space Science*, bland andra, har mötts av motstånd och skepticism. Detta motstånd verkar inte bero på någon brist på vetenskaplig stringens från vår sida, utan snarare på en allmän tendens inom det vetenskapliga samfundet att upprätthålla status quo.

I våra försök att publicera har vi fått svar som illustrerar de utmaningar vi står inför. I ett brev från Ethan T. Vishniac, redaktör för *The Astrophysical Journal*, framhölls till exempel det okonventionella i vårt arbete i samband med deras publicering:

Kära dr Zejli,

Jag skriver till dig angående ditt manuskript som citeras ovan, som du nyligen skickade in till The Astrophysical Journal.

Jag har läst ditt manuskript och övervägt dess lämplighet för publicering i vår tidskrift. Vår tidskrift är specialiserad på manuskript som presenterar nya resultat från astronomiska observationer eller teori som tillämpas direkt på astrofysiska system. Tyvärr faller ämnet för ditt manuskript, som behandlar grundläggande aspekter av bimerisk relativitet, långt utanför ämnesområdet för våra tidskrifter. Följaktligen måste jag tyvärr meddela att vi inte kommer att kunna publicera ditt manuskript. Jag önskar dig dock lycka till med din framtida forskning. Ämnet för denna uppsats skulle ligga väl inom ramen för en tidskrift som specialiserar sig på gravitationens fysik. Som en allmän policy rekommenderar jag inte specifika tidskrifter. Jag vill bara påpeka att detta manuskript inte är välorganiserat som en forskningsartikel.

Huvuddelen av uppsatsen är en genomgång av tidigare arbeten och de nya resultaten och deras betydelse är svåra att urskilja. Det finns till exempel inget omnämnande av någon av dem i sammanfattningen.

Med vänliga hälsningar,

Ethan T. Vishniac

Chefredaktör för AAS

Johns Hopkins universitet

Detta innebär att även om vårt manuskript behandlade grundläggande aspekter av "bimerisk relativitetsteori" (vilket betyder bimetrisk), så passade det inte in i tidskriftens fokus på nya astronomiska resultat och teorier som tillämpas på astrofysiska system. Detta artiga och informativa svar återspeglar en allmän tendens att gynna arbete som passar

inom den etablerade ramen för vetenskaplig forskning. *Physical Review D*:s svar var däremot mycket mer kortfattade och sammanfattades ofta med frasen "Not suitable". Detta korta svar belyser svårigheten att få acceptans för idéer som avviker avsevärt från befintliga paradigmen inom teoretisk fysik och kosmologi.

Dessa interaktioner med ledande tidskrifter belyser en betydande utmaning när det gäller att kommunicera nya vetenskapliga teorier: behovet av att anpassa innovativt arbete till de vetenskapliga tidskrifternas etablerade förväntningar och standarder, samtidigt som man bevarar forskningens integritet och nyhetsvärde.

Dessutom har de senaste policyförändringarna hos *arXiv*, ett ledande arkiv för förhandspublicering, medfört ytterligare ett lager av komplexitet. Det nya kravet på att ansökningar ska föregås av publicering i en stor vetenskaplig tidskrift kan verka paradoxalt och kontraintuitivt, särskilt för banbrytande forskning som kan stöta på inledande motstånd i traditionella forum. Denna förändring av policyn har avsevärt hämmat vår förmåga att snabbt dela med oss av preliminära resultat och i större utsträckning interagera med det vetenskapliga samfundet.

Trots dessa utmaningar har det funnits glimtar av hopp och erkännande. Två tidskrifter, den ryska *Gravitation and Cosmology* (Pleiades Publishing) och den tyska *Astronomische Nachrichten*, har visat en vilja att ta vårt arbete på allvar. Deras engagemang för vår forskning, även om det inte är så omfattande som vi hade hoppats, är ett positivt steg mot en bredare acceptans och förståelse av JCM.

I följande avsnitt kommer vi att analysera svaren och kritiken från dessa tidskrifter, och lyfta fram både konstruktiva kommentarer och områden där peer review-processen kan förbättras för att tillgodose innovativa vetenskapliga teorier.

8.2 Diskussion om den kritik och de svar som lämnats in

Under våra ansträngningar att publicera Janus kosmologiska modell ställdes vi inför några betydande utmaningar, varav en var den utdragna granskningsprocessen i tidskriften *Gravitation and Cosmology*. Efter åtta månaders ihärdig uppföljning lyckades tidskriften till slut hitta en granskare som kunde bedöma kvaliteten på vårt arbete. Resultatet blev dock inte vad vi hade hoppats på. Här är den korrespondens som sammanfattar kärnan i de utmaningar vi stod inför.

Svar från *Gravitation och kosmologi*

Kära dr Zejli,

Efter många försök har vi fått en referee-rapport om din artikel GC23-019 "Nature of the Dipole Repeller". Tyvärr innehåller rapporten ett antal allvarliga kritiska anmärkningar. Mot bakgrund av denna rapport kan vi inte godkänna din uppsats för publicering i vår tidskrift.

Med vänlig hälsning,

Dr Sergey V. Bolokhov

Redaktionskommittén för *Gravitation och kosmologi*

REFERENSRAPPORT

Författarna försöker förklara fenomenet med den så kallade Dipole Repeller inom ramen för "Janus kosmologiska modell", som i själva verket är ett slags bimetrisk teori. Modellen i sig innehåller några enheter som är mycket osannolika att existera i naturen, såsom partiklar med negativ massa och fotoner med negativ energi. I detta sammanhang är det lämpligt att påminna om att nya experiment visade att partiklar av antimateria är föremål för samma gravitationskrafter som materiepartiklar med samma massa. Detta gör författarnas antagande om negativmassor ännu mer tveksamt. Dessutom verkar det märkligt att teorin i fråga åberopas för att förklara bara ett fenomen och inte har någon inverkan på andra observerade system. En svag punkt i artikeln är att den endast innehåller kvalitativa argument utan specifika beräkningar som tar hänsyn till de observerade parametrarna för repellern.

Mitt svar till denna recensent

Kära Dr. Sergey V. Bolokhov,

Tack för att du har skickat referentens rapport om vårt manuskript, "Nature of the Dipole Repeller". Vi uppskattar den tid och ansträngning som investerats i att granska vårt arbete. Vi tror dock att det kan finnas vissa missförstånd när det gäller kärnbegreppen i vår forskning, som vi skulle vilja klargöra.

1. Om negativ massa och antimateria: Referentens oro över negativa massor i ljuset av de senaste experimenten med antimateria belyser en grundläggande aspekt av vår modell som kan ha förbisetts. Den kosmologiska Janus-modellen, som ligger till grund för vår artikel, förutsäger förekomsten av två distinkta typer av antimateria. Antimateria av typ C, som liknar Diracs antimateria som produceras i laboratorier, reagerar på gravitationskrafter på samma sätt som vanlig materia. Antimateria av typ PT, som motsvarar Feynmans koncept med negativ massa, föreslås däremot finnas i centrum av kosmiska tomrum, såsom Dipole Repeller. Denna typ har en antigravitationell effekt, vilket är en kritisk komponent i vår modell och beskrivs tydligt på sidan 10 i vårt manuskript.

2. Observationsbekräftelser och modelltillämpningar: Vår modells giltighet sträcker sig längre än till att förklara dipolrepellern. Den ger insikter i olika astronomiska fenomen, som referenten kan ha missat i vår uppsats:

Galaxens inneslutning och stabilitet: Förklaras av lakunära utrymmen fyllda med negativa massor.

Gravitationslinsningseffekter: Modellen förklarar gravitationslinsningsfenomen runt galaxer.

Universell struktur: Vår teori föreslår en lakunär struktur i universum fylld med kluster med negativ massa, som liknar sammankopplade såpbubblor.

Galaxernas rotationskurvor och gravitationsanomalier: Vi förklarar utplattningen av rotationskurvor och den oväntade accelerationen av stjärnor vid galaxgränser.

Tidig galaxbildning: Med stöd av nya observationer från James Webb-teleskopet tyder vår

modell på att galaxer bildades samtidigt under universums första 100 miljoner år.
Galaxer med hög rödförskjutning: Vi tar upp den dämpade ljusstyrkan hos avlägsna galaxer (rödförskjutning > 7) på grund av den negativa gravitationslins-effekten hos kluster med negativ massa.

Lokala relativistiska verifieringar: Modellen stämmer överens med fenomen som Merkurius periheliumprecession och ljusavvikelse från solen.

Supernovaobservationer: Asymmetrin mellan populationer med positiv och negativ massa korrelerar med observationer av supernovor av typ Ia.

3. Feltolkning av modellens räckvidd: Slutligen, påståendet att vår teori endast används för att förklara ett enda fenomen förbiser dess breda tillämpningsområde. Vår modell ger bland annat förklaringar till spiralgalaxstrukturer, kosmisk antimaterias osynlighet på grund av fotoner med negativ energi och naturen hos universums osynliga komponenter.

Vi tror att denna ytterligare information och detta förtydligande kommer att bidra till att lösa de problem som tas upp i referee-rapporten. Vi är beredda att tillhandahålla ytterligare detaljer eller revideringar om det behövs.

Tack för att ni tog hänsyn till vårt svar, och vi ser fram emot möjligheten att bidra till tidskriften.

Med vänlig hälsning

Tyvärr fick vi ingen ytterligare kommunikation efter vårt detaljerade svar på var och en av kritikerns invändningar. Förlaget och granskaren verkade ha dragit sig tillbaka från dialogen, vilket illustrerar de utmaningar och ibland till synes oöverstigliga hinder som finns när det gäller att främja nya vetenskapliga teorier inom den etablerade ramen för akademisk publicering.

Kritisk analys av *Astronomische Nachrichten*-tidskriftens avkastning

Våra kontakter med *Astronomische Nachrichten* innebar också utmaningar, men möjliggjorde en djupare undersökning av en grundläggande fråga när det gäller acceptansen av nya idéer inom kosmologi. Den enda granskaren, som hittades efter två månaders sökande, inledde en dialog som belyste ett genomgripande problem: beroendet av de antaganden som etablerats av kända fysiker, som sedan formar och stärker de paradigmer inom vilka de flesta kosmologer verkar.

Syftet med vårt arbete är att tillhandahålla en ny geometrisk och kosmologisk tolkning av Schwarzschilds

exteriörlösning, baserad på två huvudantaganden:

- **Isotropi:** Invarians under inverkan av $SO(3)$, dvs. gruppen av 3D-rotationer och rumsliga translationer.

- **Stationaritet:** Metrikens termer är oberoende av tidskoordinaten, dvs. invariant vid tidsförskjutning.

Den allmänna lösningen, som ursprungligen beskrevs av Schwarzschild, presenteras ofta utan tillräcklig motivering. Tolman noterade 1934 ((Tolman 1934)) att den mest generella formen inkluderar en korsterm i $drdt$. Denna term försumrades dock senare av bekvämlighetsskäl. Detta tillvägagångssätt, inklusive Schwarzschilds, har följts av många forskare, vilket diskuteras i detalj i kapitel 5.

Granskaren påpekade att avsaknaden av en sådan korsterm berodde på de antagna symmetriantagandena. Vi anklagas för att ha försummat ett viktigt symmetriantagande: lösningen bör vara invariant när t ändras till $-t$ (vilket bland annat noterats i Walds bok (Wald 1984)). Följaktligen skulle en lösning med en korsad term $drdt$ inte uppfylla detta invariansvillkor, eftersom man ändrar t till $-t$ ändrar tecknet på den korsade termen. Men vad är den fysikaliska grunden för detta symmetriantagande om tidsvariabeln? Det finns ingen. Det nämndes varken av Schwarzschild eller av många av hans efterföljare.

Resonemanget (om man nu kan kalla det så) bygger på "*modellen för svarta hål*" som är centrerad kring den "*moderna formen*", där korstermen saknas (42). Detta är en rent matematisk hypotes, utformad för att inte anpassa sig till konkreta observationer, utan till den allmänna tron på existensen av svarta hål. För kosmologer kan denna hypotes därför verka "*naturlig*".

Vår erfarenhet av *Astronomische Nachrichten* illustrerar hur väletablerade paradigmer kan påverka mottagandet av innovativa idéer inom kosmologi, vilket understryker behovet av öppenhet och omvärdering av grundläggande antaganden i ljuset av nya teoretiska utvecklingar.

9 Slutsats och diskussion

Med tanke på Occams rakknivsprincip, som gynnar den enklaste teorin som är mest förenlig med observationsdata, är det rimligt att dra slutsatsen att Janusmodellen överträffar standardmodellen. Janus kosmologiska modell ger en sammanhängande förklaring till många astrofysikaliska fenomen, samtidigt som den erbjuder en tydlig tolkning av tillgängliga observationsdata. Medan standardmodellen uppvisar inkonsekvenser med observationsdata, vilket kräver ad hoc-konstruktioner för att kringgå dessa inkonsekvenser.

Janusmodellen går faktiskt längre än att bara föreslå alternativ till de fenomen som vanligtvis tillskrivs mörk materia och mörk energi, till exempel accelerationen av den kosmiska expansionen, instängningen av galaxer, uttalade gravitationslinseffekter och den nästan perfekta homogeniteten hos den kosmiska mikrovågsbakgrunden (CMB), bland andra. Den ger detaljerade klargöranden om naturen och identiteten hos de osynliga komponenterna i universum. Modellen löser paradoxen med avsaknaden av observationer av primordialt antimateria och ger en förklaring till Dipole Repeller, som ses som ett konglomerat av negativ massa. Detta perspektiv stärker trovärdigheten hos Janus kosmologiska modell när det gäller att fastställa universums storskaliga struktur, samtidigt som det förklarar orsakerna till svårigheten att upptäcka negativ massa med optiska observationsinstrument. Den förklarar också den låga magnituden av astronomiska objekt med en gravitationell rödförskjutning större än 7 och följer principen om motbevisbarhet genom att föreskriva specifika observationstester, såsom förekomsten av konglomerat med negativ massa, med Dipole Repeller som ett anmärkningsvärt exempel. Dessutom föreslår den en alternativ kartläggning av universum baserat på en annan tolkning av den svaga gravitationslinseffekten.

Janusmodellen bekräftas dessutom av de senaste observationsdata, särskilt de som erhållits från James Webb Space Telescope, genom att förutsäga bildandet av galaxer i deras nuvarande form under de första 100 miljoner åren av universums ålder. Dessutom ger strukturen hos dess dynamiska grupp *CPT-symmetri* till dess geometri, för vilken en specifik förutsägelse som gjordes 2017 bekräftades i september 2023. Denna förutsägelse gäller C-symmetrisk (laddningssymmetrisk) antimateria, som syntetiseras i laboratoriet och avger fotoner med positiv energi, som enligt observationer utsätts för en nedåtriktad gravitationsattraktion, precis som vanlig materia.

Den öppnar också lovande forskningsvägar inom kvantmekaniken och antyder att integrationen av negativa energi- och masstillstånd skulle kunna vara avgörande för kvantifieringen av gravitation. Janusmodellen passar därför perfekt in i naturen och uppvisar inga större motsägelser.

I den här boken har vi fördjupat oss i modellens komplexitet och avslöjat dess nyanser och dess potential att kasta ljus över de mysterier som länge har förbryllat kosmologer och fysiker.

Denna resa genom områdena avancerad matematik, teoretisk fysik och kosmologi visar modellens förmåga att utmana konventionella perspektiv och erbjuda alternativa förklaringar till fenomen som nuvarande modeller kämpar för att fullt ut belysa. De diskussioner och analyser som presenteras är avsedda att berika läsarens förståelse och stimulera nyfikenheten att ytterligare utforska och ifrågasätta gränserna för vår vetenskapliga kunskap.

Jag tror att begränsningarna inom teoretisk fysik och kosmologi kan tillskrivas den försening som skett sedan 1950-talet då topologi anammades inom området. Topologi, studiet av egenskaper som bevaras genom kontinuerliga deformationer, kunde ha erbjudit nya sätt att förstå universums struktur och dess komplexa strukturer.

Avslutningsvis hoppas jag att denna bok inte bara kommer att fungera som en omfattande guide till modellen, förankrad i en solid teoretisk grund av allmän relativitetsteori, utan också som inspiration och motivation för en ny generation av tänkare som modigt kommer att våga utforska kosmologins okända territorier. Må den bidra till en djupare uppskattning av vårt universums komplexa skönhet och av den ständiga strävan efter förståelse som driver oss som forskare och som människor.

Inom det dynamiska och ständigt föränderliga området kosmologi framstår denna modell som en viktig ledstjärna som lyser upp vägen mot utforskade territorier och nya perspektiv. Den här resan är långt ifrån över, snarare är den en ständig uppmaning till vidare utforskning och upptäckt.

Bibliografi

Adler, R., R. Bazin och M. Schiffer. 1975. *Introduktion till allmän relativitetsteori*. McGraw-Hill.

Akiyama, K. et al. 2019. "Första resultaten från M87 Event Horizon-teleskopet. I. Skuggan av det supermassiva svarta hålet." *Den astrofysiska tidskriften*.

Akiyama, K. et al. 2022. "Första Sagittarius a* Event Horizon Telescope-resultat. I. Skuggan av det supermassiva svarta hålet i mitten av Vintergatan."

Anderson, E. K. et al. 2023. "Observation av gravitationens effekt på antimaterias rörelse." *Natur*.

Bargmann, V., P. G. Bergmann, och A. Einstein. 1941. "Om den femdimensionella representationen av gravitation och elektricitet." *Theodore von Karman jubileumsvolym*, 212.

Benoit-Lévy, A., och G. Chardin. 2012. "Introduktion till Dirac-Milne-universumet." *Astronomi och astrofysik* 537: A78.

Bergmann, P. 1942. *En introduktion till relativitetsteorin*. Prentice-Hall.

Bergmann, P., och A. Einstein. 1938. "Om en generalisering av Kaluzas teori om elektricitet." *Annaler för matematik* 39: 683.

Bondi, H. 1957. "Negativ massa i den allmänna relativitetsteorin." *Recensioner av modern fysik* 29 (3).

Bourbaki, N. 2006. *Eléments de Mathématique: Groupes Et Algèbres de Lie*. Springer.

Boylan-Kolchin, Michael. 2023. "Stresstestning. Λ CDM med galaxkandidater med hög rödförskjutning." *Nature*.

Brennen, C. E. 1995. *Kavitation och bubbeldynamik*. Oxford University Press.

Chandrasekhar, S. 1983. *Den matematiska teorin för svarta hål*. Clarendon Press.

Chaskalovic, Joël. 2009. "Gravitationsteori för matematisk modellering inom geomarknadsföring." *Journal of Interdisciplinary Mathematics* 12 (3): 417.

Cronin, J. W. 1964. "Den experimentella upptäckten av CP-överträdelse". *American Physical Society*.

Damour, T., och Ian I. Kogan. 2002. "Effektiva Lagrangians och universalitetsklasser av olinjär Bigravity." *Phys. Rev. D*.

Debergh, N. et al. 2018. "Om bevis för negativa energier och massor i Dirac-ekvationen genom en enhetlig tidsomvändningsoperator."

Dyson, F. W., A. S. Eddington och C. Davidson. 1920. "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919." *Filosofiska transaktioner från Royal Society of London. Serie A, Innehåller papper av matematisk eller fysisk karaktär*, 291-333.

Eddington, A. 1925. "En jämförelse med Whiteheads och Einsteins formler." *Natur*.

Einstein, A., och N. Rosen. 1935. "Partikelproblemet i den allmänna relativitetsteorin." *Phys. Rev.* 48: 73.

El-Ad, H., T. Piran och L. N. da Costa. 1997. "Mon. Inte. R. Astro. Soc."

Farnes, J. S. 2017. "Ett förslag till en förenande teori om mörk energi och mörk materia." *arXiv Physics.gen-Ph*.

Ferreira, Leonardo et al. 2022. "Panik! At the Disks: First Rest-Frame Optical Observations of Galaxy Structure at $z>3$ with JWST in the SMACS0723 Field." *De astrofysiska tidskriftsbreven*.

Flamm, L. 1916. "Bidrag till Einsteins gravitationsteori."

Heald, G. 2020. "Det starkare fallet för gravitationell repulsion mellan materia och antimateria." *Research Gate Publication*, nr 339339776.

Hoffman, Y. et al. 2018. "Det kvasi-linjära närliggande universumet." *Nature Astronomy*.

Hoffman, Y., D. Pomarède, R. B. Tully och H. Courtois. 2017. "Dipolrepellern". *Natur Astronomi* 1: 0036.

Hossenfelder, S. 2008. "En biometrisk teori med utbytessymmetri". *arXiv*.

Kaluza, Th. 1921. "Om enhetsproblemet i fysik." *Sitzungsberichte Pruss. Acad. Sci.* 966.

Kerr, Roy P. 1963. "Gravitationsfältet för en snurrande massa som ett exempel på algebraiskt speciell metrik." *Fysiska bokstäver* 11: 237.

Klein, O. 1926. "Kvantteori och femdimensionell relativitetsteori." *Z.Phys.* 37: 895.

Koiran, P. 2021. "Infallstid i Eddington-Finkelstein-metriken, med tillämpning på Einstein-Rosen-broar." *Inter. Jr. av Mod. Phys. D* 14.

Kruskal, M. D. 1960. "Maximal utvidgning av Schwarzschild-metriken." *Fysisk granskning* 119 (5).

Kruskal, Martin D. 1960. "Maximal utvidgning av Schwarzschild-metriken." *Fysisk granskning* 119: 1743-45.

Medeiros, L. et al. 2023. "Principal-Component Interferometric Modeling (PRIMO), en algoritm för EHT-data. I. Rekonstruktion av bilder från simulerade EHT-observationer."

- Michelson, A. A., och E. W. Morley. 1887. "Om jordens och den lysande eternas relativa rörelse." *American Journal of Science* 34: 333-45.
- Morin, Bernard och Jean-Pierre Petit. 1978. "Le Retournement de La Sphère". HAL.
- Morris, M., och K. S. Thorne. 1988. "Maskhål i rumtiden och deras användning för interstellära resor: ett verktyg för undervisning i allmän relativitetsteori." *Am. J. Phys.* 56: 395.
- Neiser, T. F. 2020. "Fermi Degenerate Antineutrino Star Model of Dark Energy." *Framsteg inom astronomi 2020*: Artikel-ID 8654307.
- Oppenheimer, J. R., och H. Snyder. 1939. "Om fortsatt gravitationell sammandragning." *Phys. Rev.* 56: 455-59.
- Oppenheimer, J. R., och G. M. Volkoff. 1939. "Om massiva neutronkärnor". *Physical Review* 55 (4): 374-81.
- Palatini, A. 1919. "Deduzione Invariantiva Delle Equazioni Gravitazionali Dal Principio Di Hamilton." *Rend. Circ. Matem. Palermo* 43: 203-12. <https://doi.org/10.1007/BF03014670>.
- Pavlovskii, A. I. 1994. "Magnetisk kumulation - en memoar för Andrei Sakharov." I *Megagauss Magnetic Field Generation and Pulsed Power Applications*, redigerad av M. Cowan och R. B. Spielman, 9-22. New York: Nova Science Publishers.
- Perlmutter, S. et al. 1999. "Mätningar av Ω och Λ från 42 Supernovor med hög rödsiftning." *Astrofysisk tidskrift* 517 (2).
- Petit, Jean-Pierre . 1985. *Le Topologicon*. Belins utgåva.
- Petit, Jean-Pierre. 1994. "Problemet med den saknade massan. *IL NUOVO CIMENTO*.
- Petit, Jean-Pierre. 1995. "Kosmologi för tvillinguniversum". *Astrofysik och rymdvetenskap* 226: 273-307.
- Petit, Jean-Pierre. 2018. "Den kosmologiska Janus-modellen och fluktuationerna i CMB." *Framsteg inom fysik*.
- Petit, Jean-Pierre, och G. D'Agostini . 2021a. "Bimetriska modeller. När negativ massa ersätter både mörk materia och mörk energi. Utmärkt överensstämmelse med observationsdata. Löser problemet med den primära antimaterian." *Databas för det franska nationella centret*, 2021a.
- Petit, Jean-Pierre och G. D'Agostini. 2021b. "Begränsningar för Janus kosmologiska modell från nya observationer av Supernovae typ Ia." *Astrofysik och rymdvetenskap*, 2021b.
- Petit, Jean-Pierre och G. D'Agostini. 2014a. "Kosmologisk bimetrisk modell med samverkande positiva och negativa massor och två olika ljushastigheter, i överensstämmelse med den observerade accelerationen av universum." *Moderna fysikbrev A* 29 (34).

- Petit, Jean-Pierre, och G. D'Agostini. 2014b. "Hypotesen om negativ massa i kosmologi och den mörka energins natur." *Astrofysik och rymdvetenskap* 354 (2014b): 611-15.
- Petit, Jean-Pierre och G. d'Agostini. 2014. "Kosmologisk bimetrisk modell med samverkande positiva och negativa massor och två olika ljushastigheter, i överensstämmelse med den observerade accelerationen av universum." *Moderna fysikbrev A*.
- Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini och N. Debergh . 2018. "Bevis på negativa energier och massor i Dirac-ekvationen genom en enhetlig tidsomvändningsoperatör." *J. Phys. Comm.* 2 (115012).
- Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini, och N. Debergh. 2019. "Fysisk och matematisk konsekvens av Janus kosmologiska modell (JCM)." *Framsteg inom fysik* 15.
- Piran, Tsvi. 2018. "On Gravitational Repulsion." *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/9706049>.
- Riess, A. et al. 2004. "Typ Ia Supernova-upptäckter vid $z > 1$ från Hubble Space Telescope, bevis för tidigare retardation och begränsningar för mörk energiutveckling." *Astrofysikalisk tidskrift* 607 (2).
- Sakharov, A. D. 1967 . "Brott mot universums CP-invarians, C-symmetri och Baryon-symmetri." *Pi'sma ZhÉTF* 5 (1): 32-35.
- Sakharov, A. D. 1979. "ZhETF Pis'ma". *JETP* 49: 594.
- Sakharov, A. D. 1980. "Kosmologiska modeller av universum med reversering av tidens pil." *Pi'sma ZhÉTF* 79 (3): 689-93.
- Sakharov, A. D. 1982. "Flerskittsmodeller av universum." *Pi'sma ZhÉTF* 82 (3): 1233-40.
- Schmidt, B. P. et al. 1998. "Sökningen efter supernovor med hög z. Mätning av kosmisk retardation och global krökning av universum med hjälp av typ Ia Supernovae." *Astrofysikalisk tidskrift* 507 (1).
- Schwarzschild, K. 1916a. "Über Das Gravitationsfeld Einer Kugel Aus Inkompressibler Flüssigkeit Nach Der Einsteinschen Theorie." *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.
- Schwarzschild, K. 1916b. "Über Das Gravitationsfeld Eines Massenpunktes Nach Der Einsteinschen Theorie." *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.
- Souriau, J. M. 1964. *Geometri och relativitet*. Hermann.
- Souriau, J. M. 1997. *Struktur av dynamiska system, en symplektisk syn på fysik*. Birkhäuser Verlag.
- Souriau, Jean-Marie. 1965. "Förlängningar av Schwarzschilds champ". *Bulletin de La Société Mathématique de France* 93: 193-207.

Stoica, O. C. 2014. "Om singulära Semi-Riemannska mångfalder". *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 11.

Thorne, K. S., J. A. Wheeler och C. W. Misner. 1973. *Gravitation*.

Tolman, R. 1934. *Relativitet, termodynamik och kosmologi*. Oxford på Clarendon Press.

Tsamparlis, Michael. 1978. "Om Palatini-metoden för variation." *Journal of Mathematical Physics* 19 (3): 555-57.

Vuyk, V. 2018. "En femte kraft, vakuumdipolrepeller, behövs för att skapa alla attraktionskrafter även runt svarta hål i Quantum FFF-teorin." *Research Gate Publication*, nr 325995732.

Wald, R. 1984. *Allmän relativitetsteori*.

Weinberg, S. 2000. *Kvantteori för fält: volym 1, grunder. Volym 2, Moderna tillämpningar. Volym 3, Supersymmetri*. Vol. 1-3. Cambridge University Press.