

ヤヌス宇宙論モデル  
バイメトリックな宇宙：展望と課題

ヒシャム・ゼジュリ<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> ENSISA - [hicham.zejli@manaty.net](mailto:hicham.zejli@manaty.net)

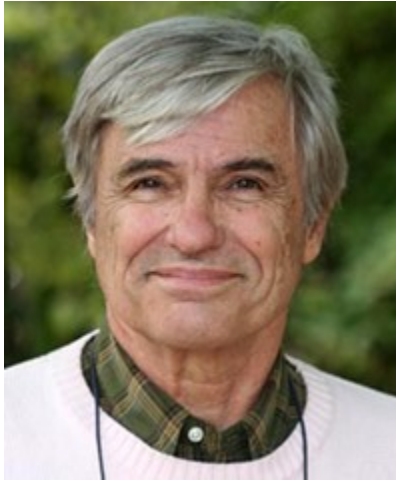
## 目次

序文：ジャン＝ピエール・プティ（フランス） .....	5
1 はじめに .....	12
1.1 本書の背景と目的の説明 .....	12
1.2 ヤヌス宇宙モデルの簡単な紹介とその重要性 .....	12
2 理論的基礎 .....	14
2.1 ニュートンの重力の法則 .....	14
2.2 特殊相対性理論入門 .....	14
2.2.1 ミンコフスキーの時空と自分の時間 .....	14
2.2.2 限界としての光速 .....	16
2.2.3 基本コンセプト .....	16
2.2.4 質量とエネルギーの等価性 .....	16
2.3 一般相対性理論入門 .....	17
2.3.1 物理学の革命 .....	17
2.3.2 観察可能な効果と実験的確認 .....	18
2.3.3 時空間幾何学と測地線方程式 .....	19
慣性フレームと座標 .....	20
加速された検査基準フレームワークへの座標変換 .....	20
2.3.4 メトリックテンソル .....	23
2.3.5 クリストフェルのシンボル .....	24
2.3.6 弱い場の極限における測地線の方程式の応用 .....	30
2.3.7 カール・シュヴァルツシルトとルートヴィヒ・フランムの解決策 .....	34
2.3.8 シュヴァルツシルトの外部計量に対する測地線の構築 .....	36
2.3.9 ロイ・カー・ソリューション .....	42
2.4 アンドレイ・サハロフ&ジャン＝マリー・スーリオの仕事 .....	42
2.5 双曲リーマン幾何学が導入したバイメトリック・アプローチ .....	43
3 ヤヌス宇宙論モデル .....	46
3.1 説明 .....	46
3.2 意味 .....	47
3.3 双極子リペラ .....	54

3.3.1	はじめに .....	54
3.3.2	解釈の試み .....	55
3.3.3	ダークマターのギャップによる解釈 .....	55
3.3.4	ヤヌス宇宙論モデルによる解釈 .....	57
3.3.5	今後の見通し .....	75
4	宇宙論と素粒子物理学への貢献 .....	75
4.1	ダイナミック・グループ入門 .....	75
4.2	各反転演算子に関連する様々な対称性 .....	78
4.3	ローレンツ・ダイナミクス・グループ .....	79
4.4	制限付きポアンカレ力学群 .....	79
4.5	ダイナミック・カルーザ&ヤヌス制限グループ .....	80
4.6	ジャナス・ダイナミック・グループ .....	80
4.7	重要性 .....	83
5	一方通行の膜としての白い泉と結合したワームホールモデルの代替解釈 .....	85
5.1	異なるトポロジを反映したアインシュタイン方程式の解 .....	85
5.2	静態性の仮説：クロス項の不在 $dr dt$ .....	89
5.3	2シート・ローレンツ幾何学的無限解の構築 .....	89
5.3.1	対称性 T .....	89
5.3.2	対称性 P .....	90
5.3.3	枚のシートの識別 .....	91
5.4	このジオメトリの別の表現 .....	92
5.5	結論 .....	93
5.6	付録 .....	94
6	モデルのトポロジ的解釈 .....	96
6.1	定義 .....	96
6.2	ワームホールモデル .....	96
6.3	宇宙のモデル .....	97
7	超巨大臨界前天体M87といて座A*の別の解釈 .....	103
7.1	はじめに .....	103
7.2	現象の別解釈 .....	106
7.2.1	物理的・幾何学的臨界の比較 .....	106

7.2.2	物理的臨界に近い重力赤方偏移.....	107
7.2.3	一定密度プラズマにおける光速と圧力の変化.....	110
7.3	結論 .....	111
8	挑戦と議論.....	112
8.1	モデルのコミュニケーションと受容における課題 .....	112
8.2	批判と対応についての議論.....	113
	重力と宇宙論からの返信.....	113
	このレビュアーへの回答.....	114
	<i>Astronomische Nachrichten</i> リターンの批判的分析 .....	115
9	結論と考察.....	117
	書誌.....	119

## 序文：ジャン＝ピエール・プティ（フランス）



2024年だ。計算してみてください。私は1937年生まれだ。この文章を書いているとき、私は87歳になっている。時の流れはとても速く、あなたがこれを読む頃には、私はもうこの世にいないかもしれない。私はこのページを書いているが、ヒチャムも同じように、訴えのメッセージが入った瓶を海に投げ入れるような気持ちで書いていると思う。この文章を書いている今、ヤヌスのチームは3人になっている。1979年生まれのヒチャムを除けば、1985年生まれの若い数学者デビッドがいる。2022年、このヤヌスのプロジェクトを40年間担当してきたのは私だけだった。この2人は2023年1月にパリで私が行った講演を聴いて加わってくれた。

科学の世界で何が起きているんだ？

ご存知のように、100年以上前、量子力学と宇宙論という2つの新しい学問分野が突然出現し、科学の世界はひっくり返った。この70年間、科学の進歩は素晴らしいスピードで互いに続いてきた。例えば、ニュートン力学では説明できなかった水星の近日点の移動などである。ロシアのアレクサンダー・フリードマンは、1915年にアインシュタインが導入した方程式の最初の非定常解を発表し、それを説明した。

理論家たちはときどき新しいビジョンを思いつき、計算のバランスを取るために奇妙な物体を提案する。その一例が反物質であり、その存在は1928年にイギリス人のポール・ディラックによって推測された。

逸話として、この記事を読んだデンマーク人のニールス・ボーアの反応を引用しよう：

この理論は、アフリカでゾウを捕獲するのに理想的だと思う」。ディラックの論文を木に吊るす。象がやってきてディラックの論文を読む。とても驚いているので、捕まえるのは簡単だ。

しかし、自然はディラックの良き理解者であることを証明し、1931年に宇宙線に反電子の存在を確認した。当時、粒子衝突型加速器でこの反物質を再現することはできなかった。そのため、宇宙の深部からやってきたガンマ光子が、陽電子として知られる電子と反電子の対に変換されたのである。

パラダイムシフトと形容されるこの革命は、1895年、コンラート・レントゲン、アンリ・ベクレル、J.J.トムソンによる発見によって始まった。何十年もの間、一方の理論家と他方の実験者や観察者は、並走する2頭のサラブレッドに似ていた。

こうした研究は、第二次世界大戦後、数十年間続いた。これらの大発見の中でも、1967年に偶然発見された宇宙マイクロ波背景放射は、低エネルギー光子の集団であり、宇宙の始まりに物質と反物質の対の幻想的な消滅が起こったことを証明するものであった。

1960年代末、現在宇宙論者と呼ばれる人たちの関心事は、単に宇宙の平均密度の値を決定することだった。もし密度が $10^{-29}$ グラム/立方センチより大きければ、宇宙は周期的に進化していることになる。膨張の後、宇宙は崩壊し、ビッグ・クランチが起こる。もしこの密度が低ければ、宇宙の遠い将来、銀河は一定の速度で無限に遠ざかることになる。そして、この密度がこの値と等しいとしたら、進化はこの両極端の間にあるとしよう。

私が研究者としてのキャリアをスタートさせたのは、1960年代の終わり頃だった。

次に何が起こるのか？

あっという間に力学は狂い、すべてが悪い方向へと進んでいった。素粒子物理学の理論家たちは、加速器で発揮されるエネルギーの増大のおかげで、世紀が進むにつれて誕生し、超粒子と呼ばれる新しい物体の出現を予言した。

しかし、何も起こらなかった。

1980年代の初め、銀河の中で星が回転する速度を説明し、遠心力によって星が爆発し

ない理由を説明するために、宇宙の全質量の5分の4を占める暗黒物質の存在が提唱された。

1989年、COBE衛星による観測は、初期宇宙が極めて均質であることを明らかにした。それを正当化するために、ロシアの若手研究者アンドレイ・リンデがインフレーション理論を提唱し、それによると、宇宙が誕生してわずか数秒のときに、急激に1倍に膨張したという。  
 $10^{-33}$ 秒の間に、宇宙は突然1倍に膨張した。  
 $10^{26}$ これは、インフレトンとして知られる新しい粒子からなる新しい場によって引き起こされた。

今日、この分野を専門とする研究者の数だけインフレーションのモデルが存在する。

2011年、暗黒エネルギーによる宇宙膨張の加速という別の発見に対してノーベル賞が授与された。その重要性をアインシュタインの表現に置き換えると、次のようになる。

$E =$

$mc^2$ アインシュタインの表現で訳すと、今回は、宇宙の内容の75%が観測されていないことになる。

私がこの文章を書いている2024年には、ダークエネルギーの信頼できるモデルは存在しない。

計算してみると、観測可能な通常の物質は、宇宙スープのわずか4%に過ぎない。

暗黒物質の候補として様々なものが提案されているが、その主なものは、仮説上の超粒子ファミリーの代表であるニュートラリーノである。しかし、強力な衝突型加速器でこの物質を出現させることは不可能であるばかりか、宇宙放射線から厚い岩石層で保護されたトンネルや鉱山で行われる高価な実験でも、この物質を検出する試みはすべて失敗に終わっている。

理論面では？

1970年代に入り、高エネルギー物理学の実験結果が不十分であったため、新たなパラダイムシフトが求められた。理論家の大半は、新しい有望な方向性を見出したと受け止めた。各国に

研究・教育ポストが設けられた。チームが結成された。このムーブメントの中心にいた人々は、万物の理論を構築することを夢見るまでになった。このような思想の流れは、山のような論文や博士論文を生み出した。

第3のミレニアムの夜明けの状況は？

無：山がネズミを産む。

現在の状況は、ハンス・クリスチャン・アンデルセンの短編小説『皇帝の新しい服』を彷彿とさせる。物語の最後に、子供がこう書くのだ。

宇宙はプラスとマイナスの質量でできている

。

結局のところ、なぜダメなのか？

しかし、このアイデアは糸のようなもので、突き出ている。この糸を引っ張ると、糸がついてくる。糸を引っ張ると、ロープがついてくる。ロープを引っ張ると、重いケーブルが引っ張られてビルが揺れる。

どのビルですか？

アルベルト・アインシュタインの神聖な一般相対性理論は、世界中の物理学研究機関でその方程式が石に刻まれている。

これは理論が間違っているということなのだろうか？

いや、それはコインの片面でしかない。それは2つの連立方程式系に統合されなければならない。本書のページには、この冒涔的な考えから生まれたすべてが書かれている。

2023年1月、私はパリで、ダヴィッドとヒチャムも出席する会議を開いた。

デビッドは若い数学者である。博士論文を持っているが、研究のプレッシャーには惹かれず、大学で数学を教えることを好む。

アイデアを引き継ぐのは研究者だと言われることがある。実際はその逆である。研究者がアイデアを引き継ぐのである。私のヤヌス・モデルの基礎である、異なる宇宙のトポロジーというアイデアは、デビッドを虜にした。この10ヶ月間、彼はこのモデルの数学的根拠を数理物理学の専門誌に発表するために戦ってきた。おそらく、あなたがこの行を読む頃には、この研究の出版がついにこれらのトップレベルのジャーナルに掲載されることになるだろう。もしそうであれば、他の数学者が摘発されることを期待して、罫が仕掛けられていることになる。

新しいアイデアとは、アフリカで小猿を捕まえるのに使われている罫のようなものだ。穴のあいた空洞の殻をサルの手が届くところに置く。殻の中にはサルが大好きな果物の



かけらが入っているが、その直径は穴とまったく同じである。サルが手を穴に滑り込ませると、手と果物の両方を引き抜くことは不可能である。私自身、40年前に同じような畏にかかったことがある。あるアイデアが通りかかり、私の神経細胞を掌握したのだ。ある考えが論理的で、機能的で、実り豊かなものである場合、それを取り除くのは非常に難しい。そして最後に、その考えが観察結果と一致している場合、それを否定することは単に不可能になるだけであり、それはあなたを一種の突然変異体、つまり科学界のアウトサイダーにすることで、あなたの人生を非常に複雑にする。迷宮に留まると決めない限りは。

1959年、アーサー・ケストラーというイギリス人が『夢遊病者 (Les somnambules)』という本を書いた。彼は科学者について、眠っている間に目を閉じ、両手を前に伸ばして歩き、自分の道を見つけようとする人たちだと述べている。知らず知らずのうちに、彼らは迷宮の中を歩いている。迷宮がどのように構築されているのか知らないまま、行き止まりであることが判明した道に乗り出すと、ドアが大きく開いているのに気づかずに通り過ぎてしまうことがある。この考えは新しいものではない。似たような、より静的な考え方は、プラトンの洞窟神話にも見られる。

ここで、ヒチャム・ゼジュリに起こったことについてお話ししたいと思います。2023年1月、フランスの会社でコンピューター・エンジニアとして働いていた彼は、私がパリで行っていたヤヌス宇宙論モデルに関する会議の内容に興味を持った。そして彼は、このモデルの主な特徴を紹介するために、2017年に私が作成した30本ほどのビデオを見、このテーマに関するすべての本を読んだ。彼は私のビデオに付随する、私がインターネット上に置いたpdfファイルで見つけたすべての計算をやり直す。そして畏は閉じる。

もし彼の本を読んだら、用心してほしい！あなた自身がその犠牲になるかもしれない。このページは、あなたの目を開かせることによって、迷宮の壁のひとつに登らせるかもしれない。その時、科学の世界はあなたにとって違ったものに見えるだろう。ヒチャムがそうであったように、突然、夢遊病者のように彷徨い、迷宮の輪の中をぐるぐる回っている人々、時には最も権威ある賞を受賞した人々を目にすることになるだろう。いわゆる科学界を構成する人々に受け入れられてきたモデルが、あからさまな計算ミス of 明らかな結果としてあなたの前に現れる。あなたは、この夢遊病者たちが、どのように新しい道を何度も何度も通り過ぎていくのかがわかるだろう。それは、多くの観測結果と見事に一致しているのだが、それを見ることができず、厳しい現実の岩礁が四方八方から漏れ出している標準模型の裂け目に熱狂的に釘を打ち付けた、腐った板でしかないアイデアにしがみついているのだ。そして、アンデルセンの登場人物のように、「王様は裸だ」と叫びたくなるだろう！

わずか1年足らずの間にヒチャムが成し遂げた仕事は相当なものであり、しかもそれをすべて仕事以外の、余暇と言えるような時間に行ったにもかかわらず、である。彼は12ヶ月の間に、私のヤヌス・モデルが影響するさまざまな分野に関連する驚くほど多くのことを、表面的ではなく、深く理解し、吸収した。これほど多くのことを、これほど複雑なことを、これほど短時間で飲み込み、消化した人を私は見たことがない。

ヤヌス・モデルとそれに付随するすべてのものであるこの素晴らしい冒険の最初の記録者となった彼は、書かなければならなかったこの本でその証人となる。彼はすでに何カ月も積極的に記事を書いており、この冒険を何一つ見逃したくないと思っている。彼は単なる目撃者ではなく、プレーヤーの一人になりたいと思っている。可能な限り多くの人に読んでもらえるよう、彼が書いた本は全言語でPDFを無料でダウンロードできる。知識には特別なものがある。一度手放してしまうと、それを取り戻すことはできないし、ある程度まで自分のものにするのは難しい。

その場しのぎのいかに腰掛けた3人の男たちが、さまざまな言語で書かれたボトルにメッセージを入れ、次々と海の流れに渡していく。あなたがこの行を読むとき、私はもう生きていないかもしれない。時の流れはとても速い。このすべてがどうなるのか。私にはわからない。

私は今日、人類が運命とランデブーしているような漠然とした予感がする。この宇宙論的モデルの向こう側で、異なる、さらに広大な宇宙像が形作られつつあるような気がするのだ。このことを説明するために、1975年のアンドレイ・サハロフのノーベル平和賞受賞演説の最後を引用しよう。私自身の言葉である：

「数千年前、人類の部族は生存のために大きな苦難に見舞われた。そのときに重要だったのは、単に矛を振り回すことができるだけでなく、知的な思考力を持ち、部族が蓄積してきた知識と経験を考慮し、他の部族との協力の基礎を築く絆を育むことだった。今日、人類は同じような試練に直面している。無限の宇宙にはいくつかの文明が存在する可能性があり、その中には我々よりも賢く「効率的」な社会も含まれる。私は、宇宙の発展は本質的な特徴に従って無限に繰り返されるという宇宙論的仮説を支持している。最も "成功" した文明を含む他の文明は、宇宙の書の "次" のページにも "前" のページにも、無限の回数刻まれている。とはいえ、暗闇の中のかすかな明かりのように、無名の無意識から物質的存在へと一瞬姿を現したこの世界において、神聖な努力を最小限に抑えるべきではありません。理性の要求を尊重し、自分自身と、かろうじて知覚している目的にふさわしい人生を創造しなければならない。"

ジャン＝ピエール・プティ、世界市民 - [jean-pierre.petit@manaty.net](mailto:jean-pierre.petit@manaty.net)



ヒシャム・ゼジュリ (Hicham ZEJLI) : 1979年9月  
22日生まれ、フランス国籍

# 1 はじめに

## 1.1 本書の背景と目的の説明

宇宙論と理論物理学の現在において、我々の宇宙で観測される現象を説明するための新しいモデルを探求することは、依然として活発な議論を呼ぶ研究分野である。本書は、物理学者ジャン＝ピエール・プティ博士によって開発された革新的で画期的な宇宙モデル、ヤヌス宇宙モデル (JCM) を探求し、紹介することを提案する。

数学と物理学の高度なバックグラウンドを持つエンジニアとして、私はヤヌス宇宙モデルの研究に、宇宙における最も謎めいた現象のいくつかを探求し、解釈するための革新的で知的なやりがいのあるアプローチを見出した。このアプローチはまた、このモデルから導き出された基本原理に基づいて、局所的なスケールで多くの実用的なアプリケーションを開発する道を開くものでもある。

本書の主な目的は2つある：

第一に、私と同じようなバックグラウンド、つまり数学と理論物理学の上級レベルの科学者にも理解しやすいように、ある研究を通してヤヌス宇宙論モデルの詳細な説明、その基礎と意味を提供することである。

第二に、私たちのチーム内では、熱心でやりがいのある多様な共同研究が行われているにもかかわらず、主要な査読付き科学雑誌の査読者とのコミュニケーション不足によって、著しいコントラストが生じたことを強調したいと思います。この状況は、研究者間の有意義で建設的な対話がなければ、革新的なアイデアが生まれ、発展していく上で直面しうる課題を浮き彫りにしている。

## 1.2 ヤヌス宇宙モデルの簡単な紹介とその重要性

ヤヌス宇宙論モデルは、宇宙を2つのメトリックスを持つリーマン多様体として記述するという大胆な提案で、理論物理学において際立っている。この構成は、アインシュタインの一般相対性理論に基づき、素粒子物理学とシンプレクティック幾何学の要素を取り入れている。このモデルのルーツはアンドレイ・サハロフとジャン＝マリー・スーリオの研究にあり、時間の反転、エネルギーの反転、ひいては質量の反転の間の関連性を確立した。

このモデルの大きな貢献のひとつは、宇宙のバリオン非対称性の問題に取り組めることである。この問題は、ビッグバン・モデルの予測に反して、反物質よりも物質が優勢であるという観測結果に関するもので、宇宙論における現在の議論の中心となっている。

ヤヌス宇宙モデルは、物質と反物質が支配する、同じ特異点から生じる2次元宇宙の存在を仮定することで、この問題に新しい視点を提供する。

このモデルの独創性は、重力効果によって時空の2つの「層」が相互作用するという、宇宙に対するバイメトリックなアプローチにもある。

要するに、本書はこのモデルを革新的なアプローチとして提示し、宇宙論や理論物理学

の現在の視点に挑戦し、宇宙を理解するための未踏の可能性について深い考察を促すことを目的としている。

## 2 理論的基礎

### 2.1 ニュートンの重力の法則

ニュートンの法則は、ユークリッド空間で定式化されたもので、質量が重力の影響を受けるとき  $m$  が別の質量から発生する重力の影響を受けるとき  $G$  この力は  $M$  この力  $F$  は、2つの質量を隔てる距離の2乗に反比例する。 $d$  に反比例する。これは次の式で表すことができる：

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2}$$

質量が大きいほど力は大きいが、分母の項  $d^2$  が分母にあるためである。この法則は、重力と天体の動きを理解するのに不可欠である。

物理学では、地球から惑星、恒星に至るまで、天体間の重力相互作用を理解する上で、この重力の法則が基本となってきた。この法則は古典力学の基本法則であり、天文学や天体物理学の発展に重要な役割を果たしてきた。また、何世紀にもわたって数多くの観測や実験によって確認され、宇宙を理解する上でその有効性を高めてきた。

しかし、ニュートンの重力法則は、多くの場面で非常に強力かつ正確であることが証明されたものの、光の速度に近い状況や天文学的規模の現象

に適用すると限界が見え始めた。これがアルベルト・アインシュタインの特殊相対性理論の出発点であり、空間、時間、重力の基本概念の理解にパラダイム・シフトをもたらした。次のセクションでは、特殊相対性理論の基本原則を深く掘り下げ、その後の一般相対性理論の探求の基礎を築きます。これにより、宇宙の複雑さをより深く理解することができるだろう。

### 2.2 特殊相対性理論入門

20世紀初頭、物理学は概念革命を起こし、17世紀

にアイザック・ニュートンが築いた基礎に挑戦した。観測と実験の精度が高まるにつれ、光速に近い速度や極端な宇宙環境を研究する際に異常が現れ始めた。このような状況の中で、アルベルト・アインシュタインの特殊相対性理論が登場し、空間、時間、重力に関する従来の理解が覆された。

#### 2.2.1 ミンコフスキーの時空と自分の時間

特殊相対性理論は、宇宙が3次元のユークリッド空間の中で展開し、その中で時間が独立した存在であるという考えを捨てるよう求めている。その代わりに、3次元の空間が1次元の時間に垂直な4次元の超曲面に存在するというモデルを提案している。この空間と時間の融合は、ミンコフスキー時空として知られるものを形成し、それには計量記号がある。(−+

++)言い換えれば、計量シグネチャーは、特殊相対性理論の方程式において、時間と空間の間隔がどのように組み合わせられているかを示す時空の重要な特徴である。このシグ

ネチャーでは (- +

++)このシグネチャーでは、最初の項が時間の間隔に対応し、空間の間隔に対応する次の3つの項から差し引かれる。つまり、時間は計量において負の符号を持ち、3つの空間次元は正の符号を持つ。特殊相対性理論で距離と時間間隔がどのように測定されるかを理解するには、この特定の符号が重要である。

この概念をよりよく理解するために

$M$ が2つの座標( $t$ )と空間位置( $x$ ).この点が動くと、隣の点

$M'$ はわずかに変更された値に対応する。 $t + dt, x + dx$ ), ここで  $dt$ と

$dx$ は時間と空間の小さな刻みを表す。この増分は、次の式で記述される軌跡に沿って起こると考える。 $x = ct$ (ここで  $c$ は光速)。  $dx = c dt$ .

この時点で、クリーンタイムの概念を導入する。この量

$s$ 適切な時間として知られるこの量は、以下のような速度で移動する物体の寿命を支配する時間の尺度である。 $v$ .計算するには  $s$ を計算するには、次の式を使う:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

この式は、適切な時間( $s$ )が時間( $dt$ )と空間( $dx$ )の変化にどのように結びついているかを示している。

$v$ .また、適切な時間が物体の速度と軌跡の関数として変化し、時間の拡張などの現象につながることも明らかにしている。

アインシュタインの特殊相対性理論では、時間は絶対的なものではなく、観測者の相対速度に依存する。次の数学的展開は、(宇宙船に搭載された)移動時計によって計測される時間である固有時間と

$\tau$ これは(宇宙船に搭載された)移動する時計によって計測される時間であり、調整時間

$t$ 地上(観測者に対して相対的に静止している)にある時計によって計測される時間である調整時間の関係を説明する:

$$\begin{aligned} s = c\tau &\Rightarrow ds = c d\tau && \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \\ &\Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 && \Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} && \Rightarrow \tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

これは  $t$ は地上の時計を備えた静止した観測者が計測した時間を表し、そして

$v$ は、この不動の仮定に対してこの速度で移動する時計を搭載した物体の速度である。

$\tau$ によって記述される時間拡張の影響を受けることになる。

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ローレンツ因子として知られている。

### 2.2.2 限界としての光速

この時空では、光の速度は、光が伝播する時空（とその内容）の特性によって制約されることに注意することが重要である。

仮に  $x$  を空間座標  $t$  を時間座標、そして  $c$  を光速とすると、速度

$v$  を定義することができる。  $v = \frac{dx}{dt}$ 。

固有時間の変動が常に0以上であると仮定すると、すなわち、真空中の光速は、正の静止質量を持つ移動物体の究極の速度限界であることになる、  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \geq 0$

真空中の光速は、正の静止質量を持つ移動物体の究極の速度限界である。  $v \leq c$ 。

一方、光子は、次のような軌跡をたどる。  $v = c$ 。

光に関連するユニークな性質につながる。

特殊相対性理論は、慣性参照枠の研究に限定された理論であり、具体的には、一様な直線運動（曲率のない空間で、一定の速度で直線運動する）をするものである。

### 2.2.3 基本コンセプト

特殊相対性理論は主に3つの概念に基づいている：

- **光速不変の仮定**：この仮定は、真空中の光速は普遍的な定数であり、どのような相対運動をする観測者であっても同じであるとする。言い換えれば、光速を観測者の光速に足したり引いたりすることはできない。この基本的な考え方は、有名なマイケルソン・モーリーの実験（マイケルソンとモーリー1887年）によって確認された。
- **宇宙論的原理**：宇宙論的原理は、宇宙は均質で等方的であると仮定している。つまり、宇宙の性質はあらゆる方向、あらゆるスケールにおいて均一であり、同一であるということである。この原理により、宇宙を全体として考えることで、特殊相対性理論の法則の適用を宇宙のスケールまで拡張することができる。
- **特殊相対性理論の原理**：特殊相対性理論の原理は、物理法則はすべての慣性フレームで一貫しているとするものである。慣性フレームとは、互いに一定の速度で相対的に移動するフレームのことである。この原理は、ガリレオの相対性理論の概念を一般化し、絶対参照枠という概念に疑問を投げかけるものである。この原理は、観測者の相対速度がどうであれ、物理法則が首尾一貫して不変であることを示している。

### 2.2.4 質量とエネルギーの等価性

物理学で最も象徴的な方程式のひとつに、アルベルト・アインシュタインの質量エネルギー等価方程式がある。この方程式は、質量( $m$ )とエネルギー( $E$ )の間の深いつながりを意味し、宇宙では両者が交換可能であることを明らかにしている。



アルベルト・アインシュタインの革命的な直観は、彼の特殊相対性理論に由来する。この理論においてアインシュタインは、エネルギーと質量は本質的に結びついていると仮定し、この等式はこの結合の礎石となった。

方程式の中心概念は単純で、物体のエネルギー( $E$ )はその質量( $m$ )に正比例し、真空中の光速( $c$ )を比例定数とする。数学的には次のように表される：

$$E = mc^2$$

簡単な例を使って、この方程式を詳しく調べてみよう。質量1グラム (0.001キログラム) の小さな物体があるとする。アインシュタインの方程式を適用すれば、この質量のエネルギーに相当するものを計算することができる：

$$E = (0.001 \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

この驚くほど大量のエネルギーは、式 (1) の影響力の大きさを強調している。この方程式を使って変換すると、小さな質量が莫大な量のエネルギーを生み出すことができることを示している。この方程式は、星や原子力発電所で起こるような核反応を理解する上で極めて重要な役割を果たしており、ここでは質量のわずかな変化が大きなエネルギーの放出をもたらす。

質量とエネルギーを結びつけるアインシュタインの方程式は、現代物理学の礎であり、宇宙がどのように機能しているかについての我々の理解に大きな影響を与えている。

特殊相対性理論は、私たちを光速に近い速度での旅に導き、私たちの運動に応じて時空がどのように曲がるかを明らかにすることで、宇宙の魅力的な側面を探求することを可能にしてきたが、それは慣性参照枠と一様な直線運動という特定の枠組みに限定されている。しかし、重力が作用するとどうなるのか？巨大な物体や大きな曲率が存在する場合、時空の構造はどのように変化するのだろうか？そこで、アルバート・アインシュタインの一般相対性理論が登場する。

## 2.3 一般相対性理論入門

### 2.3.1 物理学における革命

ニュートンの法則は、セクション2.1で説明したように、多くの状況でうまく機能する理論であるが、光速に近い速度や強い重力場の存在下で観測される特定の現象を説明することはできない。アルバート・アインシュタインの一般相対性理論 (GR) は、これらの重力効果を包含する、より完全な理論である。現代物理学の礎である一般相対性理論は、重力と宇宙に関する我々の理解に革命をもたらした。1915年にアルバート・アインシュタインによって提唱されたこの理論は、重力は質量とエネルギーの存在によって引き起こされる時空の曲率の現れであるという原理に基づいている。この理論の核心をなすアインシュタインの場の方程式は、物質とエネルギーが時空の幾何学にどのような影響を与え、ひいてはこの曲がった幾何学が物質とエネルギーの動きをどのように導くかを記述している。

実際、1915年11月25日に初めて発表されたアインシュタインの場の方程式は、一般相対性理論の主要な偏微分方程式である：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

物質源の周りの幾何学的な曲率は、この物質源の重力場として解釈される。この場における物体の運動は、測地線方程式によって非常に正確に記述される。メトリック  $g_{\mu\nu}$  は測地線の族を作り出す。正または負の重力質量を持つ粒子は、大きな質量によって作られた重力ポテンシャルによって偏向されたとき、同じ測地線に従って同じように振る舞うことに注意すべきである。

$M$  例えば、地球重力や太陽重力などである。つまり、恒星のような質量の大きな物体は、その質量だけでなく、放射線のようなエネルギーによっても時空に影響を与える。一般相対性理論では、物体のエネルギーは、静止質量エネルギーは  $mc^2$  で表される静止質量エネルギーと、放射線のような付加的なエネルギーを含む物体のエネルギーが、その物体が作り出す重力場に寄与する。このエネルギーと質量の複合的な寄与が、物体の周りの時空を湾曲させる。その第2項は、時空の各点における宇宙の内容を考慮に入れている：

- これがゼロでない場合、この方程式から得られる幾何学的解は質量の内部を記述することになる。
- もしそれがゼロであれば、この方程式によって導かれる解は、この質量の周りの宇宙の完全に空の部分を目指すことになる。

### 2.3.2 観察可能な効果と実験的確認

GRによって説明される現象の中に、近日点歳差運動として知られる、惑星水星が太陽に最も近づくときの自転面のずれがある。この現象は、ニュートンの法則では説明できない、1世紀あたり45秒角の精度で測定された。

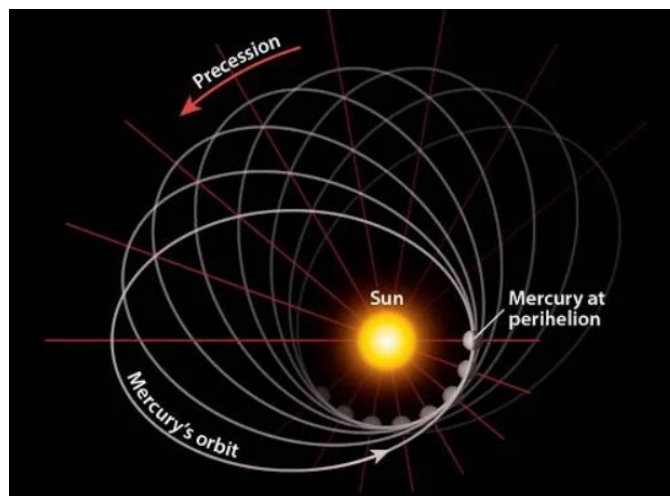


図2.1 - 水星の近日点歳差運動

観測されたもうひとつの現象は、太陽のまわりで光が曲がって見えることだ。1919年の日食の際、アーサー・エディントン卿は、光線が太陽の周りで曲がっているように見えることに気づいた。実際には、これらの光線は測地線として知られる湾曲した時空の最短経路をたどっている。この光の見かけの曲率は、質量の存在によって引き起こされる時空の変形によるもので、この効果はGRによって正確に説明されている（(Dyson, Eddington, and Davidson 1920)）。

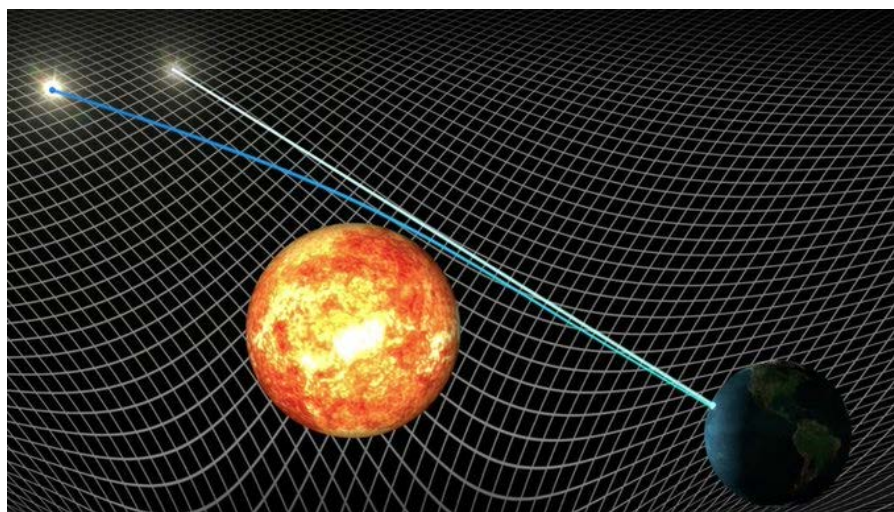


図2.2 - 日食中の星光の曲率によるアインシュタインのTheoryの確認

これらの現象は、GR理論でしか説明できないため、非線形とみなされる。しかし、相対論的效果が無視できる条件下では、ニュートンの法則は有効な近似を提供できる。このように、GRはニュートンの法則の限界を超えて重力の理解を拡張し、大規模かつ高速での重力相互作用の理解を深める道を開いた。

### 2.3.3 時間空間幾何学と測地線方程式

自由落下中の慣性フレームに関するアインシュタインの等価原理を思い出してほしい：

「重力場では、時空のどの点においても、十分に小さな領域では物理法則が重力のない場合と同じになるような局所的に慣性的な座標系を選ぶことが常に可能である」。

この自由落下参照枠では、自由落下中の物体が感じる慣性力は重力力を打ち消し、物体はいかなる力も受けない（無重力状態）ことになる。その結果、慣性フレームは、物体が重力の影響を受ける「実験室フレーム」として知られる第2のガリレオフレームで分析する前に、相互作用する物体（特殊相対性理論フレームとして知られる）を研究する

ための基本フレームとなる。この後者のフレームは、実際には、自然の慣性フレームに比べて上方に加速されている( $a = -g$ )に加速される。

特殊相対性理論では、慣性フレームは平坦な時空を数学的に表現したミンコフスキー計量によって記述される。このメトリックは、重力の影響がない領域で適用される。このような状況では、物体の軌道は特殊相対性理論の原理から導かれる運動方程式によって決定される。一般相対性理論では、重力によって湾曲した時空に対して「測地線」という用語が使われるが、特殊相対性理論のミンコフスキー計量では、これらの軌跡は等速運動を表す直線として記述するのが適切である。この枠組みでは、慣性フレーム内の物体は等速で直線運動し、これは平坦な時空における測地線の特殊な場合である。

### 慣性フレームと座標

まず、この慣性フレームワークに身を置き、このフレームワークにおける点質量の座標を定義しよう。  $\xi^\alpha$  で  $\xi^0 = ct, \xi^1 = x, \xi^2 = y, \xi^3 = z$  を持つ座標を考える。この物体はいかなる力も受けない（速度が一定）ので、：

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

$$d\tau^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ここで

$\tau$  はこの空間におけるメトリックまたは区間に相当し、次のように表すこともできる。  
 $s$  このメトリックは参照枠が何であろうと不変であることに注意することが重要である。

### 加速された検査室基準フレームワークへの座標変換

ここで、以前の慣性参照枠に対して「上方に加速された」新しいガリレオ実験室参照枠で座標変換を適用してみよう：

$$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

しかし、新しいガリレオフレームの各座標は慣性フレームの座標に依存し、その逆も同様である：

$$x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

そして  $\xi$  に依存する  $\tau$ :

$$\xi^\mu(\tau)(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

の各パラメーターも  $\xi$  にも依存する。  $\tau$  したがって、：

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} + \frac{dx^1}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^1} + \frac{dx^2}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^3}$$

これは、繰り返されるインデックスの和表記を使って表すことができる：

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

注：数学では、和表記は一連の項の和をコンパクトに表す方法である。ある添え字が式の中で下位の添え字としても上位の添え字としても現れる場合、これは一般にその添え字に対する和を意味し、その添え字の取り得るすべての値を足し合わせることを意味する。この表記法は、繰り返される添字を含む方程式の表現を簡略化するために、数学や物理学のさまざまな分野でよく使われている。

ここで、測地線方程式(2)

を導くために、もう一度この式を導きたい：

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

$$\frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

繰り返されるインデックスの和を求めるには、以下のようにする：

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$$

この操作を実行する必要がある：

$$\left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) = 0$$

ただし  $\beta \neq$

$\mu$  の場合、同一座標系におけるある座標の他の座標に対する偏導関数はゼロである（たとえば  $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ ）、そして  $\beta = \mu$  これはクロネッカー記号( $\delta_\mu^\beta$ ):

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta$$

備考  $\beta$  と  $\mu$  が同じ座標系で異なる座標を表すときは  $\beta$  に対する偏導関数はゼロである。

$\mu$  に関する偏導関数はゼロである。しかし  $\beta$  と

$\mu$  が同じ座標を表すとき、偏導関数は1に等しく、これは座標が記号  $\delta_\mu^\beta$ 。

これによって、：

$$0 = \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

しかし  $\mu$  を  $\beta$  ( $\beta = \mu$ ) に置き換えると  $\delta_\mu^\beta = \delta_\beta^\beta = 1$  では  $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$  となる：

$$0 = \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

したがって、以下のようにクリストッフエル記号を導入する：

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

次の測地線方程式を導くことができる：

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

これはクリストッフエル記号の一般式を表している。

$\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ を座標変換関数の導関数で表したものである。後述するように、クリストッフエル記号は一般相対性理論や微分幾何学の数学で、座標系が局所的にどのように変化するかを記述するのに使われる。

この測地線方程式から何がわかるだろうか？

- 「加速された」ガリレオ参照枠における座標の2次微分は、もはやゼロではなく、一般相対性理論で適用される慣性力（この場合は重力）に等しい。[\(3\)](#)から、次のことが推論できる：

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

もし $\mu$ と $\nu$ が空間座標だとすると $\tau$ に関する導関数が速度に対応する。

- 実験室の「加速された」ガリレオ参照枠の中を動く物体は、地球の重力を受けるとこの方程式に従う。
- この式の形は、曲面（多様性）上の最短または最長の経路（極値）に関する情報を与えてくれる。より正確には、測地線は、物理的性質が時間とともに一定に保たれる（外力が加わらない）静止経路に対応する。
- 重力は、曲がった時空（時空の曲がり方はクリストッフエル記号で表される）の中で物体が進む測地線と結びついた、純粋に幾何学的な効果として説明することができる。例えるなら、2つの物体が地球上のある地点から北に向かって同じ速度で平行かつ同じ経路を進むとする。この交差は、力が引き寄せたという事実（ニュートン力学のアナロジー）か、地球の曲率に関連した純粋に幾何学的な効果（相対論的力学のアナロジー）のどちらかによって分析できる。一般相対性理論によれば、重力は時空の曲率であり、局所的な直線運動をする物体をこの測地線に従わせる。一般相対性理論は、時空の曲率をその構成要素（物質、エネルギー）の関数として決定し、この時空を移動する粒子の軌道を記述することを可能にする。

- クリストッフェル記号は、メトリックとその偏微分から計算され、時空の曲率に関する情報をとらえる。これによって、測地線が時空の曲率によってどのような影響を受けるかを計算することができる。

### 2.3.4 計量テンソル

ここで計量テンソルを見て、それらが先に決定したクリストッフェル記号とどのように関係しているかを見ていく。

慣性参照枠内の移動物体の時空座標を用いて記述されたミンコフスキー計量について考えてみよう：

$$d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2$$

また、次のように書くこともできる。  $\alpha$  として  $\beta$  :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

この式は、ミンコフスキー空間の計量テンソル

$\eta_{\alpha\beta}$  ミンコフスキー空間の計量テンソル（これは特殊相対性理論における平坦時空を記述する）を使って、時空間隔  $d\tau^2$  座標微分  $d\xi^\alpha$  として  $d\xi^\beta$ . ミンコフスキー計量テンソル  $\eta_{\alpha\beta}$  は、対角線上の時間的区間では-

1、空間的区間では+1、対角線外の区間では0となる成分を持つ：

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

以下の式は、2つの座標系間の微分変換規則を表していることを覚えておいてほしい。これらの式は、座標系  $x^\mu$  と  $x^\nu$  の小さな変化が、別の座標セット  $\xi^\alpha$  として  $\xi^\beta$ .

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

$$d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

さて、この2つの微分形を式 (5) に代入すると、以下の式が導かれる：

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ここから次のような計量テンソルを抽出することができる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

計量テンソルは一般相対性理論において基本的な役割を果たす。なぜなら、計量テンソルは時空の幾何学と、座標  $x^\mu$  と

$x^\nu$  に位置する2つの物体の間で重力がどのように作用するかを決定するからである。このテンソルは、物質とエネルギーの分布によって変化する時空の局所的な曲率を考慮しながら、これらの物体の座標をそれらの間の距離に変換することを可能にする。従来の直感に反して、曲がった時空における2点間の距離は、この曲率に依存し、かなり変化する。したがって、計量テンソルは2つの事象の間隔を計算するための重要な数学的ツールであり、重力場が存在する場合の2つの事象間の経過時間の測定も含まれる。

指数  $\mu$  と

$\nu$  は無言で繰り返されるため、アインシュタインの和の法則に従うことになり、したがって計量テンソルの式で入れ替えることができる。このことは、計量テンソル

$g_{\mu\nu}$  は対称である。  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  .

注意：これからは  $g^{\mu\nu}$  の逆数とする。  $g_{\mu\nu}$  の逆数をとることにする。

$\alpha$  クロネッカー記号：

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$$

ここで  $\delta_\nu^\mu$  はクロネッカー記号である。  $\mu =$

$\nu$  それ以外は0である。この関係は、微分幾何学と一般相対性理論における計量テンソルの逆数の性質を定義している。

### 2.3.5 クリストッフエル記号

クリストッフエル記号は

$\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  は計量テンソルから派生したもので、時空の幾何学に関する重要な情報を提供する。これらはテンソルそのものではなく、実数テンソルである計量テンソルから派生したものである。

クリストッフエル記号を計算するためには、計量テンソルの成分の偏導関数を取り、これらの導関数の特定の組み合わせを適用する。第2種のクリストッフエル記号の公式は次式で与えられる：

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

各項は、座標に関するメトリックテンソルの偏導関数である。

$g^{\beta\alpha}$  はメトリックテンソルの逆数であり、適切な添字上で和をとっていることを保証する。後述するように、クリストッフエル記号は測地線の決定において中心的な役割を果たす。測地線は、曲がった時空における粒子と光の軌跡を記述し、一般相対性理論の運動方程式で使われる。

証明。ここで、クリストッフエル記号を計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の偏微分を考える。

$g_{\mu\nu}$  を座標  $x^\lambda$  .この操作は、座標変換関数



$\xi^\alpha$ を導入し、これをChristoffel記号(6)の式に積分することができる。  
 計算を始める前に、計算を簡単にするための予備知識をいくつか挙げておこう：

- 計量テンソルは対称である。 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ .
- と置き換える  $\nu$  で置き換えるには  $\alpha$  に置き換えるには、まず既存の無声添え字  $\alpha$  を  $\sigma$ .

計量テンソルは次のように得られる：

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha}$$

積の法則を適用すると、次のようになる。  
 $\eta_{\sigma\beta}$  は定数であることを思い出せば、次が得られる：

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right)$$

予想される二次偏導関数は、方程式の右辺に現れる (2回)：

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

クリストッフェル記号式(6)

をこの関係に統合するには、両辺に以下の変換を適用して偏微分を分離し、反復指数にかかる和を導入する必要がある。 $\beta$ ：

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left( \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right)$$

しかし、我々は知っている：

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma$$

であり、(7)によれば、このクロネッカー記号は  $\sigma = \lambda$  である：

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

そして、式(8)でこれを置き換えることができる。その際、新しい式で対応する添字を同様の方法で再表現するように注意する：

$$\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

$$\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

注：クリストッフェル記号の上に

$\beta$ クリストッフェル記号は、それを割り当てたい項の無声指数であるため、別の文字を選択する、 $\rho$ :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

最後に、(8) から次のことが言える：

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

したがって、計量テンソルの微分は3つの異なる方法で表すことができる。 $\nu$ と $\mu$ を $\mu$ を $\alpha$ )：

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu} \Gamma_{\alpha\nu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

この微分の3つの表現方法によって、最初の2つを足し、最後の2つを引くことで簡略化された結果を得ることができる：(9a) + (9b) - (9c)：

$$g_{\alpha\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$g^{\beta\alpha} g_{\alpha\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

$$\delta_\rho^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

だから、最後に：

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

このクリストッフェル記号の式は、重力によって引き起こされる時空の曲率と、計量テンソルの空間微分との間のリンクを確立することを可能にする。これは、一般相対性理論における測地線を支配する方程式を定式化するために不可欠である。□

球面計量に対するクリストッフェル記号の計算例：

球座標では、3次元空間の線要素  $ds^2$  は次のように表される：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$$

ここで  $dr, d\theta$  と  $d\phi$  は半径座標  $r$  極角  $\theta$  と方位角  $\phi$  の微分である。球面座標における対応する計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は対角であり、次式で与えられる：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

証明直交座標と球座標の関係は図2.3から導かれる：

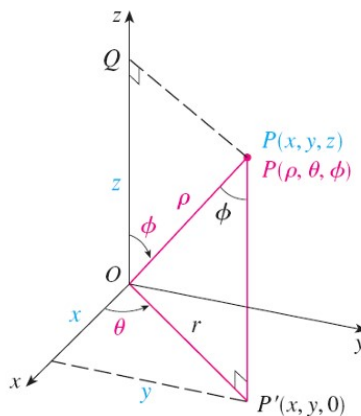


図2.3-点の位置。Pの位置は距離  $\rho$  と角度  $\theta$  (緯度) と  $\phi$  (経度) によって定義される。

三角形OPQとOPP'を考えると、次のようになる： $z = \rho \cos\phi, r = \rho \sin\phi$ ここで  $x = r \cos\theta$ となる。 $y = r \sin\theta$ .したがって

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

図2.6の物理的表記を用いると、デカルト座標への移行は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\phi \sin\theta \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

しかし、直交座標でのメトリックは次式で与えられる：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

これを球座標で表すには、次のように置き換える。 $x, y$ と  $z$ を球面座標における等価物で置き換えると、(11)が得られる。□

クリストッフェル記号  $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$  を計算するために、まず計量テンソルの逆数を求める：

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

与えられた計量テンソルに対して、クリストッフェル記号に必要な偏導関数を計算する：

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} &= 2r, \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} &= 2r \sin^2(\theta), \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} &= 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned}$$

これらの偏導関数をChristoffelの記号式(10)に挿入し、繰り返しインデックスを合計して計算する。

$\alpha$ .与えられた計量テンソルに対して、クリストッフェル記号のほとんどはゼロになる。 $r$ そして $\theta$ .ゼロでないクリストッフェル記号は：

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2(\theta) \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{r\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot(\theta) \end{aligned}$$

NBだ：

- クリストッフェル記号  $\Gamma_{\theta\theta}^r$  は以下のように計算される：

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left( -\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} \right)$$

の唯一の非ゼロ微分は  $g_{\theta\theta}$  に関するものである。 $r$ .この値を代入すると：

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial(r^2)}{\partial r} \right) = -r.$$

- もう一つの例はクリストッフェル記号である。 $\Gamma_{r\theta}^{\theta}$ これは次のように計算される：

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} \right)$$

ここで、唯一のゼロでない項は  $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}$  となる：

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \right) (2r) = \frac{1}{r}$$

### リーマンテンソル、リッチテンソル、リッチスカラーの計算

この球面空間では、リーマンテンソルとリッチテンソル、そしてリッチスカラーの成分はすべてゼロであり、平らな空間の幾何学的形状を示している。

証明リーマン曲率テンソルは次式で定義される：

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

例えば、(12)で提供されるクリストッフェル記号を見てみよう：

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

リーマンテンソルの成分を計算することができる。例えば  $R_{r\theta r}^\theta$ ：

$$R_{r\theta r}^\theta = \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta \Gamma_{rr}^\lambda - \Gamma_{r\lambda}^\theta \Gamma_{\theta r}^\lambda$$

したがって、リーマンテンソルの成分を計算するには  $R_{r\theta r}^\theta$  を計算するには

- 第1項は  $\partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta$  はゼロである。  $\Gamma_{rr}^\theta$  がゼロだからである。
- 第2項  $\partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta$  の偏導関数を意味する。  $\Gamma_{\theta r}^\theta$  に関して  $r$  である。  $-\frac{1}{r^2}$ 。
- 第3項は  $\lambda$  の  $\Gamma_{\theta\lambda}^\theta \Gamma_{rr}^\lambda$  の和であるが  $\Gamma_{rr}^\lambda$  はゼロなので  $\lambda \neq r$  はゼロである。
- 第4項は  $\lambda$  の  $\Gamma_{r\lambda}^\theta \Gamma_{\theta r}^\lambda$  の和である。  $\lambda = \theta$  を与える。  $\left(\frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$ 。

ゼロでない2つの項（項2と項4）の和は：

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

したがって  $R_{r\theta r}^\theta$  はゼロである。

Ricciテンソルは、Riemannテンソルをその第1と第3の添字上で縮約することによって得られ、次式で与えられる：

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$$

最後に、リッチテンソルのトレースであるリッチスカラーは以下のように計算される：

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

リーマンテンソルはゼロなので、リッチテンソルとそのスカラーもゼロである。□

**Mathematica 計算コード :**

```
(*パッケージのインポート*)
(*-----*)
Needs["OGRe`"] (ニーズ["OGRe`"])
(*座標の定義*)
TNewCoordinates["Spherical", {r, /[Theta], /[Phi]}] (**計量テンソルの定義*)
(*メトリックテンソルの定義*)TShow@.
TNewMetric["SphericalMetricTensor", "Spherical",
  対角行列[{1, r^2, r^2 Sin[/θ]]^2}] (*線要素*)
(*LineElement*)
TLineElement["SphericalMetricTensor"] (*LineElement*)
(*クリストッフェル記号の計算*)
TList@TCalcChristoffel["SphericalMetricTensor"] (*線要素*)
(*リーマンテンソルの計算*)
TList@TCalcRiemannTensor["SphericalMetricTensor"] (*リッチテンソルの計算*)
(*リッチテンソルの計算*)
TList@TCalcRicciTensor["SphericalMetricTensor"] (*リッチスカラー計算*)
(*リッチスカラー計算*)
TList@TCalcRicciScalar["SphericalMetricTensor"] (*リッチスカラー計算*)
```

### 2.3.6 弱い場の極限における測地線の方程式の応用

クリストッフェル記号の式と測地線方程式を次のように書き下す。  $v = 0$  時間座標、そうでなければ空間座標  $x, y, z$  ):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$$

どこ

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\sigma,\nu}$$

**NBだ :**

- この方程式は、メトリックテンソル  $g_{\mu\sigma}$  座標  $x^{\nu}$  カンマの後に微分指数をつけて書かれることが多いが、この場合は  $\nu$ .カンマ表記

$g_{\mu\sigma,\nu}$  表記はテンソル成分の偏導関数を表す一般相対性理論でよく使われる省略記法である。

- 特殊相対性理論の文脈では、光速を1と定義する単位系を使用するのが一般的である。  $c$  が1 ( $c = 1$ )。これにより方程式が単純化され、特定の量を表現しやすくなる。この単位系では、等価性があるため、距離は時間の単位で表される（例えば、メートルの代わりに光年）。  $c = 1$ 。そのため、時間は秒単位で表さなければならず、長さの単位は1秒間に光が進む距離となり、光秒（「光年」と等価）で表される。従って、メートル法を次のように表すことができる：

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

とはいえ、これまで述べてきた時間が  $t$  これまで表現してきた時間が  $\tau$  であると考えことにする：

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ここで、重力場が弱く静的な場合（すなわち、特殊相対性理論において  $g_{\mu\nu}$  が  $\eta_{\mu\nu}$  に非常に近く、時間に依存しない）、速度が光速よりはるかに小さいとき、すなわち、次のように表すことができる。  $v/c \ll 1$  これは次のように表すことができる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$$

注：線形化重力の理論では、時空はほぼ平坦であると仮定する。そのために、全計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  をミンコフスキー計量  $\eta_{\mu\nu}$  メトリックの和として表現する。

$h_{\mu\nu}$  これは質量やエネルギーの存在による平坦さからのずれを表す。このことは後ほど、静止系の双極子反発の研究（セクション3.3）で説明する。

この計量テンソルを式(14

)に積分することで、計量テンソルの偏導関数は  $h_{\mu\nu}$  なぜなら

$\eta_{\mu\nu}$  は定数であり、その導関数はゼロである。このように、線形化された重力理論では、摂動の寄与のみを考慮することでクリストッフェル記号を近似することができる。

$h_{\mu\nu}$ 。これは、クリストッフェル記号が計量テンソルの一次導関数によって定義され、弱い重力場では  $h_{\mu\nu}$  は

$\eta_{\mu\nu}$ 。そのため、弱い重力場のクリストッフェル記号を計算するときは、

$\eta_{\mu\nu}$  の導関数を無視し  $h_{\mu\nu}$ 。したがって、次のようになる：

$$g_{\mu\sigma,\nu} = h_{\mu\sigma,\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma} \quad \text{et} \quad g_{\nu\sigma,\mu} = h_{\nu\sigma,\mu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma}) (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

が小さいことを考えると  $h_{\mu\nu}$  が小さいとすると

$h^{\lambda\sigma}$  とその偏導関数との積は、2次以上の項に寄与する（たとえば  $h^2$ ,

$h^3$ など)。これらの高次の項は、我々が探している1次の項よりもかなり小さい。したがって、クリストッフェル記号を計算するときは、 $0$ とその導関数の積を無視する。 $h_{\mu\nu}$ とその導関数の積を無視する。 $h^{\lambda\sigma}$ の寄与は $\eta^{\lambda\sigma}$ 。したがって、次のようになる：

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

この近似は、弱い重力場における時空の曲率を計算するプロセスを単純化し、摂動が時空の曲率の起伏を表す重力波の解析において基本的なものである。

$h_{\mu\nu}$ は時空の曲率のうねりを表す。

ここで2つのケースを考えてみよう：

- に対して  $\lambda = 0$   
 0一般相対性理論における時間座標に対応するクリストッフェル記号は、第一種のクリストッフェル記号の式が時間座標に固有になる。ミンコフスキー計量テンソル $\eta$ 計量テンソルと摂動 $h$ に対するクリストッフェル記号は $\lambda = 0$ は次式で与えられる：

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} \eta^{0\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

であるため $\eta^{0\sigma}$ がゼロでないのは $\sigma = 0$ となり $\eta^{00} = 1$ となり、次の関係が得られる：

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} (h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0})$$

しかし、重力場は静的であり、時空間メトリックは時間によって変化しないので、時間に関するメトリックテンソルの偏微分 $(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t})$ はゼロである。これにより、系は時空間計量に関して静止領域にあると考えることができる：

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} (h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu})$$

- で示される空間座標に対して  $\lambda = i$  (ここで  $i, j, k$  は空間インデックスを表す)、クリストッフェル記号は摂動メトリックを用いて計算することができる。 $h_{\mu\nu}$ 。ミンコフスキー計量テンソル $\eta^{i\sigma}$ はインデックスを上げるために使われ、インデックスが一致するときは $-1$ に等しい。したがって、空間座標のクリストッフェル記号は次式で与えられる：

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} \eta^{i\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

しかし、以下の方程式の空間成分が負符号であることを考えると $\eta^{i\sigma}$ の方程式は $\sigma = i$ は次のように単純化される：



$$\Gamma_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2}(h_{\mu i, \nu} + h_{\nu i, \mu} - h_{\mu\nu, i})$$

この負の符号は、ミンコフスキー計量テンソルの空間成分が時間成分に対して反対の符号を持つことを反映している。

では、これらの結果をそれぞれの場合の測地線方程式(13)に積分してみよう：

- なぜなら  $\lambda = 0$  について  $x^\lambda = x^0 = ct$  である：

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2}(h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

しかし、次の積は、繰り返される添字の和を生成する。 $\mu$ そして  $\nu$  量の和を生成する：

$$(h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

高次の量、特に1次と2次の量は非常に無視できるものである。

$h_{\mu\nu}$  よりもはるかに小さいからである。

$\eta_{\mu\nu}$  をはるかに下回る小さな量に基づいているためである。ここでいうゼロ次とは  $\mu$  と

$\nu$  がともに0に等しい項を指し、これは時間成分に相当する。この単純化により、以下の式が導かれる：

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2}(h_{00,0} + h_{00,0}) c^2 \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

この近似では、時間座標を含む項だけが運動方程式に大きく寄与し、弱い重力場における時空測地線の解析を単純化する。

しかし、重力場は静的であるため、これらの量はゼロである：

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} = 0$$

これは  $t$  は  $s$  に比例することを意味する：

$$s = ct$$

- で示される空間座標について、(15)から  $\lambda = i$ (15)から、次が得られる：

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2}(h_{\mu i, \nu} + h_{\nu i, \mu} - h_{\mu\nu, i}) \frac{1}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

ただし、前述したように、0次量については  $\mu$  と

$\nu$  重力場の静的性質のため、以下の式が得られる：

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} h_{00,i} = 0$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}$$

したがって

$i$ は1、2または3の値をとる空間的なインデックスであるため、ベクトル形式で表現できる「加速度-力」の等価性の形式を見つけることができる：

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

と

$$\phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$$

重力ポテンシャルと計量テンソルの時間成分との関係は、(16)を(17)に導入することで確立できる：

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

重力ポテンシャルは  $\phi$  は速度の2乗( $c^2$ )と等価である。  $h_{\mu\nu} \ll$

$\eta_{\mu\nu}$  を知れば、地球の重力ポテンシャルを局所的に調べることができる、  $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = \frac{2G \cdot M_t}{R_t \cdot c^2} = 10^{-9} \ll \eta_{00} = 1$  重力ポテンシャルの計算式はよく知られている：

$$\phi = \frac{GM}{R}$$

### 2.3.7 カール・シュヴァルツシルトとルートヴィヒ・フランムの 解決策

カール・シュヴァルツシルトは、方程式(18)の完全な幾何学的解を開発し、2つの別々の論文で発表した((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a))：

- 第一の解は、以下の測度を使って、半径  $r_n$  (図2.4)：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

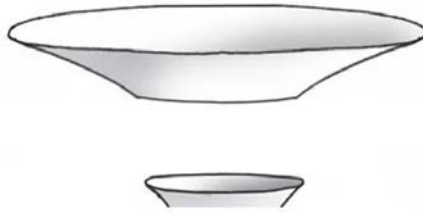


図2.4 - Flamm超曲面の部分

- 第二の解は、しばしば次のような測度によって構成される内的シュヴァルツシルト解と呼ばれるもので、半径が星のような非圧縮性流体の静的な球対称体内の時空の幾何学的形状を記述する。  $r_n$  すなわち図2.5

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^2}{3c^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2$$

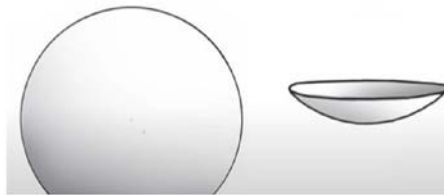


図2.5 - 球体のPortion

このアプローチでは、時空解の2つのセグメント、具体的には超曲面の2つの領域を結合する。接合は共通の境界で行われ、時空形状の連続性と、境界を越えた結合解の物理的一貫性が保証される。

同じ年、若い数学者がシュヴァルツシルトの

研究に独自の解釈を加えた。彼の名はルートヴィヒ・フランム。彼の論文が2012年まで英訳されなかったからである。彼は、3次元のリーマン超曲面 (Flamm

1916) のような物体の幾何学に精通していた。

シュヴァルツシルト外接計量に基づいて、クルスカールはブラックホール理論の基礎とされる有名なモデルを開発した。実際、彼はシュヴァルツシルトの外在解を解析的に拡張することによって、「事象の地平面」 (シュヴァルツシルト半径) に対する座標特異点を「代数的」に解消した。  $r =$

$R_s$  (シュヴァルツシルト半径) の「事象の地平線」に見られる座標特異点を、新しい座標系を導入することによって「代数的に」解消したのである。この座標系は、(シュヴァルツシルト半径)の「中心的な物理的特異点」以外のすべての場所で、メトリックを規則正しくするように設計されている。  $r = 0$  ((Martin D. Kruskal 1960),(Jean-Marie Souriau 1965))。しかし、このモデルは本当に物理的に理にかなっているのだろうか？

### 2.3.8 シュヴァルツシルト 外部計量に対する測地線の構築

(Adler, Bazin, and Schiffer 1975) (Page 194)から引用したシュヴァルツシルト外側の計量 (6.53)を考えてみよう：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

ここで  $m$  は単純な積分定数（長さ）、 $x^0$  は年代マーカ（これも長さ）、そして  $s$  は 4次元超曲面で測定された長さである。

著者たちはこう書いている：

$$x^0 = ct$$

測地線は超曲面に内接する経路で、長さの最小値に対応する。

$$\delta \int ds = 0$$

つまり、この長さは：

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\}$$

はこのようにパラメータ化されたパスに沿って最小値を持つ： $t(s), r(s), \theta(s), \phi(s)$ . と書こう：

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$$

これは、 $N$  を最小化する経路を探索することを意味する：

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) \right\} ds$$

角括弧内の数量は：

$$L = L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad \text{ou} \quad L = L(x^i, \dot{x}^i)$$

この問題はフランスの数学者ラグランジュによって解決され、現在ラグランジュ方程式として知られているものにつながった。

測地線の計算は「境界極限」問題である。これは、2点  $a$  と  $b$  を結ぶすべての経路を考えるからである。そして、測地線は次式で与えられる。

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

と :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

(Adler, Bazin, and Schiffer 1975)の最初の3つのラグランジュ方程式(6.75), (6.76), (6.77)は、変数  $\theta, \phi$  と  $t$  は以下の通りである :

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{ds} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0$$

メトリック (25) の各項を  $ds^2$  :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

一般相対性理論では、解の球対称性を利用することで、測地線の解析を簡単にすることができる。実際に球対称であるシュヴァルツシルト測度の場合、この対称性を利用して問題を2次元に縮小することができる。

球座標におけるシュヴァルツシルトの計量は、以下の変数に依存する。  $r, \theta, \phi$  と  $t$ 。球対称性とは、中心に対して回転してもメトリックが変化しないことを意味する。この性質により、一定の平面に留まる測地線を選ぶことで問題を単純化することができる。計算を簡単にするために赤道面を選ぶのが一般的で、これは次のように設定することに対応する。  $\theta = \pi/2$ 。この平面では  $\theta$  は変化しない。  $d\theta = 0$  したがって  $d\theta$  が消える (図2.6参照)。

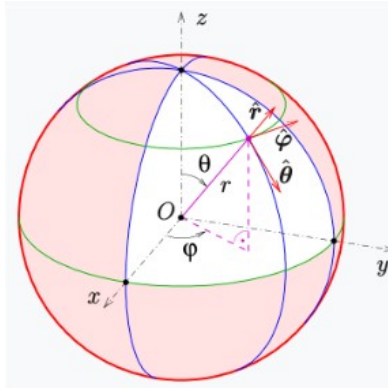


図2.6 - 球面座標におけるVectors

そして、このメトリックに関連するラグランジアン（系の力学を要約する関数）を調べることによって、測地線の運動方程式を求めることができる。赤道面を運動する物体の場合、角運動量の方位角成分は、次の式に連動する。

$\phi$ これは、赤道面に垂直な軸に関してメトリックが軸対称であることの結果である。数学的には、これは次式で表される：

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{constante}$$

ここで  $h$  は運動定数（単位質量あたりの角運動量）である、 $r$  は半径座標、そして  $\dot{\phi}$  は方位座標の微分である。  $\phi$  に対する方位座標の微分である。

$s$  (物体とともに移動する時計によって計測される時間) に対する方位座標の微分である。

これは  $r^2 \dot{\phi}$  は測地線に沿って一定である。

上記の式(19)を積分すると、：

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l = \text{constante}$$

代入により、微分方程式が得られる：

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

これは  $r$  パラメータ

$s$ . しかし、先に示した方程式を使えば、微分方程式に移ることができる：

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

(20) と (21) から、次が得られる：

$$\dot{r} = \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

を結ぶ微分方程式を求めることができる。  $r$  と  $l$ :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

そして、変数  $r$  から変数  $u$  のようにする:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r' = -\frac{u'}{u^2}$$

そして、(22)から、:

$$d\phi = \frac{dr}{r'} = \frac{du}{u'}$$

ということになる:

$$(1 - 2mu) = c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu)$$

となる:

$$u'^2 = \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3$$

したがって、(23)から、積分によって:

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{dv}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} v - v^2 + 2mv^3}}$$

これはアインシュタインの方程式の厳密解である。  $\phi$  の積分として表される。  $u = \frac{1}{r}$  逆に、これは  $u$  の (暗黙の) 逆関数として得られる。

$\phi$  の逆関数となり、2つの積分定数  $l$  と  $h$ 。

もし

$h$  が大きい場合、比角運動量が大きくなるため、試験粒子が進む測地線は半径方向の自由落下軌道から外れることとなります。その結果、その軌道は中心体に直接向かう重力の影響を受けにくくなり、直接放射状に落下する軌道から外れて、より湾曲した、あるいは「準楕円」軌道をたどることになる。シュヴァルツシルト

球の内側の領域 ( $r < 2m$ )

を無視すると、この定常計量に関連する平面測地線を3Dで表現することができる。シュヴァルツシルト球の表現は、シュヴァルツシルト時間次元に沿って時空に投影される円と考えることができる。

$t_s$ . 半径10kmの中性子星を考えると、約2太陽質量のTolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 限界で安定を保つ。TOV限界は、中性子星が安定を保ちながら持ちうる

最大の臨界質量を表している。これは、同等の点質量の地平線をその中心から約6km( $r_s = \alpha$ ).恒星の半径は3/2倍なので  $r_s$  この物体の地平線を半径3に対して  $r_s = 2$  この構成により、図2.7に示すように、Mathematicaを使ってこの物体に向かって落下する軌道をたどるテスト粒子の測地線を表すことができました。

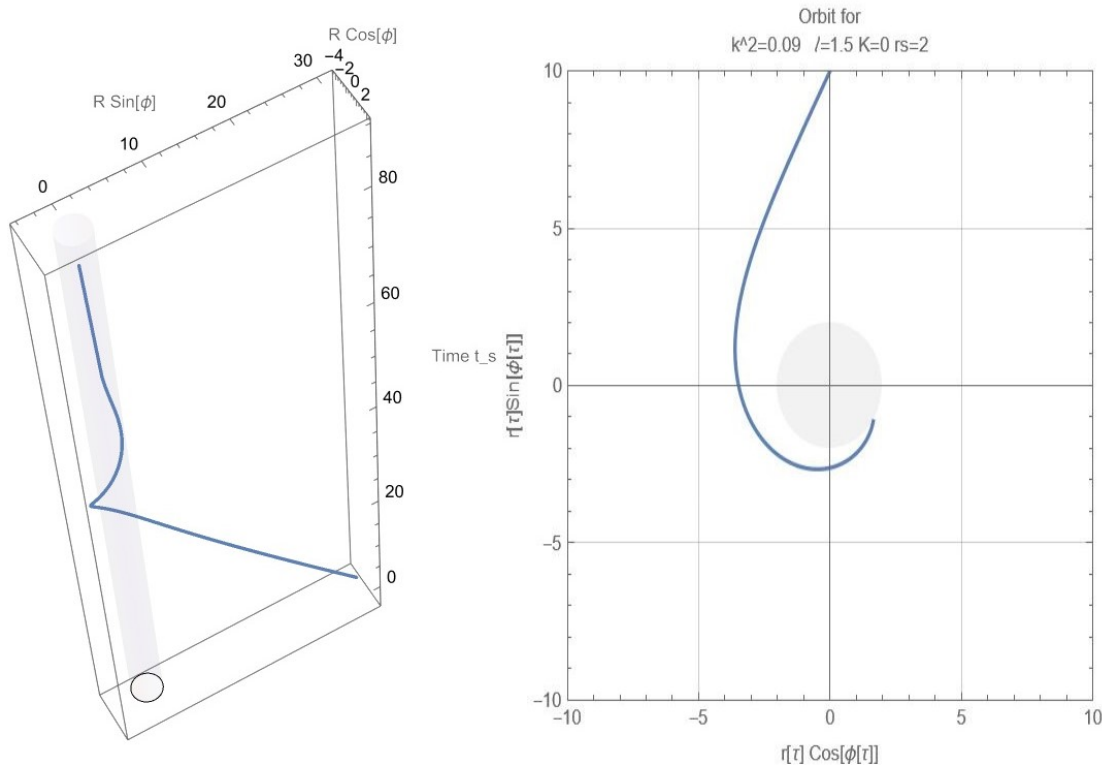


図2.7-座標系における落下測地線の表現( $r, \phi, t_s$ )

測地線の運動方向がどうであれ（この場合は求心性）、この時間座標の選択では、シュヴァルツシルト球に近づくのに無限の時間がかかることになる。実際、図2.8と図2.9からわかるように、遠方の観測者にとって、物理的臨界に近い中性子星や、第7章で別アプローチを研究するような超巨大天体の地平線に近づく物体は、シュヴァルツシルト半径と呼ばれるものに近い時間拡張を受けることになる。しかし、天体自身（あるいは天体と一緒に移動する観測者）にとっては、時間は正常に進み続ける（それぞれ点線と青の曲線）。



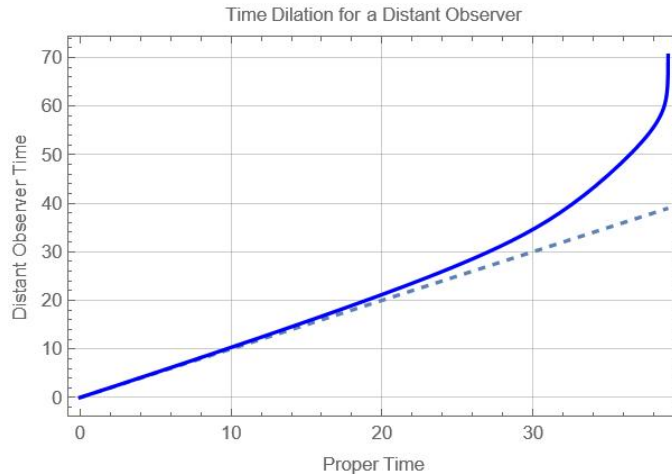


図2.8 - 遠距離観測者の時間拡張ation

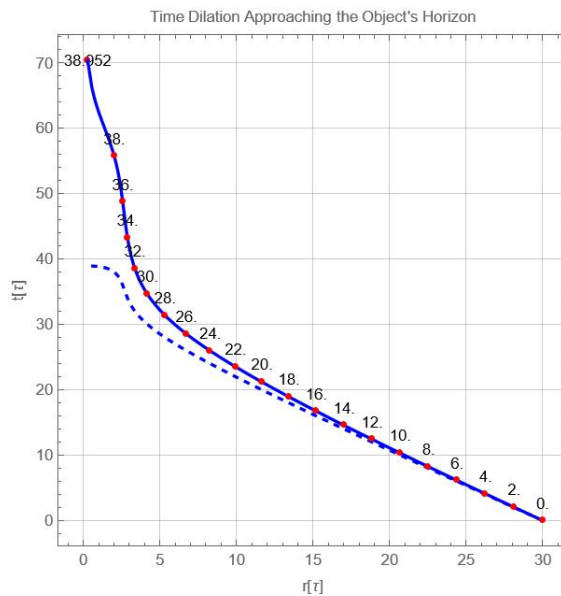


図2.9 - Tempo 物体の水平線に近づく実数のダイレーション

この遠方の観測者から見ると、物体は地平線に到達するまでに無限の時間がかかるように見える。その結果、物体は徐々に減速し、地平線の近くでほとんど凍結しているように見える。

この現象は、大きな質量が存在すると時空が湾曲するという一般相対性理論の結果である。この湾曲は時間の経過に影響を与え、強い重力場では時間の拡張につながる。この側面は、ブラックホール理論の柱のひとつである。しかし、別の選択肢はないのだろうか？これについては、[第5章](#)で後述する。

### 2.3.9 ロイ・カー解法

1963年、ニュージーランドの著名な数学者ロイ・カーは、アインシュタインの場の方程式の新しい解を提案し、ブラックホールモデルの文脈における一般相対性理論の理解に革命をもたらした。静的な球対称ブラックホールモデルの基礎として使われるシュヴァルツシルトの外側の計量（シュヴァルツシルト 1916b）とは異なり、カーの解は軸対称で、回転するブラックホールを表す（カー 1963）。この発見は、多くの天体に対してより現実的なモデルを提供したため、当時特に重要な意味を持った。

KerrのメトリックはBoyer-Lindquist

座標で表現される  $(t, r, \theta, \phi)$  (Chaskalovic 2009) で表され、その線要素は  $c = 1$  で与えられる：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right) \sin^2\theta d\phi^2$$

どこ

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2\theta.\end{aligned}$$

$M$ は周囲の時空に影響を与える中心回転物体（多くの場合ブラックホール）の質量であり  $a$ は回転する物体の比角運動量である。ここで注目すべき重要な用語は  $-\frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi$  これは、物体（典型的にはブラックホール）の回転による時空への抗力を表す。この特徴は、エルンスト・マッハの運動の相対性の考え方の現れと解釈することができ、時空そのものが動く物質の存在によって影響を受けているように見える。カーの解の妥当性は、1967年に発見されたパルサーによってさらに強調された。パルサーは当初、信じられないほどの高速で回転する中性子星として理解され、時には1秒間に1000回転に達することもあった。カー計量法は主にブラックホールモデルに適用されているが、中性子星のような他のコンパクトな天体物理学的天体を理解する上でも重要な意味を持つ。

著名な天体物理学者であるスブラマニヤン・チャンドラセカールは、カーの解法を理論物理学における応用数学研究の大きな進歩として賞賛した ((Chandrasekhar 1983))。カーのアプローチについて強調すべき重要な点は、他の表現特性を探求する可能性である。 $drdt$ 例えば、シュヴァルツシルトの外側の計量に項を導入するなどである。

### 2.4 アンドレイ・サハロフ&ジャン＝マリー・スリーオーの仕事

ヤヌスの宇宙論モデルは、アルベルト・アインシュタインの一般相対性理論、アンドレイ・サハロフの素粒子物理学と宇宙論の研究、ジャン＝マリー・スリーオーのシンプレ

クティック幾何学の研究を統合したものである。動的群の理論によれば、時間の反転がエネルギーの反転、ひいては質量の反転を意味することを説明している。実際、宇宙のバリオンの非対称性は、現在の物理学における最も重要な問題のひとつと考えられている。より正確には、宇宙にはバリオン（陽子や中性子のような3つのクォークからなる粒子）は正味量存在するが、反バリオン（3つの反クォークからなる粒子）はほとんど存在しないという観測結果を指す。宇宙はビッグバン以来、バリオン物質と反バリオン

反物質が同量ずつ誕生したはずであり、その結果、両者は互いに消滅し、質量は光子に変化したはずである。しかし、この原初の反物質はどうなったのだろうか？

1960年代、科学者たちは、（原初のクォークの組み合わせによる）物質の生成速度が（反クォークの組み合わせによる）反物質の生成速度よりもわずかに速いことを発見した。これは「CP対称性の破れ」と呼ばれる現象である（(Cronin 1964)）。しかし、このCPの破れの結果、原始宇宙ではより多くの物質が合成され、反物質よりも優勢になった。

ロシアの物理学者アンドレイ・サハロフは、1967年以降、宇宙は単一ではなく、同じビッグバンの特異点から生まれた2つの双子の宇宙から構成されていると考え、大域的対称性を回復させた最初の人物である。  $t = 0$ . 最初の特異点  $\Phi$  は、時間 (T対称性) だけでなく、パリティ (P対称性、「エナンチオ同型性」とも呼ばれる) と電荷共役 (C対称性、粒子を反粒子に変換する、またはその逆) も逆転させ、完全なCPT対称性を引き起こす ((Sakharov 1967),(Sakharov 1980),(Sakharov 1982))。CP対称性の破れは双子宇宙でも逆転しており、反物質が物質に勝っていることを意味している。サハロフはCPT対称性を素粒子物理学の文脈でのみ記述することに集中したため、図2.10のように、双子の宇宙が誕生の瞬間以外には相互作用しないように、彼のモデルには重力が含まれていないことに注意すべきである：

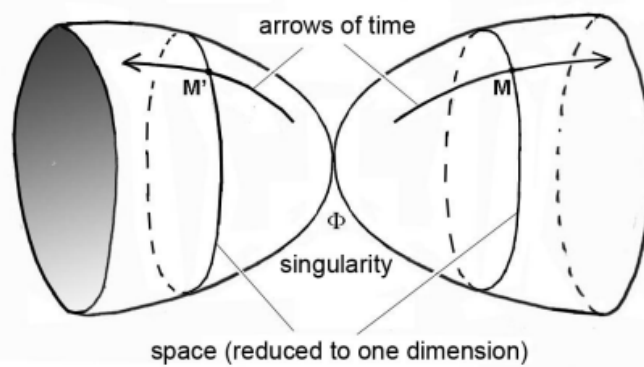


図2.10 - サハロフ宇宙論モデル

## 2.5 双曲リーマン幾何学が導入したバイメトリック・アプローチ

双曲リーマン幾何学はヤヌスの宇宙論モデルにおいて重要な役割を果たしている。この幾何学の一分野は、一定の負の曲率を持つ曲線空間を研究する。この幾何学によって、正と負の両方の曲率を持つ空間を概念化することが可能になる。しかし、バイメトリック

ク宇宙論モデルの基礎となるような、双曲リーマン幾何学に導入されたバイメトリックあるいはマルチメトリックな数学的理論は、現在のところ存在しないことに注意することが重要である。実際、現在の理論モデルは発見的なものにとどまっている。例えば、2002年と2008年にそれぞれThibault Damour ((Damour and Kogan 2002))とSabine Hossenfelder ((Hossenfelder 2008))によって2つのアプローチが試みられた。1つはバイメトリックな場の方程式系に重い重力子と軽い重力子を導入したもので、もう1つは我々のモデルとほぼ同様のものであった。

実際、DamourとKoganは、大質量の重力子のスペクトルを含む「2つの膜」理論を構築しようとしているが、40ページに及ぶこの文書は急停止している。一応、彼らはこのような大きな重力が2つの連立場の方程式系に従わなければならないことを示している：

$$2M_L^2 \left( R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^L R(g^L) \right) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L = t_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^L$$

$$2M_R^2 \left( R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^R R(g^R) \right) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R = t_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^R$$

その後、サビーネ・ホッセンフェルダー (Sabine Hossenfelder) が、宇宙における負の質量の概念に対応する洗練されたモデルを提案した。しかし1957年、ヘルマン・ボンディはこれらの質量をアルベルト・アインシュタインのモデルに導入しようと試みた。しかし、いわゆる漏れ現象によって物理的矛盾が明らかになり、このモデルは作用・反作用の原理や等価性といった物理学の基本原則に反していた ((Bondi 1957))。ホッセンフェルダーはさらに研究を進め、一對の新しい連立場の方程式を定式化した：

$$R_{vk} - \frac{1}{2} g_{vk}^{(g)} R = T_{kv} - \underline{V} \sqrt{\frac{\hbar}{g}} a_v^v a_k^k \underline{T}_{vk}$$

$$R_{\underline{v}\underline{k}} - \frac{1}{2} h_{\underline{v}\underline{k}}^{(h)} R = \underline{T}_{\underline{v}\underline{k}} - \underline{W} \sqrt{\frac{g}{\hbar}} a_{\underline{k}}^k a_{\underline{v}}^v \underline{T}_{kv}$$

そして、物理原理との矛盾を解決できず、それが「バイメトリック重力」と表裏一体であると考えたため、彼女は断念した。

これら2つのアプローチに共通するのは、純粋に理論的であり、観測によって検証された結果を提供していないということである。

ハイパーボリック・リースマン幾何学は、一定の負の曲率を持つ曲がった空間を研究するリーマン幾何学の一分野であり、数学的にはしばしば「鞍型」と表現されるハイパーボリックな形状に対応する。より正確には、双曲空間の一定の負の曲率は、双曲線の両方向の漸近挙動として記述することができる：双曲線の枝は収束す

ることなく無限に発散する。この特性は双曲空間の重要な特性であり、ユークリッド幾何学や球面リーマン幾何学と区別するのに使える。

例えば図2.11では、三角形を描く赤い線が表面の測地線である。簡単に言えば、測地線とは空間上の2点間の最短経路のことである。大きな紙の上にあるような平らなユークリッド空間にいると想像してほしい。しかし、曲面上では、正曲面（球面幾何学）であろうと負曲面（馬の鞍のような双曲面幾何学）であろうと、その曲面上の2点間に張られた紐や輪ゴムを使って測地線を描くことができ、これが最短経路を表す。したがって、三角形の角度の和が180度に等しいユークリッド幾何学とは異なり、この和は球面（リーマン）幾何学では180度を超え、双曲面幾何学（これもリーマン幾何学の一種）では180度未満となる。

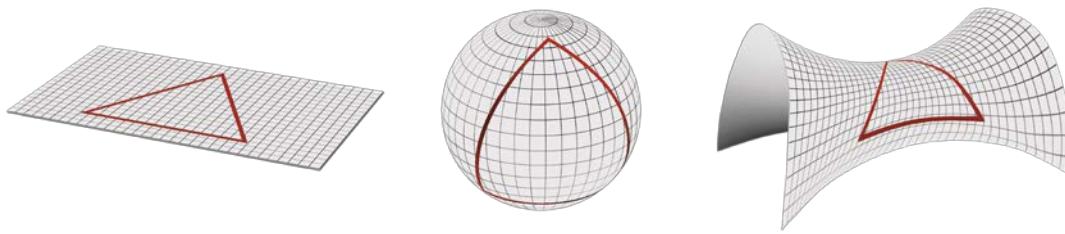


図2.11 - 空間曲率の種類

「平らな」ユークリッド空間、すなわち曲率ゼロの空間は、必ずしも平らな平面ではないことに注意することが重要である。先ほどの一枚の紙の例で考えてみよう。たとえそれが波形の鉄のように何度か折られたとしても、その曲率はどこでもゼロのままである。つまり、紙が伸びることはないので、その表面をなぞる測地線は変化しない。円柱や円錐のような閉じたユークリッド曲面にも同じことが言える。ユークリッド幾何学によれば、それらは曲がっているように見えるが、その表面は伸びることなく平面に展開できるため、「平ら」であるとみなすことができる。

次の章で展開されるヤヌス宇宙モデルのコンセプトは、2つの連立場の方程式系に従って、正の曲率を持つ空間と負の曲率を持つ空間の関係によって定義される「ジェメラ幾何学」と

関連付けることである。

### 3 ヤヌス宇宙論モデル

#### 3.1 説明

ヤヌス宇宙モデルは、2つの異なる測定基準を持つリーマン多様体によって特徴づけられる、革命的な宇宙像を提案する。これらの測定基準は、正負の質量をユニークな方法で扱い、一般相対性理論の枠組みの中で首尾一貫した解釈を提供する。

アンドレイ・サハロフによる2つの非相互作用のバイメトリック

宇宙という宇宙論的モデルに基づき、2つの測定基準を持つ単一のリーマン多様体、すなわち、*CPT*対称性において2つの層が折り重なった4次元超曲面からなる単一宇宙でありながら、今度は重力効果によって相互作用するという新しいモデルが開発された。

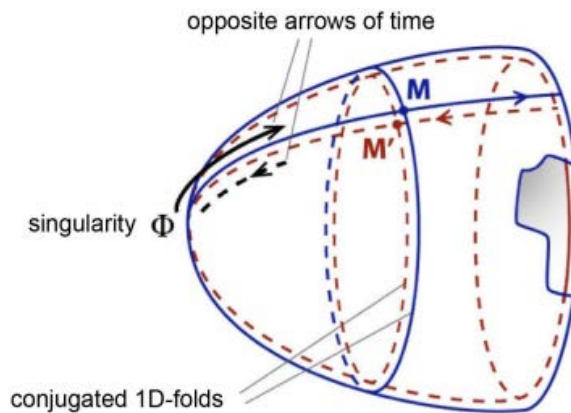


図3.1 - ヤヌス宇宙論モデル

第1層は、ある長さの単位で格子状に区切られ、この時空の2点間を正のエネルギーと質量を持つ物質が、特殊相対性理論（セクション2.2.2）によって制限された速度で通過するためのメトリックを提供する。

*c*特殊相対性理論（セクション2.2.2）によって制限される。その対となるものは、長さの単位が100倍短く、速さが10倍速い負のエネルギーと質量を持つ物質（同じ割合で進化する光子）に対して、長さの単位を折り返して2乗したもので、その結果、横切る時間は1000倍速くなる。このモデルは、2つの異なる方法と異なる速度で時空を横切る2つの測地線のファミリーを提供し、恒星間旅行を可能にし、原始反物質の消失や銀河の閉じ込めといったいくつかの物理現象を説明する（(Petit and d'Agostini 2014),(Petit 2018)）。

また、負のエネルギー状態が量子力学と両立することも示している。

このモデルは、アインシュタインの場の方程式を拡張した2つの連立場の方程式に基づいて構築されており、宇宙におけるダーク

エネルギー（反発力）とダークマター（銀河回転曲線の平坦化）の

存在に対して信頼できる代替案を提供すると同時に、負の質量を一般相対性理論にうま

く統合している。これは、「ラグランジアン」と

呼ばれる概念から方程式を導くことに基づいている。物理学では、物体や粒子がどのように動き、相互に作用するかを説明するために、しばしば原理を用いる。私たちの場合は、「作用」と呼ばれる特定の量を最小化することで、物理系が時間とともにどのように進化するかを記述する数式である「変動の原理」を使用する。この変動概念は「共変」でなければならない。つまり、どの慣性参照枠を選んでも同じであることを意味する。これは、速度に関係なく、すべての観測者に適用されることを意味する。

これらの原理を論理的に導き出すと、粒子の運動と相互作用を、相対運動に関係なくすべての観測者に有効なように記述する方程式が導き出されるはずである。「作用」は、ある時間にわたる「ラグランジアン」の積分として定義され、物理系の運動と力学を記述することができる。ラグランジアンは、系の運動エネルギーと位置エネルギー、およびその挙動に影響を与える可能性のある他の要因から計算される関数である。最小作用の原理を用いて、「作用」を最小化する系の軌道を求めます。これは、「作用」の値ができるだけ小さくなるような経路を意味します。運動方程式は、この最小作用の軌道を時間に関して微分することによって得られる。

### 3.2 インプリケーション

宇宙論は危機に瀕している。最初の例は、宇宙の膨張率である。宇宙は138億年もの間、巨大な風船のように膨らみ続けてきた。天体物理学者が望遠鏡を使って、ハッブル定数（あるいは

$H_0$ ）と呼ばれる現在の膨張速度を天体望遠鏡で測定したところ、宇宙論の標準モデル（ $\Lambda$ これは、宇宙の起源（ビッグバン）と最初の原子から、最初の星と銀河を経て現在に至るまでの宇宙の歴史を、現在最もよく説明している理論である。

ハッブル定数( $H_0$ )は、宇宙の膨張速度を測る宇宙論の重要なパラメータである。ハッブル定数は、銀河が互いの距離の関数としてどれくらいの速さで遠ざかっているかを示す。しかし最近、2つの主要な測定方法が大きく異なる結果を出している：

- 一方、銀河の直接観測による局所的な測定と、ケフェイドやIa型超新星などの標準的なローソクに基づく宇宙論的な距離尺度は、次のような値を与えている。

$H_0 73 \text{ km/s/Mpc}^2$

である。この測定は、アメリカのアダム・リースが率いるShoes共同研究によるものである。

メガパーセクは約326万光年に相当する。メガパーセクの距離ごとに、宇宙の膨張によって銀河の分離速度が毎秒73キロメートル速くなる。

- 一方、宇宙論の標準モデルの一部として分析されている宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background<sup>3</sup>) のデータは、メガパーセクあたり毎秒67.4キロメートル (km/s/Mpc) という低い値を示唆している。この方法はプランク衛星のデータに基づいている。

この食い違いは、もし測定誤差に起因するものでなければ、宇宙膨張を加速するダークエネルギーの役割など、標準モデルの基本的な側面を再評価する必要がある。ヤヌス宇宙論モデルでは、この反重力効果を負の質量に帰着させ、その性質を特定している。もう一つの例として、高度な赤外線観測能力を持つジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡 (JWST) は、最初の銀河の形成を含む、宇宙の進化のごく初期段階を観測するように設計されている。JWSTによる最近の観測では、標準モデルの予測に合致しない天体や振る舞いが発見され、標準モデルの基盤が全面的に見直されるに至っている。

宇宙論の標準モデルによると、宇宙はビッグバンの後に暗黒期を経験し、その後数億年後に

最初の星と原始銀河が

形成された。これらの最初の構造は、暗黒物質の重力に導かれながら、最初の10億年の間に大きな銀河へと進化した。銀河は何十億年もの間、発展し、集まり続け、現在観測されている様々なタイプの銀河が形成された。ダークマターとダークエネルギーは、それぞれ構造の形成と宇宙の膨張に影響を与え、このプロセスで重要な役割を果たしていると考えられている。 *Nature Astronomy* 誌

に掲載された最近の研究 (Boylan-Kolchin

2023) は、テキサス大学オースティン校のマイク・ボイルン=コルチン准教授が発見した、我々の銀河 (100億太陽質量) よりもはるかに質量の大きい高赤方偏移銀河 (ビッグバン後5億年から7億年の間) の予想よりも早い形成について言及している。

例えば、アベル2744

Y1は、約132億光年離れた彫刻座にある銀河団で、宇宙がまだ6億5千万年しかなかった頃の姿に見える (図3.2)。

---

3

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) とは、ビッグバンから約38万年後、宇宙が十分に冷えて電子と陽子が結合して原子ができた頃に放出された電磁波のことである。



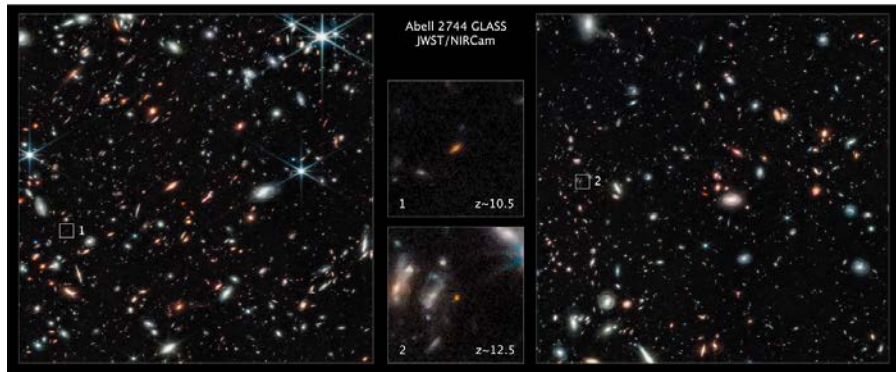


図3.2 - ジェイムズ・ウェッブ望遠鏡の画像 - Abell 2744 Y1

ジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡による今回の観測は、ヤヌス宇宙モデルの予測のひとつを再び確認するものである。

したがって、ヤヌス宇宙論モデルは宇宙論的な重要な疑問に新たな光を当て、その答えは多くの観測と予測によって確認されている：

- 図3.3のような、銀河の安定性に寄与する負の質量が占める隙間空間による銀河の閉じ込めの説明 ((Farnes 2017))。

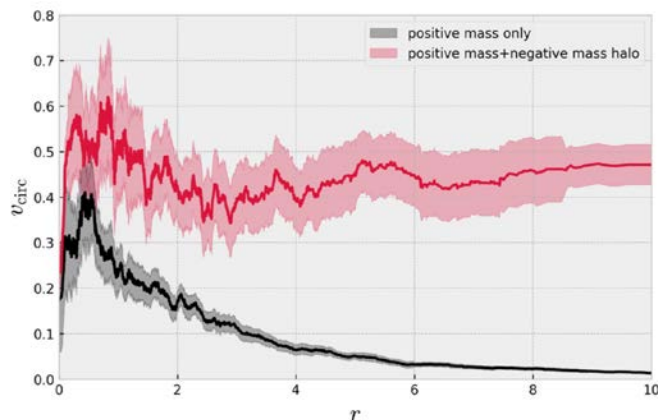


図3.3 -

正の質量を持つ粒子から成る銀河と、負の質量を持つ粒子から成るハローに囲まれた銀河の円周速度 *co urbes* の違い。

- 銀河回転曲線の形（平坦化）の説明
- このモデルは、負の質量の存在により、銀河の端を周回する星の重力加速度が予想以上に大きいことを説明する。
- 負の質量の反重力的寄与による銀河団の高速化の説明。

- 彼は、ブラソフ方程式とポアソン方程式に対する共通のアプローチに基づいて、銀河の振る舞いを数学的に詳細に記述することを提案している。銀河系内の星の速度は、銀河系中心に向かって楕円体に組織されていると予言し、この仮説は太陽系近傍の星の残留速度の測定によって確認された。
- 3.4のように、銀河の周りの重力レンズ効果を説明する。

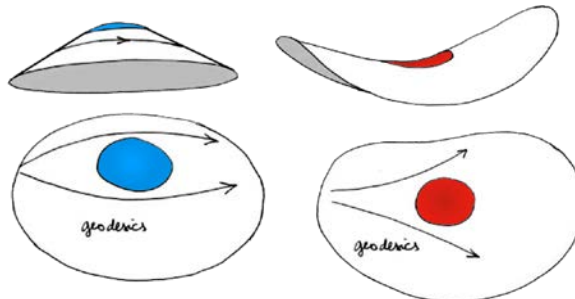


図3.4 - 重力レンズ効果

- 3.5のような、シャボン玉のようにつながった負の質量のクラスターが占める宇宙の裂け目構造の説明。

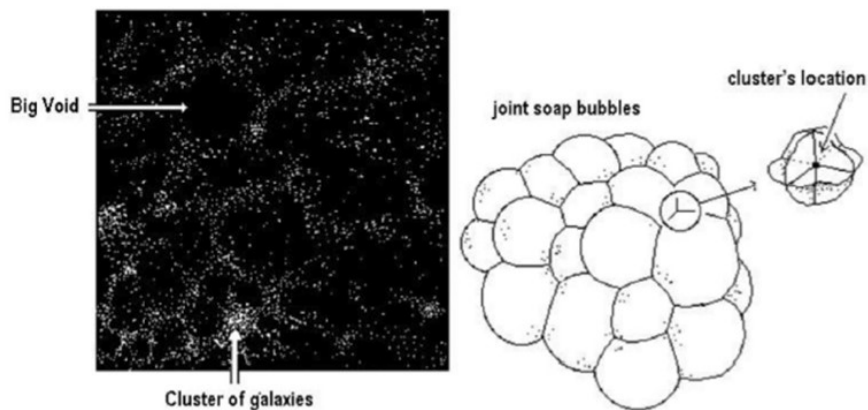


図3.5 - ギャップ構造

この構造は、ツヴィ・ピランが2018年に発表した論文（Piran 2018）でも立証されており、その中で彼は、何もない空間の暗黒物質に集中する負の質量を持つ亜密領域の反重力的圧縮による「壁」と呼ぶものに銀河が分布していることを強調している。観測によれば、これらの空虚な空間は宇宙の体積のかなりの部分を占めている。銀河の分布における空洞と暗黒物質の密度が低い領域との相関は、これらの空洞が重力起源であることを明確に示している。負の宇宙論的空隙」として知られる原始的な亜密領域は、負の重力質量として働き、観測された空隙の種となる。これらの亜密領域の中心は有効な重力質量であり、物質を反発させ、中心間の壁に沿って整列させる。ボイドはこれらの質量を中心として、銀河の壁に囲まれている。やがて壁に亀裂が生じ、空洞が他の空洞と合体し、銀河を閉じ込めるより広い空洞のネットワークが形成される。

- 最近ジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡によって観測されたすべての銀河の初期形成の予測と確認 (Ferreira et al. 2022)。実際、このモデルは、(原始)宇宙の歴史の最初の1億年間に、すべての銀河が一緒に形成されたことを示唆している。この形成は、正の質量が負の質量を持つ複数のクラスターの中で激しく圧縮され、高い圧力が生じたときに起こった。負の質量の反重力効果による物質と気体の強い収縮が大きな加熱を引き起こし、シート状の構造によって急速な冷却が促進された。この冷却時間によって、熱核融合反応を起こすのに十分な温度に達することができ、最初の星が誕生し、それらが集まって今日の銀河が形成された。
- 高い赤方偏移 (> 7) にある遠方銀河が矮小銀河として見える (光度が減少する) ことの説明。これは、負の質量を持つ銀河団 (3.3節で研究するダイポール・リペラー領域など) が、その光子に負の重力レンズ効果を与え、光度を減衰させる効果があるためである。
- 水星の近日点の前進や太陽による光線の偏向など、局所的な相対論的検証が確認された。2種類の質量は互いに反発し合うので、負の質量密度が太陽付近ではほとんど無視できることを考慮すると、この系の最初方程式はアインシュタインの場の方程式に対応する (3.3.4.2節参照)。

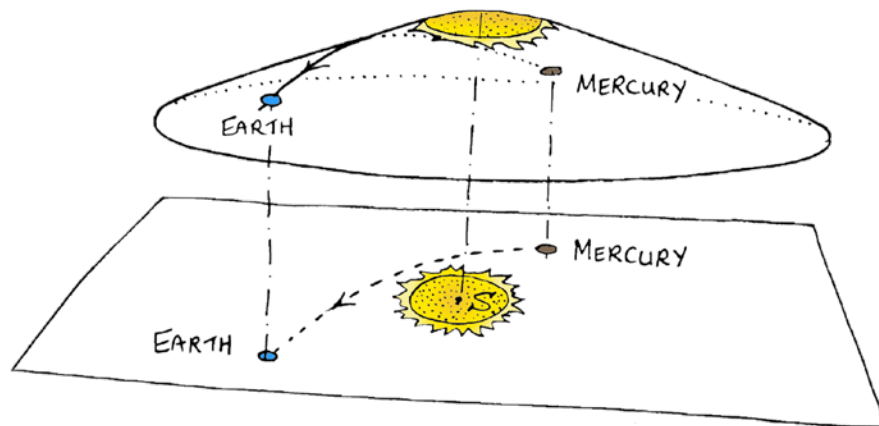


図3.6 - 太陽の質量によって引き起こされる時空の変形

- 正質量と負質量の2つの集団の非対称性を利用することで、Ia型超新星の観測データとの整合性が得られた。Ia型超新星の観測は、天体の距離を決定し、宇宙の膨張を研究するための重要な手段である。Ia型超新星は連星系で起こる超新星爆発で、白色矮星と呼ばれる恒星が伴星から物質を吸収し、臨界質量に達して爆発する。この非対称性は、自転や、白色矮星に物質を移動させる伴星の磁場などのプロセスによって引き起こされる可能性がある。もしこの非対称性が存在すれば、Ia型超新星間の光度差につながり、今回の観測を説明できるかもしれない。

- 2017年1月に発見された「グレート・リペラー」 (3.3節参照) の性質を説明するもので、すべての物質をはじくように見えるシャプレー・アトラクタとは正反対の、一見何もない宇宙の領域に存在することが示された。

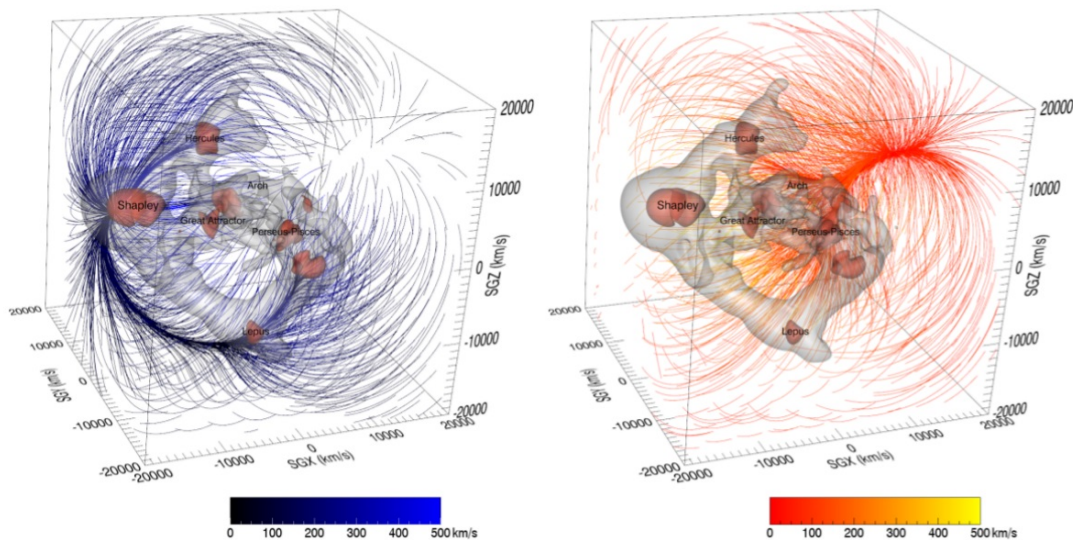
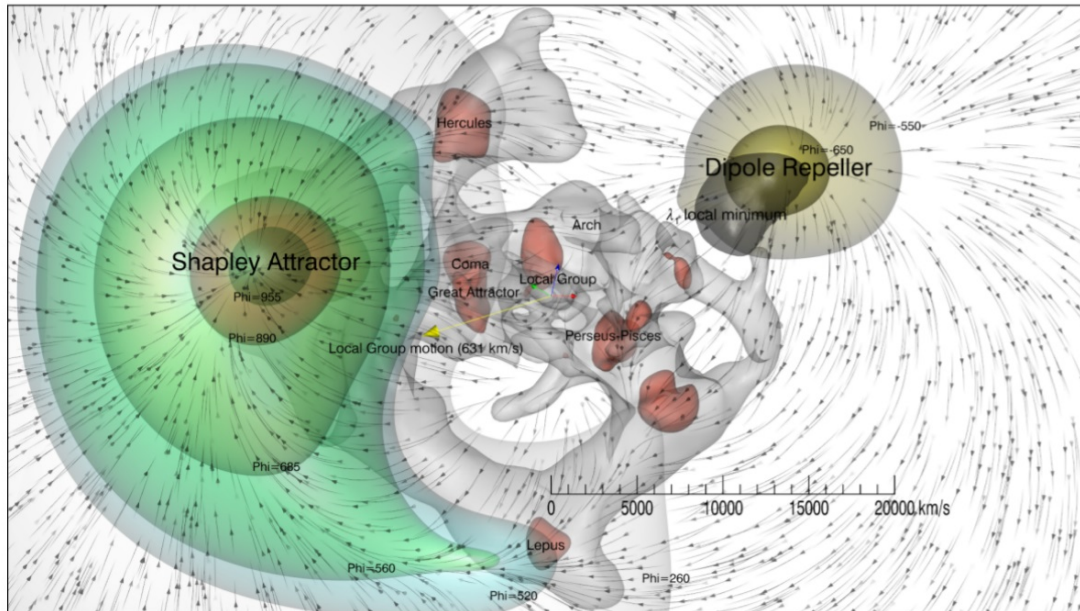


図3.7 - 大型リペラ

- このモデルは、力学的摩擦によって駆動される耐久性のある銀河の渦巻き構造を示しており、この摩擦が運動量をより密度の低い負の質量の環境に絶えず伝達し、渦巻き腕が銀河の周りを持続的かつ安定的に回転することを可能にしている。下図に示すように、腕が密度の高い領域（正の質量）を通過すると減速してエネルギーを失い、密度の低い領域を通過すると加速してエネルギーを得る。これによって密度波が生じ、銀河を伝播して運動量が負の質量の環境に伝わる。

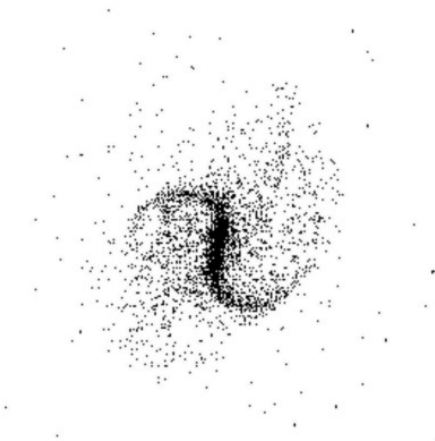


図3.8 - 数値シミュレーションの棒渦巻き (1992: 20,000 ポイント)

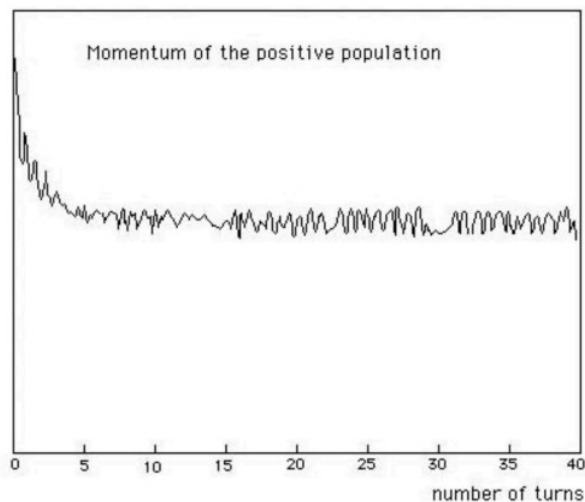


図3.9 - 運動量の推移 (1992年 : 20,000ポイント)

- 宇宙の反物質がなぜ観測されないのか、それは負のエネルギーを持つ光子を放出するからである。
- 宇宙の目に見えない構成要素である反陽子、反中性子、反電子、反水素、負の質量を持つ反ヘリウムの性質を説明。これらの元素は原始反物質を構成しているが、負のエネルギーを持つ光子を放出するため、観測することはできない。
- **2023年9月に最近確認された仮説 (アンダーソン2023年) : C対称 (電荷対称)** な反物質は、実験室で開発され、正のエネルギーを持つ光子を放出し、通常物質と同様に重力で押し下げられる。
- このモデルは、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の揺らぎを、負の質量を持つ物質が分布する宇宙の隣接するセルの密度揺らぎに対する、通常物質の応答に起因するという独自の解釈を提供する。この状況は、これらのセル内で起こる重力不安定性と関連している。これらの揺らぎを分析することで、2

種類の物質のスケールファクターの関係を評価することができる。その比

$\frac{a(+)}{a(-)}$ は100のオーダーであることがわかる。したがって

$\frac{c(-)}{c(+)}$ は10のオーダーである ((Petit

2018))。このことは、質量を逆転させることに成功した物体は、恒星間移動に必要な時間を1,000分の1に短縮し、第二の場の方程式(24)のメトリックによって記述される測地線に沿って移動できるようになることを示唆している。

$h_{\mu\nu}$ で記述される測地線に沿って移動できるようになる。

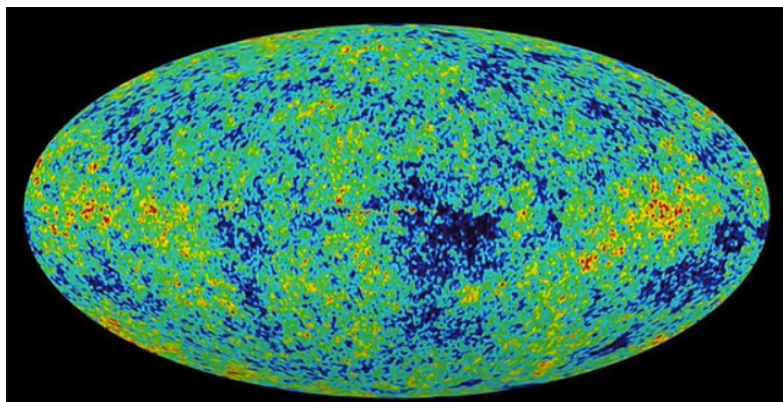


図3.10 - 宇宙論的拡散光  $nd$

- M87銀河と天の川銀河の中心に位置する超巨大天体の最初の2つの画像から推測された重力赤方偏移3 (第7節で行った研究を参照)。
- "ビッグバンの前には何があったのか?"という問いに対する答えは今のところない。ヤヌス宇宙論モデルによれば、宇宙のトポロジカル構造は、「その反時代的な対応物と相互作用する」ことで、「以前」という副詞の意味を無効にし、この疑問を解消する。実際、後に述べるように、ビッグバンの瞬間、時間の矢は逆転する。

### 3.3 双極子リペラ

#### 3.3.1 はじめに

2017年、ユーディ・ホフマン、B.タリー、H.クルトワ、D.Pomarèdeは、初の非常に詳細な宇宙の地図を発表した (Hoffman et al.) この地図は、銀河の位置だけでなく、赤方偏移の生の測定値からハッブル膨張の影響を差し引くことによって、銀河の速度場も統合したものである。その結果は驚くほど印象的で、今日の宇宙論における最も重要な観測的発見のひとつであり、100年前のエドウィン・ハッブルの発見に匹敵する重要性を持つと考えられている。この研究に先立ち、いくつかの銀河がグレート・アトラクターと呼ばれる領域に向かって収束運動を示すことが知られていた。2017年の分析では、グレート・アトラクターの先にある、シ

ャプレー・アトラクターと呼ばれる別の大きな構造の影響が明らかになった。しかし、最も注目すべき発見は、これら2つの形成物のほぼ反対側に、銀河が検出されなかった領域を特定したことである。その代わりに、この領域から遠ざかる動きを見せる近隣の銀河に囲まれた大きな空洞があり、この空洞を中心とした「漏れ」パターンが形成されていた。当初は「ダイポール・リペラー」と呼ばれていたが、後にそれが魅力的な形成と関連していることが明らかになり、「ダイポーラ・アトラクター」と名付けられた。測定誤差のせいとは言い切れないこの現象を理解するには、宇宙力学の理解を大きく前進させる必要があるのは間違いない。

### 3.3.2 いくつかの 解釈の試み

最初の発見から4年、双極子反発現象をモデル化する試みはほとんど行われていない。

最近の論文 (Neiser

2020) では、Neiserはこの問題に焦点を当てず、ビッグバンの性質、量子真空、宇宙の起源に関する仮説を提案している。ナイザーは、反物質が反発する重力効果を持ち、互いに反発し合うニュートリノ星と反ニュートリノ星の形成につながると推測している。

Benoit-

Lévyらは2012年に原始反物質斥力の同様の側面について言及しています ((Benoit-Lévy and Chardin 2012))。Healdは彼の論文(Heald

2020)の中で、ダイポールリパルサーに押しされシャプレーアトラクターに引き寄せられる Laniakea の状況に言及している。再び、物質と反物質の間の斥力という考え方が、宇宙の大規模な構造とボイドの組織の説明の可能性として示唆されている。しかし、大空洞の中心天体については具体的なモデルが示されておらず、放射された光がないことも依然として説明されていない。2018年、Vuykは論文(Vuyk

2018)で仮説的な第5の力の存在を示唆し、Hoffmanらは数値シミュレーションを用いて観測データと一致する暗黒物質分布を再構築している ((Hoffman et al.

2018))。1つは反物質からなる仮説的な物体を含むもので、反物質は観測不可能であり、もう1つは暗黒物質分布の矛盾を示唆するものである。観測によって、宇宙の膨張が加速していることが明らかになったが、これは負の圧力を持つ成分が存在することを示している ((Perlmutter et al. 1999), (Riess et al. 2004), (Schmidt et al.

1998))。この現象を説明するために提案されたモデルは、このような反重力効果に寄与する負の質量の存在を示唆するもので、正の質量を持つ成分に対する暗黒物質と暗黒エネルギーの斥力の影響を組み合わせたものである。この仮説は、文献(Petit 1995) (Petit and D'Agostini 2014a) (Petit and D'Agostini 2014b) (Petit, D'Agostini, and Debergh 2018) (Petit, D'Agostini, and Debergh 2019) (Petit and D'Agostini 2021a) (Petit and D'Agostini 2021b)に対応する研究の中心にある。

### 3.3.3 ダークマター・ギャップによる解釈

ダークマターの真空が、観測された反発効果を生み出す可能性を調べてみよう。まず、暗黒物質が一様に分布している球状の空洞を考え、ポアソン方程式を使ってこの系を解析する：

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} = 4\pi G \rho_{dm}$$

この方程式は線形で、重力ポテンシャルを密度の関数として記述する。二つの密度分布  $\rho_1$  と  $\rho_2$  を重ね合わせるにより、得られる重力ポテンシャルはこれら2つの分布に関連するポテンシャルの和となる： $\psi = \psi_1 + \psi_2$ 。

一様密度分布を考慮すると  $\rho_{dm}^{unif}$  ポテンシャル  $\psi_1$  を得る。これはポアソン方程式の解である：

$$\psi_1 = \frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}_1 = -\frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

に等しい反対の密度を持つ体積を導入することによって、ポテンシャルが生まれる。 $-\rho_{dm}^{unif}$  に等しいポテンシャル  $\psi_2$  これは次のポアソン方程式の解である：

$$\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_2}{dr} = -4\pi G \rho_{dm}^{unif}$$

この解決策は：

$$\psi_2 = -\frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

つまり、同じ重力場が得られるが、符号は逆になる。したがって、重力場は反発し、球の中心からの距離に比例する。

そして、この2つの分布に関連する重力ポテンシャルを計算することで、結果として真空内部では重力ポテンシャルがゼロになることを観測することができる。言い換えれば、ダークマターの一様な分布が及ぼす重力と、真空を作る反対側の密度が及ぼす重力が、ちょうど釣り合うのである：

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

しかし、座標の原点としてどの位置を選んでも、重力場は真空内部でゼロでないままである。これは、重力が完全に釣り合っていないことを意味し、真空が反発する重力場を作るという考えと矛盾するように思われる。

このパラドックスを解決するためには、ポアソン方程式を定常状態におけるアインシュタイン方程式の線形化版として考える必要がある：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\gamma_{\mu\nu}$$

古典的な計算では、適切な密度として  $\rho_0$  ((Adler, Bazin, and Schiffer 1975))：



$$\varepsilon \sum_{i=0}^3 \gamma_{00|i|i} = -\chi\rho_0$$

注：セクション2.3.6で研究した弱い場の極限では、式(26)は時間成分

$\gamma_{00}$ によって表される重力源と、

メトリックテンソルの時間成分の空間的な二次導関数を関係づけるものである。

$\rho_0$ 。これは、時空の曲率が質量エネルギー分布にどのように反応するかを理解するのに役立つ。

したがって、重力ポテンシャルは(27)のように定義される：

$$\psi = -\frac{c^2}{2} \varepsilon \gamma_{00}$$

すると(26)はポアソン方程式と同定できる。しかし、この方法は暗黒物質が無限に一樣に分布している場合には適用できない。というのも、重力の不安定性は空胞ではなくクラスターを形成する傾向があり、そのような空胞を形成するための明確な枠組みがないからである。

### 3.3.4 ヤヌス宇宙論モデルによる解釈

ここで、2つの存在の相互作用を考えてみよう。正の質量を持つ通常物質が、重力効果によって負の質量と相互作用する。負の質量を含むこのモデルは、ダークマターとダークエネルギーの両方の影響を考慮に入れている。

この2つの実体の系は  $g$  と  $h$  とする。  $G$  と

$H$  を対応する Ricci スカラーとする。次に、以下の2層アクションを考える：

$$A = \int_{\varepsilon} \left( \frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\varepsilon} \left( \frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x$$

用語  $S_{(g)}$  と  $S_{(h)}$  は、2つのエンティティの母集団に関連するソース用語を与える。

$S_{(h,g)}$  と  $S_{(g,h)}$  は相互作用テンソルを生成する。  $\Gamma^{(g)}$  と

$\Gamma^{(h)}$  は各エンティティのアインシュタイン定数である。については  $\kappa =$

$\pm 1$  については、最小作用の原理を適用する。この作用のラグランジアン導出により、

：

$$\begin{aligned}
0 &= \delta A \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left( \frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\varepsilon} \delta \left( \frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left[ \frac{1}{2\Gamma(g)} \left( \frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x \\
&\quad + \int_{\varepsilon} \delta \left[ \frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left( \frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \right] \delta h^{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^4x
\end{aligned}$$

あらゆるバリエーション  $\delta g^{\mu\nu}$  とすべてのバリエーション  $\delta h^{\mu\nu}$  を局所的に得る：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Gamma(g)} \left( \frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0 \\
\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left( \frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} &= 0
\end{aligned}$$

次のテンソルを紹介しよう：

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(g,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(g)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(h)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \\
T_{\mu\nu}^{(g,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

一般相対性理論において、共変微分は偏微分概念を曲がった空間に一般化する方法である。通常の偏微分とは異なり、共変微分は時空の曲率を考慮する。

テンソル  $A_{\nu\sigma}^{\rho}$  に沿った共変微分  $\mu$  は次式で与えられる：

$$\nabla_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} A_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} A_{\nu\lambda}^{\rho}$$

したがって、以下の2つの式を導くことができる：

$$\nabla_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}$$

$$\nabla_{\nu} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\nu} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}$$

NBだ :

- (28b)は、(28a)から単純に  $\mu$  と  $\nu$ .
- 項  
 $\partial_\mu A_{\nu\sigma}^\rho$  はテンソルの通常の偏微分である。もし時空が（ニュートン物理学のように）平らであれば、テンソルの変化を記述するにはこれで十分であろう。
- クリストッフエル記号がつく言葉  $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  と  
 $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$  は時空間接続による補正を表し、これは時空の曲率を考慮したものである。実際、曲がった空間では、（クリストッフエル記号  $\Gamma$  で表される）が補正を導入する。この補正が必要なのは、接空間（テンソルが存在する空間）の底が時空のある点から別の点へと変化するからである。だから  $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\nu\sigma}^\lambda$  の変化を補正する項である。  $A_{\nu\sigma}^\lambda$  の変化を補正する項である。  $\mu$  高指数  $\rho$ .  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{\lambda\sigma}^\rho$  そして  $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\rho$  は、下位指数の変化による寄与を差し引く項である。  $\nu$  と  $\sigma$ . これらの項は、共変微分がテンソル変換の規則を尊重することを保証する。まとめると、テンソルの共変微分  $\nabla_\mu$  は、通常の偏微分と時空間の幾何学的な変化を補正する項を組み合わせたものである。これはテンソルの微分自体がテンソルになるように構成されており、通常の偏微分の場合はそうならない。

このとき、リーマンテンソルとクリストッフエル記号は次の式で表される :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

注 : リーマンテンソル

$R_{\sigma\mu\nu}^\rho$  一般相対性理論における数学量で、時空の固有曲率を記述する。クリストッフエル記号の偏微分とクリストッフエル記号自体の積の和の差として定義される。用語

$\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho$  はクリストッフエル記号の偏導関数で  $\Gamma_{\nu\sigma}^\rho$  座標

$x^\mu$ . この項は、クリストッフエル記号が  $\mu$ . 項

$\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$  項は最初の項と似ているが、偏導関数が異なる方向に取られる、  $x^\nu$ . 項は  $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$  と

$\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$  項は、2つの時空間の相互作用を表す2つのクリストッフエル記号の積を表す。これは、ある方向の曲率が別の方向の曲率にどのような影響を与えるかを測定する。

そして、こうなる :

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

これによって私たちは

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$$

インデックス  $\rho$  と  $\sigma$  を縮約することで、パラティーニの恒等式((Tsamparlis 1978), (Palatini 1919))を満たすリッチ曲率テンソルの変化を表すことができる：

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R^{\rho}_{\sigma\rho\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma})$$

注：一般相対性理論では、時空の幾何学は計量テンソルと呼ばれる量によって記述される。

$g_{\mu\nu}$ . このテンソルには、時空間の距離と角度に関するすべての情報が含まれている。

リッチスカラーは  $R$  は、ある点における時空の曲率の尺度である。リッチテンソル  $R_{\sigma\nu}$  と計量テンソル

$g^{\sigma\nu}$ . 数学的には、リッチテンソルと計量テンソルの行列を掛け合わせ、対角線上の項を足すようなものである。

さらに、計量テンソルの共変微分がゼロに等しくなければならない。  $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$ . つまり、時空を移動しても、距離や角度の測り方は変わらない。これは一般相対性理論における時空の基本的な性質であり、大域的な曲率がどうであれ、移動しても局所的な幾何学は変わらないことを示している。

要約すると、リッチスカラー

$R$  スカラーは、ある点における時空の曲率を示してくれる。  $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$  つまり、この一貫性は、長さや角度などの幾何学的概念が時空を移動しても一定であることを保証するレヴィ=シヴィタ接続とメトリックの互換性によって保証される。

次に、次のことが言える：

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\delta R_{\sigma\nu} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}(\nabla_{\rho}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma})) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - g^{\sigma\nu}\nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}B^{\rho} \end{aligned}$$

注：上記の計算では、2つのルールを考慮する必要がある：

- 共変微分の性質とライプニッツの法則（微分の積の法則）。共変微分のライプニッツの規則は、通常の微分の規則と似ており、次のように書かれる。

$$\nabla_{\rho}(AB) = (\nabla_{\rho}A)B + A(\nabla_{\rho}B)$$

ここで  $A$  と  $B$  はスカラー場、ベクトル場、テンソル場である。

- 先に述べたように、繰り返される添字は、アインシュタインの和の慣例に従い、サイレント添字と呼ばれる。実際、変数の添え字が項中に2回（上の位置と下の位置）現れる場合、その添え字が取り得るすべての値に対する和を意味することを覚えておくと便利である。例えば  $A^{\mu}B_{\mu}$  を意味する  $\sum_{\mu}$

$A^\mu B_\mu$ .クリストッフェル記号  $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$  と  $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$ .これらの式において、添字  $\mu$  と  $\rho$  は、アインシュタインの和の規則に従った無言添字の例である。つまり  $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$  のすべての可能な値に対して和をとる式は  $\mu$  は  $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$  のすべての可能な値にわたって和が実行される式は  $\rho$ .だから、最後の項に和の添字  $(\rho, \nu) \rightarrow (\mu, \rho)$  を適用できる。

2つの異なる方法で計算すると、次のようになる：

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) &= \nabla_\mu(\sqrt{|g|})B^\mu + \sqrt{|g|}\nabla_\mu(\delta B^\mu) = \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu + 0 = \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu \\ \nabla_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) &= \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) + \Gamma_{\mu\nu}^\mu\sqrt{|g|}\delta B^\nu = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) + 0 = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu)\end{aligned}$$

注：同様に、次の式で表される計量テンソルの行列式の微分も、共変量的に取られる場合はゼロである。

$\sqrt{|g|}$  で表される行列式の微分も、共変量的に取られるときはゼロである。 $\nabla_\mu\sqrt{|g|} = 0$ .この最後の性質は、体積積分の表現を単純化し、曲がった時空における発散定理を適用するための基本である。

次に

$$\sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu)$$

次に、アクションにおける  $\sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu$  の寄与を考えてみよう。ここで  $n^\mu$  に垂直な単位ベクトルとする。 $\partial\mathcal{E}$ ,  $\varepsilon = n^\mu n_\mu$  と  $y^a$  に適応した座標を表す。 $\partial\mathcal{E}$  と  $h_{ab}$  境界上の  $g_{ab}$  によって誘導されるメトリックを表す。ここで  $|\varepsilon| = 1$  であり  $\sqrt{|h|}d^3y$  は次元  $(n-1)$  である。 $h = \det(h_{ab})$ .ストークスの定理により、：

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}\sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu\sqrt{-g}d^4x &= \int_{\varepsilon}\partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu)d^4x \\ &= \int_{\delta\mathcal{E}}\varepsilon\delta B^\mu n_\mu\sqrt{|h|}d^3y\end{aligned}$$

ここでは、メトリックが境界で変化しない（あるいは境界がない）と仮定する。この場合  $\nabla_\mu\delta B^\mu\sqrt{-g}$  は作用に寄与しないので、：

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\rho B^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \approx R_{\mu\nu}$$

しかし  $a = \frac{1}{2}$  が成り立つ：

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

だから、こう推測できる：

$$\frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

注：上記の計算には、2つのことを説明する必要がある：

- と表記される計量テンソルの行列式の変化は、計量テンソルの変化そのものに関係している。 $\delta g$ の行列式の変化は、計量テンソルの変化そのものに関係する、 $\delta g_{\mu\nu}$ の関係にある。 $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ ここで  $g$ は計量テンソルの行列式で  $g^{\mu\nu}$ はその逆数である。この関係は行列式の数学的性質から導かれ、行列式の導関数は行列の逆行列と行列の導関数の積のトレースを乗じた行列式として表すことができる。小さな変動の場合、計量テンソルの負の行列式の平方根の変動、 $\delta \sqrt{-g}$ は次式で与えられる。 $\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ .この公式は、アインシュタイン・ヒルベルト作用からアインシュタイン場の方程式を導くのに不可欠であり、作用が4次元時空多様体にわたって積分できるようになるからである。
- 我々の研究では、ストークスの定理を用いて重要な計算を簡略化する。この定理は、3次元領域上のベクトル場の微分の積分と、その領域の境界に沿った同じベクトル場の積分との間に興味深い関係を確立する。  
 簡単な例を考えてみよう。空間に閉じた面（球面など）があるとする。この曲面の内部で何か（例えば、ある場の値の和）を計算したい場合、ストークスの定理を使えば、曲面上で起こっていることを調べるだけで計算できる。  
 我々の計算で示した式(29)は、この考えに従ったものである。これは、4次元領域( $\nabla_\mu \delta B^\mu$ )の4次元領域( $\mathcal{E}$ )の微分の積分は、同じ領域( $\sqrt{|g|} \delta B^\mu$ )の発散の積分と等価であることがわかる。 $\mathcal{E}$ .この等価性は、計量と4次元の体積要素( $d^4x$ ).  
 次に、式(30)は、領域の境界( $\delta \mathcal{E}$ ).これは、この等価性が境界に沿った積分( $\delta \mathcal{E}$ )に沿った積分として表現できることがわかる。  
 $n_\mu$ )と境界上に誘導されるメトリック( $\sqrt{|h|} d^3y$ ).言い換えれば、この方程式によって、領域の内部で何が起こっているかを計算することなく、領域の表面で何が起こっているかを理解することができる。  
 つまり、ストークスの定理は、ある領域の境界で起こっていることを調べるだけで、その領域の内部で起こっている現象がどのように理解できるかを示すことで、計算を合理化することを可能にするのである。この数学的なトリックは、このような複雑な問題を解くために不可欠である。

(31a)式と(31b)式から、次式が得られる：

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(h,g)}$$

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(g,h)}$$

(32a)と(32b)で導入され、(33)を考慮すると、2つの実体の系を記述する連成場の方程式を導くことができる：

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left( T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = \kappa \Gamma^{(h)} \left( T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

どこで  $T_{\mu\nu}^{(h,g)}$  と  $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$  は、"誘導幾何学

"に対応する2つの実体の系の相互作用テンソルである。すなわち、宇宙の1つの層における物質の各分布が、もう1つの層の幾何学（正負の質量の集団間の相互作用）に寄与する方法である。この系は、次の関係式で表されるビアンキ条件に従わなければならない：

$$\nabla_{\mu}^{(g)} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \nabla_{\mu}^{(h)} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = 0$$

実体内の流体が  $g$  と

$h$  は完全であり、エネルギー密度は以下のソーステンソルに対応するとする：

$$T_{\mu\nu}^{(g,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(h,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h)} \end{pmatrix}$$

私たちは  $\{\alpha^{(g)} > 0, \beta^{(g)} > 0\}$  そして  $\{\alpha^{(h)} < 0, \beta^{(h)} <$

$0\}$  相互作用の法則が、同じ実体に属する2つの粒子が互いに引き合うのに対し、異なる実体に属する粒子は互いに反発し合うようにする。

相互作用テンソルを紹介しよう：

$$T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h,g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h,g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h,g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h,g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g,h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g,h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g,h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g,h)} \end{pmatrix}$$

ニュートン近似の下で望ましい相互作用法則を得るためには、次のように選ばなければならない。  $\kappa = -1$ . 方程式系は次のようになる：

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)} \left( T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) = \Gamma^{(g)} \left( T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)} \left( T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) = -\Gamma^{(h)} \left( T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

### 3.3.4.1 非定常・均質・等方系のチェック

(34a)と(34b)の連立方程式によって構成されるバイメトリック宇宙が均質で等方的であると仮定すると、ロバートソン-ウォーカー計量は(Adler, Bazin, and Schiffer 1975)に従って次のようになる：

$$(ds^{(f)})^2 = (c^{(f)})^2 dt^2 - (a^{(f)})^2 \left[ \frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left(1 + k^{(f)} \frac{r^2}{4}\right)^2} \right] \quad \text{où } f \in \{g, h\}$$

ただし  $a^{(f)}$  はスケーリング係数である、 $k^{(f)}$ ,  $c^{(f)}$  そして  $\Gamma^{(f)}$  はそれぞれ各エンティティの曲率指数、光速、アインシュタイン定数である。これらのメトリックスを式(34a)と(34b)の系に導入し、圧力  $p^{(g)} \approx 0$  と  $p^{(h)} \approx 0$  を持つ方程式系に導入すると、次のような古典方程式系が得られる：

$$\frac{3}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} \left( \frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(g)}}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} = -\Gamma^{(g)} \left[ \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} \left( \frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(g)}}{(c^{(g)})^2(a^{(g)})^2} = 0$$

$$\frac{3}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} \left( \frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(h)}}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} = \Gamma^{(h)} \left[ \Phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} \left( \frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(h)}}{(c^{(h)})^2(a^{(h)})^2} = 0$$

(Adler, Bazin, and Schiffer 1975)の古典的な数学的手法を適用すると、式(35a), (35b), (35c), (35d)の両立条件は以下のようになる：

$$3 \frac{da^{(g)}}{a^{(g)}} + \frac{d \left[ \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]}{\left[ \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]} = 0$$



$$3 \frac{da^{(h)}}{a^{(h)}} + \frac{d[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

だから、塵の宇宙ではエネルギー（と質量）は保存される：

$$E = \rho^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^3 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2(a^{(h)})^3$$

もし、：

$$\Phi = \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3, \quad \phi = \Phi^{-1}$$

連立方程式は次のようになる：

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)} \left[ T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)} \left[ T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right]$$

両者が放射によって支配されている場合混合モードの相互作用テンソルは：

$$T_{\mu}^{\nu(f)} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r^{(f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_r^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_r^{(f)} \end{pmatrix}$$

と

$$\begin{cases} \text{si } \rho_r^{(f)} > 0 \text{ alors } p_r^{(f)} > 0 \text{ pour } f = g \\ \text{si } \rho_r^{(f)} < 0 \text{ alors } p_r^{(f)} < 0 \text{ pour } f = h \end{cases}$$

**NB**だ：

- 宇宙論的な文脈では、エネルギー・インパルステンソル  $T_{\mu}^{\nu(f)}$  は、宇宙における物質とエネルギーの分布と相互作用を記述するために使

われる。特定の場に対して  $f$  時間成分

$T_0^{0(f)}$  はエネルギー密度を表し、時空の曲率を決定する重要な要素である。空間成分

$T_i^{i(f)}$  一方、空間成分は空間方向にかかる圧力を表し、これも時空の構造に影響を与える。パイメトリックモデルでは、2つの異なる場（宇宙の各層に1つずつ）が考慮され、関連する条件は、それぞれの場のエネルギー密度と圧力の関係を記述し、これらの実体がどのように相互作用し、集合的に宇宙のダイナミクスに影響を与えるかを反映する。

- エネルギー・インパルステンソルは、宇宙が等方的で均質、つまり物理的性質が方向や場所に依存しないと見なされるとき、対角形式で表される。この仮定は標準宇宙モデルの基本であり、宇宙論的原理として知られている（セクション2.2.3）。等方性とは、宇宙がどの方向から見ても同じように見えることを意味し、物質やエネルギーの分布が異なる優先的な方向は存在しない。均質性とは、大きなスケールで見ると、宇宙の各領域が他のどの領域にも似ていることを意味する。その結果、テンソルの非対角項によって表されるはずのエネルギーや運動量の横方向の流れは、特定の方向への特権的な運動やエネルギーの流れがないため存在しない。一様で方向によって変化しない空間方向のエネルギー密度と圧力だけが、エネルギー・インパルステンソルの行列に現れ、その対角線形状を説明する。

次に、各エンティティによって引き起こされる放射圧を導入する：

$$p_r^{(g)} = \frac{\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2}{3}, \quad p_r^{(h)} = \frac{\rho_r^{(h)}(c^{(h)})^2}{3}$$

そこで、ダークエネルギーやダークマターと呼ばれる計量によって運ばれる実体は、負の質量に起因すると考えることができる。

$h$ ダークエネルギーやダークマターと呼ばれるものは、負の質量を持ち、放射相では同じ状態方程式に従うと考えられる：

$$\beta^{(h)} = \frac{\alpha^{(h)}}{3}$$

このような条件下では、保存関係は常に、放射形式では、光子ガスのエネルギーと負の質量のエネルギーの2つの和の保存によって表される：

$$\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 + \alpha^{(h)}(a^{(h)})^4 = \rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 = \text{Constante}$$

系の厳密解は、曲率指数  $k^{(g)} = k^{(h)} = -1$  と  $\Gamma^{(f)} = -\frac{8\pi G}{c^4}$  ここで  $f \in \{g, h\}$  は以下の方程式の解となる：

$$a^{(g)2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} = \frac{\Gamma^{(g)}}{2} E$$

$$a^{(h)^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} = -\frac{\Gamma^{(h)}}{2} E$$

と仮定すると  $E < 0$  とすると  $a^{(g)} > 0$  として  $a^{(h)} <$

0 と仮定すると、私たちの宇宙の目に見える部分は加速しており、負の種は減速していると結論づけることができる。ここで、最初の方方程式の右辺が正になることで、宇宙膨張の加速という現象につながる、支配的な負の種の効果が観察される ((Petit and D'Agostini 2021b)) :

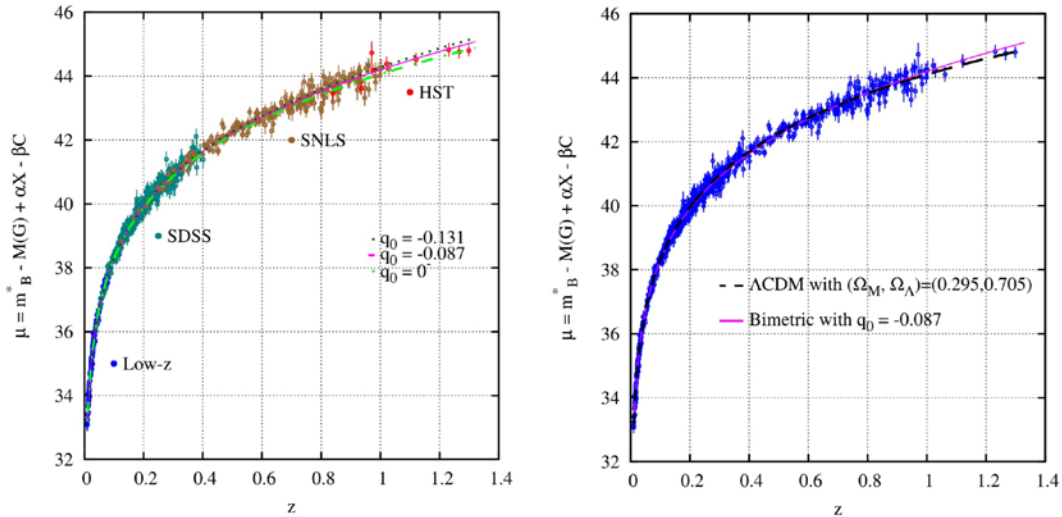


図3.11 - 2つのモデルのハッブル図 (直線赤方偏移)

この2種系によって、ダークマターとダークエネルギーに起因する効果を、次の図に示すように、2つの作用を組み合わせた負の質量からなる1つの存在に統合することが可能になる :

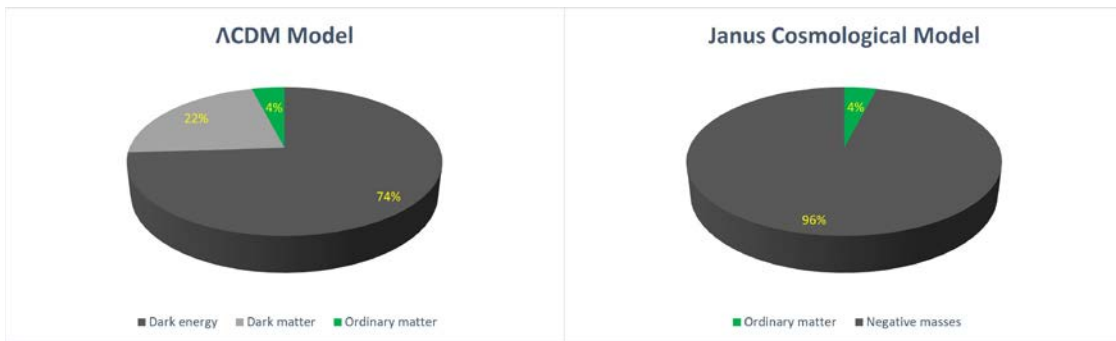


図3.12 - M 宇宙のモデル

### 3.3.4. 2定常システムの 局所検証

宇宙を研究する際、我々はしばしばモデルを単純化して扱いやすくする。よくある単純化の方法は、宇宙の複雑な構造から切り離された、事実上何もない小さな空間の領域を考えることである。このアプローチは、宇宙そのものが変化する時間スケールよりもはるかに短い、短い期間に起こる現象に興味がある場合に特に有効である。このような場合、「時間に依存しない」測定基準を使うことができます。つまり、観測中に空間の構造が時間とともに変化しないと仮定するのです。

少し複雑にするために、モデルに  
いわゆる「摂動」を

導入することもある。これらの摂動は、我々が考えている単純な空間に対する小さな変化である。これにより、小さな変化や摂動がシステムにどのような影響を与えるかを調べるができる。我々の場合、これらの摂動は次のような項で表される。 $\gamma_{\mu\nu}^{(g)}$ そして $\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$ これは空間の幾何学的構造における小さな偏差を意味し、宇宙の異なる側面や構成要素を表している可能性がある。

$$g_{\mu\nu}^{(g)} = \eta_{\mu\nu}^{(g)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(g)}, \quad g_{\mu\nu}^{(h)} = \eta_{\mu\nu}^{(h)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$$

メトリックスについては、次のようになる：

$$(ds^{(g)})^2 = (c^{(g)})^2 dt^2 - (a^{(g)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

$$(ds^{(h)})^2 = (c^{(h)})^2 dt^2 - (a^{(h)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

宇宙論で「準定常状態」と言えば、宇宙のある側面が、研究している期間中、比較的一定であると仮定される状況を指す。具体的には、宇宙の大きさが時間とともにどのように変化するかを表す宇宙の「スケールファクター」が一定であると仮定します。これは、ある短期的な現象を研究するのに有効な近似である。

このようなシナリオの物理を調べるために、我々は場の方程式の「直列展開」として知られているものを使う。これは複雑な方程式をより単純で扱いやすい部分に分解する数学的手法である。ただし、最も重要な部分だけに焦点を当てる。この場合、2次以上の項は、小規模または短期のシナリオの結果にはほとんど影響しないので無視する。

その結果得られた2つの簡略化された方程式は、この準定常宇宙における摂動の振る舞いを記述する。これらの方程式には $\varepsilon\gamma_{00}$ と $\delta\rho$ などの項があり、それぞれ空間の幾何学と物質の密度の小さな変化を表している。

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(g)} = -\Gamma^{(g)} \left[ \delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \left( \frac{a^{(h)}}{a^{(g)}} \right)^3 \delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(h)} = \Gamma^{(h)} \left[ \delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 + \left( \frac{a^{(g)}}{a^{(h)}} \right)^3 \delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 \right]$$

さらに、宇宙の各構成要素について「重力ポテンシャル」を定義する。 $\psi^{(g)}$ そして $\psi^{(h)}$ .これらのポテンシャルは空間の幾何学的変化に関連しており、宇宙の異なる領域や構成要素における重力効果を理解する鍵となる (36)など)。

$$\psi^{(g)} = \frac{(c^{(g)})^2}{2} \varepsilon \gamma_{00}^{(g)}, \quad \psi^{(h)} = \frac{(c^{(h)})^2}{2} \varepsilon \gamma_{00}^{(h)}$$

を得る：

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(g)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = -\Gamma^{(g)} \frac{(a^{(g)})^2}{2} \left[ \delta \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \left( \frac{a^{(h)}}{a^{(g)}} \right)^3 \delta \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = \Gamma^{(h)} \frac{(a^{(h)})^2}{2} \left[ \delta \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 + \left( \frac{a^{(g)}}{a^{(h)}} \right)^3 \delta \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 \right]$$

物理学、特に空間と宇宙の研究では、このセクション2.3.8で見たように、「測地線の方程式」が重力の影響下で物体がどのように動くかを記述している。簡単に言えば、物体が重力の影響だけで動いているときにどのような経路をたどるかを示す方程式である。例えば、惑星が恒星の周りを回るときや、物体が地球に落下するときなどである。

このシナリオでは、宇宙の2つの異なる層（またはシート）を扱っており、それぞれが独自の性質を持っている。最初の層は、通常物質の宇宙と考えることができ、1つのルールに従う。ダークマターとダークエネルギーに関連する負の質量を持つ第二の層は、別のルールに従う。

次の2つの方程式は、物体がこの2つの異なる層（それぞれ通常物質の層と負の質量の層）の中でどのように動くかを数学的に表現する方法である。これらの方程式は、重力場を記述するのに使われる物理学の古典的なポアソン方程式に似ている。しかし、この方程式には特別な特徴があり、それぞれの層で異なる「光速」を考慮している。この修正は、我々の標準的な物理学の理解を超えた理論を探求する上で極めて重要である。

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(g)})^2} \frac{\partial \psi^{(g)}}{\partial \xi_\alpha}$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(h)})^2} \frac{\partial \psi^{(h)}}{\partial \xi_\alpha}$$

われわれが選んだ相互作用法則は、メトリック  $g$  と  $h$  は互いに排他的であることを保証する(3.13)。



### 図3.13 - 質量間の相互作用の法則

その結果、2つの実体のどちらか一方だけが存在する領域を考えることができる。によって構成される参照枠に注目すると、太陽系のように普通の物質が存在する場合、結合場の方程式系は次のように単純化される。

$g$ で構成される参照枠に焦点を当てると、太陽系のように普通の物質が存在する場合、連立場の方程式系は次のように単純化される：

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)}T_{\mu\nu}^{(g,g)}$$
$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)}\sqrt{\frac{|g|}{|h|}}T_{\mu\nu}^{(g,h)}$$

最初の方程式は、宇宙定数を除いたアインシュタインの方程式と同じである。

A.この方程式は、通常物質に対する重力の標準モデルを表している。2番目の方程式は、「誘導幾何学効果」と呼ぶべきものを捉えている。この方程式は、通常物質が半径  $r$  と密度  $\rho^{(g)}$  =

$\rho$ は、負の質量層の測地線に影響を与える。その結果、ある層にある通常物質が、別の層にある負の質量と相互作用するというこのバイメトリック・モデルは、局所的なレベルでは一般相対性理論の標準的なテストと一致していることが推測できる。とはいえ、この系のコヒーレンスを、定常かつ非一様な条件下で検証することは、極めて重要である。

#### 3.3.4.3 始原反物質の性質

(Sakharov 1967)、(Sakharov 1980)、(Sakharov

1979)におけるサハロフの提案に従って、我々の宇宙の第一層の物質／反物質の対が、正のエネルギーのクォークと反クォークでできているとする。同時に、第二層の物質と反物質の対は、負のエネルギーを持つクォークと反クォークで構成される。第一層（第一対）での物質の合成が速く、第二層（第二対）での反物質の合成が遅いとすれば、双極子反発現象が示すように、宇宙の大規模構造における大きな空隙の中心に位置する物体は反物質で構成されているという仮説が成り立つ。この反物質には、負のエネルギー、すなわち負の質量を持つ反陽子、反中性子、反電子が含まれる (J. M. Souriau 1997)。後者は、原始放射期（宇宙の始まり）に形成された巨大な原始星に似た反発特性を持つ反水素（軽元素）からなる球状天体を形成する可能性がある。

正の質量のラクナネットワークは、負の密度のこの空間を閉じ込め、それらの融合を防ぐ。逆に、これらの負の質量の集合体は、正の質量の宇宙におけるこの多孔性ネットワークのアンカーポイントとして機能し、全体的な安定性を確保する。

正の質量を持つ星は、最初は1000°Cから2000°Cの温度に加熱されたガスの球状星団のような形をしている。これらの原始星は徐々に冷えていき、主に赤と赤外線のスpekトルの放射線を放出する。本物の星になるには、物質とガスが重力収縮を起こし、熱核融合反応を起こすのに十分な温度と密度に達する必要がある。この収縮の過程で熱エネルギーが放出され、星の表面で可視光を含む電磁波の形で放射される。このエネルギーの放出は、星の半径の二乗に比例する。大きな星ほど表面積が大きく、より多くの熱を放散できる。しかし、発生する熱量は星の半径の3乗に比例し、体積と連動する。そのため、非常に質量の大きな星の場合、冷却の速度は比較的遅く、星が輝くための熱核融合反応を引き起こすのに必要な閾値に温度が達するまでにはかなりの時間がかかる。

私たちのポジティブな世界では、原始星の中心部で核融合反応が始まるのは、温度が1000万度前後の最適温度に達したときだと考えられている。この温度で、原始星の物質の大部分を占める水素原子核が、正電荷による静電障壁を克服するのに十分な運動エネルギーを獲得する。この障壁が克服されると、水素原子核は融合してヘリウムを形成し、かなりの量の放射エネルギーと熱エネルギーを放出することができる。この最適な温度は、より効率的な核融合反応を可能にし、星の特徴的な輝きを生み出す。

例えば、非常に質量が大きく、非常に高温の負の質量を持つ原始星は、核融合反応を開始するために十分に冷却されるまでに長い時間がかかる。

その結果、これらの非常に大質量の負の質量を持つ原始星は、冷却時間が非常に長く、（宇宙の年齢を超えて）決して発火しない。その結果、負の世界では銀河も重元素も分子も、生命の発展に必要な物質も形成されない。

#### 3.3.4. 4デジタル2Dシミュレーション

2次元数値シミュレーションは、通常物質のクラスター（個体密度  $\rho^{(g)}$ ）と負の質量（個体密度  $\rho^{(h)}$ ）。

2つの集団の間には有意な非対称性が保たれ  $|\rho^{(h)}|$  よりもはるかに大きい。

$\rho^{(g)}$ 。さらに、マクスウェル型の2次元熱速度分布が両者に適用され、負の質量分布の平均速度は通常物質の4倍であった。

これらのシミュレーションにより、宇宙の大規模構造における大きな空隙の中心に負の質量が存在するラクナ構造が明らかになった。ジーン時間は密度の平方根に反比例して変化するため、負の質量分布の発達時間は短くなる。このため、球状礫岩の規則的なネットワークが形成される。したがって、通常物質分布は残りの空間を占めることを余儀なくされ、3次元シミュレーションでシャボン玉が結合したようなラクナ構造になる。このモデルは、1995年のブレンネン(Brennen 1995)によっても観察されており（図3.14と3.15）、1997年のエル・アド((El-Ad, Piran, and Costa 1997))によっても引用されている。

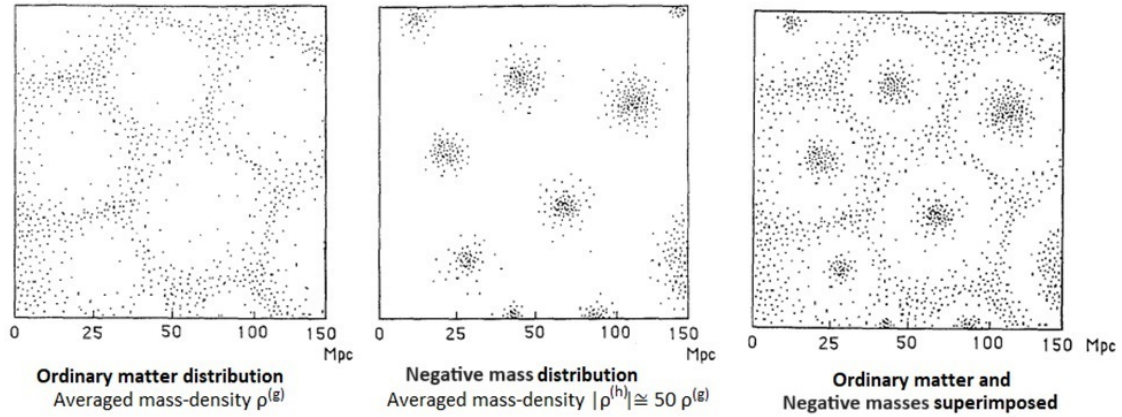


図3.14 - 通常の物質と負の質量の分布  $|\rho^{(h)}| \gg \rho^{(g)}$

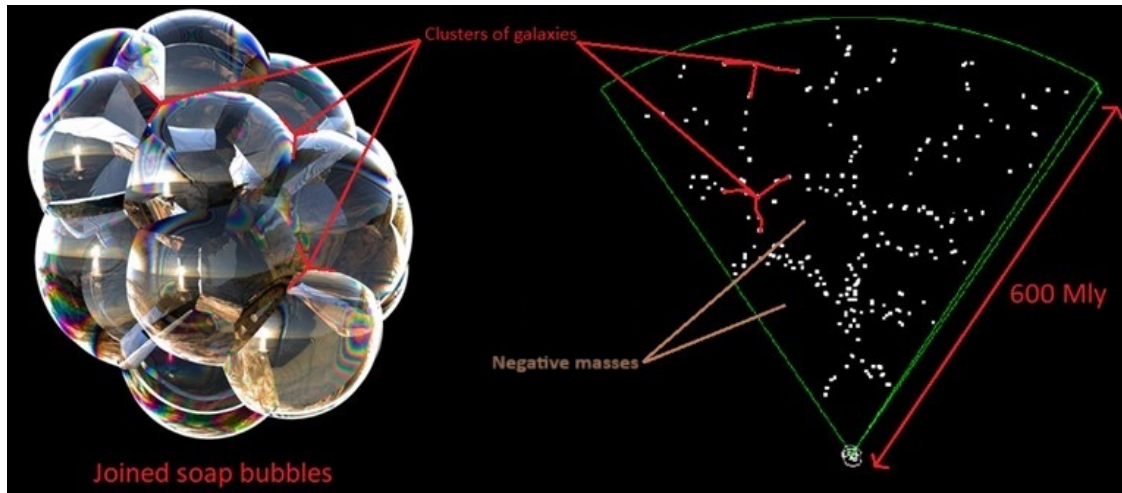


図3.15 - 球状ラクナ構造 *ture*

負の質量の枠組みでは、重力レンズ現象を通してこの参照枠（負の質量のもの）によって引き起こされる幾何学的効果を除いては、潜在的な数値予測と比較するための観測データがないことを考慮することが重要である。  $g_{\mu\nu}$

その結果、メトリックによって構造化された時空におけるTOV（Tolman - Oppenheimer - Volkoff）微分方程式（(Adler, Bazin, and Schiffer 1975)）から導かれる圧力は、常に仮説のままである。

$h_{\mu\nu}$ は常に仮説のままである。従って、第二場の方程式(34)の相互作用テンソル  $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ を構造化することは現実的ではない。の測地線を計算することによって得られる結果を、運動に関する観測データと比較することはできない。

$h_{\mu\nu}$ の測地線を計算して得られた結果を、負の質量を持つ粒子の運動に関する観測データと比較することはできない。その代わりに、我々は関数  $\beta(r)$ 関数（負圧とは関係ない）を用いて、この参照フレームにおける解の存在を保証しなければならない。最も重要な点は、その相互作用テンソルの共変微分がゼロであることを保証することである(37)。



この誘導幾何学の効果を完全に理解するためには、モデルの2つの連成場の方程式を持つ系の文脈に身を置く必要がある。これは、時空の2つの異なる層に関連する2つのメトリックスに従って4次元超曲面を構造化することを覚えておくことが重要である。このことは、次の図3.16に見られるように、質量はそれ自身のメトリック（質量が可視エネルギーの光子を放出する場所）に従って時空に常に正の曲率を作り、共役メトリック（質量が不可視エネルギーの光子を放出する場所）では常に負の曲率を作ることを意味する。

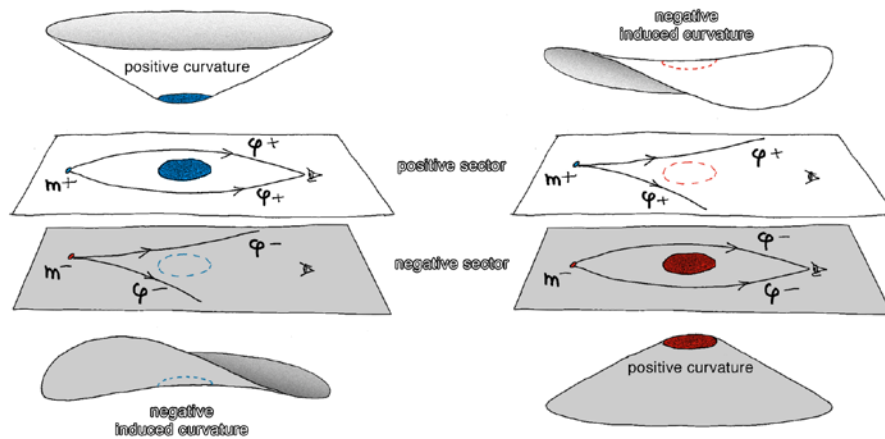


図3.16 - 誘導ジオメトリー効果

図3.16の左側では、正の宇宙に属する巨大な青い天体が正の曲率を生み出している。その結果、小さな正の質量の像に正の重力レンズ効果が生じ、正のエネルギーの光子  $m^+$  正のエネルギーの光子

$\phi^+$  その結果、小さな正の質量の像に正の重力レンズ効果が生じ、正のエネルギーの光子が巨大な青い物体の周囲に発生する。しかし、この巨大な物体は負の宇宙に負の曲率を引き起こす。その結果、見えないにもかかわらず、負の宇宙での見かけの質量は負に感じられる。

逆に、図3.16の右側では、巨大な赤い物体が負の宇宙に属している。この物体は自分自身の参照枠に対して正の曲率を作る（負の曲率ではない）。この巨大な物体は、そのエネルギー光子が目に見えないにもかかわらず、我々の宇宙で知覚される負の曲率を引き起こしている。したがって、この物体の見かけの質量は負であると結論づけられる。これは、小さな質量の像に負の重力レンズ効果が生じるためである。

$m^+$  正のエネルギーの光子  $\phi^+$  その重力効果は常に存在する。

負の質量の概念から、いくつかの結論を導くことができる：

- 基本的に、負の質量は存在しない（したがって負のエネルギーも存在しない）。少なくとも、「質量の負性」（そして「エネルギーの負性」、この2つは明らかに関連しているからである）は、「負の質量を持つ粒子」の本質的な物理的性質ではない。実際、質量の「負」または「正」は、観測者によって時空間において

局所的に測定される曲率の量に過ぎない。この曲率の符号は、この質量が測定される超曲面またはメトリックの参照枠に対する相対的なものである。実際、質量は見かけ上の質量であり、その存在は、質量が時空に引き起こす曲率によるのみ明らかになる。

言い換えれば、宇宙に存在する質量を持つ粒子はすべて、専ら正の慣性質量を持つが、その重力質量は相対的なものである。重力質量の符号は、採用する視点によって反対（正または負）になる。質量はそれ自身のメトリックで時空を歪め、常に正である一定の曲率を引き起こす。しかし、反対側の宇宙では見かけ上の質量として認識され、観測者はこの曲率を負として認識する。これは場の方程式の連立性によるもので、「共役曲率と呼ばれる効果をもたらす。同じ質量が2つの正反対の曲率を引き起こす」と表現することもできる。

例えば、我々の参照枠から見た地球は正の質量を持っている。何らかの未知のプロセスによって、自分のエネルギーを反転させる（質量を反転させる）ことができたとしよう。地球（と空に輝くすべての星）は消えてしまうだろう。なぜなら、あなたはもはや正のエネルギーの光子を知覚することができなくなるからだ。しかし、エネルギーが時空にもたらし続ける曲率を知覚し、測定することはできる。この測定を行うことで、今は見えない地球が負の質量を持つことを検知できるだろう。

しかし、ポジティブなエネルギーの宇宙とネガティブなエネルギーの宇宙が明確に存在するわけではない。それは単に恣意的な命名法の選択である。この2つは等価である。慣例的に、私たちが生きているセクターをポジティブ宇宙と呼ぶ。時間の矢が反転することは、私たちが「逆さま」に生き始め、若返ることを意味するのではない。それは粒子エネルギーの反転によって物理的に現れる。繰り返すことになるが、この逆転は相対的な観察である。実際には、逆方向の宇宙へのシフトとなる。

- 負のエネルギー粒子（およびその光子）は、我々のメトリックの測地線とは異なる独自のメトリックの測地線に従うため、光学機器では検出できないことに注意することが重要である。 $h_{\mu\nu}$ 我々のメトリックの測地線とは異なる $g_{\mu\nu}$ 。したがって、決して「交差」しない2組の測地線が存在する。正エネルギー種と負エネルギー種はお互いを見ることができず、2つの異なる測地線に沿って進化するので、それらが存在する2つの時空参照枠は、それぞれ正質量参照枠と負質量参照枠と呼ばれる。したがって、これらは同じ4次元超曲面内の2つの参照枠であり、1つではなく、2つの連立場方程式によって構成される。しかし、たとえ負の質量が我々の宇宙と電磁気的な相互作用をせず、光子の交換もしないため、我々からは見えないとしても、時空に反対の曲率を引き起こすため、反重力効果によってその存在を明らかにするだけである。
- 負の質量は宇宙に広く存在するが、その割合は我々がいる空間の領域によって異なり、反重力効果によって宇宙の安定に寄与するためだけに存在する。宇宙は、

2つの異なる基準点（3つの空間的基準点と1つの時間的基準点）を使って、この時空の2点間の長さや距離を2つの異なる方法で測定できる、2つの測定基準によって構造化された1つの時空によって定義されている。この時空は、2つのページにそれぞれ2つの異なるグリッドがある1枚の紙と考えることができる。

### 3.3.5 今後の見通し

ある現象を理解するための科学的アプローチは、それを再現し測定する能力によって要約することができる。実験室で質量反転現象を実証することは、ごく微量の物質を反転させることで十分に可能であることに注意する必要がある。ただし、例えば爆発物を用いて、ごく短時間に数千万テスラのオーダーの電磁パラメーターを発生させることで、この物質に大きな擾乱を誘発することができればの話である。ソ連はすでに1950年代に、火薬を使って磁束を圧縮し、磁気累積発電機を使って1億アンペアを発生させている（[Pavlovskii 1994]）。そして、ヴィルゴやリゴのレーザー干渉計が放出・検出する重力波を測定することで、この質量反転を実証することが可能になる。

相対性理論と量子力学の統一は、重力の量子化によってのみ可能となる。しかし、アインシュタインの場の方程式は基本的に粒子を記述していないため、相対性理論には質量エネルギー等価を除いてエネルギーの量子化という概念はない。これが、相対性理論と量子力学のギャップを埋めるために、弦理論が唯一受け入れられ、受け入れられる現代のアプローチである理由である。しかし、量子力学では力を場の観点から考え、相互作用を伝達するために粒子が必要であるため、このアプローチでは統一は不可能である。例えば、光子は電磁場を伝達する素粒子であり、正負の電荷が含まれているおかげでその定量化が可能である。一方、ひも理論から生まれた重力を伝達する唯一の粒子は重力子であるが、この擬似粒子は実験的に観測されたことがない。実際、このモデルでは量子重力の概念は推測の域を出ていない。量子スケールで重力を定量化するための別の推測としては、相互作用を伝達するために反対符号の電荷を持つ光子のモデルと同様に、計算モデルにおいて反発特性を示す反対符号の質量の存在を考慮することが考えられる。

## 4 宇宙論と素粒子物理学への貢献

### 4.1 ダイナミック・グループ入門

力学系論は、時間経過に伴う運動と変化の研究に焦点を当てた数学の一分野である。システムが初期条件や外力の作用によってどのように進化するかを理解することを目的としている。シンプレクティック幾何学は、力学系理論と微分幾何学を統合したもので、曲がった空間の形や性質、特に外力の影響を受けて空間がどのように変形したり曲がったりするかを研究する。この分野はハミルトン力学に根ざしており、「シンプレクティック多様体」と呼ばれる数学的対象を研究する。長さや角度を測定するために計量テンソルを用いるリーマン幾何学とは異なり、シンプレクティック幾何学では面積を測定す

るために「シンプレクティック形式」と呼ばれる数学的形式を用いる。

ジャン＝マルク・スーリオはシンプレクティック位相幾何学の先駆者である。彼は幾何学的数量化の概念を開発し、エネルギーや運動量などの基本的な物理量を純粋に幾何学的な対象に変換した。スーリオの研究は、我々の宇宙論モデルにおける時間の矢の反転に物理的意味を与えた（(Bergmann and Einstein 1938), (Kaluza 1921)）。

## グループとは何か？

数学的には、ある行列が他の行列に作用することを指す。しかし、物理的には何を表しているのだろうか？

J-

Mスーリオによれば、グループは輸送のために作られ、輸送方法は輸送される主体よりも重要である。

リー群は群であると同時に微分多様体（ $n$ 次元ユークリッド空間に局所的に投影された「曲がった空間」）でもある。リー群は、空間における運動や変換を記述するのに不可欠である。2つの重要な群は、直交群 $O(3)$ とユークリッド群 $E(3)$ である：

- **直交群 $O(3)$** は、3次元の回転と対称性を記述するのに使われ、空間内の距離を保存する。 $O(3)$ には $SO(3)$ と呼ばれる回転群という重要な部分群があり、軸を中心とした回転を扱う。
- **ユークリッド群 $E(3)$** は、回転、対称、並進などの3次元の動きを記述する。直交群 $O(3)$ に基づいて、固体力学において物体に加えられる力とトルクに分解することができる。ピタゴラスの定理を使って2点間の距離を計算できる群である。座標  $x, y, z$  を持つ点を座標  $x', y', z'$ 。この力学群のユニークな特徴は、群内に不変幾何学的対象の族を生成できることである。例えば、平行移動を受ける直線は直線のままであり、1次元の不変幾何学オブジェクトとなる。球は3次元対称物体の完璧な例である。そのユニークな性質は、中心を中心に回転しても変化しないことで、回転対称性を示す。幾何学的な用語で言えば、これは球体が回転運動中にそれ自身を通過し、どの点においても一貫してその幾何学的特性を維持することを意味する。物理学、特に一般相対性理論における時空の研究において、シュヴァルツシルト解は重要な概念である。シュヴァルツシルト解は、ブラックホールのような球対称で回転しない質量の外側の重力場を記述する。アインシュタインの場の方程式の解であるシュヴァルツシルトの計量は、時間と空間の回転と並進に対して不変であり、ユークリッド幾何学で見られる不変性に似ているが、一般相対性理論の曲がった時空に適用される。シュヴァルツシルト時空では、測地線はシュヴァルツシルト計量によって記述される時空の曲率によって決まる。測地線に沿って移動する物体に対して、その角運動量や時空の曲率の原因となっている質量に対するエネルギー

ーなどの特定の量は保存される。この保存則は時空の対称性の結果であり、古典力学における保存則に類似している。

したがって、リー群は距離と長さを保ちながら空間内の動きを記述する。移動する物体の幾何学的特性（距離と角度）が変換中も空間内で変化しない場合、それらは等尺群である。回転は空間の幾何学的性質を変えないので、3次元空間における対称性の例である。例えば、立方体を回転させても頂点間の距離は変わらない。つまり、位置が変わっても、物体の幾何学的性質は変わらない。

特殊相対性理論によれば、3次元のユークリッド空間ではなく  $[x, y, z]$  シグネチャー  $(+++)$  ミンコフスキー空間と呼ばれる4次元時空に存在する。

$[t, x, y, z]$  ミンコフスキー空間と呼ばれる。  $(-+++)$ 。

この空間に関連する力学群がポアンカレ群である。ポアンカレ群は、光子のような質量を持たない粒子（光子は静止していることはなく、常に光速で運動し、速度の点では重力の影響を受けず、エネルギーだけが変化する）の運動や、質量がゼロでない粒子群のような特殊な運動の生成を可能にする。特殊相対性理論に適用されるこの力学群は、時間の矢の

逆転、すなわち過去から未来へ、あるいはその逆の

可能性を持つ質量や光子の運動を含み、次のように行列形式で表すことができる：

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで

$L$ は、異なる慣性参照枠間で時空座標がどのように変化するかを記述するローレンツ群行列である。これらの変換には、空間内の回転とローレンツ変換（ブースト）が含まれ、これは互いに一定の速度で相対的に移動する参照フレームの変化である。

$C$ の時空変換に対応するベクトルである。  $\mathbb{R}^{1,3}$ 。

つまり、質量や光子のような時空要素を考え、過去から未来への時間的移動を適用すると、ポアンカレ群を用いて逆方向に同じ移動を行うことができる。従って、スリオーの「力学系の構造」（カルーザ1921）の

理論によれば、もし力学群が光子や質量を時間の矢で逆方向に運動させることができれば、そのエネルギー、ひいては質量も逆方向に運動させることができる。

注：限定ポアンカレ群は、4次元のミンコフスキー空間における、過去から未来への「直交する」相対論的運動のみを扱う。その行列形式には、ローレンツ部分行列

$L_0$ を含む：

$$\begin{pmatrix} L_0 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

負のエネルギーと質量を持ち、時間の矢印が正反対のこれらの動きを、物理学の一部とみなしていいのだろうか？それらは測定や観測が可能なのだろうか？

負のエネルギーを持つ粒子は負のエネルギーの光子を放出するので、光学的に観測したり測定したりすることはできない。しかし、

宇宙の膨張が加速しているのは、ダークエネルギーと結びついた負の圧力のためであることが観測・測定されている（(Perlmutter et al. 1999)）。圧力とは、単位体積あたりのエネルギーの密度である。

つまり、宇宙の膨張は負のエネルギーに直結している。このことは、現在暗黒エネルギーを持つ暗黒物質と定義されている宇宙のかなりの部分が、重力効果を通じてこの膨張に影響を与えていることを示唆している。したがって、このダイナミックで幾何学的なアプローチは、その起源と性質についての答えを与えてくれる。ダークマターには、負のエネルギーを帯びた質量や光子が含まれている可能性がある。

## 4.2 各反転演算子に関連する多様な対称性

制限付きポアンカレ群は、ミンコフスキー空間の4次元における相対論的運動を扱う。ポアンカレ群とは、次の行列による群である：

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで  $C$  の時空変換に対応するベクトルである。  $\mathbb{R}^{1,3}$  :

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

ミンコフスキー空間の点に作用する：

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

この10次元群は、この空間のアイソメトリ群であり、そのメトリックによって定義される：

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

空間に属する部分行列によるローレンツ群  $L$  空間  $\mathcal{L}$  には4つの連結成分がある：

- $\mathcal{L}_n$  ニュートラルな成分は、空間も時間も逆転させない。
- $\mathcal{L}_s$  は空間を反転させる。
- $\mathcal{L}_t$  時間は逆転するが、空間は逆転しない。
- $\mathcal{L}_{st}$  空間と時間の両方を逆転させる。

最初の2つの成分は一緒にグループ化され、"直交"  
"または制限ローレンツ群として知られるサブグループを形成する：

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_n \cup \mathcal{L}_s$$

最後の2つのコンポーネントは「アンチクローン」セットを形成し、そのコンポーネントは時間を逆行させる：

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_t \cup \mathcal{L}_{st}$$

ただし、：

$$\mathcal{L}_t = -\mathcal{L}_s \quad \mathcal{L}_{st} = -\mathcal{L}_n$$

$$\mathcal{L}_{st} = -\mathcal{L}_n \quad \mathcal{L}_t = -\mathcal{L}_s$$

### 4.3 ローレンツ力学群

数学者ジャン＝マリー・スーリオによって始められた、リー代数の双対への力学群の共役作用の応用は、物理学で行われているアプローチのある側面に光を当てた。2つの直交成分に限定されたローレンツ力学群は、その結果として得られる不変特性を通して特殊相対性理論の側面を翻訳する。1970年、J. M.

Souriauは、そのモーメントの成分を分析することで、（量子化されていない）スピンの幾何学的性質を浮き彫りにすることを確立した((J. M. Souriau 1964) (J. M. Souriau 1997))。ローレンツ群には2つの連結した直交成分がある。すなわち、群の中立要素を含む第一の中立成分と、 $P$ 対称性と同義の空間を反転させる第二のエナンチオ同形成分である。力学群の理論では、運動の観点からの分類が明らかになる。この段階で、空間を反転させるこれらの要素の作用は、光の偏光現象で説明される。このグループは、次のような行列の系列で表すことができる。  $4 \times 4L$ として公理的に定義される  $L^T G L = G$ ここで  $L^T$ はローレンツ行列の転置行列であり  $L$ そして

$G$ はミンコフスキー計量行列で、この文脈ではグラム行列と呼ばれることが多い。特殊相対性理論では、この行列は一般に次の要素を持つ対角行列で表されます。

$\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .この式は、ローレンツ変換がミンコフスキー・スカラー積を保存することを意味し、これは特殊相対性理論の首尾一貫性を保つための重要な条件である。

### 4.4 制限付きポアンカレ力学群

ローレンツ群と時空間並進群との積により、常に2つの直交成分に限定された限定ポアンカレ力学群を構成することができる。その瞬間、まず時間的並進の部分群に関連するエネルギーを見つける。次に、空間的な並進に関連するインパルスを求める。この2つは、ローレンツ群の作用の下で、エネルギー・インパルスの4値ベクトルのモジュラスが不変であることによって結びついている。この群に関連する行列は、"直交する"  
"ローレンツ部分行列を含まなければならない。  $L_o$ 次元  $3 \times 3$ と並進ベクトル  $C$ とその構造を完成させるための追加成分を含まなければならない(参照 (45)).

## 4.5 制限付きカルーザ群とヤヌス力学群

制限されたポアンカレ群に5次元に沿った並進を加えることによって、我々は制限されたカルーザ群と呼ぶリー群を形成する((Bargmann, Bergmann, and Einstein 1941), (Bergmann 1942), (Bergmann and Einstein 1938), (Kaluza 1921), (Klein 1926))。この群は、5次元のローレンツ多様体に付随する15次元のカルーザ群ではなく、並進のみを数える新しい5次元の群である。この新しい次元はインパルスに付加的なスカラーを与える。

$q$  この電荷は正、負、ゼロのいずれかであり、まだ未定義である。次に、質量にスカラー

$\phi$  質量に不変電荷を与えることによって、スカラーに従った幾何学的並進を示す。次に、5次元の反転を反映する新しい対称性を導入する。  $q\hat{a}$

$-q$ からスカラーの反転と同義である。モーメントに対する作用は、この新しい対称性を電荷の反転に結びつけます。  $q$ . こうして、ディラックによって導入された物質-反物質対称性を翻訳した、電荷共役の幾何学的モデル、あるいは  $C$  対称性が導かれる。したがって、この新しい拡張を制限ヤヌス群と呼ぶことは論理的である。

## 4.6 ダイナミック・ヤヌス・グループ

この対称性は、物質を負の質量を持つ反物質に変換するもので、ファインマン的な意味で反物質と呼ぶことができる。このようにして、接続された構成要素の数を4つから8つに倍増させ、時間とエネルギーの特性を保持する「正時性」と、時間とエネルギーを逆転させる「反時性」の2つのサブセットにグループ化する。その結果、質量に不変の電荷を与えるという幾何学的な変換が強調される。力学群の理論のパイオニアである Jean-Marie Souriau が1970年という早い時期に実証したように ((J. M. Souriau 1964), (J. M. Souriau

1997))、このアプローチによって、相対論物理学の進歩を特徴づける重要な要素に純粋に幾何学的な性質を与えることが可能になった。

ここにヤヌス力学群に関連する行列を示すが、この行列からすべての対称群を再構成することが可能である：

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^\mu & 0 & \phi \\ 0 & T^\lambda S^\nu L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{0,1\}, \phi \in \mathbb{R}, L \in \mathcal{L}, C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}$$

- **対称性P:**

我々は適用しなければならない  $\mu = 0, \lambda = 0$  を適用し  $\nu = 1$  を適用する必要がある：

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$



この対称性演算子は空間の反転に対応し、直交群の第2連結成分の要素が考慮される。この対称性は、光子のヘリシティを反転させ、「右の光子」を「左の光子」に変換する。

- **対称性C :**

我々は適用しなければならない  $\mu = 1, \lambda = 0$  と  $\nu = 0$ .

を適用しなければならない。

$L_n$  の要素から出発し、電荷を運ぶ5次元を反転させる。qC対称"または"電荷共役" (量子) 演算子を得る :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

この対称性が「物質-反物質」変換を表している。

- **対称性T :**

適用しなければならない  $\mu = 0, \lambda = 1$  と  $\nu = 0$ .

この操作はC対称性( $Jan_{11} = 1$ )とP対称性( $Jan_{22} = -L_s$ )を除去する :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_t & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **CP対称性 :**

我々は適用しなければならない  $\mu = 1, \lambda = 0$  と  $\nu = 1$ .

この操作はC対称性( $Jan_{11} = -1$ )とP対称性( $Jan_{22} = L_s$ )を加える :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

注 : CPT対称性からT対称性( $Jan_{22} = L_s$ )対称性を取り除くことによっても導くことができる : **CP = T · CPT**

- **CPT対称性 :**

我々は適用しなければならない  $\mu = 1, \lambda = 1$  と  $\nu = 1$ .

を適用しなければならない。

$L_n$ の要素は時間も空間も反転しないことが分かっている。 $Jan_{22} = -L_n$ 要素は空間と時間の両方を反転させ、 $PT$ 対称演算子を形成する。しかし、対称性 $C$  ( $Jan_{11} = -1$ )を加えると、次のように電荷対称性を持つヤヌス群 $CPT$ を形成する：

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **$PT$ 対称性：**

適用しなければならない  $\mu = 0, \lambda = 1$  と  $\nu = 1$ .

を用いて $CPT$ 対称性から $C$ 対称性( $Jan_{11} = 1$ )を用いて $CPT$ 対称性から  $PT = C \cdot CPT$ が得られる：

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **$CT$ 対称性：**

適用しなければならない  $\mu = 1, \lambda = 1$  と  $\nu = 0$ . を適用しなければならない。

$Jan_{22} = -L_s$ の対称性を $CPT$ 対称性から取り除くと、次のようになる： $CT = P \cdot CPT$ が得られる：

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **中立演算子：**

我々は適用しなければならない  $\mu = 0, \lambda = 0$  と  $\nu = 0$ .

物体はその性質を変えずに5次元を移動する。直交"

部分群の中立要素のみを考える ( $Jan_{22} = L_n$ ):

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ファインマンが $PT$ 対称性の粒子運動への適用は、 $C$ 対称性の適用による反物質の生成につながると考えていることは重要である。その結果、 $PT$ 対称性は $C$ 対称性と等価であり、「鏡に映った」時間的に逆行する物質の粒子は反物質であることを意味する。

この視点は、ワインバーグの著作「場の量子論」の2.6節「空間の反転と時間の反転」(Weinberg 2000) から

導かれる。事実上、反転作用素 $T$ に任意の選択が適用され、 $CPT$ 作用素が恒等式になる。

したがって  $CPT = I$  とすると  $PT = PT \cdot I = PT \cdot CPT =$

**C.**したがって、ファインマンの見解は主に量子力学に基づいており、量子論者は「(非物理的と考えられる) 負のエネルギー状態の出現を避ける必要性」に制約されながら、演算子 $P$ と $T$ について完全に任意の先験的な選択を行う。その結果、 $P$ 演算子は線形でユニタリーでなければならず、 $T$ 演算子はアンチリニアでアンチユニタリーでなければならない。そして、104ページで次のように付け加えて結論している：「反転の型破りな表現を提供する粒子の例は知られていない。今後は、反転はセクション2.6で説明した従来の作用を持つと仮定する。

負のエネルギー状態（負圧に関連する）は、2011年にパルマターがノーベル賞を受賞した研究（(Perlmutter et al. 1999)

で証明されているように、宇宙膨張の加速の原因となるため存在する。しかし、場の量子論が登場した当時、この現象はまだ知られていなかった。

その結果、ファインマンにとって、時間反転演算子

$T$ が存在しても質量の逆転は起こらず、 $C$ 対称性を介して電荷の逆転が起こり、物質が正質量の反物質に変換される。

ヤヌス群の観点からは、5次元空間における正質量の粒子の運動から出発して、 $C$ 対称性（5次元の反転によって運ばれる）によって、この粒子（この運動）は「ディラック型反粒子」と呼ぶことのできる正質量の反粒子に変換される。一方

$PT$ を粒子に適用すると、 $T$ 対称性により負のエネルギーと質量を持つ反粒子が生成され、これは「ファインマン型反粒子」と呼ぶことができる。ファインマンによれば  $PT = C$  はもはや適用できない。

## 4.7 インプリケーション

この研究の重要な貢献は、主に量子力学と宇宙論の分野に影響を与える：

- 量子力学の注目すべき側面のひとつに、ある物体のエネルギーと質量の逆転がある。 $C$ 対称性に由来する正の質量を持つ反物質は、ディラック的な意味での反物質として知られ、実験室で生成され、重力の影響下で通常物質と同じように振る舞うことが最近示されている（(Anderson 2023)）。もう1つは、負の質量を持つ $PT$ 対称性に由来するもので、ファインマン的な意味での反物質として知られ、銀河の間に位置する原始的な反物質に相当し、特にグレートディフレクター（Hoffman et al.物理学における負の質量とエネルギーを持つ物体の可能性について、興味深い疑問が生じる。そのような存在は、量子力学における負のエネルギー状態の存在を示唆するだろう。 $T$ 対称性を扱うとき、量子物理学者は、一般的に物理学に内在しないと考えられている負のエネルギー状態を除外するために、伝統的に $T$ 演算子に対して反直線的で反ユニタリーな視点を採用している。同様に、演算子 $P$ も同様の理由からユニタリーで線形なものが選ばれる（Weinberg

2000参照)。これらの選択はCPT定理を支えるものであり、*PT*対称性が*C*対称性と一致するという考えを補強するものである。一方、線形でユニタリーなT演算子を採用することで、シュレーディンガー方程式やディラック方程式において負のエネルギー状態が自然な結果であることが明らかになり ((Debergh et al. 2018)参照)、新たな研究分野への道が開かれました。さらに、2011年にノーベル賞を受賞したPerlmutterの研究によって証明されたように、宇宙の膨張が加速していることが宇宙論的観測によって確認されている。圧力が単位体積あたりのエネルギー密度を表すことを考えると、この現象は宇宙の膨張に影響を与える負のエネルギーに直結している。

- **宇宙論の分野では**、一般相対性理論は、エスケープ現象の出現を理由に、負の質量の概念を断固として否定しており、作用反作用と等価性の原理と矛盾している (Bondi 1957)を参照)。したがって、負のエネルギーと質量の統合を提案する新しいモデルは、相対性理論の基本的な幾何学的枠組みを拡張する必要がある。ローレンツ、ポアンカレ、カルーザなど様々な群を中心とする力学群論は、平坦で曲線のない構造を特徴とする力のない宇宙を記述する枠組みを提供する。このような宇宙では、粒子はローレンツ計量におけるミンコフスキー空間の測地線に従うか、あるいは、開いているか閉じているかにかかわらず、5次元の影響を受けたファイバー空間を進む。この理論的アプローチは、2つの異なるタイプの物質が共存し、相互に作用することなく孤立して存在することを示唆している。これらの空間内の粒子は互いに相互作用しない。この革新的な視点は、粒子、空間、時間の相互作用を理解する新しい方法を切り開くものである。

## 5 一方通行の膜としての 白い泉と結合したワームホールモデルの代替解釈

1916年にK.シュヴァルツシルトが1916年に真空中のアインシュタイン方程式の解として開発した外部測度の研究から、ある仮説の導入が明らかになった。 $t \rightarrow -t$ 一般に「静力学」として知られている。この仮定は、当時は物理的な根拠が証明されていなかったが、測度における $dr$   
 $dt$ の交差項を排除することにつながった。こうして、この $dr$   
 $dt$ のクロス項がないことが特に特徴的な、任意の座標の選択がなされた。本研究の目的は、計量における $dr$   
 $dt$ のクロス項の導入に基づく新しいアプローチの物理的可能性を探り、一方向にしか渡ることのできない「橋」を介して2つのPT対称半リーマン空間を接続する、一方通行膜としてのワームホールと白い泉を構築する可能性を実証することである。

### 5.1 異なるトポロジーを反映したアインシュタイン方程式の解法

1916年、カール・シュヴァルツシルトは2つの論文を発表した ((Schwarzschild 1916b)、(Schwarzschild 1916a))。最初の論文は、真空中におけるアインシュタイン方程式の解を、以下の仮定に基づいて構築したものである：

- 定常性：時間座標に対する距離の項の独立性、すなわち時間平行移動による不変性。
- 等方性と球対称性、すなわち $SO(3)$ による不変性。
- クロスタームなし  $drdt$ 。
- 無限大にローレンツ。

彼は、シュヴァルツシルトの外部計量と呼ばれるこの解を、密度が一定の流体で満たされた球の内部の幾何学的形状を記述する内部計量 (Schwarzschild 1916a) と、アインシュタイン方程式の2番目のメンバーによる解で、すぐに完成させた。

$\rho_0$ と、アインシュタイン方程式の解に2番目のメンバーを加えたものである。2つの測地線を結ぶ条件 (測地線の連続性) は満たされていた。水星の近日点の前進と光線の偏向の現象は、この解を裏付けている (図3.4)。K.シュヴァルツシルトは、これら2つの測定基準を支配する条件が物理的な現実と矛盾しないことを保証するために努力した。その一例として、今日、中性子星は、その驚異的な密度と強大な質量のために、天然の宇宙実験室として機能しており、地上の実験室ではアクセスできない密度と重力の領域を探求している。中性子星が物理的に臨界状態に達する2つの異なる方法を考えてみよう。

恒星の密度が一定である場合、 $\rho_0$ が一定である場合、特徴的な半径  $\hat{r}$  を定義することができる。そして、星の半径が：

$$R_{\text{cr}\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}}$$

と

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_0}}$$

それで、こうなった、

- 外部計量では、恒星の半径は以下の値でなければならない。  $\hat{r}$ .
- 内的計量に関しては、恒星の半径は以下の値でなければならなかった。  
 $R_{\text{cr}\phi}$  なぜなら、半径が大きいと、星の中心で圧力が無限大に増大するからである。

第二に、大質量の星の場合、崩壊する鉄球は複雑なシナリオを提示する可能性がある。球体の質量が爆縮中に保存されると仮定すると  $M$  の質量は爆縮中も保存されると仮定すると、2つの重要な臨界半径を考慮する必要がある：

- 中心部では、幾何学的な臨界半径はシュヴァルツシルト半径で与えられ、それは：

$$R_{\text{cr}\gamma} = R_s = 2 \frac{GM}{c^2}$$

- この質量の外側では、物理的臨界半径は(38)で与えられる。

質量保存を  $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$  で表される。  $\rho_0$  を調べることができる。

実際、爆縮中に物理的臨界に達した場合、次のようになります。  $R = R_{\text{cr}\phi}$ .

次に、質量保存方程式を(38)に代入すると、次が得られる：

$$R = R_{\text{cr}\phi} = 2,25 \frac{GM}{c^2} > R_{\text{cr}\gamma}$$

このことから、ある質量が物理的臨界に達した場合、幾何学的臨界が現れる前に  $M$  幾何学的臨界が現れる前に起こる。

K.シュヴァルツシルトもまた、この測定が、当時の天体物理学的現実の枠組みで理解されていたものをはるかに超えた条件に関係していることを指摘している。

また、この幾何学的解のトポロジーは、2つの境界を持つ多様体、つまり、球面  $S^2$  の面積を持つ  $4\pi R_0^2$  (星の半径) である。

1916年、ルートヴィヒ・フランムは、外解が幾何学的な物体を記述する可能性があると考えた。その時の関心は、質量を非収縮空間の領域として記述する試みであった((Flamm 1916))。

1934年、リチャード・トルマン (Richard Tolman) は、十字項  $dr dt$  を導入することによって、最も一般的な計量解を操作する可能性を最初に検討した。しかし、単純化のために、彼は単純な変数の変更を用いて、この項を即座に削除した((Tolman 1934))。

1935年、アインシュタインとローゼンは、粒子の幾何学的モデルの文脈で、次のような座標の変化により、非収縮性の幾何学的構造を提案した((Einstein and Rosen 1935)) :

$$u^2 = r - 2m$$

すると、計量解は次のようになる :

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4u^2(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

こうして著者らは、「空間ブリッジ」と呼ばれる非収縮性の幾何学的構造を得た。

$4\pi\alpha^2$ の値に対応する  $u = 0$ の値に対応する面積の閉じた面が2つの "葉"をつなぐ。

$u=0$ から  $+\infty$ に対応するものと

$-\infty$ このメトリックは無限遠ではローレンツ型ではないことに注意。この新しい座標系で表現されたこの計量は正則であるが、著者らは、ゴルジュ面ではその行列式がゼロになることを指摘している。この幾何学的構造では、2つの拘束された半リーマンシートが区別される。  $u > 0$ に対応するものと  $u <$

$0$ 。これは、それらの共通の境界に沿って接合することに対応する。の条件を満たさない

ので、このグローバル時空は半リーマン幾何学の標準的な枠組みには当てはまらない。

$\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ を満たさないからである。(Stoica 2014)で述べられているように、退化した計量テンソルを許容する特異半リーマン幾何学のより一般的な枠組みに適合する。

1939年、オッペンハイマーとスナイダーは、  $dr$

$dt$ に十字項がない場合、固有時間と遠方の観測者が経験する時間との間の完全な切り離しを利用して、外部計量解を使って大質量星の寿命末期の崩壊の「フリーズフレーム」を記述することを提案した。変数

$t$ が遠方の観測者の固有時間と同定されることを考慮すると、これは、日単位で測定される固有時間において、遠方の観測者には無限の時間の中で起こっているように見える収縮現象のような「フリーズフレーム」のモチーフを作り出す((Oppenheimer and Snyder 1939))。この文書は、ブラックホールモデル (2.3.8節参照) の基礎と考えられている。

1960年、クルスカルは幾何学的解法を拡張し、次のような中心特異点を中心に組織された収縮時空を包含するようにした。 $r = 0$ 。この測地線は  $r < \alpha$ 。ブラックホールモデル（球対称<sup>4</sup>）は、遠方の観測者によって「フリーズフレーム」として知覚される一瞬の質量の爆発として、決定的な形をとる（(M. D. Kruskal 1960)）。シュヴァルツシルト球は「事象の地平線」と呼ばれる。

1988年、M. MorrisとK.S.

Thorneは、解の幾何学的モデルを得ようとしたのではなく、「ワームホール」を通じた恒星間旅行の可能性を研究するために、縮約性を放棄してこの幾何学的解釈を再検討した（(Morris and Thorne 1988)）：

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

星間航行の実現可能性の研究に焦点を当てることで、著者らはこのような形状に関連する膨大な制約や、不安定で一過性の性質を浮き彫りにしている。

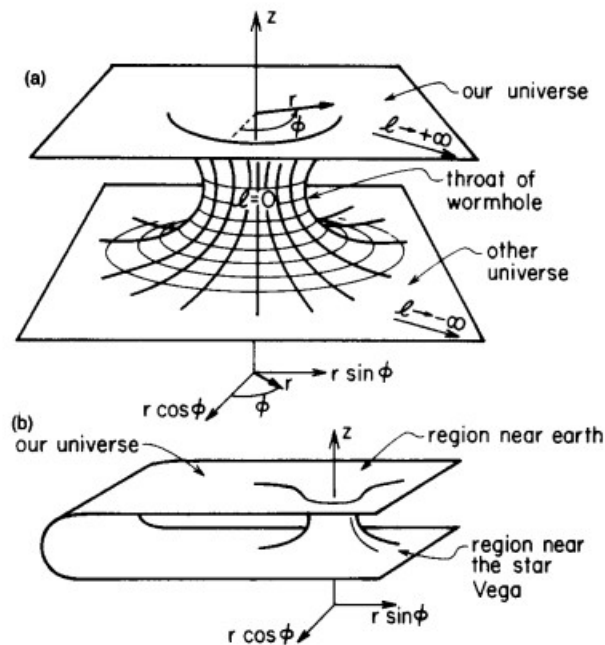


図5.1 - M. モリスとK.S. ソーンによる論文の396ページ (1988年)

1963年、ロイ・カーは真空中のアインシュタイン方程式の軸対称定常解を構築した。しかし、この研究では、球対称性を持つ定常解の解釈に限定する (2.3.9).



## 5.2 静態性仮説：クロス項の不在 $dr dt$

一般相対性理論における「静止性」とは、 $t \rightarrow +t$ の時間平行移動のもとでは「時間に依存せず」不変であり、 $t \rightarrow -t$

$t$ の「時間反射」対称性のもとでは不変であることを意味する。実際、計量が  $dr dt$  のクロス項を持つということは、空間座標と時間座標の間に混合依存性があることを意味する。この混合依存性は、時間反射対称性による不変性を破り、メトリックは  $t \rightarrow t$  変換の下では変わらないからである。R. Waldは1984年に著書 "General Relativity" の120ページでこの特異性に言及している(Wald 1984)。

また、(Adler, Bazin, and Schiffer 1975) の186ページには、時間反射対称性の要件として、次のように書かれている。 $dx^0$ まで"逆方向"にたどることができる線("静的"と呼ばれる)に対する時間反射対称性の要件が、最初の仮定として確立されている。 $-dx^0$ (「静的性」と呼ばれる)が最初の仮定として確立されている。

実際、R.ワルドの言う静的性とは、次のような時間反射対称性による不変性のことである。 $t \rightarrow -t$ これは純粋に数学的な仮説であり、物理的な意味はない。しかし、我々の研究はこの仮定に対して異なるアプローチを提供する。

## 5.3 シート・ローレンツ無限幾何解の構築

シュヴァルツシルトの外部測度を、シグネチャーの下での古典的な形で考えてみよう。( + - - - ):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

### 5.3.1 対称性 T

1916年に真空中のアインシュタイン方程式の解として構築されたこの測度((Schwarzschild

1916b))は、時間対称性による不変性という、著者が言及しなかった付加的な仮定を備えていた。この仮定は物理的な根拠がなく、Tolmanが1934年の時点で想定していたように、計量における  $dr$

$dt$ の交差項を排除することにつながることに注意することが重要である ((Tolman 1934)の239ページ)。

逆に、A. Eddingtonは、Schwarzschild 曲面上の座標特異点を除去するために、変数変更を使って、この方法を導入した。 $r = \alpha$ 変数の変化を用いている((Eddington 1925),(Koiran 2021)) :

$$t_E^{\pm} = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

すると、メトリックは次のようになる :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

この条件では、遠方の観測者から見て、自由落下時間は有限となり(39)、脱出時間は無限のままであることがわかる。脱出時間が有限である計量は、この変数の変更によって得られる：

$$t_E^- = -t - \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

したがって、メトリックは次のようになる：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

これは(40)の時間座標を反転させることと等価である。このように、2つの半リーマン空間を記述する2つのメトリックスの関連付けという選択は、アインシュタインとローゼン((Einstein and Rosen 1935))の座標系と同様に、この特定の座標系においても、「橋」によって接続された2つのT対称シートを持つ大域的な幾何学的解を考えることにつながる。

では、これらの変換もP対称性を伴うことを示そう。

### 5.3.2 シンメトリーP

この表現では、最初のシートの放射状の測地線は、「スペース・ブリッジ」の接平面に到達したとき、その接平面と直交する。これらの同じ測地線は、2番目のシートで現れるとき、この同じ接平面に直交する。ここで、四面体を形成する4つの点を考えてみよう。これらの点は、放射状の軌跡に沿って「空間の橋」に向かって収束する。正四面体を形成する正三角形の各点に対して交差方向を定義することで、3次元の方位を定義することができる。正三角形に対してrに関しては、これらの点が剛体表面で跳ね返り、四面体の向きが逆になるようだ。すると上流と下流の四面体はエナンチオモρφニックになる(図5.2)。

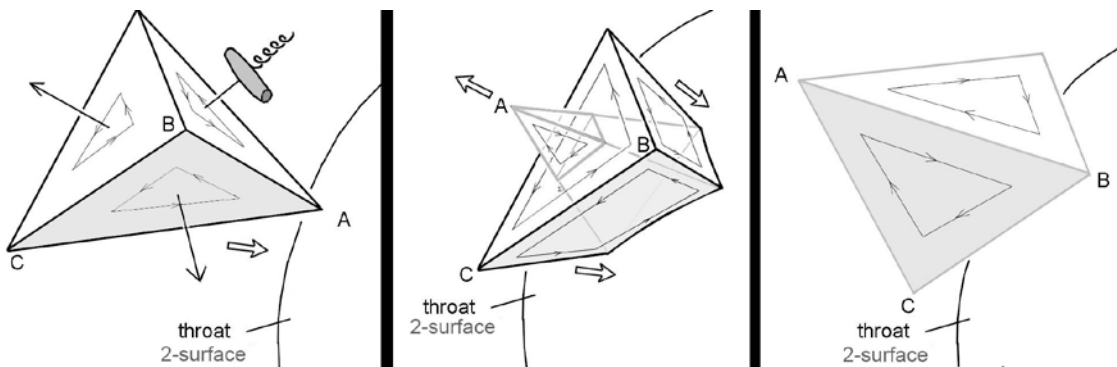


図5.2 - 「スペースブリッジ」を渡る際の空間の反転

向きの変化は、図5.1のワームホールの簡略化された2D表現ですで見ることができる。この図を上から見て、三角形がトップ・シートの表面に沿って溝に向かって滑っていると想像してみよう。溝を横切った後、三角形は下のシートの上を滑り始め、今度は上のシートの上の位置から逆さまに見える。私たちから見ると、三角形の向きは変わっている。この向きの変化の物理的な意味については、セクション5.3.3で説明します。このように、(41)と(42)の幾何学的構造は、2つのPT対称半リーマン空間をつなぐ「橋」を表している。

この2次元曲面の要素は次式で与えられる：

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} = \alpha^2 \sin(\theta)$$

この計量は球状の2次元曲面（4次元時空における半径一定の球面など）を記述するので、微分曲面要素は次式で与えられる：

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

この"スペースブリッジ

"の最小表面積を求めるには、この表面要素をすべての可能な角度にわたって積分する必要がある：

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

そのため、非収縮性であり、最小表面積は、 $4\pi\alpha^2$ 。

### 5.3.3 二つのシートの識別

セクション5.3.2では、図5.2のワームホールの溝を横切る四面体と、図5.1の溝を横切る三角形の向きの変化について説明した。三角形の向きの変化は、図5.1を全体として見ている人にしか見えない。なぜなら、物理的な観測者は2枚の葉のどちらか一方にいないければならず、もう一方の葉を直接見ることはできないからである。図5.2でも状況は同じである。真ん中の写真は、ワームホールの両側を同時に見ることができる視点からの状況を表している（BとCはまだ峡谷に到達しておらず、Aはすでに峡谷を越えて反対側に出ている）。繰り返すが、これは物理的な観測者にとって不可能なことである。これまで述べてきたようなP対称性は、物理的に観測可能な現象には対応していないようだ。しかし、アインシュタインとローゼン(Einstein and Rosen 1935)によって導入された付加的な要素によって、P対称性に本当の物理的意味を与えることができる。

彼らの動機は、図5.1のような恒星間旅行の研究ではなく、一般相対性理論の方程式の解を使って素粒子を記述することにあつたことを忘れてはならない。これらの解は、物理的空間を2枚の同じシートからなる空間によって数学的に表現することを含んでおり、粒子はこれらのシートをつなぐ"橋

"によって表現される"。アインシュタインとローゼンは、多粒子問題も同様の方法で研究できることを示唆しているが、この研究は彼らの論文では行われていない。

複数の粒子が存在する場合、このケースは修正方程式(3a)の特異点のない解を探すことに対応し、その解は2つの合同なシートがいくつかの離散的な"橋"で結ばれた空間を表す。彼らの視点に立てば、数学的表現(41)において $\theta, \phi$ の値は同じだが $u$ の値が同じであるが反対である数学的表現(41)の2点は、物理的空間における $r(r = u^2 + m)$ の値が正反対である点を同じように同定すれば、図5.5の中央の写真のようになる。 $u$ の値が正反対の点を同じように識別すれば、図5.2の中央の写真のような状況を物理的な観測者が見ることができる。5.3.2節で説明したP対称性は、今や実際の物理的意味を持つ。このPT対称性の組み合わせの解釈は次節で述べる。

## 5.4 このジオメトリの別の表現

式(40)と式(43)に以下の変数変更を適用する：

$$r = \alpha(1 + \text{Log ch}(\rho))$$

以下の2つの指標が得られる：

$$ds^2 = \left( \frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{+2} - \left( \frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 - 2c\alpha \left( \frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^+ - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$ds^2 = \left( \frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{-2} - \left( \frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 + 2c\alpha \left( \frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^- - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

について、第二のシートを構造化する測度を求める。 $\rho < 0$ このシート上で有限の脱出時間を持つ「橋」を渡る物質の通過を変換する測地線の連続性を保証するためには、時間座標が横断中に反転する対称性Tを適用しなければならない。 $t_E^+ = -t_E^-$

これらのメトリックスは無窮大までローレンツであり、したがって $\rho 0$ から $+\infty$ と $-\infty$ à 0.の「スペース・ブリッジ」上で $\rho = 0$ 成分 $g_{tt}$ と $g_{\rho\rho}$ の成分が消え、最後の2つの空間成分 $g_{\theta\theta}$ そして $g_{\phi\phi}$ だけが残る：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

この特定の座標系では、その行列式はゼロであることが推論できる。 $P$ 対称性は、隣接する点が、今度は明示的に微分され、次のように推論されるという事実から導かれる。 $\rho \rightarrow -\rho$ .この変換は(41)の  $u \rightarrow -u$ (41)と同じ役割を果たす。

この2つの条件のもとでこれらの計量解を組み合わせることで、一方向にしか渡ることのできない「橋」を介して2つの半リーマン空間を結ぶ、一方通行の膜としてのワームホールと白い泉が得られる。さらに、ワームホールが、図5.1.aのように別の宇宙に通じているのでも、図5.1.bのように同じ宇宙の遠い点に通じているのでもなく、2つの合同な葉が、次の変換によって物理宇宙の同じ点に対応するとしよう。 $u \rightarrow -u$ 変換（または  $\rho \rightarrow -\rho$ アインシュタインとローゼン1935）や5.3.3節で示唆されているように、2つの合同な葉は、物理的な宇宙の同じ点に対応する。そして、2枚のシートは $PT$ 対称であると結論づけられる。

文献では、時間座標の反転は様々な方法で分析されている。特に

- J. M. Souriauの力学群の理論((J. M. Souriau 1964),(J. M. Souriau 1997))によって、エネルギーの反転を引き起こすことが示された。その結果、時間反転対称性は質量のある粒子の運動を  $m$ 質量  $-m$ ((Oppenheimer and Volkoff 1939)、191ページ)。同書の192ページで、著者は負の質量を避ける別の解析を提示している。Souriauは、これらの代替案は実験によって確認できるかどうかによって評価されなければならないと強調している。
- ファインマンは、反物質は時間を逆行する通常物質であるという解釈を提案した。
- 理論的解析 ( $CPT$ 定理) と実験から、素粒子は $CPT$ 対称性のもとで不変な物理法則に従うことがわかっている。

セクション5.3で発見された $PT$ 対称性は、 $CPT$ 対称性に $C$ 対称性（電荷の反転）が加わったものと考えられる。従って、第二シートには反物質が存在することになる。もし2番目のシートがすでに普通の物質を含んでいれば、1番目のシートの反物質と相互作用し、エネルギー源となる可能性がある。

## 5.5 結論

我々は、真空中のアインシュタイン方程式の球対称定常解に基づく新しい幾何学的構造を導入する。

$SO(3)$ による不変性) と定常性 (時間の平行移動による不変性) という2つの物理学にヒ

ントを得た仮定だけである。このようにすることで、以前、物理的な正当性を示すことなく、アインシュタイン方程式の時間反転対称性（「静的」解）による不変性を追加することはありません。  $t \rightarrow$

$-t$ （静的」解）。この制限の少ない新しい仮定は、以前は静的仮定が禁止していた交差項  $dr dt$  の存在を導入する。この新しい幾何学的な物体は、ワームホールと "橋" を渡る 白い泉を組み合わせた "一方通行膜"

"のように振る舞う。無限遠にローレンツ計量があり、この構造は、2つのエナンチオ同型の  $PT$  対称半リーマン空間を反対の時間矢印で結ぶ。その結果、この物体は、「橋」に沿って接続された  $PT$  対称な4次元時空の2枚のシートの覆いに相当する。アインシュタインとローゼンに触発され、我々は、物理空間上の点を、2枚のシートのそれぞれに1つずつある合同点の組で表すことを提案した。私たちは、物体が2枚のシートの間のブリッジを横切ったとき、この合同点の識別が観測可能な物理的効果をもたらすはずであることを示した。

## 5.6 付録

ここで、宇宙の第2層への物質移動の場合を見てみよう。ここでは、第2シートへの流出メトリックを自由に定義することができる。シュヴァルツシルトの計量(42)に次のような変数の変更を加えることで、積分定数の符号を逆にすることができます。  $\alpha \rightarrow -\alpha$  枚目のシート上の "反発" メトリックを構築することができる：

$$t_E^{\pm} = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} + 1 \right|$$

これは、第一シートから第二シートへの測地線の連続性を保証するもので、第一シートでの自由落下時間は有限であり、第二シートでの脱出時間は有限である。

最初のシートを構造化する入射メトリックは：

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{\pm 2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^{\pm} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

そして、2枚目のシートを構成するアウトゴーイングのメトリックは次のようになる：

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{\mp 2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^{\mp} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

一般的な形をとる：

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

ここで  $\delta = -1$  最初のリーフを構成するメトリックと  $\delta = +1$  は第2リーフを構成する発信メトリックである。このように、2つの計量は時間反転によって対称であるため  $t \rightarrow$

$-t$  ジオデジックの連続性は、一方のシートから他方のシートへ、一方のシートでは有限の自由落下時間、他方のシートでは有限の脱出時間で保証される。

このことは、通常物質が負の質量を持つ反物質に変換される可能性を示唆している。このプロセスは本質的に、物質が負の質量を持つ反物質に変換されることを含んでいる。この幾何学的解法とセクション5.3で開発した解法を組み合わせることで、この第二の層の計量特性を利用した恒星間旅行の実現可能性を探ることができる。

## 6 モデルのトポロジー的解釈

### 6.1 定義

宇宙論においてトポロジーとは、連続的な変換のもとでも不変であり続ける、宇宙の基本的な空間特性の研究のことを指す。正確な距離や角度に焦点を当てる幾何学とは異なり、トポロジーは、空間がどのようにつながり、大規模な構造になっているかに関心がある。正確な形や大きさに関係なく、宇宙空間の連結性、連続性、境界などの側面を調べる。

宇宙論的な文脈では、トポロジーは宇宙の全体的な構造を理解するのに役立つ。宇宙は有限か無限か、宇宙には「辺」があるのかないのか、自明でない方法でつながっている可能性はあるのか（多連結宇宙のモデルのように）、といった疑問が含まれる。これには、銀河の分布や宇宙放射背景、その他の天体物理学的観測によって決定される、宇宙の大規模な形状や構造を調べることも含まれる。

トポロジーは、多層宇宙、時空の異なる領域間の接続性、および高度な理論物理学から生じる可能性のある他の非直観的な特性などの概念を探求するための枠組みを提供するため、ヤヌス宇宙モデルのような高度な宇宙モデルに特に関連している。

つまり、宇宙論におけるトポロジーは、古典的な幾何学の制約を超えて、我々の宇宙の基本的な構造や性質を探求し、理解するための強力なツールなのである。

この章を続ける前に、ジャン＝ピエール・プティ博士が書いた

漫画『トポロジコン』（Petit 1985）を

読み、十分に理解することが極めて重要である。この作品は、このウェブサイト ([http://www.savoir-sans-](http://www.savoir-sans-frontieres.com/)

[frontieres.com/](http://www.savoir-sans-frontieres.com/)) で自由に読むことができる。この作品は、宇宙論と一般相対性理論に関連するトポロジーの概念を一般に広めたものである。実際、この章では、むしろ直感に反する概念的な道具を主に扱っている。従って、理解を深めるために、この漫画を事前に読んでおくことを強くお勧めする。

### 6.2 ワームホールモデル

前章5で論じたワームホールモデルの新解釈を発展させることで、一般相対性理論との関連において、より深いトポロジカルな視点を提案する。例えば  $S^2$  を考えてみよう。この構成は射影平面に類似しているのだろうか？位相幾何学では、射影平面とは、ある点では発散するが別の点では合流する直線など、ユニークな性質を持つ非配向性曲面のことである。このことは、ワームホール峡谷を通る時空の層間のつながりが、従来の空間の向きを無視し、射影平面を呼び起こす可能性を示唆している。われわれの推測は、この表面上の計量決定式が無効であることに基づいており、これは2次元的な非方向性を示している可能性がある。もしこの峡谷の球面が閉じていて、境界のある表面を持つならば、それは射影平面と同一視できるだろう。

$P^2$  この考えは直感に反するように思えるかもしれないが、シュヴァルツシルトの外解(42)によって記述された天体のトポロジーから直接導かれる。



一般相対性理論の文脈では、曲がった時空における素体積の概念が重要である。次元  $n$  で定義される。  $dV = \sqrt{|\det(g)|} d^n x$  ここで  $g$  は計量テンソルであり  $\det(g)$  で与えられる。この素体積は、ユークリッド空間のように単純な座標微分の積ではなく、時空の曲がった構造によって変化する。因子  $\sqrt{|\det(g)|}$  は、アインシュタインの方程式に従って、質量とエネルギーの存在によって時空がどのように歪むかを反映している。曲率の高い領域では、この素体積は直感に反した振る舞いをするすることがあり、時空の魅力的で時に驚くべきトポロジカルな特徴を明らかにする。

球面  $S^2$  で定義されるメトリックを持つ：

$$ds^2 = \alpha^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

球のメトリックは、球の表面上の点間の距離を記述する数学関数である。このメトリックは2次元球面（4次元時空における半径一定の球面など）を記述するので、微分曲面要素は次式で与えられる：

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

球は3次元空間における2次元の表面だからである。この曲面要素を積分すると、次の式で表される曲面が得られる：

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

これは、半径1.5メートルの球の表面積に相当する。  
 $\alpha$  また、この曲面は射影平面の曲面に類似していることもわかる。  
 $P^2$  標準幾何学ではほとんど扱われない概念である。

### 6.3 宇宙のモデル

幾何学において、球体は  $S^2$  は、私たちが慣れ親しんでいる三次元空間に没入させることができるので、容易に視覚化することができる。  $R^3$ 。しかし  $P^2$  のような投影平面は、同じようには描けない。射影平面は非方向性曲面の一種であり、3次元空間に自己交差なしに平らに並べることはできない。射影平面を視覚化するには、「イマージョン」（自己交差の集合に従って表面がそれ自身と交差する方法）を使う必要がある。この概念は、従来の図形や空間の理解に挑戦するものである。より高次元の射影平面、例えば  $P^3$  あるいは  $P^n$  のような高次元の射影平面を理解するためには、視覚的な表現を捨て、抽象的な思考

を取り入れる必要がある。私たちの次元を超えた複雑な位相幾何学的構造を探求するには、このような発想の転換が必要なのである。

例えば、球体を覆う子午線を形成する各ストリップが、「没入」によってそれ自身を交差させ、3つの半ひねりを持つメビウスの帯の2枚の被覆を形成することができると考えれば、球体を反転させることができる（Morin and Petit 1978）。この“自己交差”効果は、私たちの3次元表現空間におけるこの被覆の没入にのみ関連している。 $R^3$ 。次に、この球体のシートの極を  $M$  この球のシートの  $S^2$  を反対側の極  $M'$  の極を作ることができる。これを「対蹠点の接続」と呼ぶ。この変換によって、図6.1のように、この球体の子午線によって運ばれる時間の矢印が、同じ被覆のそれぞれのシート上で対向しながら出会うことができる。

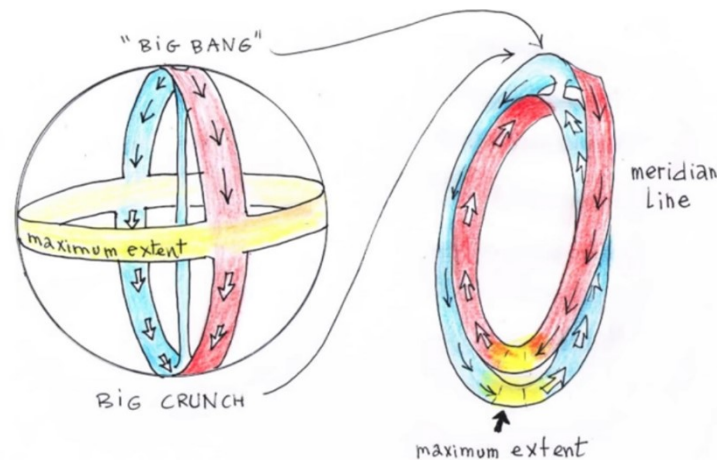


図6.1 - 対蹠点の結合による球の反転

注：メビウスの帯は一辺と一辺を持つ曲面である。数学の一分野である位相幾何学の古典的な数学的対象で、連続的な変換の下でも不変な空間の性質を研究する。メビウスの帯は、帯状の紙を半分ひねって、その両端を結ぶことで作ることができる。この構成は、それに沿って線を引き始めると、ペンを離すことなくストリップの両「辺」を横切った後、その開始点に戻る表面を作り出す。

メビウスの帯が魅力的なのは、その非方向性である。一枚の紙のような通常の空間では、「上」と「下」は明確に区別されている。しかし、メビウスの帯にはそのような区別がない。表面を移動すると、上から下へ、あるいはその逆へとシームレスに移動する。メビウスの帯は、トポロジーや幾何学の重要な概念、例えば一辺の表面や空間的直感の限界などを説明するのによく使われる。理論物理学や宇宙論では、メビウスの帯は、時空のねじれや異なる次元間のつながりなど、複雑な空間構造や現象を探求するモデルとしても使われる。

例えば、PT対称性は、あるシートから別のシートへの射影平面の経路として解釈するこ

とができる (図6.2)。

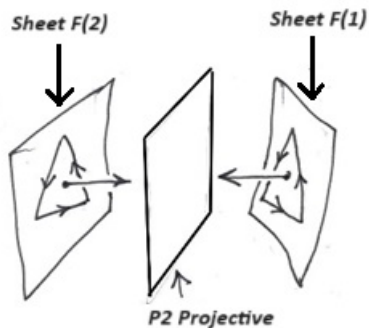


図6.2  $P^2$  プロジェクター

幾何学的な物体が関数座標系を備えるためには、そのメトリックの行列式の非ヌル性が不可欠である。特に「ガウス座標」の文脈では、この原理は極めて重要である。四次元空間では、この要件によって、空間を三次元超曲面の集合によって葉状化することができる。これらの超曲面は測地線に対して「直交」しており、つまり自由運動をする物体がたどるであろう経路に対して垂直であり、時間座標のみによって特徴づけられる。ここで重要なのは、「時間の矢」と「適切な時間」の区別である。「時間の矢」は一方向の時間次元を指し、「適切な時間」は観測者に固有の時間の尺度である。

私たちが検証している2次元時空の文脈では、フォリア化は一連の円を使って行われる。これらの円上の各点は、円に直交する「時間ベクトル」と関連づけることができる。この場合の直交性とは、時間ベクトルが各円の表面に垂直になるように配置され、時空間の明確な時間的要素を形成することを意味する (図6.3)。

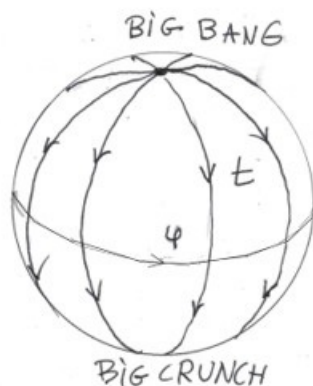


図6.3 - 球を構成する円群における円に直交する「時間ベクトル」の図解 $S^2$

それでも、この「物体

」には2つの特異点、すなわち方位角が不定である極がある。これらの極は避けられない「メッシュの特異点」を表している。例えば、球の近似を表す四面体のような単純な多面体を三角形の底面を持つピラミッドと考えると、そのオイラー・ポアンカレ特性は4

(頂点)  $-6$  (辺)  $+4$  (面)  $=2$ である。球のオイラー・ポアンカレ特性は  $S^n$ のオイラー・ポアンカレ特性は  $n$ が偶数のときは2に等しく  $n$ は奇数である (5.3.3)。

私たちから見れば、宇宙は球体である。

$S^4$ ビッグバンとビッグクランチという2つの特異点がある。4次元の球体

$S^4$ は正球に類似しており、その概念を高次元に拡張したものである。ビッグバンとビッグクランチという2つの極を持つこの球体を考えると、「平行線」(2次元の表面上の平行な円に似ている。

$S^2$ )。これは地球上の緯度を表す線に似ている。そして、過去と未来の方向はどこでも一様になる。この文脈では、過去-

未来方位はビッグバンからビッグクランチまでの時間の方向を指しており、この方位はこの葉状構造全体を通して首尾一貫したものとなる。この平行面に対する法線に関連して、時空は方向づけ可能であり、時空の構造には「上」と「下」という明確な概念がある。

しかし、このサーフェスを「折りたたむ」

ことによって(どちらか、あるいは  $S^2$ または

$S^4$ )、2つの平行線が重なり合う状況を作り出す。この意味での「折りたたみ」とは、表面の異なる部分が接触するように球の構造を操作することを意味する。その時、時間ベクトルは、前述のように反平行または反対になる。時間ベクトルとは、時空間の各点における時間の方向を表すものである。このベクトルが反平行になるということは、接触点で時間の方向が逆になることを意味する。これは「誘導配向」と呼ばれるものにつながる。ここでいう「誘導された向き」とは、折り畳みプロセスによって生じる時間ベクトルの新しい向きのことである。この時空の各点では、3つの半ひねりを持つメビウスの帯の2枚のシートによる覆い(2つ折りの覆い)として構造化され、「対蹠的な物質」(空間的、時間的の両方)が「レトロクロニック」に現れる。三回半ひねりを加えたメビウスの帯は、一枚の紙を三回ひねって両端を合わせることで視覚化できる片面の表面である。

Jean-Pierre Petitの論文(Petit

1994)では、相互作用の法則が...であると仮定して、宇宙とその対極が作る重力場との相互作用を考察している：

1. ニュートンによれば、通常の質量は相互に引き合う。
2. ニュートンによれば、「対蹠的な」質量は互いに引き合う。
3. 通常の質量と「対蹠的な」質量は、「反ニュートン」の法則に従って反発し合う。

この仮説によって彼は、2次元の表面を「2枚のシートで覆う」というトポロジーを与えることで、宇宙を「折りたたむ」ことにした。

こうして"折りたたまれた"球面

$S^2$ (閉曲面)は、図6.4のように、1つの極を持ち、オイラー・ポアンカレ特性が1に等しいもう1つの閉曲面、ボーイ曲面の被覆になる。ボーイ曲面は、1つの面と1つの辺を持つユニークな3次元非配向曲面で、すべての対蹠点が収束する特異点を持つ。Boy曲面は、1つの面と1つの辺を持つ3次元の無配向曲面の例である。興味深いのは、古典的な球面とは異なり、すべての対蹠点が収束する特異点を持つことである。つまり、ボーイの表面に線を引き始めても、辺を横切ったり反対側を使ったりすることなく、最終的には出発点に戻ることになる。

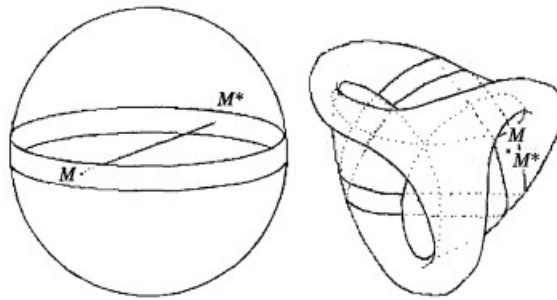


図6.4 - 2球体の赤道付近とボーイ面上の位置

この段階で、ビッグバンとビッグクランチは「一致」する。

そして、この極特異点の代わりに、この2つのメッシュ特異点をつなぐ「チューブ」が想定される：

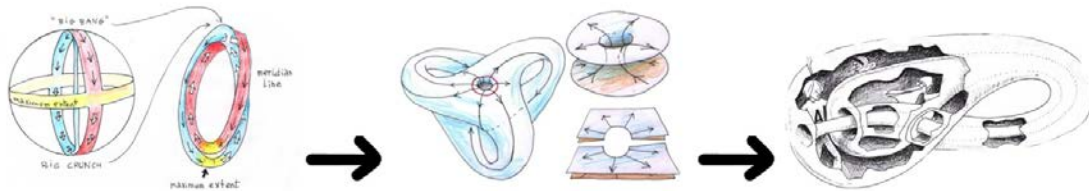


図6.5 - 球体のフォリア化後の真ん中の少年の表面 $S^2$ 右はクラインの瓶 $K^2$ 右側

特異な性質は消え、物体はクライン瓶の裏地となる。

$K^2$ ボトルとは、図6.5に示すように、オイラー・ポアンカレ特性がゼロである、境界も内部も明瞭でない無方向性曲面のことである。クライン瓶もまた、明確な境界も内部も持たない無方向性曲面である。メビウスの帯を想像してほしい。ボーイ面とは異なり、クライン・ボトルは自己交差なしに3次元空間で表現することはできない。その興味は、"内部"と"外部"

"の概念が分離していないトポロジカルな振る舞いにあり、トポロジーや理論宇宙論のある種の考え方に有用な表現を提供する。

私は、1950年代の理論物理学と宇宙論の限界は、この分野がトポロジーを取り入れるのが遅れたことに起因していると考えている。連続的な変形によって保存される性質の

研究であるトポロジーは、宇宙の構造とその複雑な構造を理解する新しい方法を提供できただけである。

## 7 超巨大未臨界 天体M87といて座A\*の 別解釈。

『アストロフィジカル・ジャーナル』誌に掲載された、銀河の中心に位置する超巨大天体の最初の画像は、主に巨大ブラックホールと解釈されてきた。この解釈は、広く受け入れられている別の説明がないことに基づいている。本研究では、これらの画像、特にM87銀河と天の川銀河の中心にある天体の画像を再検討した。その半径は、質量から計算されるシュヴァルツシルト半径よりもわずか5.72%短い。また、これらの特徴の中心部分は、重力赤方偏移効果によって暗くなっていることがわかる。z+

1.この赤方偏移は、遠方の観測者が受け取る光の波長と表面から放射される光の波長の比として計算され、これらの天体の中心からコロナまでの観測された最高温度と最低温度の比に対応し、その値は著しく3に近い。我々は、これらの天体の安定性は、幾何学的臨界のはるか以前に起こった物理的臨界による重力崩壊と、光速の2乗に比例する、天体の中心から発せられる一定密度の極めて高い放射圧のバランスから生じるのではないかという考えを探求する。我々の分析は、銀河の中心にある超巨大天体について、別の解釈を提案することによって理解を深めることを目的としている。

### 7.1 はじめに

M87銀河と天の川銀河の中心に位置する2つの超巨大天体の画像は、すぐに「巨大ブラックホールの最初の画像」と評され、多くのメディアの関心を集めた。これらの画像は、権威あるアストロフィジカル・ジャーナル誌に掲載された（M87 (Akiyama 2019) と天の川の中心にあるいて座A (Akiyama 2022) ）。下のバーは、色相と「輝度温度」と呼ばれるものをリンクしている：

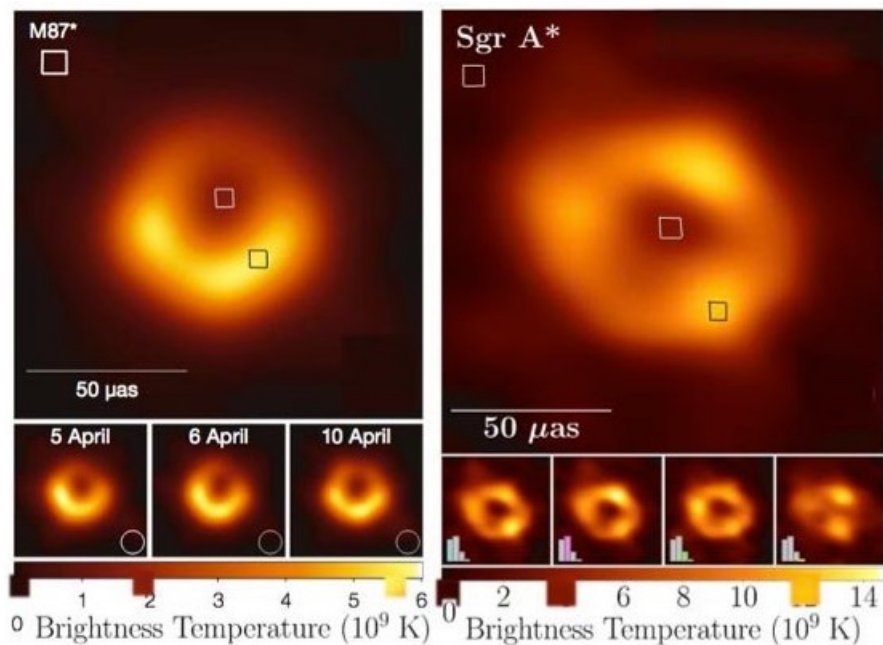


図7.1 - M87といて座A天体の 画像

図7.1の左側、銀河M87の中心にある天体の最初の画像は1999年に発表され、最低光度18億度、最高温度57億度で、その比は3に近い。その3年後の2022年、右の2つ目の画像が発表され、最低温度は40億度、最高温度は120億度で、これも比率は3に近い。この2つの天体は質量が大きく異なり、1つ目の質量は2つ目の質量の1,625倍である。このような状況で、どちらの天体でも、前景の高温ガスの雲が、最高温度と最低温度の比がどちらも3に近いという特徴を持つのは不思議に思える。もし第3の天体の画像から同じような観測結果が得られたとしたら、これらの天体の本質を疑うのが賢明だろう。

銀河の中心に位置する超巨大天体の最初の画像は、巨大ブラックホールに関連しており、中心部が完全に黒くないのは、ブラックホールの周りを回る高温ガスの円盤から発せられる光によるものと思われる。しかし、後に述べるように、中性子星は2つのシナリオの下で臨界に達することができる：

- 超大質量星が超新星になる前に突然鉄の核に崩壊すること。
- 連星系では、未臨界中性子星は「恒星風」を通して伴星から放出されるガスを吸収することによってゆっくりと質量を蓄積する。中性子星がさらに変質する臨界質量は、中性子星内部の物質の状態方程式に依存し、変化しうる。典型的には、現在のモデルでは、さらなる変容に必要な臨界質量は太陽質量のおよそ2~3倍の範囲であり、トルマン-オッペンハイマー-ボルコフ限界に近いと見積もられている。

このようなモデルの特殊性は、大質量天体のコロナと中心部（最高温度と最低温度）の明るさの温度比が3でなければならないことである。後で示すように、より首尾一貫した別の解釈は、これらの天体の中心部が暗くなるのは、重力赤方偏移の効果によるもので、地平線付近では時間が希釈されるか遅くなる。

これは、巨大な物体がその周りの時空を曲げ、巨大な物体だけでなく光の軌道にも影響を与えるためである。光子がこのような物体の近くを通過すると、時空の湾曲のためにその進路が曲げられる。しかし、光子の進路が変わるだけではありません。巨大な物体から遠ざかるにつれて、光子は強い重力場から逃れるためにエネルギーを失います。このエネルギーの損失により、光子の周波数は減少し、波長は光スペクトルの赤方偏移として知られる赤方偏移に向かう。

重力赤方偏移によって光子が失うエネルギーを計算するためには、光子のエネルギーがその周波数に直接関係していることを理解することが不可欠である。 $f$ 式  $E = hf$  ここで  $h$  はプランク定数である。



ある周波数で放出され  $f_e$  で放出され、重力赤方偏移のため  $f_r$  重力による赤方偏移のため、光子が失うエネルギーは、初期エネルギーと最終エネルギーの差として表すことができる：

$$\Delta E = h(f_e - f_r)$$

周波数と波長の関係  $f = \frac{c}{\lambda}$  ここで  $c$  は光速であるから、この式は波長で書き直すことができる：

$$\Delta E = hc \left( \frac{1}{\lambda_r} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

そして、重力赤方偏移の定義を使って  $z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}$  の式を得るために並べ替えることができる。  $z$  :

$$\Delta E = hc \left( \frac{1}{\lambda_e(1+z)} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda_e} \left( \frac{z}{1+z} \right)$$

この式は、重力赤方偏移によって光子が失うエネルギーが、それが放出された波長と重力赤方偏移の値に依存することを示している。  $z$  負の符号はエネルギーの損失を示す。

このエネルギーの損失は、単に見かけ上のものだけではない。例えば、宇宙マイクロ波背景放射は、最も大きな重力赤方偏移を受けた放射である。  $z$  これは、約3ケルビン (-270°C) という非常に低い温度とエネルギーに相当し、元のエネルギーをはるかに下回る (図3.10参照)。

また、超巨大天体の近くで観測される非常に微細でコリメートされたジェットは、重力の影響下で天体の崩壊に対抗する強力な磁場が存在することを示し、その磁場は強烈な対抗的磁気圧力を発揮することも重要である。これらの天体は、最大質量の中性子星と同様、未臨界状態であり、その結果、重力赤方偏移の影響は3に限られる。このことは、これらの天体が大質量の未臨界天体である可能性を示唆している。

科学の世界では、観測結果が理論と一致しない場合、通常は理論に疑問が呈される。しかし、『アストロフィジカル・ジャーナル』誌に掲載されたこのごく最近の論文 (Medeiros 2023) では、研究者たちが観測結果を修正し、ブラックホール・モデルに合致させた。図7.2に示すように、彼らはPRIMOソフトウェアを使って、質量、角運動量など様々なパラメータを操作してブラックホールの合成画像を作成し、観測データと最もよく一致するものを選んだ。

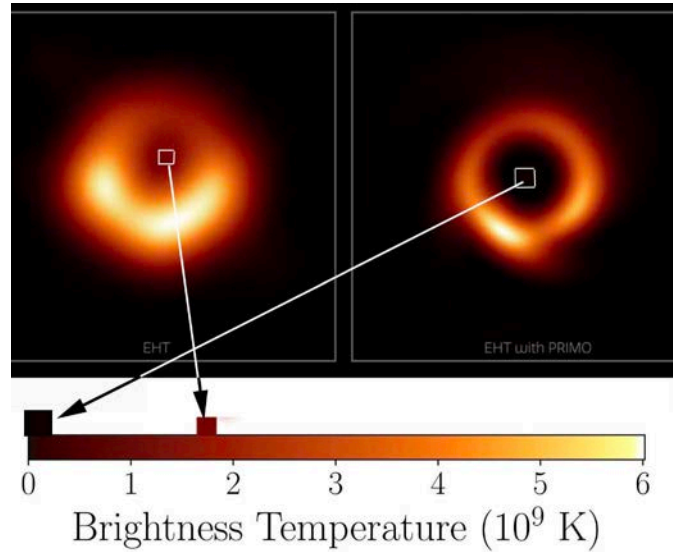


図7.2 - PRIMOによって処理されたM87ブラックホールの合成画像。

その結果、理論は確認されたが、研究の科学的厳密性と客観性については疑問が呈された。

## 7.2 現象の別解釈

別の解釈としては、中心から周辺へのこの色の変化は、重力の赤方偏移によるものであるとす。  $z = 2$  のファクターだけ波長が長くなる。  $1 + z = 3$ 。このような天体について何が言えるだろうか？

### 7.2.1 物理的・幾何学的臨界の比較

セクション5.1では、アインシュタイン方程式のシュヴァルツシルト解を調べ、密度一定の流体に対するシュヴァルツシルト外側計量と対応する内側計量に注目した  $\rho_0$ 。これらの解は、水星の近日点の前進や重力レンズ現象（図3.4）などの現象によって確認された。カール・シュヴァルツシルトは、これら2つの測度を支配する条件が物理的な現実と矛盾しないことを確認しようとした。

星の密度が一定のシナリオでは  $\rho_0$  が一定である場合、特徴的な半径  $\hat{r}$  が定義できる。実際、シュヴァルツシルトが1916年2月の2番目の論文（Schwarzschild 1916a）で発表した内部測度を考えてみよう：

$$ds^2 = \left( \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

シュヴァルツシルトは光の速度を  $c$  を1とみなした。したがって  $\frac{3}{\kappa\rho_0}$  は次のように書くべきである。  $\frac{3c^2}{\kappa\rho_0}$ 。次に、K.シュヴァルツシルトは定数  $\kappa$  を定義した。  $8\pi k^2$  「ここで  $k^2$  はガウスの重力定数である。  $\hat{r}^2$  に等しい。

$\frac{3}{\kappa\rho_0}$ であり、これはFlamm面の子午線の一部を形成する円の半径でもある((Oppenheimer and Snyder 1939))。したがって、先ほどの式は次のようになる：

$$ds^2 = \left( \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \hat{r}^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

次に、K.シュヴァルツシルトは、球体内部の点を特定するために角度  $\chi$  を使って球内の点の位置を決めると、彼は変数  $r$  変数  $r = \hat{r}\sin\chi$  が現代の計量法の形である。Tolmanは1934年に次のような正確な声明を出している ((Tolman 1934) )：

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right]^2 c^2 dt^2$$

ここで  $r_n$  は恒星の半径であり  $\hat{r}$  は恒星の密度の関数としての恒星定数である。 $\rho_0$ 。これは、メトリックの項の順序を、署名 (− − +) ただし、それぞれの項の符号はそのままである。恒星の内部に定常観測者 ( $dr = d\theta = d\phi = 0$ ) を考える。メトリックは：

$$ds = cd\tau = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right] c dt = f(r) dt$$

ここで  $\tau$  は恒星内部の定常観測者によって観測された固有時刻であり  $f(r)$  は時間因子である。

5.1節で見たように、星の中心で時間因子がゼロになると、幾何学的臨界が現れる前に物理的臨界に達する。 $\hat{r}$  に達する：

$$r_n = R_{\text{cr}\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}}$$

## 7.2.2 物理臨界に近い重力赤方偏移

シュヴァルツシルトの解はその後、トルマン (Tolman 1934)、オッペンハイマー (Oppenheimer and Snyder 1939) ら (Adler, Bazin, and Schiffer 1975) によって別の形で取り上げられ、トルマン-オッペンハイマー-ボルコフ (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) 方程式として知られる状態方程式が微分形式で提示されるに至った：

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2} \left( \frac{4\pi G}{c^4} p r^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}$$

カール・シュヴァルツシルトは1916年2月に発表した2番目の論文(Schwarzschild 1916a)で、一定の密度を持つ非圧縮性流体で満たされた球体内部の幾何学的形状について次のように記述している。  $\rho_0$ :

$$f_2 = \frac{3}{x\rho_0} \sin^2 \chi, \quad f_4 = \left( \frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right)^2, \quad f_1 f_2 f_4 = 1. \quad (29)$$

$$\longrightarrow \rho_0 + p = \rho_0 \frac{2 \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left( \frac{x\rho_0}{3} \right)^{-3/2} \left[ \frac{9}{4} \cos \chi_a \left( \chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi \right) - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \right]. \quad (31)$$

図7.3 - カール・シュヴァルツシルトが1916年に得た圧力法則

この式では、光速は常に単位値に調整される。その結果、この式は次の式と等価になる：

$$p = \rho_0 c^2 \left( \frac{\cos \chi - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \right)$$

そして、セクション7.2.1で見たように、K.

Schwarzschildは、次のような単純な変数の変更によって変数  $r$  を次のような単純な変数の変更によって変更する：

$$r = \hat{r} \sin \chi$$

の場合、星の表面で圧力はゼロになる。  $\chi = \chi_a$  で与えられ、半径は：

$$r_a = \hat{r} \sin \chi_a$$

星の中心は  $\chi = 0$  に相当するので、圧力は：

$$p = \rho_0 c^2 \left( \frac{1 - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - 1} \right)$$

このため、この半径には最大限度がある。  $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$  を意味する：

$$r_a = R_{\text{cr}\phi} = \hat{r} \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428\hat{r}$$

しかし、物理的臨界に相当する質量を考えるならば：

$$M_{\text{cr}\phi} = \frac{4}{3} \pi \hat{r}^3 \rho_0$$

と幾何学的臨界に対応するものである：

$$M_{cr\gamma} = \frac{4}{3}\pi r_a^3 \rho_0$$

以下の関係が得られる：

$$M_{cr\phi} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{3}{2}} M_{cr\gamma} = 8.838 M_{cr\gamma} = 2.5 M_{solar}$$

この値は、我々が利用可能な観測から直接推論することができたいくつかの中性子星の質量と一致し、ソーン、ホイーラー、ミスナーの著書（(Thorne, Wheeler, and Misner 1973)の611ページ）では、図7.4に示すように、圧力が無限大に飛び去る臨界質量として見積もられている：

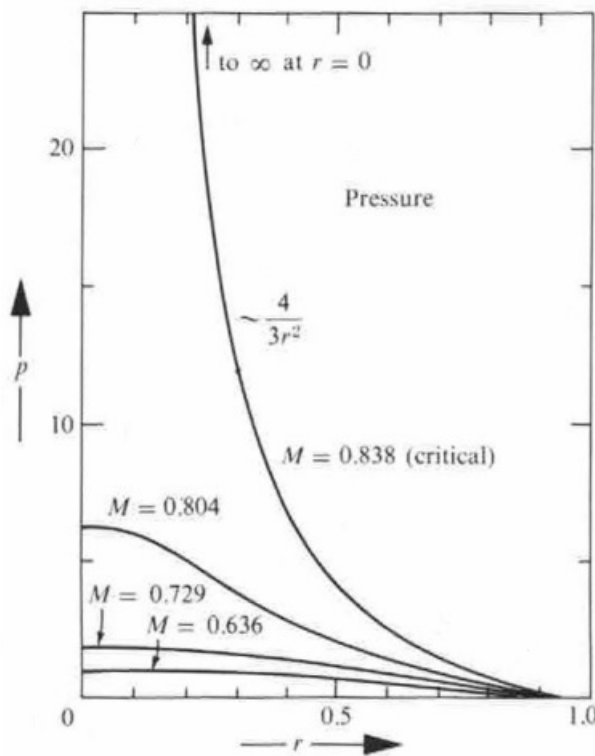


図7.4 - 密度一定の中性子星内部の圧力変化

もちろん、M87や天の川の中心にある天体の画像に匹敵するような中性子星の画像は決して得られない。そこで、重力赤方偏移効果を計算してみよう。z + 1(この物理的臨界に近い大質量天体に対応する。この効果は、天体の表面から遠方の観測者に向かって放射状に放出される光に影響を与え、観測者は波長を伸ばした(赤方偏移した)光を知覚することになる。 $\lambda_r$ 波長(赤方偏移)。これは次式で与えられる：

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_a}}}$$

しかし、中心部では、幾何学的臨界半径はシュヴァルツシルト半径で定義され、それは：

$$R_s = \frac{2GM_{\text{cr}}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \left( \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \right) = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r_a^3 = \frac{r_a^3}{\hat{r}^2}$$

つまり、重力赤方偏移は：

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_a^2}{\hat{r}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_a c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3$$

これはまさに、M87と天の川銀河の中心に位置するブラックホールの最初の2つの画像から推測された最高温度と最低温度の比から導かれた値である。つまり、これらの超巨大天体の画像もまた、その中心の圧力（単位体積あたりのエネルギー密度として定義される）が無限か、少なくとも極めて高い、未臨界の存在に対応している可能性がある。

### 7.2.3 一定密度プラズマにおける光速と圧力の変化

ここで、密度が一定と仮定された流体（水素プラズマ）を考えてみよう。温度3000°以下の温度では、内部の圧力は次式で与えられる：

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3}$$

ここで

$v$ はプラズマを構成する粒子の平均熱攪拌速度である。したがって、「もし圧力が無限大に向かうなら

$p$ が無限大に向かうならば、この速度も無限大に向かうはずである。これは、特殊相対性理論の中心的な原理である「因果性の原理」に矛盾する。 $v >$

$c$  [(ソーン、ホイーラー、ミスナー 1973))、物理的収差をもたらすことになる。

それにもかかわらず、時空のこの領域では、プラズマ内の圧力が放射状になる：

$$p_r = \frac{\rho_0 c^2}{3}$$

密度を一定に保ったまま放射圧を増加させることを想定した場合、これは媒質中の光速の変化を考慮することによってのみ達成できる (シュヴァルツシルト1916a)：

Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3 \cos \chi_u - \cos \chi_s}, \quad (44)$$

図7.5 - 密度一定の球面における光速の変化

つまり、彼が論文で指摘したように、光速の増加は圧力の増加に従う。この圧力が上昇し、光速の値も上昇するとどうなるのか？端的に言えば、カール・シュヴァルツシルト

(Schwarzschild 1916a)の433ページ) から明らかのように、この2つの量は、次のような場合に無限大になる。 $\cos\chi_a = \frac{1}{3}$ に対応する  $r = R_{\text{cr}\phi}$  (44) に対応して無限大になることは、7.2.2節で見たとおりである。

カール・シュヴァルツシルトの研究から、これらの超大質量未臨界天体の安定性は、幾何学的臨界のかなり前に起こる物理的臨界による重力崩壊が、その中心から光速の2乗に比例する非常に高い放射圧によって一定の密度で補償されることに起因していると推測できる。

### 7.3 結論

我々は、銀河の中心に位置する超巨大天体の画像を分析した。この画像は、*アストロフィジカル・ジャーナル誌*に巨大ブラックホールの最初の画像として発表されたものである。我々の詳細な研究によって、これらの天体の別の解釈を提案する。それは、最高温度と最低温度の比が3に近い、未臨界の超巨大天体に相当する可能性である。この観測は、1916年2月にシュヴァルツシルトが2番目の論文で発表した内部幾何学的解法によって示唆された、物理的臨界に近づきつつある中性子星に潜在的に特徴的な重力赤方偏移効果とよく一致している。この解法は、戦後のほとんどの宇宙論者にはほとんど知られておらず、1999年まで英語に翻訳されていなかったが、これらの現象を観測するためのユニークな視点を提供している。これらの天体内の圧力、光速、時間因子などの側面を調べることによって、銀河の中心にある複雑な天体物理学的現象についての既存の説明を充実させることを目的としている。これには、幾何学的臨界のはるか前に起こる物理的臨界から生じる重力崩壊と、その中心から発生する一定の密度で光速の2乗に比例する極めて高い放射圧のバランスによって維持される銀河の安定性の探求も含まれる。カール・シュヴァルツシルトの100年前の研究は、確立された理論の中にもまだ解明すべき謎があることを思い出させてくれる。私たちが提起した疑問、特に時間因子の進化とその時間概念自体への重大な影響は極めて重要であり、さらなる研究が必要である。もし将来の観測で我々の仮説が確認されれば、特に同じような温度比を持つ第3の超巨大天体が発見されれば、現在の天体物理モデルの再評価を促すことになるだろう。結局のところ、宇宙はその広大さと複雑さにおいて、知識への飽くなき探求心を刺激し続けるのである。

## 8 チャレンジ&ディベート

### 8.1 モデルを伝え、受け入れる際に遭遇した課題

ヤヌス宇宙モデルの普及と検証の努力の中で、私たちは、特に科学出版の分野において、手ごわい難題に遭遇してきた。このセクションでは、これらの困難について詳しく説明し、国際的な出版システムに内在する複雑さと偏りを浮き彫りにすることを目的とする。

我々が遭遇した最も大きな障害のひとつは、評判の高い学術誌における査読プロセスであった。現在存在する査読システムは、しばしば硬直的で、新しいアイデア、特に物理学と宇宙論の確立された基礎に挑戦するようなアイデアには無関心であることがわかった。『*Physical Review D*』、『*Modern Physics Letters A*』、『*Astrophysical Journal*』、『*Astrophysics and Space Science*』などの一流ジャーナルで出版しようと試みたが、抵抗と懐疑にあった。このような抵抗は、我々の科学的厳密さの欠如からではなく、むしろ現状を維持しようとする科学界の一般的傾向からきているようだ。

私たちが出版を試みたところ、私たちが直面している課題を物語るような反応が返ってきた。例えば、『*アストロフィジカル・ジャーナル*』誌の編集者である

イーサン・T・ヴィシュニアック

博士からの手紙は、同誌の出版という文脈において、私たちの研究が型破りであることを強調している：

親愛なるゼジュリ博士、

私は、あなたが最近『*アストロフィジカル・ジャーナル*』誌に投稿された上記の原稿について、あなたに手紙を書いています。

私は貴殿の原稿を拝見し、本誌への掲載が適切であると判断いたしました。当ジャーナルは、天文観測に関する新しい結果や、天体物理学的なシステムに直接適用された理論を紹介する原稿を専門としています。残念ながら、二元相対性理論の基本的な側面を扱ったあなたの原稿の主題は、当ジャーナルの主題領域から大きく外れています。従いまして、残念ながら貴殿の原稿を掲載することはできません。とはいえ、今後のご研究をお祈り申し上げます。

この論文のテーマは、重力の物理学を専門とするジャーナルの範囲に十分に含まれるものです。一般的な方針として、私は特定の雑誌を推薦しません。ただ、この原稿が研究論文としてうまく整理されていないことだけは指摘しておく。論文の大部分は過去の研究をレビューしたものであり、新しい結果とその意義はわかりにくい。例えば、アブストラクトにはそのどちらにも触れていない。

謝辞

イーサン・T・ヴィシュニアック

AAS編集長

ジョンズ・ホプキンス大学



つまり、私たちの原稿は「二元的相対性理論」（バイメトリックの意）の基本的な側面を扱ったものではあったが、天体物理学系に応用される新しい天文学的結果や理論に焦点を当てたこのジャーナルの内容には合致しなかったということである。この丁寧で有益な回答は、科学研究の確立された枠組みに収まる研究を好む一般的な傾向を反映している。対照的に、*Physical Review D*

誌の回答はもっと簡潔で、しばしば "Not suitable

"というフレーズに要約される。この簡潔な回答は、理論物理学や宇宙論における既存のパラダイムから大きく逸脱したアイデアを受け入れてもらうことの難しさを浮き彫りにしている。

このような一流ジャーナルとのやり取りは、新しい科学理論を伝える上での重要な課題を浮き彫りにしている。つまり、研究の完全性と新規性を保ちつつ、革新的な研究を科学ジャーナルの確立された期待や基準に合わせる必要があるということだ。

加えて、主要な出版前リポジトリである *arXiv* の

最近の方針変更により、さらに複雑なレイヤーが導入された。主要な査読付きジャーナルでの出版に先行して投稿を行うという新しい要件は、特に、従来のフォーラムで最初の抵抗に遭遇する可能性のある先駆的な研究にとっては、逆説的で直感に反するように思えるかもしれません。この方針の変更は、予備的な結果を迅速に共有し、科学コミュニティとより広く交流する我々の能力をかなり妨げている。

このような困難にもかかわらず、希望と評価の光が見えてきた。ロシアの *Gravitation and Cosmology* 誌（プレアデス出版）とドイツの *Astronomische Nachrichten* 誌の

2誌が、私たちの研究に真剣に取り組む姿勢を示してくれたのだ。私たちが期待したほど広範囲ではないにせよ、私たちの研究に対する彼らのコミットメントは、JCMがより広く受け入れられ理解されるための前向きな一歩である。

以下のセクションでは、これらのジャーナルからの反応と批判を分析し、建設的なコメントと、革新的な科学理論に対応するために査読プロセスを改善できる分野の両方を強調する。

## 8.2 提出された批判と回答についての議論

ヤヌス宇宙論モデルの出版に向けた努力の過程で、私たちはいくつかの大きな困難に直面した。そのひとつが、*Gravitation and Cosmology* 誌による長い査読プロセスであった。8ヶ月に及ぶ粘り強いフォローアップの後、ジャーナルはようやく私たちの研究の質を評価してくれる査読者を見つけた。しかし、その結果は私たちが期待していたようなものではなかった。以下は、私たちが直面した課題の本質を凝縮した通信である。

### 重力と宇宙論からの返信

ゼイリ博士へ、

何度も試みた結果、あなたの論文GC23-

019「双極子反発器の性質」についてのレフェリー・レポートを受け取りました。遺憾ながら、この報告書には多くの重大な批判的指摘が含まれています。この報告書を考慮し、私たちはあなたの論文を私たちのジャーナルに掲載することはできません。

敬具

Dr. Sergey V. ボロホフ  
重力と宇宙論編集委員会

## レフェリーレポート

著者らは、いわゆる「双極子反発」の現象を「ヤヌス宇宙論モデル」の枠組みで説明しようとしているが、これは実際には一種のバイメトリック理論である。このモデル自体、負の質量を持つ粒子や負のエネルギーを持つ光子など、自然界に存在する可能性が極めて低い存在を含んでいる。そのためには、反物質の粒子が同じ質量の物質粒子と同じ重力を受けることが最近の実験で示されたことを思い出すのが適切である。このことは、著者の否定的質量の仮定をより疑わしいものになっている。さらに、問題の理論がたった一つの現象を説明するために持ち出され、他の観測された系に何の影響も与えないのは奇妙に見える。この論文の弱点は、定性的な議論に終始していることで、観測された反発器のパラメーターを考慮した具体的な計算がなされていない。

## このレビューへの回答

親愛なるセルゲイ・V. ボロホフです、

我々の原稿 "Nature of the Dipole Repeller

"についてのレフェリー・レポートをお送りいただき、ありがとうございました。査読に費やした時間と労力に感謝いたします。しかしながら、私たちの研究の核となる概念について誤解があるようですので、それを明らかにしたいと思います。

1. 負の質量と反物質について：反物質に関する最近の実験に照らして、負の質量に関するレフェリーの懸念は、見落とされているかもしれない我々のモデルの基本的な側面を浮き彫りにしている。我々の論文の基礎となっているヤヌス宇宙モデルは、2つの異なるタイプの反物質の存在を予測している。C型反物質は、実験室で作られたディラックの反物質に似ており、重力に対して通常物質と同様に反応する。対照的に、タイプPTの反物質は、ファインマンの負の質量の概念に対応し、ダイポール・リペラーのような宇宙の空洞の中心に存在すると提唱されている。このタイプは反重力効果を発揮するが、これは我々のモデルの重要な要素であり、原稿の10ページに詳しく述べられている。

2. 観測による確認とモデルの応用：我々のモデルの有効性は、双極子反発器を説明するだけにとどまらない。レフェリーが我々の論文で見逃したかもしれない、様々な天文現象に対する洞察を提供している：

銀河の閉じ込めと安定性：負の質量で満たされたラクナリー・スペースによって説明される。

重力レンズ効果：銀河の周りの重力レンズ現象を説明する。

普遍的な構造：

私たちの理論は、シャボン玉のような負の質量を持つクラスターで満たされた宇宙のラクナ構造を提案している。

銀河の回転曲線と重力異常：自転曲線の平坦化と銀河の境界における星の予期せぬ加速を説明する。

初期の銀河形成：ジェイムズ・ウェッブ望遠鏡による最近の観測に裏付けられた我々のモデルは、宇宙の最初の1億年間に銀河が同時に形成されたことを示唆している。

高赤方偏移銀河：

負の質量を持つ銀河団の重力レンズ効果によって、遠方銀河（赤方偏移 $>7$ ）の輝度が低下していることを研究しています。

局所相対論的検証：水星の近日点歳差運動や太陽による光の偏移などの現象とモデルが一致する。

超新星観測：正質量集団と負質量集団の非対称性は、Ia型超新星の観測と相関する。

3. モデルの適用範囲に関する誤解：最後に、我々の理論が単一の現象を説明するためにのみ用いられているという主張は、その適用範囲の広さを見落としている。我々のモデルは、渦巻き銀河の構造、負エネルギー光子による宇宙反物質の不可視化、宇宙の不可視成分の性質などを説明している。

私たちは、この追加情報と明確化が、レフェリーレポートで指摘された懸念に対処する一助になると信じている。必要であれば、さらなる詳細や修正を提供する用意がある。

私たちの回答を考慮していただきありがとうございます。

敬具

残念なことに、査読者の懸念にひとつひとつ丁寧に回答した後、それ以上の連絡はなかった。この出版社と査読者は対話から手を引いたようであり、学術出版という既成の枠組みの中で新しい科学理論を推進する際に直面する課題や、時には乗り越えられないと思われる障壁を物語っている。

[天文ナハリヒテン』誌の批評的分析に戻る](#)

*Astronomische*

*Nachrichten* との交流も困難をもたらしたが、宇宙論における新しいアイデアの受容における根本的な問題をより深く探求することができた。2ヶ月の探索の末に見つけた唯一の査読者は、対話を開始し、蔓延する問題を浮き彫りにした。それは、著名な物理学者によって確立された仮定への依存であり、その仮定は、ほとんどの宇宙論者が活動するパラダイムを形成し、強固なものにしている。

我々の研究の目的は、2つの主要な仮定に基づき、シュヴァルツシルト

外延解の新しい幾何学的・宇宙論的解釈を提供することである：

- **等方性**： $SO(3)$ の作用下での不変性、すなわち3次元回転と空間平行移動の群。
- **定常性**：時間座標に対する距離の項の独立性、すなわち時間平行移動による不変性。

シュヴァルツシルトが最初に説明したような一般解は、しばしば十分な根拠もなく提示される。Tolmanは1934年(Tolman 1934))に、最も一般的な形は、以下の十字項を含むと指摘した。 $drdt$ 。しかし、この項はその後便宜上無視されるようになった。シュヴァルツシルトを含むこのアプローチは、第5章で詳しく論じるように、多くの研究者によって踏襲されてきた。

査読者は、このような交差項が存在しないのは、仮定された対称性の仮定に由来すると指摘した。我々は、本質的な対称性の仮定を無視していると非難されている。 $t$ を $-t$ (Waldの著書(Wald 1984)などで指摘されているように)。その結果 $drdt$ に変更すると、この不変条件を満たさないことになる。 $t$ を $-t$ に変えると交差項の符号が変わるからである。しかし、時間変数に関するこの対称性の仮定にはどのような物理的根拠があるのだろうか？それはない。シュヴァルツシルトも、彼の後継者たちも、この仮定には言及していない。

実際、その推論（と呼べるかどうかは別として）は、クロス項が存在しない「現代形式」を中心とした「ブラックホールモデル」に基づいている(42)。これは純粋に数学的な仮説であり、目に見える観測的現実ではなく、ブラックホールの存在に対する一般的な信念に沿うように設計されている。したがって、宇宙論者にとっては、この仮説は「自然」に思えるかもしれない。

*Astronomische Nachrichten* での

経験は、確立されたパラダイムがいかに宇宙論における革新的なアイデアの受容に影響を与えうるかを示しており、新しい理論的發展に照らして、オープンマインドで基本的な仮定を再評価する必要性を強調している。

## 9 結論と考察

観測データと最も矛盾のない最も単純な理論を支持するオッカムの剃刀の原理を考慮すると、ヤヌスモデルが標準モデルを凌駕すると結論付けるのは妥当である。ヤヌス宇宙論モデルは、多くの天体物理学的現象を説明する首尾一貫したアプローチを提供すると同時に、利用可能な観測データの明確な解釈を提供する。一方、標準モデルは、観測データとの間に矛盾があり、その矛盾を回避するためにその場しのぎの構成が必要となる。

実際、ヤヌス・モデルは、宇宙膨張の加速、銀河の閉じ込め、顕著な重力レンズ効果、宇宙マイクロ波背景(CMB)のほぼ完全な均一性など、通常ダークマターやダークエネルギーに起因するとされる現象に対する代替案を提案するだけにとどまらない。このモデルは、宇宙の目に見えない構成要素の性質と正体を詳細に解明している。このモデルは、原始反物質が観測されないというパラドックスを解決し、ダイポール・リペラーを負の質量の集合体と見なして

説明する。この視点は、光学観測装置で負の質量を検出することが困難な理由を説明する一方で、宇宙の大規模構造を確立する上でヤヌス宇宙モデルの信頼性を補強するものである。また、重力赤方偏移が7を超える天体の大きさが小さいことを説明し、ダイポール・リペラーを顕著な例として、負の質量を持つコングロマリットの存在などの具体的な観測的検証を規定することで、反証可能性の原則を堅持している。さらに、弱い重力レンズ効果の異なる解釈に基づく、別の宇宙マッピングを提案している。

さらに、ヤヌス・モデルは、最新の観測データ、特にジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡から得られたデータにおいて、宇宙の年齢の最初の1億年間に現在の形の銀河が形成されたことを予測することで、確証を得ている。加えて、その力学群の構造はその幾何学にCPT対称性を与え、2017年になされた特定の予測は2023年9月に確認された。この予測は、実験室で合成され、正のエネルギーを持つ光子を放出するC対称（電荷対称）な反物質に関するもので、観測によれば、通常物質と同様に下向きの重力引力を受ける。

また、負のエネルギーと質量の状態を統合することが、重力の定量化にとって極めて重要であることを示唆しており、量子力学における研究の有望な道を開くものでもある。したがって、ヤヌスのモデルは自然界に完全に適合しており、大きな矛盾はない。

本書を通して、我々はこのモデルの複雑さを掘り下げ、そのニュアンスと、長い間宇宙学者や物理学者を困惑させてきた謎に光を当てる可能性を解明してきた。

高度な数学、理論物理学、宇宙論の分野を通してのこの旅は、従来の視点に挑戦し、現在のモデルが完全に解明するのに苦勞している現象に対して代替的な説明を提供するモデルの能力を実証している。提示される議論と分析は、読者の理解を深め、我々の科学

的知識の限界をさらに探求し、疑問を投げかける好奇心を刺激することを意図している。

理論物理学と宇宙論の限界は、1950年代以降、この分野がトポロジーを取り入れるのが遅れたことに起因していると私は考えている。連続的な変形によって保存される性質の研究であるトポロジーは、宇宙の構造とその複雑な構造を理解する新しい方法を提供できたはずだ。

結論として、本書が、一般相対性理論という確固たる理論的基礎に支えられたモデルへの包括的なガイドとしてだけでなく、宇宙論という未知の領域を果敢に探求しようとする新しい世代の思想家たちのインスピレーションや動機付けとなることを願っている。この本が、私たちの宇宙の複雑な美しさと、科学者として、そして人間として、私たちが突き動かしている理解への絶え間ない探求を、より深く理解するきっかけとなりますように。

ダイナミックで絶え間なく進化するコスモロジーの分野において、このモデルは、未踏の領域や新たな視点への道を照らす、必要不可欠な指針として浮かび上がる。この旅はまだ終わっていない。むしろ、さらなる探求と発見への継続的な呼びかけである。

## 参考文献

- アドラー、R、R.バザン、M.シファー、1975年。一般相対性理論入門.McGraw-Hill.
- Akiyama, K. et al. 2019."First M87 Event Horizon Telescope Results.I.超巨大ブラックホールの影".*The Astrophysical Journal*.
- 秋山和久ほか,  
2022。「いて座a\*事象地平望遠鏡の最初の成果。I.天の川の中心にある超巨大ブラックホールの影」.
- アンダーソン、E. K. 他、2023年。"反物質の運動に対する重力の影響の観測"*Nature*.
- バーグマン、V.、P. G.  
バーグマン、A.Einstein.1941."重力と電気の5次元表現について".*Theodore von Karman Anniversary Volume*, 212.
- Benoit-Lévy, A. and G. Chardin."Introducing the Dirac-Milne Universe".*Astronomy and Astrophysics* 537: A78.
- バーグマン、P. 1942.*相対性理論入門*.Prentice-Hall.
- バーグマン、P. Einstein.1938."カルーザの電気理論の一般化について".*Annals of Mathematics* 39: 683.
- Bondi, H. 1957."一般相対性理論における負の質量".*Reviews of Modern Physics* 29 (3).
- Bourbaki, N. 2006.*Eléments de Mathématique: Groupes Et Algèbres de Lie*.Springer.
- Boylan-Kolchin, Michael. 「ストレステスト。  
Λ高赤方偏移銀河候補によるCDM。"ネイチャー。
- Brennen, C. E.  
1995. キャビテーションとバブルダイナミクス.オックスフォード大学出版局.
- Chandrasekhar, S. 1983. ブラックホールの数理理論.クラレンドン・プレス.
- Chaskalovic, Joël."Gravitation Theory for Mathematical Modelling in Geomarketing".*Journal of Interdisciplinary Mathematics* 12 (3): 417.
- Cronin, J. W. 1964."CP対称性の破れの実験的発見".アメリカ物理学会.
- Damour, T. and Ian I.Kogan."Effective Lagrangians and Universality Classes of Nonlinear Bigravity".*Phys.Rev. D*.
- Debergh, N. et al."On Evidence for Negative Energies and Masses in the Dirac Equation Through a Unitary Time-Reversal Operator".

Dyson, F. W., A. S. Eddington, and C. Davidson. 1920. "A Determination of the Deflection of Light of the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 291-333.

Eddington, A. 1925. "ホワイトヘッドの公式とアインシュタインの公式との比較" *Nature*.

アインシュタイン、A. 1935年。"一般相対性理論における粒子問題". *Phys.Rev.* 48: 73.

El-Ad, H., T. Piran, and L. N. da Costa. 1997. 「Mon.Not.R. Astro.Soc.」

Farnes, J. S. 2017. "A Proposal for a Unifying Theory of Dark Energy and Dark Matter." *arXiv Physics.gen-Ph*.

フェレイラ、レオナルドら2022年。"パニック！ At the Disks: First Rest-Frame Optical Observations of Galaxy Structure at  $z>3$  with JWST in the SMACS0723 Field." *The Astrophysical Journal Letters*.

Flamm, L. 1916. "アインシュタインの重力理論への貢献"

Heald, G. 2020. "The Stronger Case for Gravitational Repulsion Between Matter and Antimatter". *Research Gate Publication*, no. 339339776.

Hoffman, Y. et al. "準線形近傍宇宙". *ネイチャー・アストロノミー*.

ホフマン、Y.、D.ポマレード、R.B.タリー、H.Courtois.2017."The Dipole Repeller." *Nature Astronomy* 1: 0036.

Hossenfelder, S. 2008. "A Bi-Metric Theory with Exchange Symmetry." *arXiv*.

Kaluza, Th. 1921. "物理学における統一問題について". *Sitzungsberichte Pruss.Acad. Sci.* 966.

Kerr, Roy P. 1963. "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics". *Physical Letters* 11: 237.

クライン、O. 1926. "量子論と5次元相対性理論". *Z.Phys.* 37: 895.

Koiran, P. 2021. "エディントン-フィンケルシュタイン計量における落下時間、アインシュタイン-ローゼン橋への応用". *Inter.Jr. Of Mod.Phys.D* 14.

Kruskal, M. D. 1960. "シュヴァルツシルト・メトリックの最大拡張". *Physical Review* 119 (5).

Kruskal, Martin D. 1960. "シュヴァルツシルト・メトリックの最大拡張". *Physical Review* 119: 1743-45.



Medeiros, L. et

al. 「EHTデータのためのアルゴリズム、主成分干渉モデリング (PRIMO) 。I. 模擬 EHT 観測データからの画像再構成".

Michelson, A. A. and E. W. Morley. 1887. "On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether." *American Journal of Science* 34: 333-45.

Morin, Bernard, and Jean-Pierre Petit. "Le Retournelement de La Sphère." HAL.

Morris, M., and K. S. Thorne. 1988. "Wormholes in Spacetime and Their Use for Interstellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity" *Am. J. Phys.* 56: 395.

Neiser, T. F. 2020. "ダークエネルギーのフェルミ縮退反ニュートリノ星モデル" *Advances in Astronomy* 2020: Article ID 8654307.

オッペンハイマー、J.R.、H.Snyder. 1939. "重力収縮の継続について" *Phys. Rev.* 56: 455-59.

Oppenheimer, J. R. and G. M. Volkoff. "On Massive Neutron Cores." *Physical Review* 55 (4): 374-81.

Palatini, A. 1919. "Deduzione Invariantiva Delle Equazioni Gravitazionali Dal Principio Di Hamilton" *Rend. Circ. Matem. Palermo* 43: 203-12." <https://doi.org/10.1007/BF03014670>.

Pavlovskii, A. I. 1994. "Magnetic Cumulation-a Memoir for Andrei Sakharov." *メガガウス磁場発生とパルス電力応用*, M. コーワン、R.B. 編著。B. Spielman, 9-22. New York: Nova Science Publishers.

Perlmutter, S. et al. 「の測定  $\Omega$  と  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae." *Astrophysical Journal* 517 (2).

Petit, Jean-Pierre . 1985. *Le Topologicon*. Belin 版。

Petit, Jean-Pierre. 「ミッシング・マス問題 *Il nuovo cimento*.

Petit, Jean-Pierre. "双子宇宙の宇宙論" *Astrophysics and Space Science* 226: 273-307.

Petit, Jean-Pierre. "The Janus Cosmological Model and the Fluctuations of the CMB." *Progress in Physics*.

Petit, Jean-Pierre, and G. D'Agostini

. 「バイメトリックモデル。負の質量がダークマターとダークエネルギーの両方を置き換える場合。観測データとの見事な一致。原始反物質の問題を解決する。" *フランス国立センターのデータベース*, 2021a.

Petit, Jean-Pierre, and G.

D'Agostini. "超新星 Ia の最近の観測によるヤヌス宇宙モデルの制約" *Astrophysics and Space Science*, 2021b.

Petit, Jean-Pierre, and G. D'Agostini."Cosmological Bimetric Model with Interacting Positive and Negative Masses and Two Differents of Light, in Agreement with the Observed Acceleration of the Universe."*Modern Physics Letters A* 29 (34).

Petit, Jean-Pierre, and G. D'Agostini."Negative Mass Hypothesis in Cosmology and the Nature of Dark Energy."*Astrophysics And Space Science* 354 (2014b): 611-15.

Petit, Jean-Pierre, and G. d'Agostini."Cosmological Bimetric Model with Interacting Positive and Negative Masses and Two Differents of Light, in Agreement with the Observed Acceleration of the Universe"*Modern Physics Letters A*.

プティ、ジャン＝ピエール、G. ダゴステイーニ、N.Debergh .2018."Evidence of Negative Energies and Masses in the Dirac Equation Through a Unitary Time-Reversal Operator"*J. Phys.Comm.* 2 (115012).

プティ、ジャン＝ピエール、G. ダゴステイーニ、N.Debergh.2019."Janus Cosmological Model (JCM) の物理的・数学的整合性".*プログレス・イン・フィジックス* 15.

ピラン、ツヴィ。2018."On Gravitational Repulsion." *arXiv*.  
<https://arxiv.org/abs/9706049>.

Riess, A. et al."Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope, Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution."*Astrophysical Journal* 607 (2).

Sakharov, A. D. 1967 ."宇宙のCP不変性の破れ、C非対称性、バリオン非対称性".*Pi'sma ZhÉTF* 5 (1): 32-35.

Sakharov, A. D. 1979."ZhETF Pis'ma."*JETP* 49: 594.

Sakharov, A. D. 1980."Cosmological Models of the Universe with Reversal of Time's Arrow."*Pi'sma ZhÉTF* 79 (3): 689-93.

Sakharov, A. D. 1982."Multisheet Models of the Universe."*Pi'sma ZhÉTF* 82 (3): 1233-40.

Schmidt, B. P. et al."The High- $z$  Supernova Search.Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae."*Astrophysical Journal* 507 (1).

Schwarzschild, K. 1916a."Über Das Gravitationsfeld Einer Kugel Aus Inkompressibler Flüssigkeit Nach Der Einsteinschen Theorie."*Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.

Schwarzschild, K. 1916b."Über Das Gravitationsfeld Eines Massenpunktes Nach Der Einsteinschen Theorie."*Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.

Souriau, J. M. 1964.*幾何学と相対性理論*.Hermann.

Souriau, J. M. 1997.力学系の構造、物理学のシンプレクティックな見方.Birkhäuser Verlag.

Souriau, Jean-Marie. 1965."Prolongements Du Champ de Schwarzschild."*Bulletin de La Société Mathématique de France* 93: 193-207.

Stoica, O. C. 2014."On Singular Semi-Riemannian Manifolds."*International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 11.

Thorne, K. S., J. A. Wheeler, and C. W. Misner.1973.重力。

Tolman, R. 1934.相対性理論、熱力学、宇宙論。Oxford at the Clarendon Press.

Tsamparlis, Michael."パラティーニ変分法について"*Journal of Mathematical Physics* 19 (3): 555-57.

Vuyk, V. 2018."A Fifth Force Vacuum Dipole Repeller, Needed to Create All Attraction Forces Even Around Black Holes in Quantum FFF Theory".研究門出版、第325995732号。

Wald, R. 1984.一般相対性理論。

ワインバーグ, S. 2000.場の量子論：第1巻基礎。第2巻現代の応用。第3巻超対称性第1-3巻。ケンブリッジ大学出版局。