ANNESSO 1 :
iL POLiEDRO Di DiO

La scienza, al giorno d'oggi é estremamante mediatizzata. Non appena si inventa un progetto, un'idea, bisogna subito associarle un termine che colpisca l'immaginazione popolare. Cinquant'anni fa, l'oggetto che si pensava potesse descrivere il destino di una stella a neutroni la cui massa, grazie agli apporti dovuti al vento stellare di una stella compagna, superasse il valore critico di 2,5 masse solari, si chiamava il **CORPO DI SCHWARZSCHILD** (*). Non molto commerciale come appellazione.
Il termine **COLLAPSAR** non ha avuto un miglior successo. Ma quando John Archibald Wheeler propose di chiamarlo "**BUCO NERO**", il successo fu immediato e planetario. Stessa cosa per la **TOE** (teoria del tutto = theory of everything) o la **TEORIA M** delle **SUPERCORDE**. In questo momento, i plutofisici moderni (dal greco plutos=costoso) inseguono il bosone di Higgs, già chiamato **LA PARTICELLA DI DIO**.

Per fare onore a questa moda imbecille e farvi sorridere un po', ecco il poliedro che ha una sola faccia ed un solo spigolo. Ricordiamoci che "edra" in greco significa faccia, quindi :

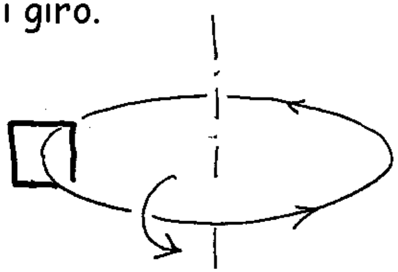
Ecco dunque il **MONOEDRO** o... "**POLIEDRO DI DIO**".

<u>*La Direzione.*</u>

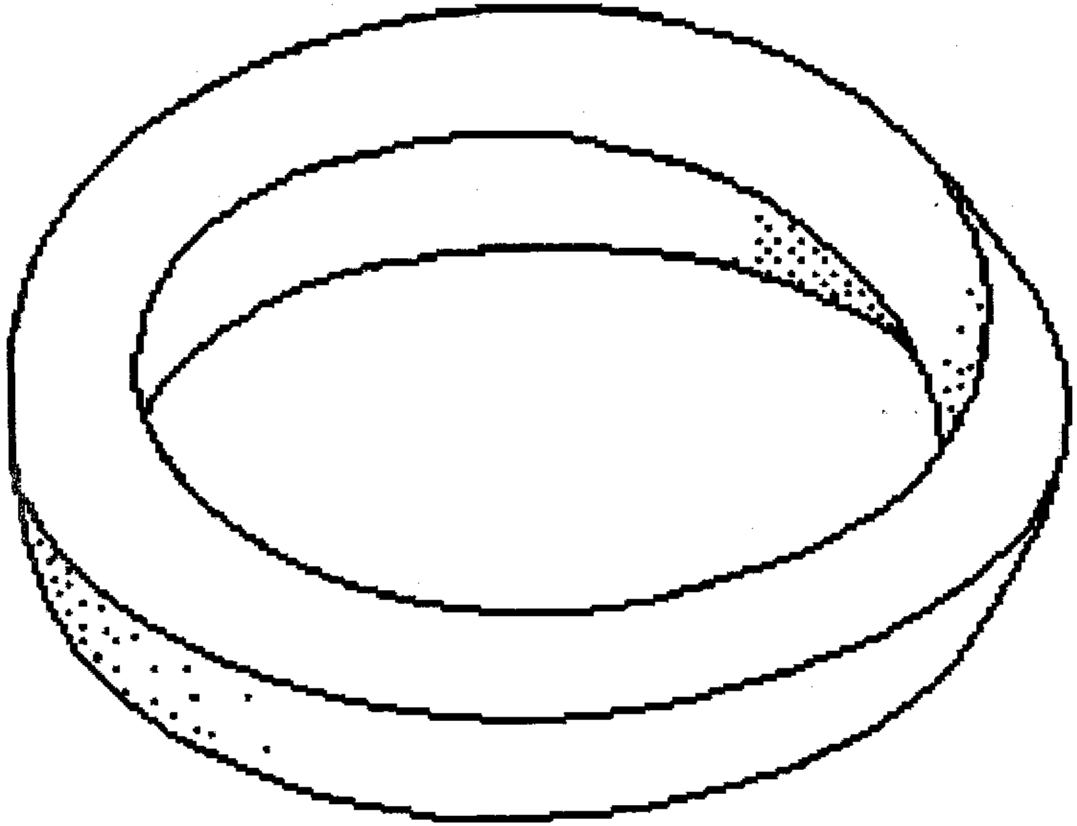
(*) Il modello del "buco nero" deriva da un "arrangiamento" di una soluzione dell'equazione di Einstein, dovuto a Schwarzschild (1917) riferendosi ad una regione **VUOTA** dell'universo. Ne parlermo in un prossimo album.

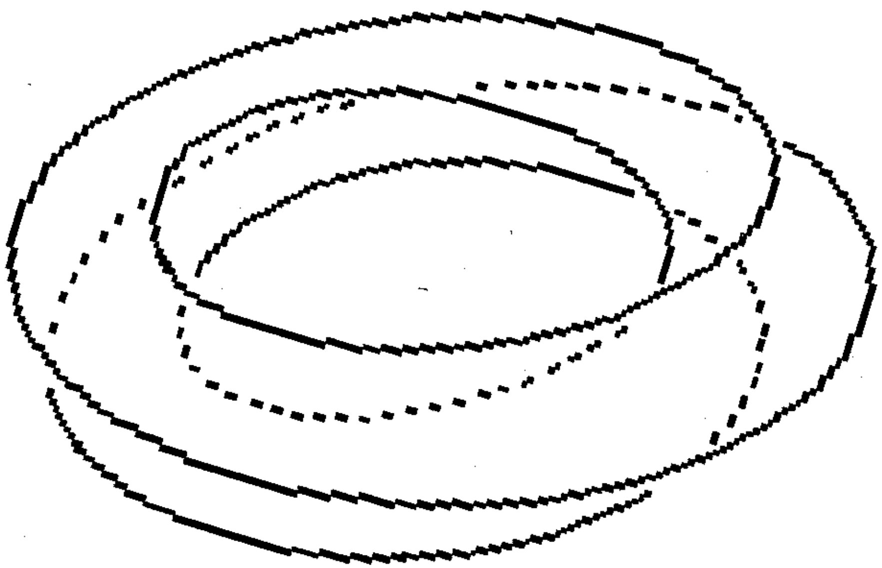
iL MONOEDRO

Si puo' ottenere facendo ruotare
un quadrato lungo un asse contenuto
nel suo stesso piano ed imponendogli
una rotazione di $\pi/2$ ad ogni giro.



.... o inspessendo un nastro di Möbius





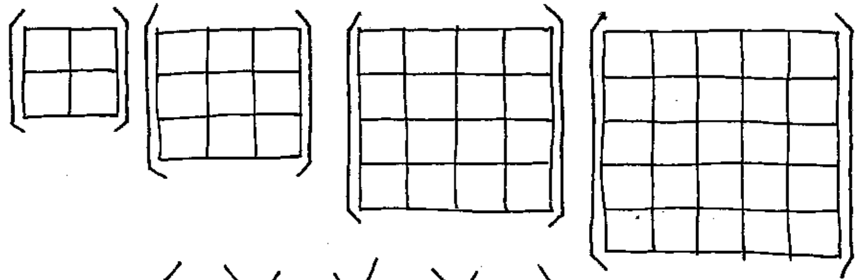
IL SUO UNICO SPIGOLO

ANNESSO 2
SPAZIO-TEMPO E GRUPPI

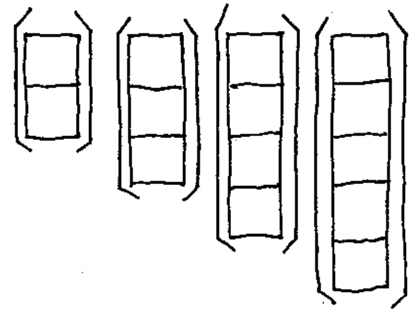
Nel 1850, Mikhail Valisevich Ostrogradsky a Bernard Riemann:

Il tempo passa, i progressi continui
della scienza ci mostrano come si sia spesso costretti
ad abbandonare le vecchie ed ingenue visioni del passato.
I fatti ci dimostrano che i matematici, specialmente nel campo della geometria,
hanno sempre avuto degli schemi logici in accordo con le esperienze dei fisici e le osservazioni degli astronomi,
grazie ai quali si sono potuti superare molti vecchi modelli in decrepitudine. Manipolando dei concetti nuovi
su di un semplice pezzo di carta, contribuiscono a costruire, senza rendersene conto, la realtà di domani.
Per arrivare a capire la **RELATIVITA' RISTRETTA** bisognerà quindi fare un atto di completo **ABBANDONO**
della vostra attuale concezione del mondo.
Siete pronti a seguirmi?

La lettera **M** indica una **MATRICE** quadrata (n righe e n colonne)

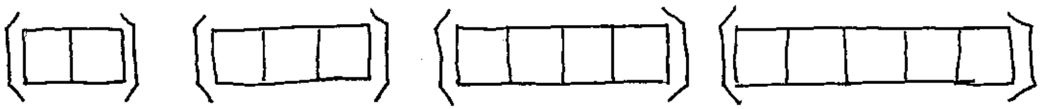


un **VETTORE COLONNA** é una matrice con n righe ed 1 colonna



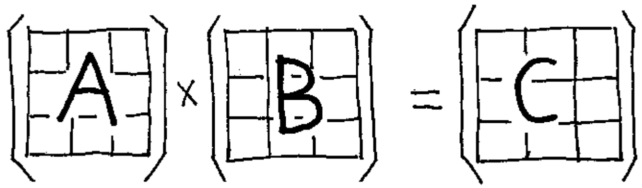
ecc. ...

un **VETTORE RIGA** é una matrice con 1 riga e n colonne :



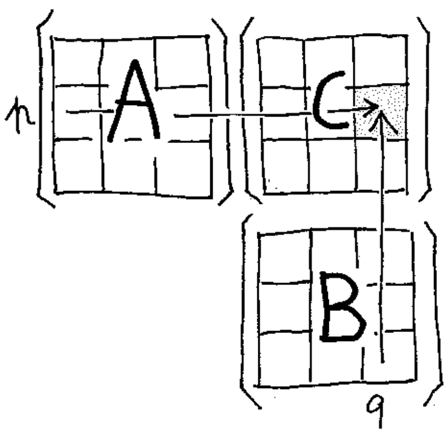
MOLTIPLICAZIONE DI DUE MATRICI QUADRATE della stessa dimensione

(che possiedono lo stesso numero di righe = lo stesso numero di colonne)



$C = A \times B$

si moltiplica "RIGHE - COLONNE"



metodo mnemonico: si dispongono le due matrici **A** e **B** del **PRODOTTO MATRICIALE** **A x B** come qui a fianco e si moltiplica uno ad uno i termini della riga p della matrice **A** con i termini della colonna q della matrice **B**, addizionandoli alla fine. Si ottiene cosi' il termine della matrice **C = A x B** situato all'incrocio della sua riga p con la sua colonna q.

FONDAMENTALE : QUESTO PRODOTTO <u>NON E'</u>, GENERALMENTE, COMMUTATIVO, cioé :

$$\boxed{A \times B \neq B \times A \quad !}$$

MATRICI IDENTITA' I

Ad ogni insieme di matrici quadrate a n righe ed n colonne (si chiamano di tipo n,n) si associano delle matrici identità, indicate on la lettera **I**

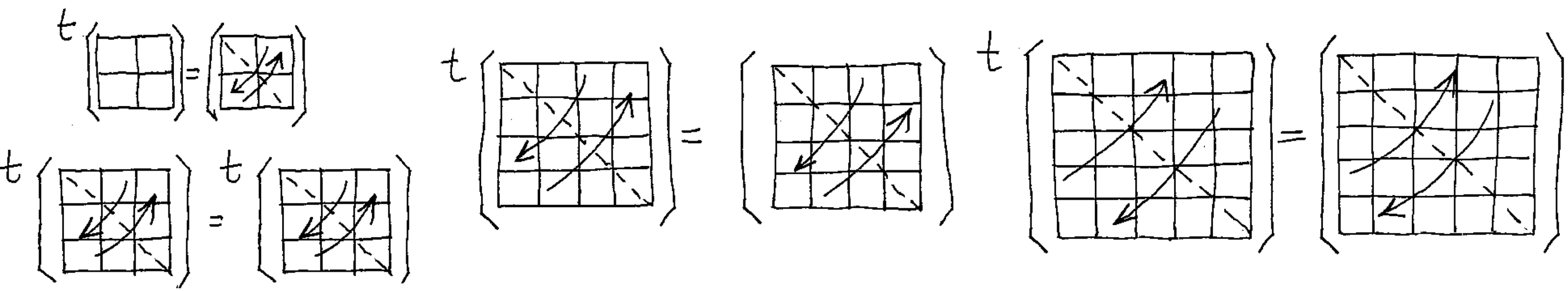
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{etc...}$$

si ottiene :

$$\boxed{A \times I = I \times A = A}$$

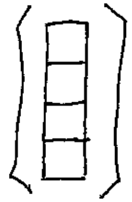
TRASPOSTA DI UNA MATRICE, INDICATA ${}^tA$

È la simmetrica del quadrato rispetto alla sua **DIAGONALE PRINCIPALE**

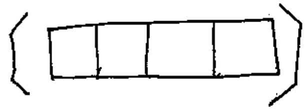


etc...

SI DEFINISCE la trasposta di un vettore, di una matrice colonna :

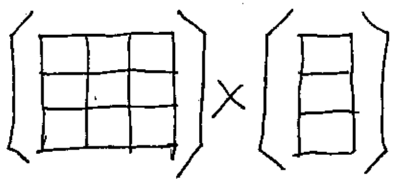
$X =$ 

uguale alla matrice riga corrispondente :

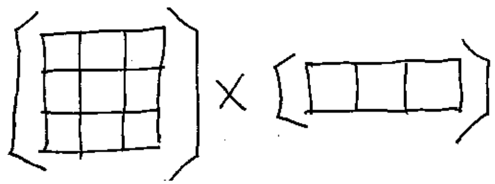
${}^{t}X =$ 

MOLTIPICAZIONE DI UNA MATRICE COLONNA O RIGA PER UNA MATRICE QUADRATA

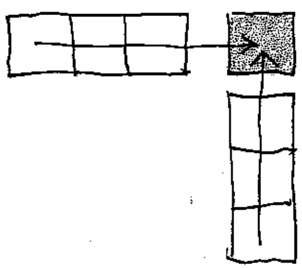
Per la matrice colonna, **MOLTIPLICAZIONE A SINISTRA** :

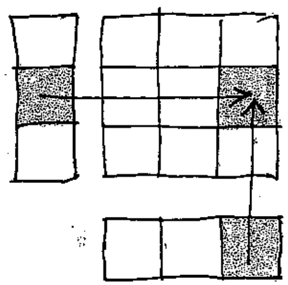
$A \times X =$ 

Per la matrice riga, **MOLTIPLICAZIONE A DESTRA** :

$A \times {}^{t}X =$ 

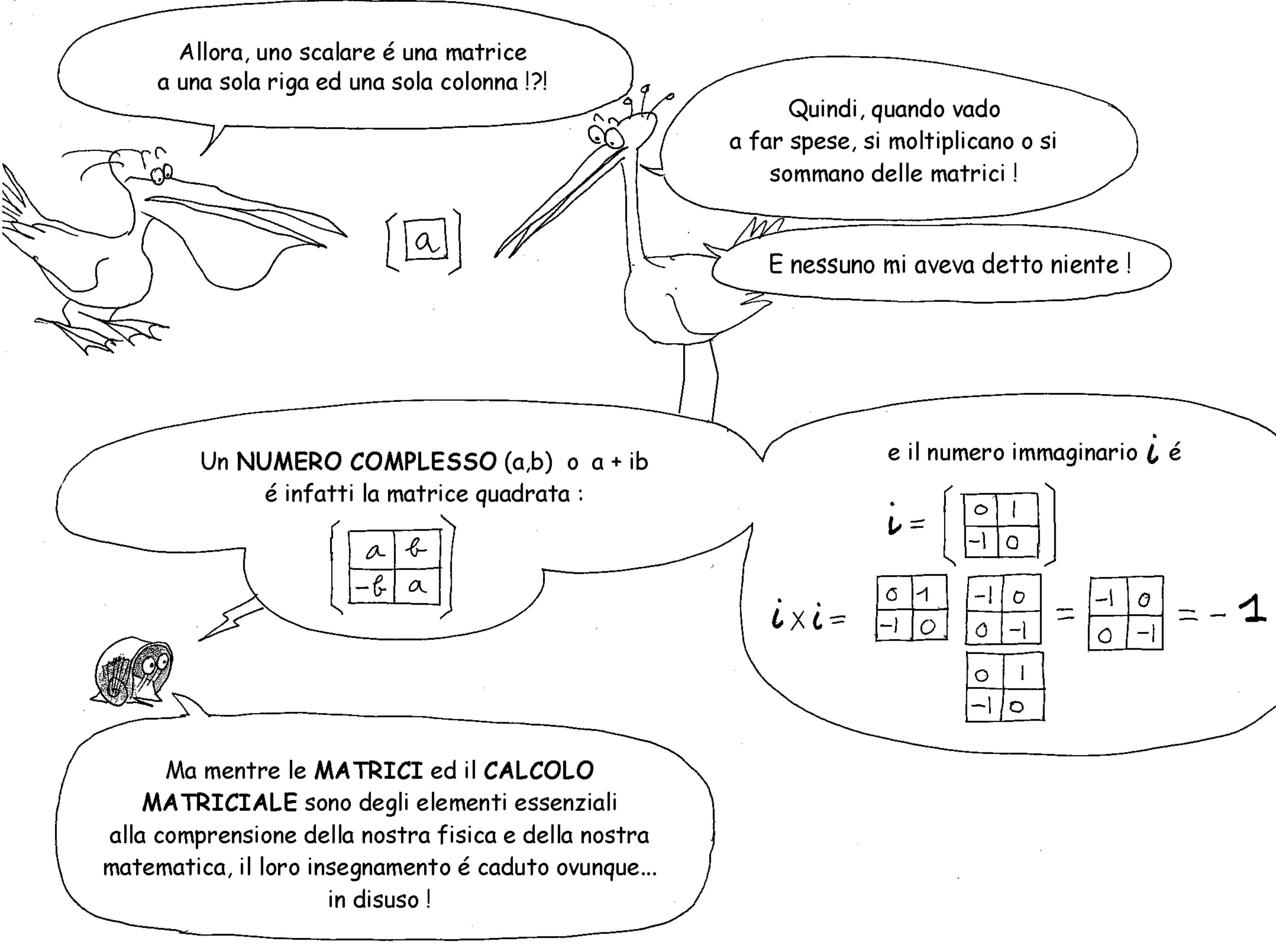
PRODOTTI DI UNA MATRICE COLONNA ⇄ E DI UNA MATRICE RIGA





${}^{t}X \times X =$ matrice ad una riga ed una colonna = **SCALARE**

$X \times {}^{t}X =$ matrice quadrata di tipo (n,n)


Allora, uno scalare é una matrice a una sola riga ed una sola colonna !?!
[a]
Quindi, quando vado a far spese, si moltiplicano o si sommano delle matrici !
E nessuno mi aveva detto niente !
Un NUMERO COMPLESSO (a,b) o a + ib é infatti la matrice quadrata :
$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
e il numero immaginario i é
$i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
$i \times i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$
Ma mentre le MATRICI ed il CALCOLO MATRICIALE sono degli elementi essenziali alla comprensione della nostra fisica e della nostra matematica, il loro insegnamento é caduto ovunque... in disuso !

Le matrici quadrate possono possedere un INVERSO, che si scrive A^{-1} tale che :

$$\boxed{A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I}$$

Un primo teorema, senza dimostrazione :

$$\boxed{(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}}$$

Un secondo teorema senza dimostrazione :

$$\boxed{{}^{t}(A \times B) = {}^{t}B \times {}^{t}A}$$

Le dimostrazioni sono facili, ma senza grande interesse (se ne avete voglia...)

SPAZI RIEMANNIANI (*)

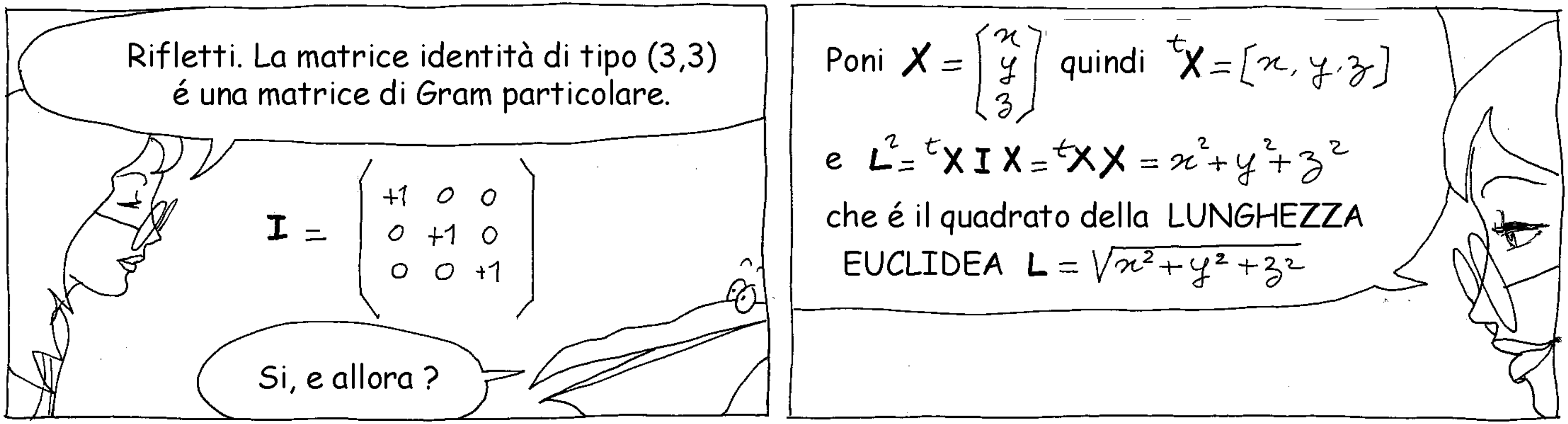
Chiameremo MATRICI DI GRAM delle matrici quadrate i cui termini non diagonali sono nulli e i cui termini della DIAGONALE PRINCIPALE valgono ±1.

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \quad \text{etc...}$$

Sia un vettore X appartenete ad uno spazio $\mathcal{E}$, a n dimensioni, diremo che questo spazio é RIEMANNIANO se il quadrato della lunghezza del vettore X si definisce con :

$$\boxed{L^2 = {}^tX\,G\,X}$$

(*) I matematici non sono tutti d'accordo sulla terminologia. Diciamo che si decide di definire con questo termine gli spazi aventi una segnatura costituita da segni ±1.



SEGNATURA

La segnatura di questi spazi é la serie dei segni della metrica di Gram.
Nel caso dello spazio euclideo a tre dimensioni, é

$$(+ + +)$$

In uno spazio a due dimensioni la matrice di Gram corrispondente ad uno spazio euclideo sarebbe $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e la segnatura $(+ +)$

Andremo ora a porci la seguente domanda : esiste un insieme di matrici **M** che, agendo sul vettore $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ne preservi la lunghezza ?

Andremo ora ad effettuare il calcolo nel caso piu' generale, quello di uno spazio riemanniano a n dimensioni, definito dalla sua matrice di Gram G.
Sia **M** una matrice che agisce sul vettore **X** trasformandolo in un vettore **X'**:

$$X' = M X$$

Il quadrato della lunghezza della norma del vettore **X'** é :

$$L'^2 = {}^tX' G X' = {}^t(M X)\, G\, (M X) = ({}^tX\, {}^tM)\, G' (M X) = {}^tX ({}^tM G M) X$$

Le lunghezze **L'** e **L** saranno uguali se :

$$\boxed{{}^tM G M = G}$$

Applichiamolo ad uno spazio euclideo di dimensione n :

$$\boxed{{}^tM M = I}$$

Cio' significa semplicemente che :

$$\boxed{M^{-1} = {}^tM}$$

Chiameremo queste matrici 'ortogonali'. Andremo a sviluppare nel caso a 2d.

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad ; \quad c^2 + d^2 = 1 \quad ; \quad ac + bd = 0$$

Si cercano le matrici $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ che soddisfano queste relazioni.

Queste matrici M formano un insieme $\mathcal{M}$, vedremo che formano un

GRUPPO

Ecco la parola magica della fisica. Ma che cos'é un gruppo ?
E' un insieme di cose che agiscono su un insieme di altre cose. In questo caso le "cose " sono delle matrici e le "altre cose " i punti, o gli insiemi dei punti di uno spazio.
Souriau ha l'abitudine di dire :

- un gruppo é fatto per trasportare.
- il metodo impiegato per trasportare é piu' importante di cio' che si trasporta.

Nell'album avevamo letto "dimmi come ti muovi e ti diro' CHE COSA sei"
Qui potremmo dire :

> Dimmi come ti fai trasportare e ti diro' a quale famiglia di esseri geometrici appartieni.
> In breve, in quale spazio abiti.

Ne segue la relazione stretta GRUPPO $\rightleftarrows$ GEOMETRIA

Gli assiomi che definiscono un gruppo sono stati introdotti dal norvegese Sophus Lie.
Chiamiamo cosi' i gruppi di matrici GRUPPI DI LIE. Passiamo agli assiomi.

- Si prenda un insieme di oggetti che agiscono l'uno sull'altro. Chiamiamoli $\alpha, \beta, \gamma \ldots$
  Formano un insieme ε.
- Possiamo comporli con un' OPERAZIONE BINARIA che scriveremo : $\gamma = \alpha \circ \beta$

1 : Se α e β appartengono all'insieme, $\alpha \circ \beta$ appartiene egualmente all'insieme, si dice che questa legge di composizione é INTERNA (al gruppo ε) .

2 : Esiste un elemento, chiamato e ELEMENTO NEUTRO, tale che per ogni elemento α del gruppo si abbia

$$\boxed{e \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha}$$

3 : Ogni elemento α possiede un inverso che si scrive α^{-1} tale che :

$$\boxed{\alpha \circ \alpha^{-1} = e}$$

4 : L'operazione binaria é associativa, cioé :

$$\boxed{(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)}$$

Non ci serviremo praticamente mai di questo quarto assioma. Infatti é molto difficile trovare delle operazioni binarie NON ASSOCIATIVE.

Il fisico lavora SOLO su dei GRUPPI DI MATRICI chiamati anche GRUPPI DI LIE;
Avremo quindi degli INSIEMI DI MATRICI <u>QUADRATE</u> M.

- L'operazione binaria "o" sarà la MOLTIPLICAZIONE MATRICIALE $M_1 \times M_2$ NON COMMUTATIVA.
- L'elemento neutro e sarà sistemeticamente la matrice unità I del tipo considerato (n,n)

GRUPPi DiSCRETi

Si chiamano cosi' i gruppi (qui, di matrici) che formano degli insiemi con un numero finito di elementi.
Le matrici di Gram a due righe e due colonne formano un gruppo a quattro elementi.

$$g = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Inoltre sono identiche al loro inverso. Che cosa rappresentano?
Facciamole AGIRE sui vettori $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di uno spazio 2d.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$ simmetria rispetto all'asse oy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$ simmetria rispetto all'asse ox

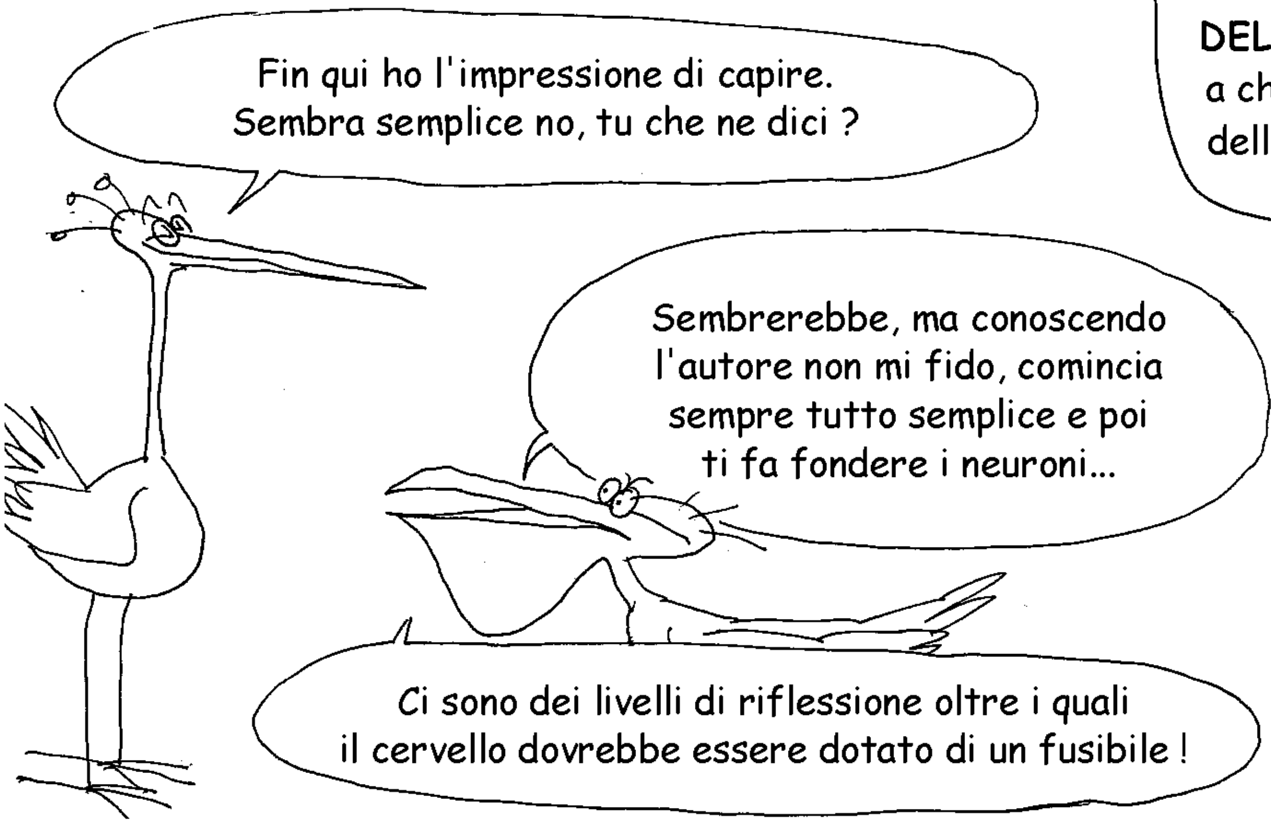
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$ simmetria rispetto all'origine

Le nostre condizioni sono soddisfatte : le simmetrie conservano le lunghezze.

GRUPPO A 1 (O PIU') PARAMETRI

Le matrici $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ obbediscono ai nostri criteri e costituiscono il gruppo delle rotazioni del piano attorno all'origine.

È un gruppo a 1 parametro (l'angolo θ) .



Le matrici $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ formano un gruppo chiamato SO (2) , cioé "speciale ortogonale".

ORiENTAZiONE

Moltiplicando questa matrice con una delle due matrici che invertono gli oggetti (R ⇄ Я) , come per esempio quella che opera una simmetria rispetto all'asse oy, si ottiene :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si noti che $\theta = \pi$ ci da la simmetria rispetto all'asse ox.

Si ottiene un secondo insieme di matrici che sono egualmente delle matrici ortogonali poiché obbediscono a ${}^{t}MM = I$. L'unione di questi due insiemi costituisce il GRUPPO ORTOGONALE O(2) . Diremo che questo gruppo, il cui elemento sarà definito da **a**, possiede DUE COMPONENTI.

$\boxed{O(2)} \to \boxed{SO(2)} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ che costituisce un SOTTOPROGRAMMA del gruppo O(2) il quale non inverte gli oggetti: R → R

$\boxed{O(2)} \to \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ i suoi elementi INVERTONO gli oggetti : R ⇄ Я

GRUPPO D'iSOMETRiA

L'insieme delle azioni che conservano le lunghezze, in uno spazio a due dimensioni combinano :

- **Rotazioni**
- **Simmetrie**
- **Traslazioni**

cio' si puo' esprimere con delle matrici:

$\boxed{E(2)} \to \boxed{SE(2)} \to$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta + \Delta x \\ x\sin\theta + y\cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{R \to R}$$

$\boxed{E(2)} \to$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\cos\theta + y\sin\theta + \Delta y \\ x\sin\theta + y\cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{R \rightleftarrows Я}$$

Si ottiene il **GRUPPO DI EUCLIDE 2D** E(2) che é il **GRUPPO D'ISOMETRIA** dello **SPAZIO EUCLIDEO A DUE DIMENSIONI**. Il suo primo **COMPONENTE** SE(2) ("Speciale Euclide 2d") forma un **SOTTOGRUPPO**. Il secondo é un insieme di matrici **CHE INVERTONO GLI OGGETTI**, ma non costituisce un gruppo.

In 2d é possibile esprimere tutti i calcoli. Cio' che si é fatto in 2d si puo' estendere in 3d.
La matrice di Gram é la matrice identità 3d

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Il quadrato della lunghezza é $L^2 = {}^tX\,I\,X$ la segnatura $(+ \; + \; +)$

Sia una matrice M che agisce sul vettore X secondo $X = MX'$

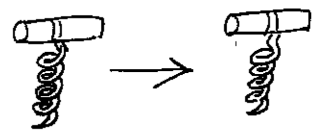
La conservazione della lunghezza conduce a $L'^2 = {}^tX' I X' = {}^t(MX)(MX) = {}^tX({}^tMM)X$

$L' = L$ se

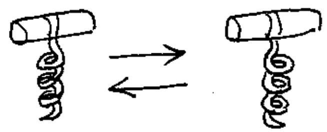
$$\boxed{{}^tMM = I \quad \sigma \quad M^{-1} = {}^tM}$$

Le matrici che godono di questa proprietà, che sono delle matrici quadrate (3,3) si chiamano **ORTOGONALI** e costituiscono il **GRUPPO ORTOGONALE** 0(3) , che possiede **DUE COMPONENTI** :

$O(3) \to \boxed{SO(3)} \to$ Non inverte gli oggetti 3d



$O(3) \to$ INVERTE GLI OGGETTI 3D



(SIMMETRIA SPECULARE)

Aggiungendo il vettore traslazione

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Costruiamo il gruppo di Euclide 3D E(3) che assume la proprietà del gruppo ortogonale O(3) a partire dal quale é costruito, il cui elemento sarà chiamato **a** e che scriveremo :

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{a} & \Delta x \\ \multicolumn{3}{c}{(3,3)} & \Delta y \\ & & & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che agisce su

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

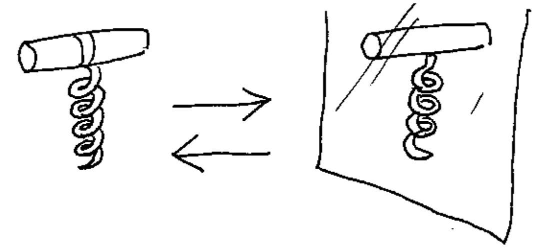
Questa **AZIONE**, scritta sotto forma matriciale, permette agli elementi del gruppo di euclide 3D E(3) di agire sui vettori **X**, e differisce dalle moltiplicazioni matriciali abituali come per esempio :

$$X' = M X$$

che non é altro che una forma d'**AZIONE** fra tante altre. Il concetto di azione é essenziale e lo riprenderemo in seguito.

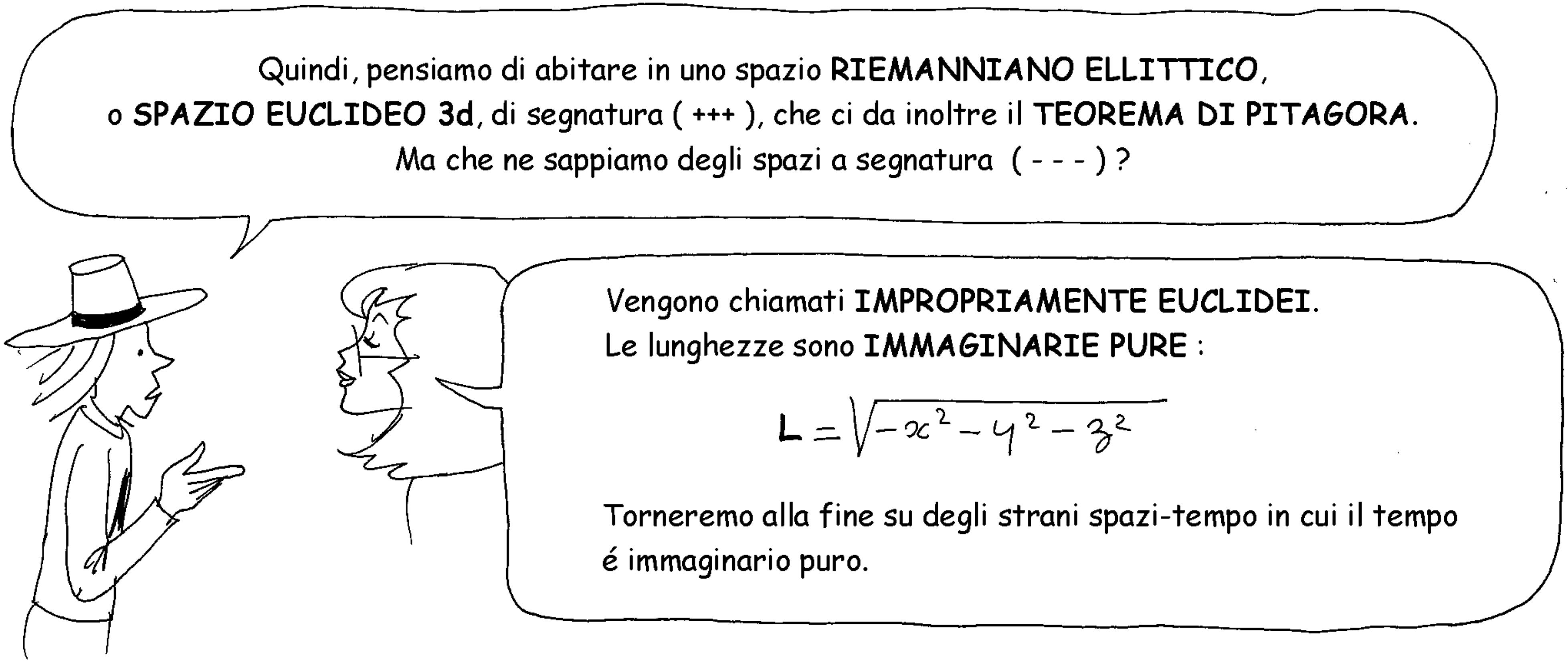
La metà delle matrici che costituiscono il gruppo di Euclide trasformano gli oggetti orientabili (il cavatappi) nella loro immagine speculare. Diremo che operano

una **SIMMETRIA P** o "simmetria di parità".



QUANDO I MATEMATICI INVENTANO GLI SPECCHI

E' qui che il matematico precede il fisico, per certi ragionamenti. Dopo aver effettuato le rotazioni e le traslazioni il matematico inventa la nozione di gruppo, le matrici di Gramm, costruisce il **SOTTOGRUPPO** SE(3), che non inverte gli oggetti **TRASPORTANDOLI FISICAMENTE**. Ma il gruppo crea degli elementi che il semplice trasporto fisico non puo' creare. Combinando rotazioni e traslazioni non potremmo mai creare un **CAVATAPPI SINISTRORSO** partendo da un **CAVATAPPI DESTRORSO**. Quindi il gruppo completo predice "l'esistenza" di tali oggetti, che si trovano dall'altra parte dello specchio, gli **ENANTIOMORFI**.


Quindi, pensiamo di abitare in uno spazio RIEMANNIANO ELLITTICO, o SPAZIO EUCLIDEO 3d, di segnatura (+++), che ci da inoltre il TEOREMA DI PITAGORA. Ma che ne sappiamo degli spazi a segnatura (- - -) ?
Vengono chiamati IMPROPRIAMENTE EUCLIDEI. Le lunghezze sono IMMAGINARIE PURE :
$L=\sqrt{-x^2-y^2-z^2}$
Torneremo alla fine su degli strani spazi-tempo in cui il tempo é immaginario puro.


Qui si esagera. Un tempo immaginario puro puo' essere solo il frutto della nostra immaginazione.
Si, ma l'immaginazione che COS'E' ?
Oggetti matematici, avete dunque un'anima ?

SPAZI RIEMANNIANI IPERBOLICI

La matrice di **GRAM** é allora :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambiamo lettera per un vettore dello spazio-tempo :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Definiremo un vettore traslazione spazio-temporale che si scriverà :

$$C = \Delta \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Considereremo dei vettori infinitesimali :

$$d\,\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Otterremo allora (ponendo c, velocità della luce, = 1) la lunghezza infinitesimale :

$$\boxed{ds^2 = {}^t d\boldsymbol{\xi}\, \mathbf{G}\, d\boldsymbol{\xi} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

che chiameremo **METRICA** (di **MINKOWSKI**) e che potremmo scrivere con un semplice cambio di variabili :

$$\boxed{c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Procederemo come abbiamo fatto per il gruppo di Euclide e lo spazio euclideo. Cominceremo con uno spazio-tempo 2d :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

dove l'elemento della lunghezza, la sua metrica 2d é $ds^2 = {}^t d\boldsymbol{\eta}\, \mathbf{G}\, d\boldsymbol{\eta}$
con metrica di Gram =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Costruiremo il **GRUPPO DI ISOMETRIA** di questo spazio.

Procederemo come lo abbiamo fatto per lo spazio euclideo. Lasciamo stare per il momento la presentazione in forma differenziale. Andremo a cercare un gruppo di matrici L, che agisca sul vettore ξ secondo :

$$\xi' = L\xi$$

che preservi questa strana lunghezza "iperbolica", cioé tale che :

$$L'^2 \quad {}^t\xi' G \xi' \quad {}^t(L\xi) G (L\xi) \quad {}^t\xi \left({}^tL G L\right) \xi = L^2 = {}^t\xi G \xi \quad \text{se :}$$

$$\boxed{{}^tL G L = G}$$

In 4d sono delle matrici 4 righe, 4 colonne, di tipo (4,4). La formula qui sopra é la definizione del gruppo (di matrici) di **LORENTZ** .
Per poterla esprimere, ci limiteremo ad uno spazio-tempo 2d (t,x).

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cioé $a^2 - c^2 = 1 \quad ; \quad b^2 - d^2 = 1 \quad ; \quad ab - cd = 0$

cio' ci fornisce una prima $\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\eta & \operatorname{sh}\eta \\ \operatorname{sh}\eta & \operatorname{ch}\eta \end{bmatrix}$

poiché $\operatorname{ch}^2\eta - \operatorname{sh}^2\eta = 1$

$\Rightarrow$ le linee trigonometriche sono sostituite da linee iperboliche.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}\eta = \dfrac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2} \\ \operatorname{sh}\eta = \dfrac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \qquad z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Il **GRUPPO DI LORENTZ** é l'equivalente delle rotazioni, nello spazio di **MINKOWSKI**.

GRUPPO DiSCRETO

Le matrici di Gram 2d sono delle matrici di Lorentz, che obbediscono a :

$$^{t}LGL = G$$

$^{t}GGG = G$ avec $GG = I$ et $^{t}G = G$, quindi in 2d abbiamo il gruppo discreto :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Otterremo il gruppo di Lorentz completo, a quattro componenti :

$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\eta & \operatorname{sh}\eta \\ \operatorname{sh}\eta & \operatorname{ch}\eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\eta & -\operatorname{sh}\eta \\ \operatorname{sh}\eta & -\operatorname{ch}\eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\operatorname{ch}\eta & \operatorname{sh}\eta \\ -\operatorname{sh}\eta & \operatorname{ch}\eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\operatorname{ch}\eta & -\operatorname{sh}\eta \\ -\operatorname{sh}\eta & -\operatorname{ch}\eta \end{bmatrix}$

SOTTO-GRUPPO ORTOCRONO (prime due) — SOTTO-INSIEME ANTICRONO (ultime due)

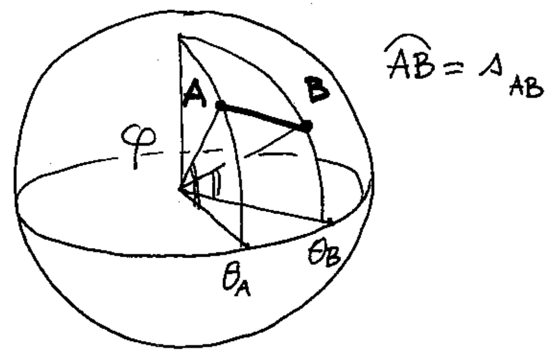
RELATIVITA' RISTRETTA

Riprendi i calcoli della **LUNGHEZZA** in questo spazio di Riemann iperbolico chiamato **SPAZIO DI MINKOWSKI**, in forma differenziale, data dalla sua **METRICA** :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Cio' significa che i nostri **MOVIMENTI SONO ISCRITTI** (*) in una ipersuperficie 4d. In quest'ultima (x,y,z,t) sono delle **COORDINATE**.
In **PIU' VELOCE DELLA LUCE** si é spiegato che l'attribuzione di un sistema di coordinate a questa ipersuperficie corrisponde alla descrizione fatta dal **FISICO** di questa ipersuperficie dove l'unica grandezza **INTRINSECA** é la lunghezza S.
C'é lo stesso rapporto tra queste coordinate e questa lunghezza S , che si misura in **METRI** e che convertiamo in **TEMPO PROPRIO** τ mediante la relazione ds = cdt in cui c é una velocità caratteristica, che tra le coordinate di latitudine ϕ e longitudine θ utilizzate per identificare dei punti su di una sfera e la lunghezza della traiettoria percorsa $\widehat{AB}$. Cio' che ci mostra questa formula é che quando si attribuiscono delle coordinate (x,y,z,t) si puo' ricavare una velocità :

$$V = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$



Affinché il tempo $d\tau$ resti reale é necessario che V < C.
Il movimento limite corrisponderà a V = C , e allora $d\tau = 0$.

⇨ il tempo proprio del **FOTONE** é "congelato".

(*) In arabo : MEKTOUB.

Per le particelle che si muovono a v < c si produce la CONTRAZIONE DI LORENTZ :

$$\boxed{c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

τ é il tempo indicato dall'orologio del passeggero che si muove a velocità v, come illustato nell'album TUTTO E' RELATIVO. E quando v tende a c "il tempo si congela nei cronometri". Ma torniamo al GRUPPO DI LORENTZ. I suoi elementi agiscono su delle serie di punti dello spazio-tempo che costituiscono un MOVIMENTO . Facendo agire un elemento L del gruppo di Lorentz su di un dato movimento si ottiene un altro movimento. Il fatto che questo gruppo contenga degli elementi ANTICRONI dimostra che i movimenti a RITROSO NEL TEMPO devono essere presi in considerazione. Come esempio, ecco una matrice che appartiene al gruppo di Lorentz :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{L}\,\mathbf{G}\,\mathbf{L} = \mathbf{G} \quad \text{con} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'azione é :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

INVERSIONE DEL TEMPO

Quando abbiamo definito il **GRUPPO ORTOGONALE**, sotto-gruppo del gruppo d'isometria dello **SPAZIO EUCLIDEO**, l'abbiamo completato con il vettore delle **TRASLAZIONI SPAZIALI**

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

costituendo il **GRUPPO DI EUCLIDE**, il suo gruppo d'isometria.

elemento del gruppo ortogonale O(3)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo, partendo dal **GRUPPO DI LORENTZ** costruiremo il **GRUPPO DI POINCARE'**, gruppo d'isometria dello spazio di MINKOWSKI.

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$ traslazioni spazio-temporali

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Il gruppo di Poincaré, mediante il suo sotto-gruppo $\begin{pmatrix} \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ assume le proprietà del gruppo di Lorentz e possiede come quest'ultimo quattro componenti :

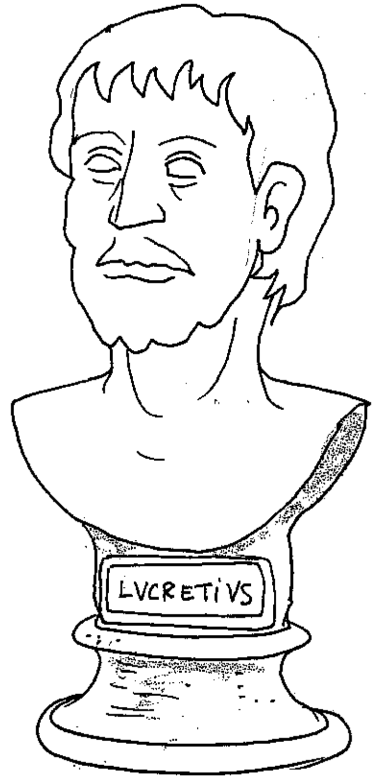
- **DUE ORTOCRONE** (che non invertono il tempo)
- **DUE ANTICRONE** (che invertono il tempo).

Ci resta da capire il **SIGNIFICATO FISICO** di questa inversione temporale.

SPAZiO, GRUPPi ED OGGETTi

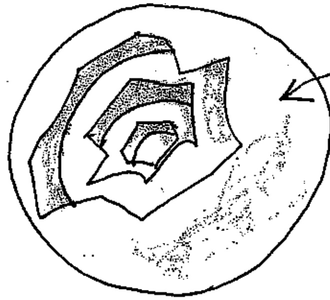
Abbiamo cominciato con lo spazio euclideo e ci siamo posti in 2d per poter esprimere i calcoli. Abbiamo in seguito costruito il suo **GRUPPO DI ISOMETRIA**, il **GRUPPO DI EUCLIDE**. Quest'ultimo accompagna dunque lo spazio euclideo e permette di **AGIRE** su degli oggetti, degli insiemi di punti che si trovano in questo spazio. Ma possiamo considerare il problema al contrario : si parte dal gruppo come oggetto astratto, puramente matematico, che permette di indovinare delle **AZIONI** e scoprire "lo spazio che gli corrisponde" l'unico nel quale queste azioni si possono realizzare. Potremmo dire "lo spazio giusto". Cosi', lo spazio e il suo gruppo (di isometria) si conferiscono mutualmente esistenza..

Ma non finisce qui. Il gruppo produce degli **OGGETTI** dello spazio al quale é legato come **INVARIANTI RISPETTO ALL'AZIONE DI UN SOTTOGRUPPO**. Facciamo un esempio. Le rotazioni attorno ad un punto dello spazio euclideo 2d costituiscono uno dei suoi sottogruppi. Gli oggetti invarianti sono in questo caso la famiglia delle circonferenze centrate in questo punto. E' cosi' che si definisce la circonferenza mediante un gruppo !



Lucrezio, poeta e filosofo romano, primo secolo A.C. immagino' che gli oggetti fossero costituiti da atomi osservando l'analogia tra lo scorrimento dell'acqua e della sabbia (si veda **IL VOLO** pag 15 a 17) .

Nel gruppo di Euclide 3d, le rotazioni attorno ad un punto costituiscono anche uno dei suoi sottogruppi. Quali sono gli oggetti che le **AZIONI DI QUESTO SOTTOGRUPPO** lasciano **INVARIANTI** ?
Risposta = la famiglia delle **SFERE** centrate in questo punto.
Il concetto di **INVARIANTE** rispetto a diverse azioni del gruppo o di un suo sottogruppo é un concetto fondamentale della **TEORIA DEI GRUPPI**.
In questo gruppo di Euclide, nel quale il tempo é assente, il gruppo produce degli **OGGETTI** che popoleranno lo spazio al quale é legato.



$$\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando interviene il tempo, il gruppo diventa un **GRUPPO DINAMICO**. Non gestisce piu' degli oggetti statici, ma degli **INSIEMI DI "PUNTI-EVENTI"** che possiamo chiamare **TRAIETTORIE** o **MOVIMENTI**. Agli inizi del secolo la matematica tedesca Emmy Noether (definita da Einstein come un "monumento della fisica") ha dato il suo nome ad uno dei teoremi piu' importanti della fisica che dice che per ogni sottogruppo di un gruppo dinamico esiste un **INVARIANTE** che gli corrisponde.

Nel **GRUPPO DI POINCARE'** troviamo il **SOTTOGRUPPO DELLE TRASLAZIONI TEMPORALI**, rappresentato dalla matrice qui a fianco. Gruppo ad un parametro. Gli corrisponde quindi un invariante, scalare : L'**ENERGIA E** . E' cosi' che possiamo definire l'energia utilizzando i gruppi !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\Delta t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Secondo sottogruppo : quello delle **TRASLAZIONI SPAZIALI** (matrice qui a fianco), gruppo a tre parametri (Δx , Δy , Δz).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gli corrisponde un nuovo invariante:

l' **IMPULSO** $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Cosi', mediante i **GRUPPI DINAMICI** si definisce l'impulso. Le grandezze della fisica diventano anch'esse degli **OGGETTI GEOMETRICI**, e questo meccanismo di **GEOMETRIZZAZIONE DELLA FISICA** costituisce uno dei capisaldi della **FISICA MATEMATICA**.

Continuando con questo giochetto si potrebbe considerare il sottogruppo delle **TRASLAZIONI SPAZIO-TEMPORALI** (matrice qui a fianco).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \Delta t \\ x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'oggetto invariante sarebbe allora il **QUADRIVETTORE IMPULSO-ENERGIA**.

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

A che cosa servono le **GRANDEZZE DELLA FISICA ?**, buona domanda. Risposta :
SI POSSONO SOMMARE !

Il gruppo di Poincaré dipende da dieci parametri (diremo che é di dimensione DIECI, semplice terminologia matematica). Ce ne sono 3 per la traslazione spaziale , 1 per la traslazione temporale. Ne restano sei, che rappresentano la dimensione del **GRUPPO DI LORENTZ** , che gestisce le "rotazioni spazio-temporali". Se consideriamo il gruppo di Lorentz come un sotto-gruppo del gruppo di Poincaré :

Il teorema di Noether ci dice che deve corrispondergli un "oggetto" definito da sei parametri, che sarà invariante sotto l'azione di questo sotto-gruppo.

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\xi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

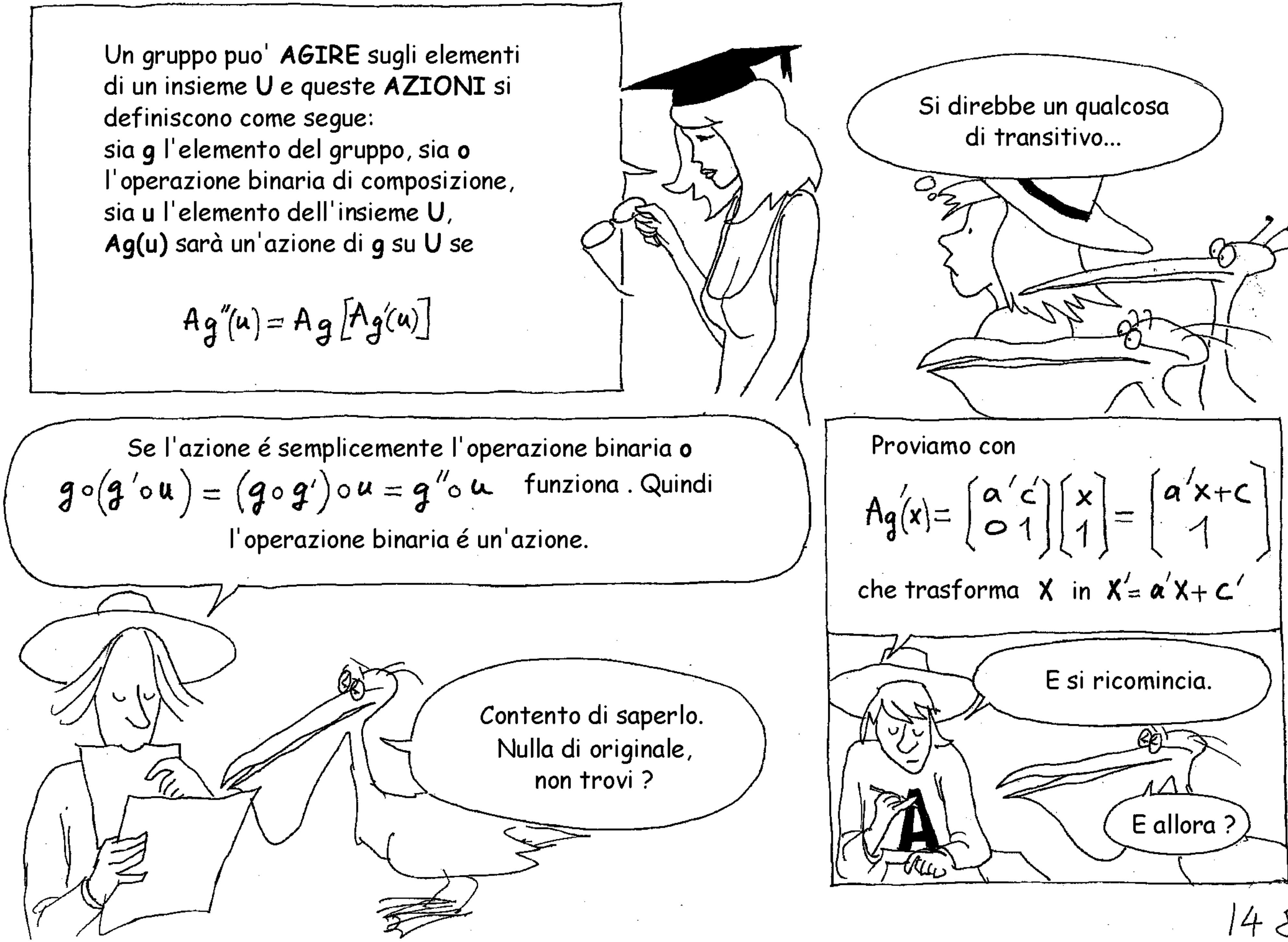
In questo oggetto si nasconde lo **SPIN**. Souriau ci ha mostrato nel 1972 la sua natura **PURAMENTE GEOMETRICA**. Ha la dimensione di un momento angolare. Sappiamo che il gruppo di Poincaré gestisce i movimenti del **PUNTO MATERIALE RELATIVISTICO**. L'interpretazione dello spin come oggetto puramente geometrico é quindi piu' pertinente.

iL "MOMENTO"

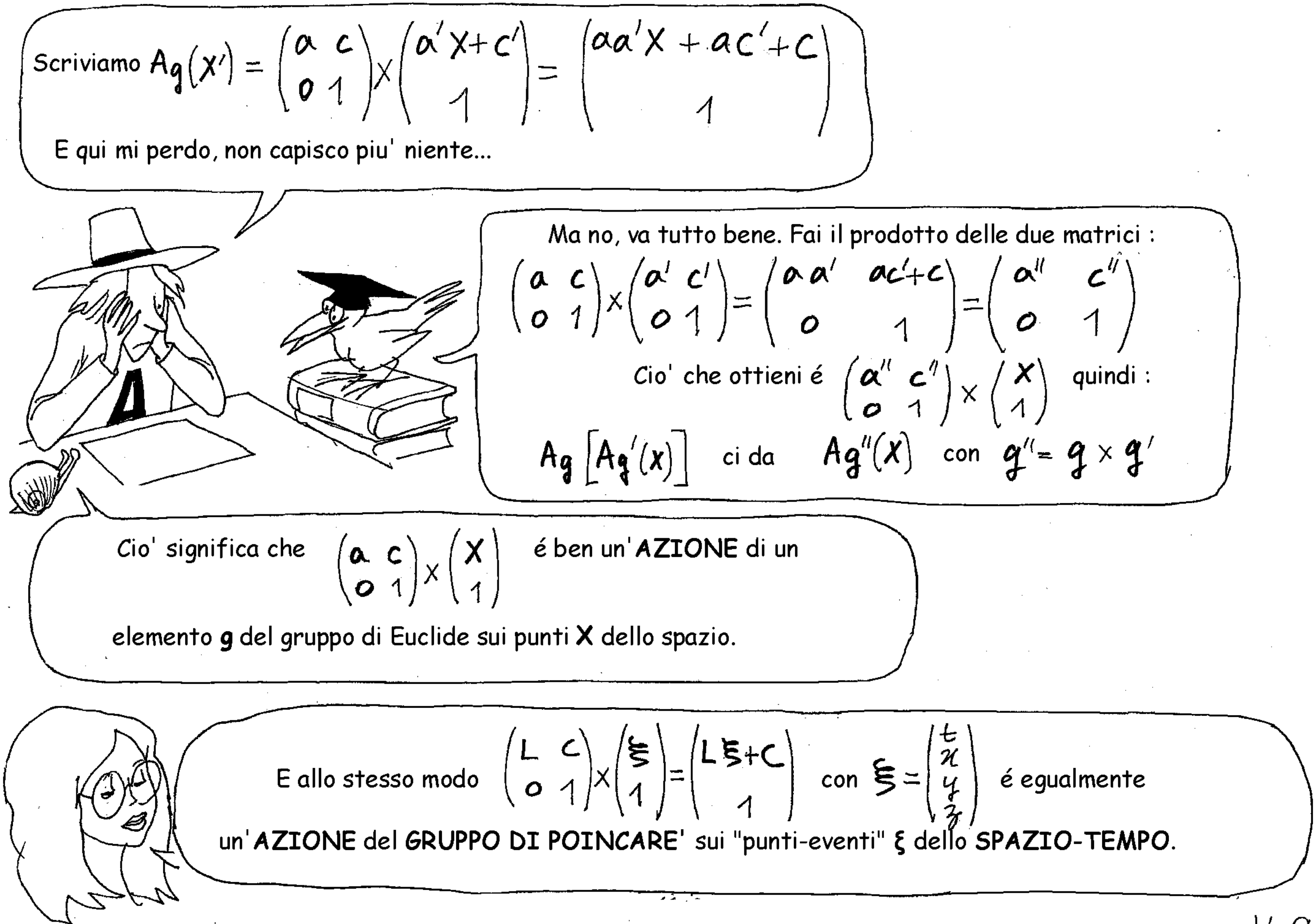
I sotto-gruppi corrispondono ad una specie di "smantellamento del gruppo, pezzo dopo pezzo, ingranaggio dopo ingranaggio". Quando si effettua l'operazione inversa, si ricostruisce il gruppo. L'insieme degli invarianti descritti precedentemente costituisce cio' che Souriau ha chiamato il "momento".

$$\text{momento} = \{ E, p_x, p_y, p_z, \dots \text{SPIN} \}$$

AZiONi Di UN GRUPPO

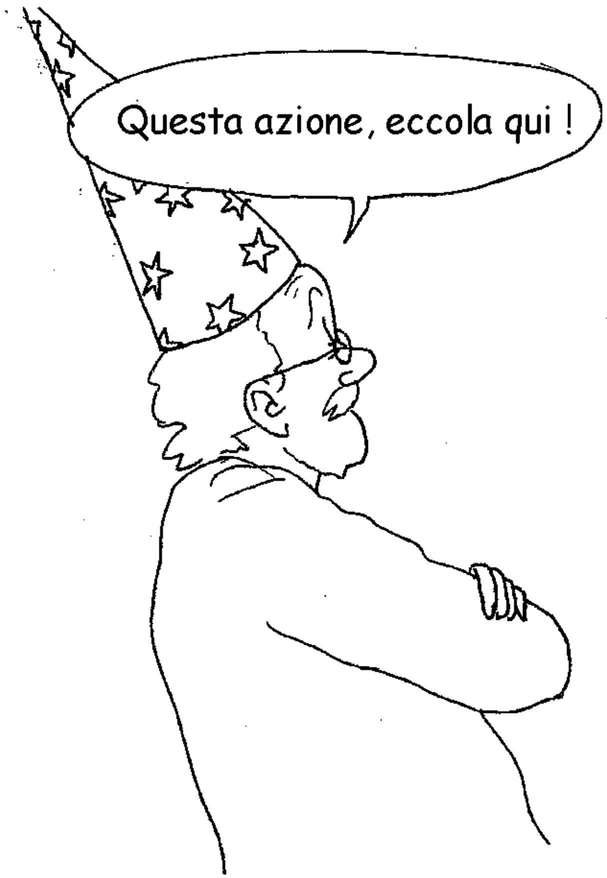


Un gruppo puo' **AGIRE** sugli elementi di un insieme **U** e queste **AZIONI** si definiscono come segue:
sia **g** l'elemento del gruppo, sia **o** l'operazione binaria di composizione,
sia **u** l'elemento dell'insieme **U**,
Ag(u) sarà un'azione di **g** su **U** se
$Ag''(u) = Ag[Ag'(u)]$
Si direbbe un qualcosa di transitivo...
Se l'azione é semplicemente l'operazione binaria **o**
$g \circ (g' \circ u) = (g \circ g') \circ u = g'' \circ u$ funziona . Quindi l'operazione binaria é un'azione.
Contento di saperlo. Nulla di originale, non trovi ?
Proviamo con
$Ag'(x) = \begin{bmatrix} a' & c' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'x+c \\ 1 \end{bmatrix}$
che trasforma X in $X' = a'X + c'$
E si ricomincia.
E allora ?
A



Scriviamo $A_g(X') = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a'X+c' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'X + ac'+c \\ 1 \end{pmatrix}$
E qui mi perdo, non capisco piu' niente...
Ma no, va tutto bene. Fai il prodotto delle due matrici :
$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac'+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & c'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Cio' che ottieni é $\begin{pmatrix} a'' & c'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi :
$A_g\left[A_{g'}(X)\right]$ ci da $A_{g''}(X)$ con $g'' = g \times g'$
Cio' significa che $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ é ben un'**AZIONE** di un elemento **g** del gruppo di Euclide sui punti **X** dello spazio.
E allo stesso modo $\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ é egualmente un'**AZIONE** del **GRUPPO DI POINCARE'** sui "punti-eventi" ξ dello **SPAZIO-TEMPO**.

ATTENZIONE UNA GEOMETRIA PUO' NASCONDERNE UN'ALTRA !



$$\boxed{J' = g \times J \times {}^t g}$$

dove J é una matrice **ANTISIMMETRICA.**

Possiamo verificare che si tratta ben di un'**AZIONE.**

$$A_g[A_{g'}(J)] = g \times [g' \times J \times {}^t g'] \times {}^t g = g\, g'\, J\, {}^t g'\, g$$

mais ${}^t[AB] = {}^t B\, {}^t A$ donc ${}^t g'\, {}^t g = {}^t(g\, g')$ et si $g'' = g\, g'$

$$A_g[A_{g'}(J)] = g'' \quad {}^t g'' = A_{g''}(J)$$

La matrice **J** ha necessariamente lo stesso formato (5,5) delle matrici g del gruppo. In una matrice antisimmetrica i termini simmetrici rispetto alla diagonale principale sono opposti. Dunque quelli di questa diagonale principale sono uguali a zero (che é il suo proprio opposto). Possiamo quindi enumerare gli elementi di questa matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & l \\ -l & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -l_z & -l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x & -p_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y & -p_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z & -p_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -E \\ p_x & p_y & p_z & E & 0 \end{pmatrix}$$

(2,2) (3,3) (4,4) (5,5)

Formato	Numero di elementi
(2,2)	1
(3,3)	3
(4,4)	6
(5,5)	10

Posso scindere questa matrice antisimmetrica **J** di tipo (5,5) in una matrice antisimmetrica **M** di tipo (4,4) e un **QUADRIVETTORE P**, a quattro elementi. E potrei scrivere tutto cio' in modo piu' compatto. Cio' mi permetterà di esprimere in modo più pratico il calcolo dell'azione del gruppo di Poincaré su questa matrice-momento **J**.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\ell_z & \ell_y & f_x & -p_x \\ \ell_z & 0 & -\ell_x & f_y & -p_y \\ -\ell_y & \ell_x & 0 & f_z & -p_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -E \\ p_x & p_y & p_z & E & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\ell_z & \ell_y & f_x \\ \ell_z & 0 & -\ell_x & f_y \\ -\ell_y & \ell_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \\ -E \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z & E \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\ell_z & \ell_y & f_x \\ \ell_z & 0 & -\ell_x & f_y \\ -\ell_y & \ell_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E \end{pmatrix}$$

$${}^tP = \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z & E \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} M & -P \\ {}^tP & 0 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vista cosi'
questa scissione é logica.

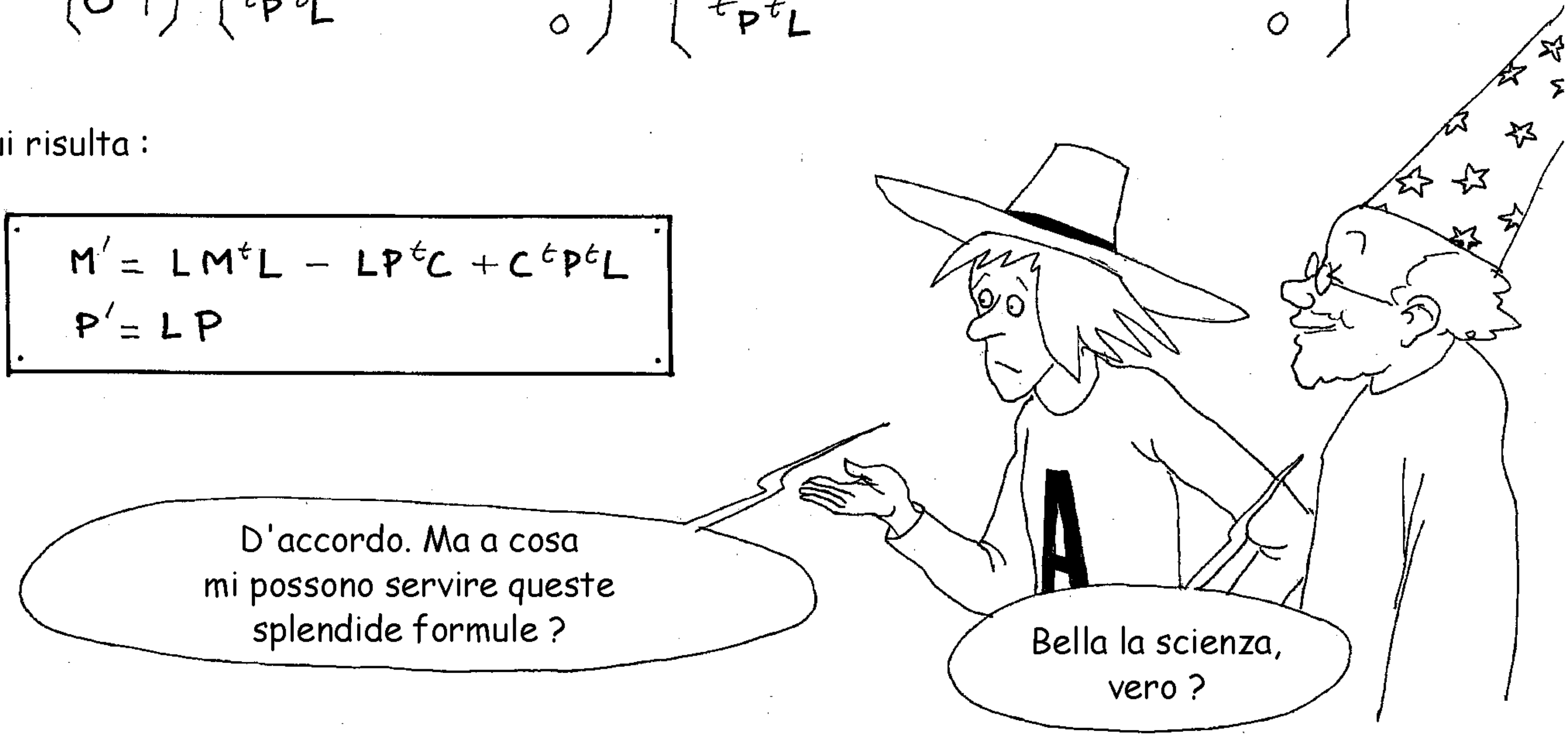
Non ci resta che esprimere il calcolo $J' = g \times J \times {}^tg$

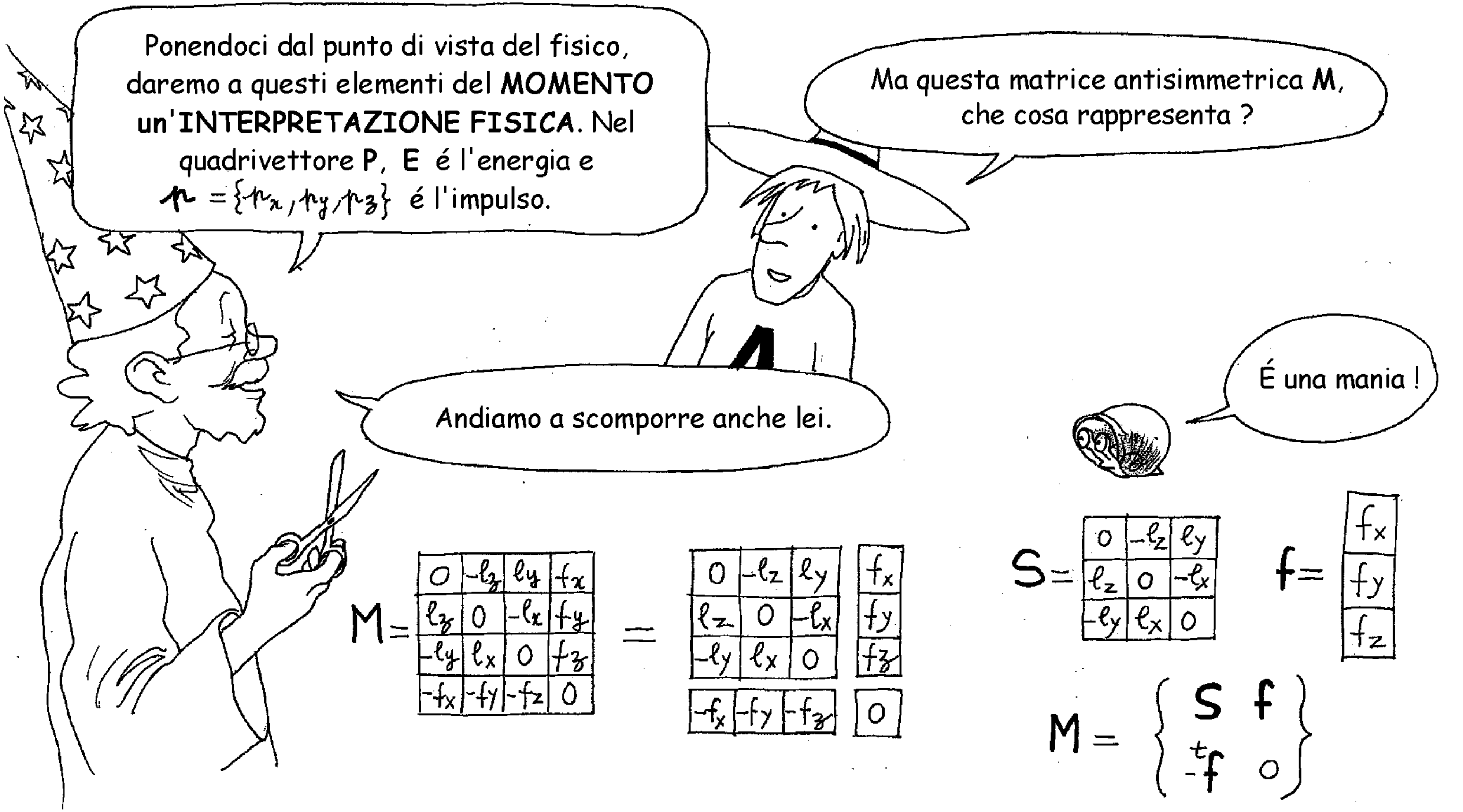
$${}^t g = \begin{pmatrix} {}^tL & 0 \\ {}^tC & 1 \end{pmatrix} \qquad J' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & -P \\ {}^tP & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^tL & 0 \\ {}^tC & 1 \end{pmatrix}$$

$$J' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M\,{}^tL - P\,{}^tC & -P \\ {}^tP\,{}^tL & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LM\,{}^tL - LP\,{}^tC + C\,{}^tP\,{}^tL & -LP \\ {}^tP\,{}^tL & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui risulta :

$$\boxed{\begin{aligned} M' &= LM\,{}^tL - LP\,{}^tC + C\,{}^tP\,{}^tL \\ P' &= LP \end{aligned}}$$





$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\ell_z & \ell_y & f_x \\ \ell_z & 0 & -\ell_x & f_y \\ -\ell_y & \ell_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\ell_z & \ell_y \\ \ell_z & 0 & -\ell_x \\ -\ell_y & \ell_x & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} S & f \\ -{}^t f & 0 \end{pmatrix}$$

La velocità V é implicitamente presente nella matrice **L** del gruppo di Lorentz.
Se si considera un movimento che si effettua secondo una direzione privilegiata, per esempio oz con una velocità v ed una traslazione $\Delta z = c$, e se inoltre $c = v\Delta t$, ci situiamo in un sistema di coordinate nel quale accompagnamo la particella nel suo movimento lungo questa traslazione spazio-temporale. Si dimostra allora che il vettore **f** é nullo.

La matrice **S** si scrive allora :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -S & 0 \\ \hline S & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Il metodo della **QUANTIZZAZIONE GEOMETRICA** da lui inventato permette di dimostrare che questo spin **S** puo' essere solo un multiplo di un valore fisso : h. Abbiamo visto che il fatto che una particella sia dotata di carica elettrica é equivalente al fatto di dire che evolve in uno spazio dotato di una **QUINTA DIMENSIONE**, la dimensione di **KALUZA**. Ed i fatto che questa dimensione sia chiusa su se stessa implica che la carica elettrica sia quantizzata. Nello spazio-tempo esiste una "forma di chiusura" tale che un oggetto si ritrova identico a se stesso sotto l'azione di una rotazione di 360°. La quantizzazione dello spin, in un certo senso, deriva da questa proprietà. Esiste una stretta relazione tra quantizzazione e chiusura di una dimensione. Utilizzando i gruppi e la chiusura della quinta dimensione, Souriau fa emergere l'equazione di Klein-Gordon dal gruppo di Poincaré (e l'equazione di Schrödinger dal gruppo di Galileo, gruppo dimamico che gestisce il movimento del punto materiale non relativistico) .

(*) Structure of dynamical systems . Birkhauser ed. e sul sito di J.M.souriau http://www.jmsouriau.com

L'INVERSIONE DEL TEMPO PRODUCE L'INVERSIONE DELL'ENERGIA

Abbiamo visto precedentemente, a pag.   , che l'elemento del gruppo di Lorentz poteva essere messo nella forma :

$$L = \mu L_o \qquad \mu = \pm 1$$

dove L_o rappresenta l'elemento del sotto-gruppo ortocrono (che non inverte il tempo).
In questa forma l'azione si scrive :

$$M' = L_o M \, {}^tL_o - \mu L_o P \, {}^tC + \mu C \, {}^tP L_o$$

$$P' = \mu L_o P$$

Si consideri l'azione più semplice che crea un'inversione del tempo ($\mu = -1$). Nel gruppo ortocrono L_o scegliamo la matrice unità **I**. Annulliamo la traslazione spaziotemporale ***C***. L'elemento del gruppo si scrive:

$$g = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

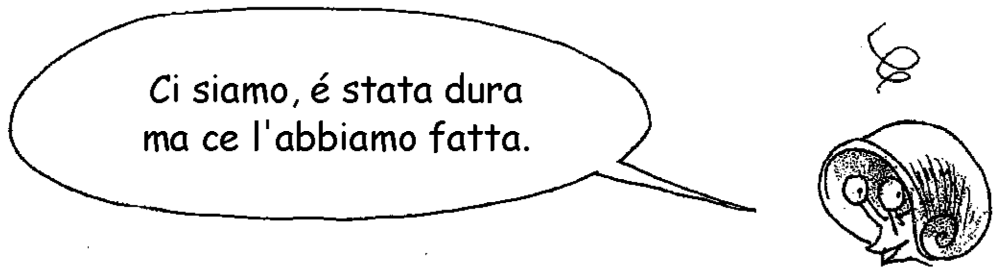
L'azione sullo spazio-tempo, lo spazio delle traiettorie, si riduce a :

$$\xi' = -\xi \quad \Rightarrow \quad t \Rightarrow -t$$

É l'inversione del senso del tempo lungo la traiettoria.
L'azione sul momento é :

$$M' = M \quad \Rightarrow$$

$$P' = -P \quad : \quad E \rightarrow -E$$



ANNESSO 4 : L'ANTIMATERIA

Alla pagina 40 abbiamo detto che affinché un punto materiale relativistico sia dotato di carica elettrica e bisognava supporre il suo spostamento non in uno spazio a quattro dimensioni ma a cinque :

$$\{t, x, y, z, \zeta\}$$

con ζ che rappresenta la quinta dimensione, o **DIMENSIONE DI KALUZA**.
A pag. 137 abbiamo introdotto la **METRICA DI MINKOWSKI**.

$$\boxed{ds^2 = {}^t d\boldsymbol{\xi}\, G\, d\boldsymbol{\xi} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Partiremo da uno **SPAZIO DI KALUZA**, riemenniano iperbolico, definito dalla sua segnatura (+ - - - -) e la sua matrice di Gram :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La metrica dello spazio di Kaluza é :

$$d\Sigma^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\zeta^2$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \zeta \end{pmatrix}$$

$$d\Sigma^2 = {}^t d\boldsymbol{\Omega}\, \Gamma\, d\boldsymbol{\Omega}$$

Si puo' allora cercare il gruppo di isometria di questo spazio di Kaluza e troveremo un gruppo la cui rappresentazione matriciale assomiglia come una goccia d'acqua a quella del gruppo di Poincaré, con un dimensione in più :

$$\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad {}^t\Lambda \Gamma \Lambda = \Gamma$$

Questo gruppo agisce sui punti dello spazio di Kaluza :

$$\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \boldsymbol{\Omega} + C \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore **C** rappresenta questa volta una traslazione a cinque dimensioni:

$$C = \begin{bmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \zeta \end{bmatrix}$$

Le traslazioni secondo la dimensione ζ rappresentano un sottogruppo di questo gruppo :

La cui rappresentazione matriciale é :

sottogruppo ad un parametro

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta + \Delta\zeta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il teorema di Noether ci indica che un nuovo scalare sarà dunque invariante rispetto all'azione di questo sottogruppo, e questo scalare é :

$$\boxed{\textbf{LA CARICA ELETTRICA } e}$$

Il gruppo di Kaluza é costruito a partire da un gruppo Λ

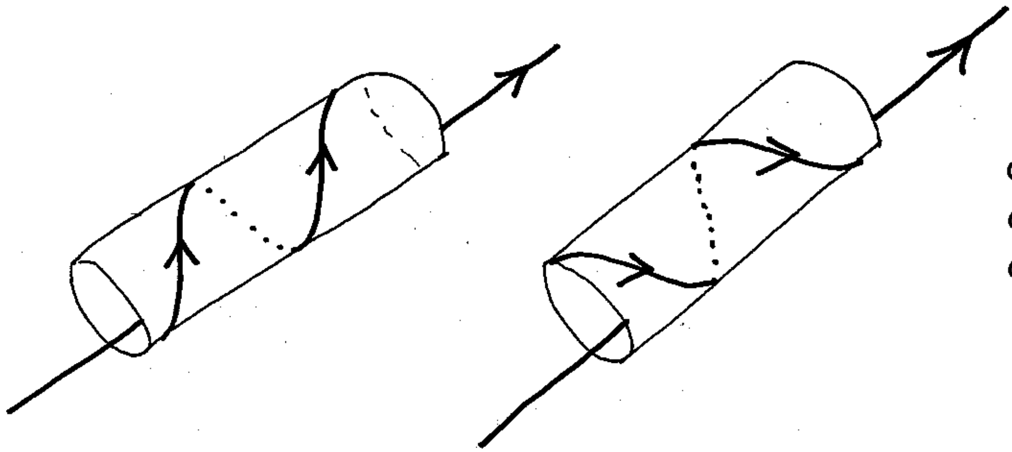
Il gruppo di Lorentz é uno dei suoi sottogruppi =

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecco un altro sottogruppo del gruppo di Kaluza :

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi \\ \varsigma \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\xi \\ \mu\varsigma \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \mu = \pm 1$$

Gli elementi ($\mu = -1$) di questo gruppo invertono la quinta dimensione. Per riprendere il disegno della pag 42 (la quinta dimensione é chiusa):



Il senso di avvolgimento del movimento della particella é invertito. Si dimostra (...) che cio' provoca l'inversione della carica elettrica **e**.

Tutto cio' non puo' rappresentare una definizione geometrica dell'antimateria.
Una particella possiede delle **CARICHE QUANTICHE** e la carica elettrica **e** é solo una tra di esse.
Ma già si intuisce l'idea che la natura dell'antimateria derivi da un tipo di movimento in uno spazio di dimensione superiore.

SOTTOGRUPPi Di LORENTZ ORTOCRONO E ANTiCRONO

Il GRUPPO DI LORENTZ L possiede quattro componenti.

L_n (neutro), L_s (inverte lo spazio), L_t (inverte il tempo), L_{st} (inverte lo spazio ed il tempo).
Il "componente neutro" é un sottogruppo (che contiene l'elemento neutro, a differenza degli altri tre insiemi) e non inverte.... né lo spazio né il tempo. Qui di seguito qualche matrice che appartiene agli insiemi (ε significa "appartiene a" e { } insieme) :

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \in \{L_n\} ; \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \in \{L_s\} ; \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \in \{L_t\} ; \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \in \{L_{st}\}$$

ANNESSO 5 : GRUPPO GEMELLARE

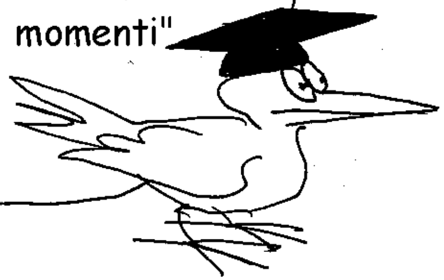
Possiamo raggruppare questi insiemi di matrici in due sotto-insiemi :

$$L_o \left(\text{ortocrono} \right) = \left\{ L_n , L_s \right\} \qquad L_a = \left\{ L_t ; L_{st} \right\}$$

Il primo sottoinsieme é un sottogruppo del gruppo di Lorentz. Questo raggruppamento permette la scrittura :

$$L = \mu L_o \quad \text{con} \quad \mu = \pm 1 \text{ dato che } L_t = - L_s \quad ; \quad L_{st} = - L_n$$

In questo grosso calcolo matriciale che non abbiamo osato mettere in queste pagine (ma che avreste senza dubbio potuto seguire) "l'**AZIONE**" la più generale dei componenti del gruppo di Poincaré sul "suo spazio dei momenti" contiene la relazione (Souriau 1972)



$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = L \times \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \mu L_o \times \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Gli elementi μ = -1 corrispondono alle trasformazioni **ANTICRONE** che invertono il tempo.
La matrice identità (4,4) **I** fa parte del gruppo di Lorentz. Quando ci limitiamo all'inversione del tempo vediamo che cio' inverte l'energia, ma anche l'impulso **p**.

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \qquad \boxed{E' = -E \qquad p' = -p}$$

Se consideriamo il gruppo di Kaluza $\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

tutti i calcoli possono essere riportati in 5d e si otterrà in particolar modo con :

$$\pi = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ e \end{pmatrix} \qquad \pi' = \Lambda \pi$$

Possiamo scomporre il gruppo **Λ** in due componenti, uno ortocrono e l'altro anticrono, e scrivere :

$$\Lambda = \mu \Lambda_0 \quad \text{con} \quad \mu = \pm 1$$

I componenti **ANTICRONI** (μ = - 1) invertono :

- L'Energia **E**
- L'impulso **p**
- La carica elettrica **e**

Possiamo esprimere Λ utilizzando il sottoinsieme ortocrono L_o del gruppo di Lorentz e, aggiungendo ($\lambda = \pm 1$), introdurre (nei due fogli) la dualità materia-antimateria.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mu L_o & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Il sottogruppo del gruppo di Kaluza che scegliamo si scrive allora :

$$\begin{pmatrix} \mu L & 0 & \Delta\xi \\ 0 & \lambda & \Delta\zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix}$$

ANNESSO 6 :
SPAZi iMMAGiNARi
AVETE DUNQUE UN'ANiMA ?

Ricordiamoci che facendo interagire i due sottoinsiemi cosmici, di energie e masse opposte, avevamo rappresentato questi due fogli come il rivestimento di un proiettivo, il quale, nel caso a due dimensioni (t,x) diventava una **SUPERFICIE DI BOY** (*) (si veda pag.   )

Avevamo inoltre supposto che i due poli,
l'uno rappresentante il **BIG BANG** e l'altro il **BIG CRUNCH**,
invece di essere uniti, corrispondessero ad un passaggio,
un ponte che unisce i due fogli. Cio' facendo sparire la singolarità e inoltre,
in 2d, dando all'universo la topologia di un toro **T2** visto come rivestimento
a due fogli di una bottiglia di Klein **K2**
(più chiaramente esposto nel **TOPOLOGICON** pag. 24)
Lo spazio frontiera é allora una circonferenza **S1**.

(*) Descritto esaurientemente nel **TOPOLOGICON**

Se ci poniamo ora in 5d bisogna supporre che si possa costruire una soluzione con due metriche di tipo

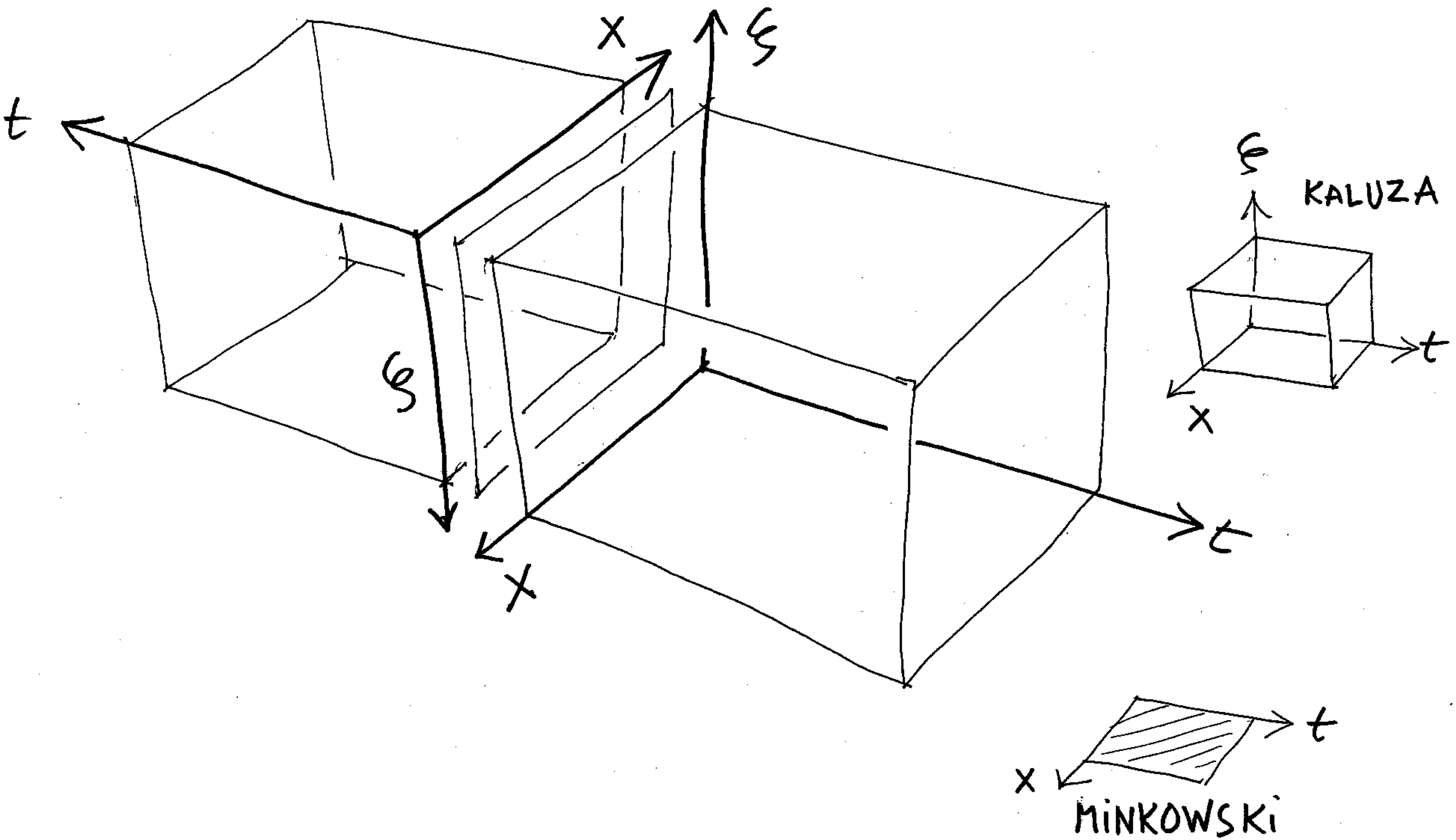
$$\boxed{d\Sigma^2 = R^2\left[dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\xi^2\right]}$$

Nell'universo primitivo (si veda **PIÙ VELOCE DELLA LUCE**), prima della **ROTTURA DI SIMMETRIA** i due fattori di scala (*warp factors*) sono supposti uguali. Alla giunzione c'é una riduzione dimensionale. La metrica dello spazio-frontiera diventa allora :

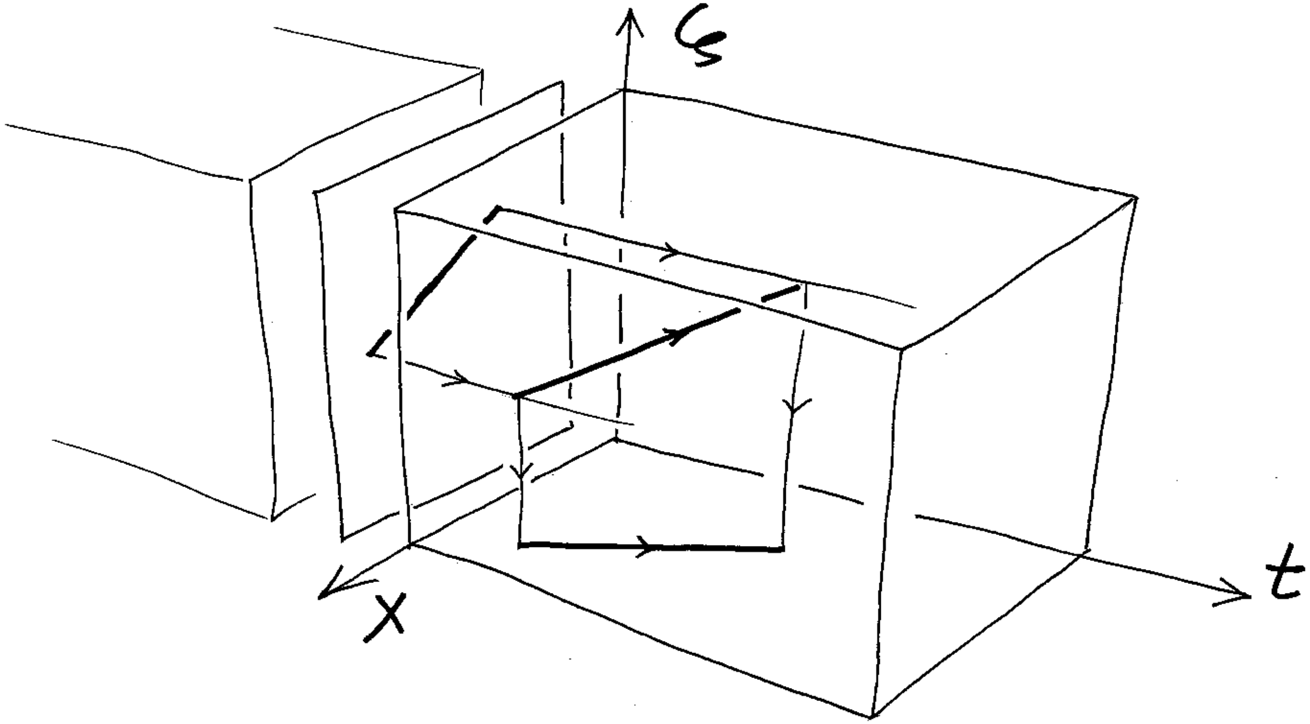
$$\boxed{d\sigma^2 = R_{min}^2\left[- dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\xi^2\right] < 0}$$

IN QUESTO SPAZIO-FRONTIERA, LA LUNGHEZZA E' IMMAGINARIA PURA.
E' POSSIBILE ASSIMILARLA AD UN TEMPO IMMAGINARIO ?

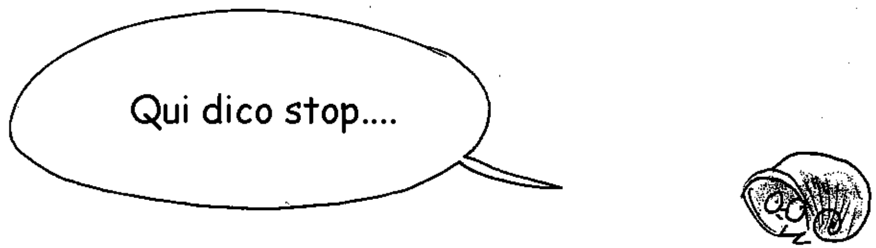
IN OGNI CASO, QUALE SIGNIFICATO (META)FISICO POSSIAMO ATTRIBUIRE A QUESTA STRUTTURA GEOMETRICA ?



II "TOY MODEL"

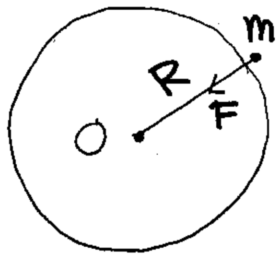


Nessuno si é mai avventurato alla ricerca di un modello per spiegare il significato della **COSCIENZA** ed il suo funzionamento attraverso il libero arbitrio, la **SCELTA**.
Qui sopra abbiamo una rappresentazione schematica nella quale una "linea-destino", acrona, iscritta in questo spazio frontiera (x, y, z, ζ) di segnatura (- - - -) si puo' proiettare in un infinità di modi possibili su ognuno dei due fogli di spaziotempo (x, t), dove la scelta di una determinata proiezione rappresenta un **GRADO DI LIBERTA'**.



ANNESSO 7 : SOLUZiONi NEWTONiANE

Nel 1934 Milne e Mac Crea hanno stupito tutti quanti facendo apparire l'equazione di Friedman, cche fornisce la legge d'evoluzione della dimensione caratteristica R dell'universo, con pochi calcoli e la legge di Newton. Il metodo consiste nel considerare una porzione d'universo, contenuta in una sfera di raggio R e di centro O, con densità di materia ρ. Si cerca allora l'accelerazione R" alla quale questa massa é sottoposta supponendo che il punto O sia fisso. Si puo' allora dimostrare che la forza



radiale alla quale questa massa m é sottoposta si limita a quella di una massa M= $4/3\ \pi R^3 \rho$, supposta in O , e che rappresenta la massa totale contenuta in questa sfera di raggio R.

$$F = -\frac{Gm}{R^2}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = m R''$$

Si ottiene l'equazione differenziale :

$$R'' = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{4\pi G \rho R^3}{3}\right)$$

Se la massa si conserva si ottiene quindi l'equazione di Friedman :

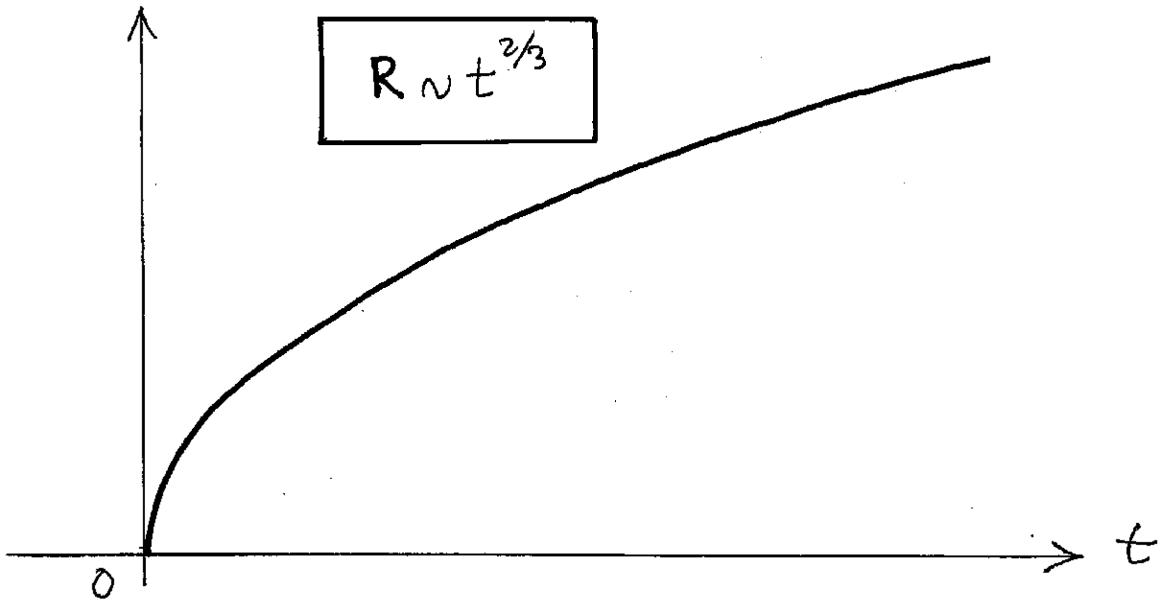
$$R'' = -\frac{a^2}{R^2}$$

che possiede tre soluzioni, che mostrano tutte e tre una decelerazione, infinita per R = 0 poi decrescente nel tempo con l'espansione R(t) . Cerchiamo la legge in :

$$R \sim t^n$$

$$R' = n a^2 t^{n-1} \quad ; \quad R'' = n(n-1) a^2 t^{n-2} \quad ; \quad R^2 R'' = n(n-1) a^6 t^{3n-2}$$

che conduce alla soluzione parabolica :



Immaginiamo ora che l'evoluzione dell'universo dipenda da due popolazioni, una di masse positive m^+ ed una di masse negative m^-. Inoltre, come abbiamo cercato di far capire in questo libro, questa espansione si svolge secondo due FATTORI DI SCALA $\mathbf{R^+}$ E $\mathbf{R^-}$ (*warp factors*).

Consideriamo una massa m+, positiva, situata su di una sfera di raggio $\mathbf{R^+}$ il cui centro é supposto fisso. Nel caso di una approssimazione newtoniana calcoliamo l'accelerazione $\mathbf{R^{+''}}$ che essa subisce. Si puo' calcolare considerando, come l'abbiamo già fatto precedentemente, la quantità di massa positiva contenuta in questa sfera (e supposta nel suo centro O) :

$$\frac{4}{3}\pi \rho^+ R^{+3}$$

In seguito bisogna tener conto della MASSA APPARENTE della massa negativa contenuta in questa sfera, che é :

$$\frac{4}{3}\pi \rho^- R^{+3} \qquad \text{con} \qquad \frac{\rho^-}{\rho^+} = \frac{R^{+3}}{R^{-3}}$$

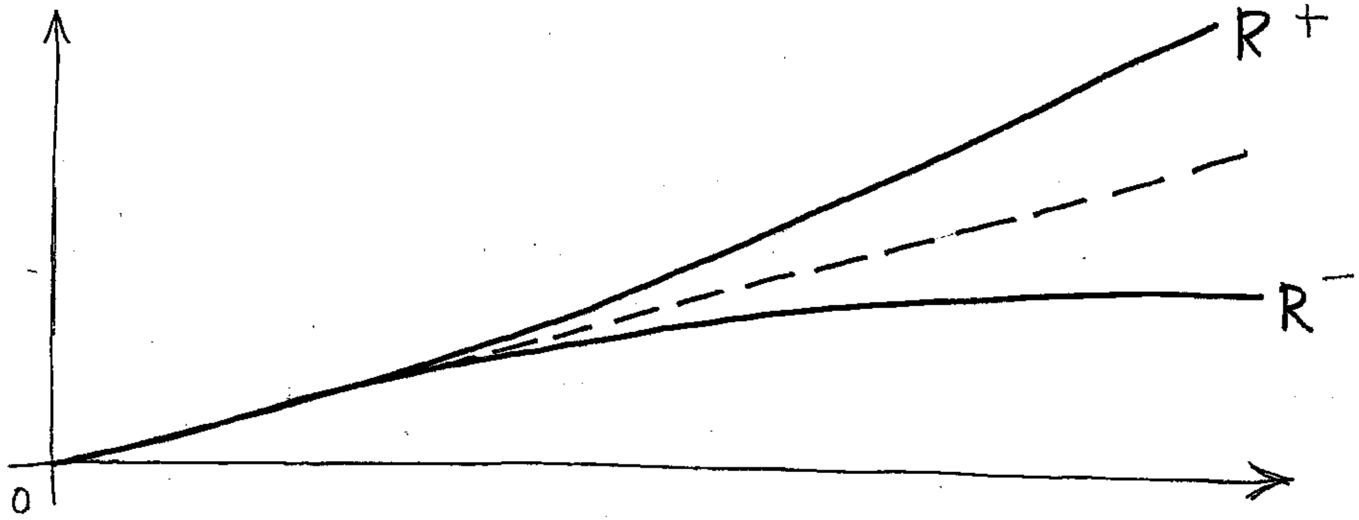
L'equazione differenziale che ci da $\mathbf{R^+}(t)$ é allora :

$$R^{+''} = -\frac{Gm^+}{R^{+2}} \times \frac{4\pi R^{+3}}{3}\left(\rho^+ - \rho^-\right) = \frac{-a^2}{R^{+2}}\left(1 - \frac{R^{+3}}{R^{-3}}\right)$$

Facendo lo stesso ragionamento ed utilizzando questa volta l'accelerazione $R^{-''}$ che subisce una massa m^- e prendendo la costante (arbitraria) a uguale ad 1, avremo il sistema di due equazioni differenziali :

$$\begin{cases} R^{+''} = -\dfrac{1}{(R^+)^2}\left(1 - \dfrac{(R^+)^3}{(R^-)^3}\right) \\[2ex] R^{-''} = -\dfrac{1}{(R^-)^3}\left(1 - \dfrac{(R^-)^3}{(R^+)^3}\right) \end{cases}$$

il quale ammette la soluzione lineare (instabile) $R^+ = R^- \sim t$.



L'instabilità della soluzione, supponendo che le masse positive subiscanoun'accelerazione tardiva, darà l'illusione di un'**ENERGIA OSCURA**.

Questi due mondi costituiti da masse ed energie opposte interagiscono.
Nel caso illustrato alla pagina precedente le masse negative, più dense, accelerano il fenomeno dell'espansione delle masse positive, associate al fattore di scala $R^+(t)$. Il fenomeno opposto si produce nel negamondo, nel quale un osservatore costituito da masse negative e ricevendo segnali portati da **FOTONI AD ENERGIA NEGATIVA**, constaterebbe, al contrario, un rallentamento dell'espansione.

L'inizio della curva, dove l'espansione appare lineare, puo' sembrare incompatibile con le osservazioni.
Ma in seguito si produce una **ROTTURA DI SIMMETRIA** ed una **VARIAZIONE DELLE COSTANTI**, in particolare della velocità della luce, senza la quale la grande omogeneità dell'universo primitivo non sarebbe stata possibile. Tutto cio' é descritto nell'album

PIU' VELOCE DELLA LUCE

FiNE