

**Modello cosmologico di Giano**  
*Universo bimetrico: prospettive e sfide*

Hicham ZEJLI<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Ingegnere laureato presso ENSISA - [hicham.zejli@manaty.net](mailto:hicham.zejli@manaty.net)

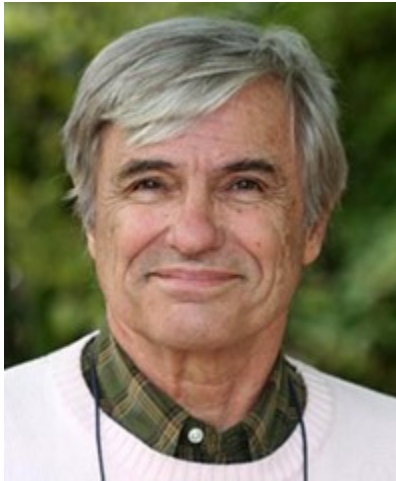
## Indice dei contenuti

Prefazione di Jean-Pierre Petit (Francia) .....	5
1 Introduzione .....	13
1.1 Presentazione del contesto e degli obiettivi del libro.....	13
1.2 Breve introduzione al modello cosmologico di Giano e alla sua importanza .....	13
2 Basi teoriche .....	15
2.1 Legge di Gravitazione di Newton .....	15
2.2 Introduzione alla relatività speciale .....	15
2.2.1 Spazio-tempo e tempo proprio di Minkowski.....	15
2.2.2 La velocità della luce come limite .....	17
2.2.3 Concetti fondamentali .....	17
2.2.4 Equivalenza massa-energia.....	17
2.3 Introduzione alla relatività generale .....	18
2.3.1 Una rivoluzione in fisica .....	18
2.3.2 Effetti osservabili e conferme sperimentali.....	19
2.3.3 Geometria spazio-temporale ed equazioni geodetiche .....	21
Quadro inerziale e coordinate .....	21
Trasformazione coordinata in un quadro di riferimento accelerato per il laboratorio .....	21
2.3.4 Tensori metrici.....	24
2.3.5 Simboli Christoffel.....	26
2.3.6 Applicazione dell'equazione geodetica nel limite del campo debole.....	32
2.3.7 Soluzioni di Karl Schwarzschild e Ludwig Flamm.....	36
2.3.8 Costruzione di geodetiche per la metrica esterna di Schwarzschild.....	37
2.3.9 La soluzione Roy Kerr.....	44
2.4 L'opera di Andrei Sakharov e Jean-Marie Souriau .....	45
2.5 Approccio bimetrico introdotto dalla geometria riemanniana iperbolica .....	46
3 Modello cosmologico di Giano .....	48
3.1 Descrizione .....	48
3.2 Implicazioni.....	49
3.3 Il respingente di dipolo.....	57
3.3.1 Introduzione.....	57
3.3.2 Alcuni tentativi di interpretazione .....	57

3.3.3	Interpretazione con lacune di materia oscura .....	58
3.3.4	Interpretazione con il modello cosmologico di Giano .....	59
3.3.5	Prospettive future .....	78
4	Contributo alla cosmologia e alla fisica delle particelle .....	78
4.1	Introduzione ai gruppi dinamici .....	78
4.2	Varie simmetrie associate a ciascun operatore di inversione .....	81
4.3	Gruppo Dinamica di Lorentz.....	82
4.4	Gruppo dinamico di Poincaré ristretto.....	82
4.5	Gruppi dinamici Kaluza e Janus ristretti.....	83
4.6	Gruppo Janus Dynamic .....	83
4.7	Implicazioni.....	86
5	Interpretazione alternativa del modello del wormhole accoppiato con una fontana bianca come <i>membrana a senso unico</i> .....	88
5.1	Soluzioni dell'equazione di Einstein che riflettono diverse topologie .....	88
5.2	Ipotesi di <i>staticità</i> : assenza del termine incrociato $dr dt$ .....	92
5.3	Costruzione di una soluzione geometrica infinita a due fogli lorentziani .....	92
5.3.1	Simmetria T .....	92
5.3.2	Simmetria P .....	93
5.3.3	Identificazione dei due fogli.....	94
5.4	Un'altra rappresentazione di questa geometria .....	95
5.5	Conclusione .....	96
5.6	Appendice .....	97
6	Interpretazione topologica del modello.....	98
6.1	Definizione.....	98
6.2	Modello di wormhole .....	98
6.3	Modello di Universo .....	99
7	Interpretazione alternativa degli oggetti supermassicci subcritici M87 e Sagittarius A* 105	
7.1	Introduzione .....	105
7.2	Interpretazione alternativa del fenomeno.....	109
7.2.1	Confronto tra criticità fisica e geometrica .....	109
7.2.2	Redshift gravitazionale vicino alla criticità fisica .....	110
7.2.3	Variazione della velocità della luce e della pressione in plasmi a densità costante.....	113
7.3	Conclusione .....	113

8	Sfide e dibattiti.....	115
8.1	Sfide nella comunicazione e nell'accettazione del modello.....	115
8.2	Discussione delle critiche e delle risposte.....	116
	Risposta da <i>Gravitazione e cosmologia</i> .....	116
	La mia risposta a questo recensore .....	117
	Analisi critica dei ritorni delle <i>Astronomische Nachrichten</i> .....	118
9	Conclusione e discussione .....	120
	Bibliografia.....	122

## Prefazione di Jean-Pierre Petit (Francia)



L'anno è il 2024. Fate i conti. Sono nato nel 1937. Mentre scrivo queste righe, avrò 87 anni. Il tempo passa così velocemente che quando leggerete queste righe potrei non essere più tra noi. Sto scrivendo queste pagine e credo che Hicham si senta allo stesso modo, come se gettasse in mare una bottiglia contenente un messaggio di appello. Mentre scrivo queste righe, il team Janus è ridotto a tre uomini. Oltre a Hicham, nato nel 1979, c'è un giovane matematico, David, nato nel 1985, e questo è tutto. Nel 2022, ero l'unico a occuparmi di questo progetto Janus da quarant'anni. Questi due si sono uniti a me dopo aver ascoltato una conferenza che ho tenuto nel gennaio 2023 a Parigi.

Mi sento di dire: cosa sta succedendo nel mondo della scienza?

Più di un secolo fa, come sapete, il mondo scientifico fu messo sottosopra dall'improvvisa comparsa di due nuove discipline: la meccanica quantistica e la cosmologia. Così, per settant'anni, i progressi scientifici si sono susseguiti a un ritmo impressionante. I teorici fornivano una spiegazione a un fatto noto da tempo, come l'avanzamento del perielio di Mercurio, un fenomeno che la meccanica newtoniana si era dimostrata incapace di spiegare. Oppure si trattava di nuove osservazioni, come la scoperta dell'espansione dell'universo, di cui il russo Alexander Friedman fu rapido a dare conto producendo la prima soluzione instabile dell'equazione introdotta da Einstein nel 1915, che ora costituisce la base di questa nuova visione del mondo, la relatività generale.

A volte i teorici hanno una nuova visione, proponendo strani oggetti che utilizzano per rendere più equilibrati i loro calcoli. Un esempio è l'antimateria, la cui esistenza fu ipotizzata dall'inglese Paul Dirac nel 1928.

A titolo aneddotico, citiamo la reazione del danese Niels Bohr, dopo aver letto questo articolo:

*"Questa teoria sembra ideale per catturare gli elefanti in Africa. Appendiamo l'articolo di Dirac a un albero. Un elefante arriva e legge l'articolo di Dirac. È così stupito che è facile catturarlo.*

Ma la Natura si dimostrò amica di Dirac e nel 1931 confermò l'esistenza di anti-elettroni nei raggi cosmici. All'epoca non eravamo in grado di ricreare questa antimateria nei collisori di particelle. Furono quindi i fotoni gamma provenienti dalle profondità del cosmo a trasformarsi in una coppia elettrone-antielettrone, un oggetto che divenne noto come positrone.

Questa rivoluzione, descritta come un cambiamento di paradigma, è iniziata nel 1895 con le scoperte di Conrad Röntgen, Henri Becquerel e J.J. Thomson, che hanno annunciato il drammatico ingresso delle particelle e dei fenomeni atomici sulla scena scientifica. Per decenni, i teorici da una parte e gli sperimentatori e gli osservatori dall'altra assomigliavano a due gruppi di cavalli di razza che galoppavano fianco a fianco, alcuni a poca distanza dagli altri.

Tutto questo è continuato per pochissimi decenni dopo la seconda guerra mondiale. Tra le scoperte più importanti c'è stata la scoperta accidentale, nel 1967, del fondo cosmico a microonde, una popolazione di fotoni a bassa energia che ha fornito la prova che all'inizio dell'universo ha avuto luogo una fantastica annichilazione di coppie materia-antimateria.

Alla fine degli anni '60, la preoccupazione di quelli che oggi chiamiamo cosmologi era semplicemente quella di determinare il valore della densità media dell'universo. Se era superiore a  $10^{-29}$  grammi per centimetro cubo, allora l'universo si sta evolvendo ciclicamente. Dopo una fase di espansione, collassa su se stesso, producendo un Big Crunch. Se questa densità è inferiore, allora nel lontano futuro dell'universo le galassie si allontaneranno l'una dall'altra, indefinitamente, a velocità che diventeranno costanti. E se questa densità fosse uguale a questo valore, allora diciamo che l'evoluzione si trova tra questi due estremi.

Lo ricordo perfettamente: fu in quel periodo che iniziai la mia carriera di ricercatore, alla fine degli anni Sessanta.

Cosa succede dopo?

Molto rapidamente, la meccanica andò in tilt e tutto andò di male in peggio. I teorici della fisica delle particelle, emersi con il secolo grazie alle maggiori energie messe

in gioco dagli acceleratori, prevedevano la comparsa di nuovi oggetti, che chiamavano superparticelle.

Ma non è successo nulla.

All'alba degli anni '80, per spiegare la velocità con cui le stelle ruotano nelle galassie e perché la forza centrifuga non le fa esplodere, è stata proposta l'esistenza della materia oscura, che rappresenta i quattro quinti della massa totale dell'universo.

Nel 1989, le osservazioni effettuate dal satellite COBE rivelarono l'estrema omogeneità dell'universo primordiale. Per giustificare ciò, un giovane russo, Andrei Linde, propose la sua teoria dell'inflazione, secondo la quale l'universo, quando aveva solo pochi secondi, subì un'improvvisa espansione di un fattore  $10^{33}$  secondi, subì un'improvvisa espansione di un fattore di  $10^{26}$ . Questo è stato causato da un nuovo campo costituito da nuove particelle, note come inflatoni. Oggi esistono tanti modelli di inflatoni quanti sono i ricercatori specializzati in questo campo.

Nel 2011 è stato assegnato il premio Nobel per un'altra scoperta: quella dell'accelerazione dell'espansione cosmica, attribuita all'energia oscura. Traducendo la sua importanza con l'espressione di Einstein  $E = mc^2$  questa volta il 75% del contenuto cosmico sfugge all'osservazione.

Nel 2024, mentre scrivo queste righe, non esiste un modello credibile di energia oscura. Facendo due conti, la materia ordinaria osservabile rappresenta solo il 4% del brodo cosmico.

Sono stati proposti diversi candidati per la materia oscura, il principale dei quali è il neutralino, un rappresentante dell'ipotetica famiglia di superparticelle. Tuttavia, a parte l'impossibilità di farla apparire nei potenti collisori, essa sfugge a tutti i tentativi di rilevazione nei costosi esperimenti condotti in tunnel e miniere, protetti dalle radiazioni cosmiche da uno spesso strato di roccia.

E sul fronte della teoria?

All'inizio degli anni Settanta, quando la mancanza di risultati degli esperimenti di fisica delle alte energie spinse a cambiare paradigma, un gruppo di ricercatori propose di rappresentare sia le particelle materiali sia quelle associate alle radiazioni con un nuovo modello costituito da corde vibranti, aperte o chiuse. La maggior parte dei teorici abbracciò quella che vedeva come una nuova e promettente direzione. Vennero creati posti di ricerca e di insegnamento in ogni paese. Si formarono gruppi di lavoro. I leader di questo

movimento arrivarono persino a sognare di costruire una teoria del tutto. Questa corrente di pensiero ha dato origine a montagne di articoli e tesi di dottorato.

Qual è la situazione all'alba del terzo millennio?

Niente: la montagna partorisce un topo.

La situazione attuale ricorda il racconto di Hans Christian Andersen *"I vestiti nuovi dell'imperatore"*. Quando, alla fine della storia, un bambino scrive: *"È nudo!"*.

Il libro di Hicham è la storia di un cambiamento di paradigma che si può riassumere in una frase: *l'universo è composto da masse positive e negative*.

Perché no, dopotutto?

Ma questa idea è come un filo che sporge. Si tira questo filo: ne segue una corda. Si tira il filo e si attacca una corda. Si tira la corda e ne segue un cavo pesante, la cui trazione fa tremare l'edificio.

Quale edificio?

La sacrosanta relatività generale di Albert Einstein, la cui equazione è scolpita nella pietra degli istituti di fisica di tutto il mondo.

Questo significa che la teoria è sbagliata?

No, è solo una faccia della medaglia. Deve essere integrata in un sistema di due equazioni di campo accoppiate. Nelle pagine di questo libro troverete tutto ciò che è emerso da questa idea sacrilega.

Nel gennaio 2023, essendo stato l'unico a portare avanti questo grande progetto per quarant'anni, ho tenuto una conferenza a Parigi, alla quale hanno partecipato David e Hicham.

David è un giovane matematico. Pur avendo una tesi di dottorato, non è attratto dalle pressioni della ricerca e preferisce insegnare matematica all'università.

A volte si dice che sono i ricercatori ad appropriarsi delle idee. In realtà, è vero il contrario. Sono le idee che si impossessano dei ricercatori. L'idea di una diversa topologia dell'universo, alla base del mio modello di Giano, si è impossessata di David. Negli ultimi



dieci mesi ha lottato per pubblicare le basi matematiche di questo modello sulle riviste di fisica matematica. Forse quando leggerete queste righe, la pubblicazione di questo lavoro avrà finalmente trovato spazio in queste riviste di alto livello. In tal caso, la trappola sarà pronta, nella speranza che altri matematici vengano scoperti.

Le nuove idee sono come le trappole usate in Africa per catturare le piccole scimmie. Una conchiglia cava con un foro viene posta alla loro portata. All'interno della conchiglia c'è un pezzo di frutta, che a loro piace molto, ma il cui diametro è esattamente uguale a quello del buco. Quando la scimmia infila la mano nel buco, le è impossibile estrarre sia la mano che il frutto. Io stesso sono stato vittima di una trappola simile quarant'anni fa. Mi è passata davanti un'idea che si è impossessata dei miei neuroni. Quando un'idea è logica, funzionale e fruttuosa, è molto difficile liberarsene. E, infine, se quell'idea è coerente con le osservazioni, rifiutarla diventa semplicemente impossibile, il che complica molto la tua vita rendendoti una sorta di mutante, un estraneo all'interno della tua comunità scientifica. A meno che non si decida di rimanere nel labirinto.

Nel 1959 un inglese, Arthur Koestler, scrisse un libro intitolato *Les somnambules* (I sonnambuli). Descrisse gli scienziati come persone che, nel sonno, camminano con gli occhi chiusi ed entrambe le mani tese davanti a loro, cercando di trovare la strada. Senza saperlo, camminano in un labirinto. Senza sapere come è costruito, a volte passano davanti a una porta spalancata, senza riuscire a vederla, mentre intraprendono un percorso che si rivela un vicolo cieco. Questa idea non è nuova. Un'idea simile, più statica, si trova nel mito della caverna di Platone.

Vorrei ora parlare di ciò che è accaduto a Hicham Zejli. Nel gennaio 2023, mentre lavorava come ingegnere informatico in un'azienda francese, fu incuriosito dal contenuto della conferenza che stavo tenendo a Parigi sul mio modello cosmologico Janus. Ha quindi guardato la trentina di video che avevo creato nel 2017 e ha letto tutti i libri sull'argomento, per presentare le caratteristiche principali di questo modello. Rifà tutti i calcoli che trova nei file pdf che ho messo su Internet e che accompagnano i miei video. E poi la trappola si chiude.

Se leggete il suo libro, fate attenzione! Potreste esserne vittime anche voi. Queste pagine potrebbero portarvi a scalare una delle pareti del labirinto, aprendo gli occhi. Il mondo della scienza vi apparirà allora in modo diverso. Come nel caso di Hicham, vedrete improvvisamente persone, a volte vincitrici dei premi più prestigiosi, vagare come sonnambuli, girando in tondo in un labirinto. Modelli che sono stati accettati da coloro che compongono la cosiddetta comunità scientifica vi appariranno come l'ovvia conseguenza di palesi errori di calcolo. Vedrete come questi sonnambuli passano più e più volte davanti a nuove strade spalancate, magnificamente in linea con una massa di osservazioni, senza riuscire a vederle, aggrappandosi a idee che non sono altro che assi, marce, febbrilmente inchiodate

alle brecce che gli scogli della dura realtà hanno causato in un Modello Standard che perde da tutte le parti.

E vi verrà voglia di gridare, come il personaggio di Andersen, "*Il re è nudo* !

Il lavoro che Hicham ha svolto in meno di un anno è notevole, anche se lo ha fatto al di fuori delle sue attività professionali, in quello che si potrebbe definire il suo tempo libero. In dodici mesi, ha compreso e assimilato in profondità, piuttosto che superficialmente, una massa sorprendente di cose relative alle diverse aree interessate dal mio modello Janus. Non ho mai visto nessuno ingoiare e digerire così tante cose, così complesse, in così poco tempo.

Diventando il primo cronista di questa fantastica avventura che è il modello Janus e tutto ciò che ne deriva, ne dà testimonianza in questo libro, che doveva essere scritto. Già da mesi è impegnato attivamente nella stesura di articoli e non vuole perdersi nulla di questa avventura. Più che un semplice testimone, vuole essere uno dei protagonisti e noi vogliamo che lo diventi, apportando le sue idee e i suoi contributi personali all'edificio. Per garantire la più ampia diffusione possibile, il libro che ha scritto è disponibile come pdf scaricabile gratuitamente in tutte le lingue, e dovrebbe continuare a essere sviluppato con questo spirito. C'è qualcosa di speciale nella conoscenza: una volta che l'hai data via, non puoi riprenderla, e in una certa misura è difficile farla tua.

L'immagine è quella di tre uomini appollaiati su una zattera di fortuna, che infilano messaggi in bottiglie in lingue diverse, consegnandole una dopo l'altra alle correnti casuali del mare. Potrei non essere più vivo quando leggerete queste righe. Il tempo passa così velocemente. Che ne sarà di tutto questo? Non lo so.

Ho la vaga sensazione che l'umanità abbia oggi un appuntamento con il suo destino, che al di là di questo modello cosmologico stia prendendo forma una visione diversa e ancora più vasta dell'universo. Per illustrare ciò, citerò la fine del discorso di accettazione del Premio Nobel per la Pace di Andréi Sakharov nel 1975. Parole che faccio mie:

*« Migliaia di anni fa, le tribù umane soffrivano grandi difficoltà nella loro lotta per l'esistenza. Allora era importante non solo saper maneggiare un manganello, ma avere la capacità di pensare in modo intelligente, di tenere conto delle conoscenze e delle esperienze accumulate dalla tribù e di sviluppare i legami che avrebbero gettato le basi per la cooperazione con altre tribù. Oggi la razza umana si trova ad affrontare una prova simile. Nello spazio infinito potrebbero esistere diverse civiltà, tra cui società più sagge ed efficienti della nostra. Sostengo l'ipotesi cosmologica che lo sviluppo dell'universo si ripeta un numero infinito di volte, secondo caratteristiche essenziali. Altre civiltà, comprese alcune delle più "riuscite", sono iscritte un numero infinito di volte nelle pagine "successive" o "precedenti" del Libro dell'Universo. Tuttavia, non dobbiamo minimizzare i nostri sacri sforzi in questo mondo, dove, come deboli luci nell'oscurità, siamo emersi per un istante dal nulla dell'oscura incoscienza all'esistenza*

*materiale. Dobbiamo rispettare le esigenze della ragione e creare una vita che sia degna di noi stessi e degli scopi che appena percepiamo »*

*Jean-Pierre Petit, cittadino del mondo - [jean-pierre.petit@manaty.net](mailto:jean-pierre.petit@manaty.net)*



Hicham ZEJLI - 22 settembre 1979 - nazionalità francese

# 1 Introduzione

## 1.1 Presentazione del contesto e degli obiettivi del libro

Nell'attuale panorama della cosmologia e della fisica teorica, l'esplorazione di nuovi modelli per spiegare i fenomeni osservati nel nostro universo rimane un'area di ricerca vivace e controversa. Questo libro si propone di esplorare e presentare un modello cosmologico innovativo e rivoluzionario, il Modello Cosmologico di Giano (JCM), sviluppato dal fisico Jean-Pierre Petit.

Come ingegnere con una formazione avanzata in matematica e fisica, ho individuato nello studio del Modello Cosmologico di Giano un approccio innovativo e intellettualmente gratificante per esplorare e interpretare alcuni dei fenomeni più enigmatici dell'universo. Questo approccio apre anche la strada allo sviluppo di molte applicazioni pratiche su scala locale, basate sui principi fondamentali derivati da questo modello.

Questo libro ha due obiettivi principali:

In primo luogo, fornire una spiegazione dettagliata del Modello Cosmologico di Giano, dei suoi fondamenti e delle sue implicazioni attraverso alcuni studi, accessibili a scienziati con un background simile al mio, ossia un livello avanzato in matematica e fisica teorica.

In secondo luogo, nonostante l'intensa, gratificante e diversificata collaborazione all'interno del nostro team, vorrei sottolineare il marcato contrasto causato dalla mancanza di comunicazione con i revisori consultati dalle principali riviste scientifiche peer-reviewed. Questa situazione evidenzia le sfide che le idee innovative possono affrontare per emergere e svilupparsi senza un dialogo significativo e costruttivo tra i ricercatori.

## 1.2 Breve introduzione al modello cosmologico di Giano e sua importanza

Il Modello Cosmologico di Giano si distingue nel panorama della fisica teorica per la sua proposta audace: descrivere l'universo come una varietà riemanniana con due metriche. Questa costruzione si basa sulla teoria della relatività generale di Einstein e incorpora elementi della fisica delle particelle e della geometria simplettica. Il modello affonda le sue radici nel lavoro di Andrei Sakharov e Jean-Marie Souriau, che hanno stabilito un legame tra l'inversione del tempo, l'inversione dell'energia e, di conseguenza, l'inversione della massa.

Uno dei principali contributi del modello è la sua capacità di affrontare il problema dell'asimmetria barionica dell'universo. Questa questione, al centro degli attuali dibattiti in cosmologia, riguarda la predominanza osservata della materia sull'antimateria, che sfida le previsioni del modello del Big Bang. Il modello cosmologico di Giano offre una nuova prospettiva su questo problema, postulando l'esistenza di un universo bidimensionale derivante dalla stessa singolarità, dominato da materia e antimateria. L'originalità del modello risiede anche nel suo approccio bimetrico all'universo, in cui due "strati" di spazio-tempo interagiscono per effetto gravitazionale, offrendo spiegazioni alternative per fenomeni come l'energia oscura e la materia oscura e aprendo potenzialmente nuove conoscenze sui viaggi interstellari.

In breve, questo libro intende presentare questo modello come un approccio innovativo,

che sfida le attuali prospettive della cosmologia e della fisica teorica e invita a una profonda riflessione su possibilità inesplorate per la nostra comprensione dell'universo.

## 2 Fondamenti teorici

### 2.1 La legge di Newton sulla gravitazione

La legge di Newton, formulata nello spazio euclideo, afferma che quando una massa  $m$  è soggetta all'influenza della forza gravitazionale  $G$  generata da un'altra massa  $M$  questa forza  $F$  è inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $d$  che separa le due masse. Può essere espressa dalla seguente equazione:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2}$$

Maggiore è la massa, maggiore è la forza, che però diminuisce rapidamente con l'aumentare della distanza a causa del termine  $d^2$  nel denominatore. Questa legge è essenziale per comprendere la gravità e i movimenti degli oggetti celesti.

In fisica, questa legge di gravitazione è stata fondamentale per comprendere le interazioni gravitazionali tra i corpi celesti, dalla Terra ai pianeti e alle stelle. Rimane una legge fondamentale della meccanica classica e ha svolto un ruolo cruciale nello sviluppo dell'astronomia e dell'astrofisica. È stata inoltre confermata da numerose osservazioni ed esperimenti nel corso dei secoli, rafforzando la sua validità nella nostra comprensione dell'universo.

Tuttavia, sebbene la legge di gravitazione di Newton si sia dimostrata estremamente potente e precisa in molti scenari, ha iniziato a mostrare i suoi limiti quando è stata applicata a situazioni che coinvolgevano velocità prossime a quella della luce o fenomeni su scala astronomica. Questo fu il punto di partenza per la nascita della Teoria della relatività speciale di Albert Einstein, che segnò un cambiamento di paradigma nella nostra comprensione dei concetti fondamentali di spazio, tempo e gravitazione. Nella prossima sezione faremo un'immersione profonda nei principi fondamentali della Relatività Speciale, che getterà le basi per la nostra successiva esplorazione della Relatività Generale. Questo ci porterà a una comprensione più profonda delle complessità del cosmo.

### 2.2 Introduzione alla relatività speciale

All'inizio del 20<sup>ème</sup> secolo, la fisica ha subito una rivoluzione concettuale, mettendo in discussione i fondamenti stabiliti da Sir Isaac Newton nel 17<sup>ème</sup> secolo. Man mano che le osservazioni e gli esperimenti diventavano sempre più precisi, cominciarono a comparire anomalie nello studio di velocità prossime a quella della luce e in ambienti cosmici estremi. In questo contesto, la Relatività Speciale di Albert Einstein entrò in scena, ribaltando la nostra tradizionale concezione di spazio, tempo e gravità.

#### 2.2.1 Spazio-tempo di Minkowski e tempo proprio

La Relatività Speciale ci invita ad abbandonare l'idea che l'universo si svolga in uno spazio euclideo tridimensionale in cui il tempo è un'entità separata. Propone invece un modello in cui risiediamo in un'ipersuperficie quadridimensionale, dove le tre dimensioni dello spazio sono perpendicolari a una dimensione del tempo. Questa fusione di spazio e tempo forma quello che è conosciuto come spazio-tempo di Minkowski, con una firma metrica  $(- + + +)$ . In altre parole, la firma metrica è un'importante caratteristica dello spaziotempo che

indica come gli intervalli di tempo e di spazio sono combinati nelle equazioni della relatività speciale. In questa firma  $(- + + +)$  il primo termine corrisponde all'intervallo di tempo, che viene sottratto ai tre termini successivi che corrispondono agli intervalli di spazio. Ciò significa che il tempo ha un segno negativo nella metrica, mentre le tre dimensioni spaziali hanno un segno positivo. Questa firma specifica è fondamentale per capire come si misurano le distanze e gli intervalli di tempo nella relatività speciale.

Per afferrare meglio questo concetto, immaginiamo un punto  $M$  che si muove in questo spazio-tempo descritto da due coordinate: il tempo  $(t)$  e la posizione spaziale  $(x)$ . Mentre questo punto si muove, un punto vicino  $M'$  corrisponde a valori leggermente modificati:  $(t + dt, x + dx)$ , dove  $dt$  e  $dx$  rappresentano piccoli incrementi di tempo e di spazio. Se consideriamo che questo incremento avviene lungo una traiettoria descritta da  $x = ct$  (dove  $c$  è la velocità della luce), allora  $dx = c dt$ .

A questo punto, introduciamo il concetto di *tempo pulito*. La quantità nota come tempo proprio, è una misura del tempo che regola la vita di un oggetto che si muove a velocità  $v$ . Per calcolare utilizziamo la seguente equazione:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

Questa equazione mostra come il tempo proprio ( $s$ ) sia legato ai cambiamenti nel tempo ( $dt$ ) e dello spazio ( $dx$ ) quando un oggetto si muove a velocità  $v$ . Essa rivela inoltre che il tempo proprio può variare in funzione della velocità e della traiettoria dell'oggetto, dando luogo a fenomeni come la dilatazione temporale.

Nella teoria della relatività speciale di Einstein, il tempo non è assoluto ma dipende dalla velocità relativa dell'osservatore. Il seguente sviluppo matematico descrive la relazione tra tempo proprio  $\tau$  che è il tempo misurato dall'orologio in movimento (a bordo della navicella spaziale), e il tempo coordinato  $t$  che è il tempo misurato dall'orologio a terra (a riposo rispetto all'osservatore):

$$\begin{aligned} s = c\tau &\Rightarrow ds = c d\tau && \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \\ &\Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 && \Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} && \Rightarrow \tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Ciò implica che in uno scenario in cui  $t$  rappresenta il tempo misurato da un osservatore immobile dotato di orologio a terra e  $v$  è la velocità di un oggetto dotato di un orologio a bordo che si muove a questa velocità rispetto a questa presunta immobilità, allora il tempo proprio  $\tau$  in questo oggetto sarà influenzato dalla dilatazione temporale descritta da

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  noto come *fattore di Lorentz*.



### 2.2.2 La velocità della luce come limite

È importante notare che in questo spazio-tempo la velocità della luce è limitata dalle proprietà dello spazio-tempo (e del suo contenuto) in cui si sta propagando.

Se si assume che  $x$  è la coordinata spaziale  $t$  sia la coordinata temporale e  $c$  è la velocità della luce, allora possiamo definire una velocità  $v$  utilizzando l'espressione  $v = \frac{dx}{dt}$ .

Assumendo che la variazione del tempo proprio sia sempre maggiore o uguale a 0, cioè che la velocità della luce nel vuoto sia il limite ultimo per gli oggetti in movimento con massa a riposo positiva,  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \geq 0$  e consegue che la velocità della luce nel vuoto è il limite ultimo di velocità per gli oggetti in movimento con una massa a riposo positiva, poiché  $v \leq c$ . I fotoni, d'altra parte, seguono traiettorie per cui  $v = c$  che portano a proprietà uniche associate alla luce.

La Relatività Speciale è una teoria limitata allo studio dei quadri di riferimento inerziali, in particolare quelli in moto rettilineo uniforme (in spazi senza curvatura, che si muovono in linea retta a velocità costante).

### 2.2.3 Concetti fondamentali

La relatività speciale si basa principalmente su tre concetti:

- **Postulato di invarianza della velocità della luce:** questo postulato afferma che la velocità della luce nel vuoto è una costante universale e rimane la stessa per tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro moto relativo. In altre parole, la velocità della luce non può essere aggiunta o sottratta alla velocità di un osservatore. Questa idea fondamentale è stata confermata dal famoso esperimento di Michelson-Morley (Michelson e Morley 1887).
- **Principio cosmologico:** il principio cosmologico postula che l'universo sia omogeneo e isotropo. Ciò significa che le sue proprietà sono uniformi e identiche in tutte le direzioni e su tutte le scale. Questo principio ci permette di estendere l'applicazione delle leggi della relatività speciale alla scala cosmica, considerando l'universo nel suo complesso.
- **Principio di relatività speciale:** Il principio di relatività speciale afferma che le leggi fisiche sono coerenti in tutti i quadri di riferimento inerziali. I quadri inerziali sono quelli che si muovono a velocità costante l'uno rispetto all'altro. Questo principio generalizza il concetto di relatività di Galileo e mette in discussione la nozione di quadro di riferimento assoluto. Dimostra che le leggi fisiche rimangono coerenti e invarianti, indipendentemente dalle velocità relative degli osservatori.

### 2.2.4 Equivalenza massa-energia

Una delle equazioni più emblematiche della fisica è l'equazione di equivalenza massa-energia di Albert Einstein. Questa equazione indica una profonda connessione tra massa ( $m$ ) ed energia ( $E$ ), rivelando che sono intercambiabili nell'universo.

L'intuizione rivoluzionaria di Albert Einstein, che ha portato alla formulazione di questa equivalenza, deriva dalla sua teoria della relatività speciale. In questa teoria, Einstein ha postulato che l'energia e la massa sono intrinsecamente legate, e l'equazione serve come pietra angolare di questa unione.

Il concetto centrale dell'equazione è semplice: essa afferma che l'energia ( $E$ ) di un oggetto è direttamente proporzionale alla sua massa ( $m$ ), con la velocità della luce nel vuoto ( $c$ ) come costante di proporzionalità. Matematicamente, ciò può essere espresso come segue:

$$E = mc^2$$

Esploriamo questa equazione in modo più dettagliato con un semplice esempio. Supponiamo di avere un piccolo oggetto con una massa di 1 grammo (0,001 chilogrammi). Applicando l'equazione di Einstein, possiamo calcolare l'energia equivalente di questa massa:

$$E = (0.001 \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

Questa sorprendente quantità di energia sottolinea il profondo impatto dell'equazione (1). Dimostra che una piccola massa può produrre un'enorme quantità di energia se convertita utilizzando questa equazione. Questa equazione svolge un ruolo fondamentale nella comprensione delle reazioni nucleari, come quelle che avvengono nelle stelle e nelle centrali nucleari, dove minuscole variazioni di massa provocano un rilascio sostanziale di energia.

L'equazione di Einstein, con la sua capacità di collegare massa ed energia, rimane una pietra miliare della fisica moderna, influenzando profondamente la nostra comprensione del funzionamento dell'universo.

Sebbene la Relatività Speciale ci abbia permesso di esplorare aspetti affascinanti del cosmo, guidandoci in viaggi a velocità prossime a quella della luce e rivelando come lo spazio-tempo si pieghi in risposta al nostro moto, essa è confinata in un quadro specifico, quello dei quadri di riferimento inerziali e del moto rettilineo uniforme. Ma cosa succede quando entra in gioco la gravità? Come si evolve la struttura dello spazio-tempo in presenza di oggetti massicci o di una curvatura significativa? È qui che entra in gioco la Relatività Generale di Albert Einstein, nella prossima sezione.

## 2.3 Introduzione alla relatività generale

### 2.3.1 A rivoluzione della fisica

La legge di Newton è una teoria che funziona bene in molte situazioni, come spiegato nella Sezione 2.1, ma non è in grado di spiegare alcuni fenomeni osservati a velocità prossime a quella della luce o in presenza di intensi campi gravitazionali. La Relatività Generale (GR) di Albert Einstein è una teoria più completa che comprende questi effetti gravitazionali. Pietra miliare della fisica moderna, la Relatività Generale ha rivoluzionato la nostra comprensione della gravità e dell'universo. Proposta da Albert Einstein nel 1915, questa teoria si basa sul principio che la gravità è una manifestazione della curvatura dello spazio-tempo, indotta dalla presenza di massa ed energia. L'equazione di campo di Einstein, alla base di questa

teoria, descrive come la materia e l'energia influenzino la geometria dello spazio-tempo e, a sua volta, come questa geometria curva guidi il movimento di materia ed energia.

L'equazione di campo di Einstein, pubblicata per la prima volta il 25 novembre 1915, è la principale equazione differenziale parziale della relatività generale:

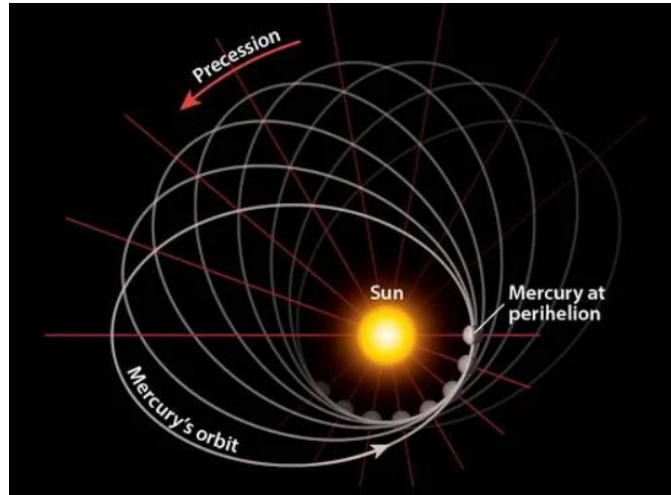
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Questa curvatura della geometria intorno a una sorgente di materia viene interpretata come il campo gravitazionale di questa sorgente. Il moto degli oggetti in questo campo è descritto in modo molto preciso dalla loro equazione geodetica. La metrica  $g_{\mu\nu}$  produce una famiglia di geodetiche. Si noti che le particelle con massa gravitazionale positiva o negativa si comporterebbero allo stesso modo, seguendo le stesse geodetiche quando vengono deviate dal potenziale gravitazionale creato da una massa significativa  $M$  per esempio nella gravità terrestre o solare. Quindi un oggetto massiccio, come una stella, influenza lo spazio-tempo non solo con la sua massa, ma anche con l'energia che emette, come la radiazione. Nella relatività generale, l'energia di un oggetto - compresa l'energia della sua massa a riposo rappresentata da  $mc^2$  e qualsiasi altra forma di energia, come la radiazione - contribuisce al campo gravitazionale che produce. Questo contributo combinato di energia e massa è ciò che curva lo spazio-tempo intorno all'oggetto. Il secondo termine tiene conto del contenuto dell'universo in ogni punto dello spaziotempo:

- **Se è diverso da zero**, la soluzione geometrica che emerge da questa equazione descriverà l'interno di una massa.
- **Se è zero**, la soluzione indotta da questa equazione si riferirà a una porzione di universo completamente vuota intorno a questa massa.

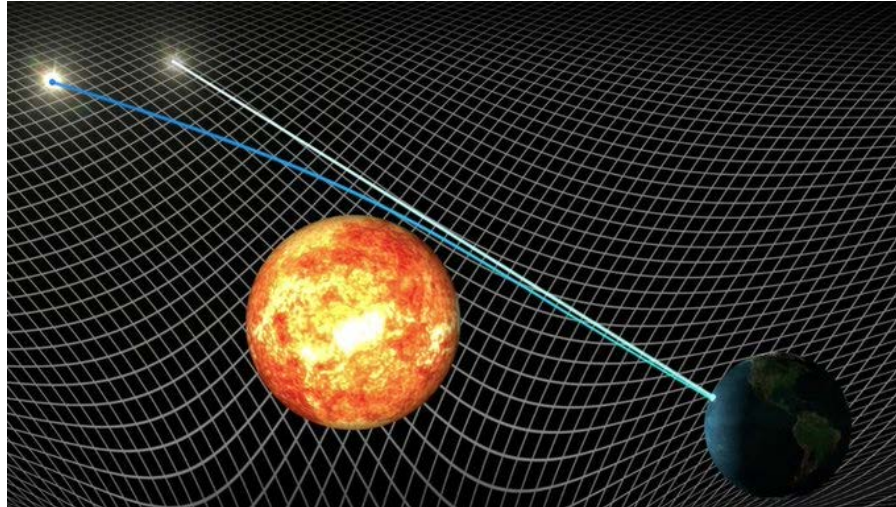
### 2.3.2 Effetti osservabili e conferma sperimentale

Tra i fenomeni spiegati da GR c'è la deviazione del piano di rotazione del pianeta Mercurio quando è più vicino al Sole, nota come precessione del perielio. Questo fenomeno è stato misurato con una precisione di 45 arcsecondi al secolo, un valore che non poteva essere spiegato dalla legge di Newton.



*Figura 2.1 - La precessione del perielio di Mercurio*

Un altro fenomeno osservato è l'apparente curvatura della luce intorno al Sole. Durante l'eclissi solare del 1919, Sir Arthur Eddington notò che i raggi di luce sembravano curvarsi intorno al Sole. In realtà, questi raggi luminosi seguono i percorsi più brevi nello spazio-tempo curvo, noti come geodetiche. Questa apparente curvatura della luce è dovuta alla deformazione dello spazio-tempo causata dalla presenza della massa, un effetto che GR ha spiegato con precisione ((Dyson, Eddington e Davidson 1920)).



*Figura 2.2 - Conferma della teoria di Einstein con la curvatura della luce stellare durante l'eclissi solare*

Questi fenomeni sono considerati non lineari perché possono essere spiegati solo dalla teoria GR. Tuttavia, in condizioni in cui gli effetti relativistici sono trascurabili, la legge di Newton può fornire valide approssimazioni. La GR ha quindi esteso la nostra comprensione della gravità oltre i limiti della legge di Newton, aprendo la strada a una migliore comprensione delle interazioni gravitazionali su grandi scale e ad alte velocità.

### 2.3.3 Geometria dello spazio-tempo ed equazioni geodetiche

Ricordiamo il principio di equivalenza di Einstein per un quadro inerziale in caduta libera:

*"In un campo gravitazionale è sempre possibile, in qualsiasi punto dello spazio-tempo, scegliere un sistema di coordinate localmente inerziale tale che, in una regione sufficientemente piccola, le leggi della fisica siano identiche a quelle in assenza di gravità".*

In questo quadro di riferimento di caduta libera, la forza inerziale avvertita da un corpo in caduta libera annulla la forza gravitazionale, il che significa che l'oggetto non è soggetto ad alcuna forza (stato di assenza di peso). Di conseguenza, il quadro inerziale è il quadro fondamentale per studiare gli oggetti interagenti (noto come quadro della relatività speciale) prima di analizzarli in un secondo quadro galileiano, noto come "quadro di laboratorio", in cui questi oggetti sono soggetti agli effetti della gravità. Quest'ultimo quadro è, infatti, accelerato verso l'alto ( $a = -g$ ) rispetto al quadro inerziale naturale (immaginate che "il terreno sulla Terra vi acceleri verso l'alto").

Nella teoria della relatività speciale, un quadro inerziale è descritto dalla metrica di Minkowski, che è una rappresentazione matematica dello spazio-tempo piatto. Questa metrica si applica nelle regioni in cui gli effetti della gravità sono assenti. In questo contesto, le traiettorie degli oggetti sono determinate dalle equazioni del moto derivate dai principi della relatività speciale. Mentre nella relatività generale si usa il termine "geodetiche" per lo spazio curvo dalla gravità, nella metrica di Minkowski della relatività speciale queste traiettorie sono meglio descritte come linee rette che rappresentano il moto a velocità costante. In questo quadro, gli oggetti in cornici inerziali si muovono in linee rette a velocità costante, un caso speciale di geodesica nello spaziotempo piatto.

#### Quadro inerziale e coordinate

Innanzitutto, posizioniamoci in questo quadro inerziale e definiamo le coordinate di una massa puntiforme in questo quadro: consideriamo le coordinate  $\xi^\alpha$  con  $\xi^0 = ct$ ,  $\xi^1 = x$ ,  $\xi^2 = y$ ,  $\xi^3 = z$  ai fini della nostra analisi. Poiché questo corpo non è soggetto ad alcuna forza (velocità costante), possiamo dedurre che :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$
$$d\tau^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Dove  $\tau$  corrisponde alla metrica o all'intervallo in questo spazio, che potremmo anche indicare come sed è importante notare che questa metrica è invariante indipendentemente dal quadro di riferimento.

#### Trasformazione delle coordinate in un quadro di riferimento accelerato per il laboratorio

Applichiamo ora una trasformazione di coordinate in un nuovo quadro di riferimento galileiano di laboratorio "accelerato verso l'alto" rispetto al precedente quadro di riferimento inerziale:

$$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Tuttavia, ogni coordinata del nuovo quadro galileiano dipende dalle coordinate del quadro inerziale e viceversa:

$$x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

E ricordate che  $\xi$  dipende da  $\tau$  :

$$\xi^\mu(\tau)(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Ogni parametro di  $\xi$  nel nuovo quadro di riferimento dipende anche da  $\tau$ . Possiamo quindi dedurre che :

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} + \frac{dx^1}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^1} + \frac{dx^2}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^3}$$

Questo può essere espresso utilizzando la notazione di sommatoria per gli indici ripetuti :

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

*NB:* In matematica, la notazione sommatoria è un modo compatto di rappresentare la somma di una serie di termini. Quando in un'espressione un pedice compare sia come pedice inferiore sia come pedice superiore, ciò implica generalmente una somma su quel pedice, cioè tutti i possibili valori di quel pedice vengono sommati. Questa notazione è comunemente utilizzata in vari campi della matematica e della fisica per semplificare la rappresentazione di equazioni che comportano indici ripetuti.

Ora vogliamo ricavare nuovamente questa espressione per ricavare l'equazione geodetica (2), quindi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \\ \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned}$$

Eeguire la sommatoria sugli indici ripetuti come segue :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$$

Dobbiamo eseguire questa operazione:

$$\left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) = 0$$

Tuttavia, per  $\beta \neq \mu$  le derivate parziali di una coordinata rispetto a un'altra coordinata dello stesso sistema di coordinate sono nulle (ad esempio,  $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ ), mentre per  $\beta = \mu$ , la derivata parziale è uguale a 1. Ciò corrisponde al simbolo di Kronecker ( $\delta_\mu^\beta$ ):

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta$$

*NB:* Quando  $\beta$  e  $\mu$  rappresentano coordinate diverse nello stesso sistema di coordinate, la derivata parziale di  $\beta$  rispetto a  $\mu$  è zero, perché ciò significa che queste coordinate sono reciprocamente indipendenti nel sistema. Tuttavia, quando  $\beta$  e  $\mu$  rappresentano la stessa coordinata, la derivata parziale è pari a 1, il che indica che la coordinata cambia con se stessa, come rappresentato dal simbolo  $\delta_\mu^\beta$ .

Questo ci dà :

$$0 = \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Tuttavia, se sostituiamo  $\mu$  con  $\beta$  ( $\beta = \mu$ ), allora  $\delta_\mu^\beta = \delta_\beta^\beta = 1$  allora  $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$ . Questo dà :

$$0 = \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

Pertanto, introducendo i *simboli di Christoffel* come segue:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Possiamo dedurre la seguente *equazione geodetica*:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Questo rappresenta un'espressione generale per i *simboli* di Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  in termini di derivate delle funzioni di trasformazione delle coordinate. I simboli di Christoffel, come vedremo in seguito, sono utilizzati nella matematica della relatività generale e della geometria differenziale per descrivere come i sistemi di coordinate cambiano localmente. *Che cosa possiamo imparare da questa equazione geodetica?*

- La derivata seconda delle coordinate nel quadro di riferimento galileiano "accelerato" non è più zero, ma è pari all'equivalente delle forze inerziali applicate nella relatività generale (in questo caso, la gravità). Dalla (3), possiamo dedurre :

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Se  $\mu$  e  $\nu$  sono coordinate spaziali, la loro derivata rispetto a  $\tau$  corrisponde a una velocità.

- Qualsiasi oggetto che si muove nel quadro di riferimento galileiano "accelerato" del laboratorio obbedisce a questa equazione quando è sottoposto alla forza di gravità terrestre.
- La forma di questa equazione ci fornisce informazioni sui percorsi più brevi o più lunghi (estremi) su una superficie curva (varietà). Più precisamente, le geodetiche corrispondono a percorsi stazionari le cui proprietà fisiche rimangono costanti nel tempo (assenza di forze esterne applicate).
- Possiamo descrivere la gravità come un effetto puramente geometrico legato alle geodetiche percorse dagli oggetti nello spazio-tempo curvo (il modo in cui lo spazio-tempo è curvo è descritto dai simboli di Christoffel). Un'analogia potrebbe essere quella di considerare due oggetti che percorrono percorsi paralleli e identici alla stessa velocità da un punto della Terra verso il Nord; essi finiranno per incrociarsi al Polo Nord a causa della curvatura della Terra. Questo incrocio può essere analizzato sia dal fatto che una forza li ha attratti (analogia con la meccanica newtoniana) sia da un effetto puramente geometrico legato alla curvatura della Terra (analogia con la meccanica relativistica). Secondo la relatività generale, la gravità è quindi una curvatura dello spazio-tempo che fa sì che gli oggetti in moto rettilineo locale seguano queste geodetiche. La relatività generale ci permette di determinare la curvatura dello spazio-tempo in funzione delle sue componenti (materia, energia) e quindi di descrivere le traiettorie delle particelle che si muovono in questo spazio-tempo.
- I simboli di Christoffel sono calcolati dalla metrica e dalle sue derivate parziali, catturando informazioni sulla curvatura dello spaziotempo. Ci permettono di calcolare come le geodetiche siano influenzate dalla curvatura dello spaziotempo.

### 2.3.4 Tensori metrici

Ora esamineremo i tensori metrici e la loro relazione con i simboli di Christoffel determinati in precedenza.

Consideriamo la metrica di Minkowski descritta utilizzando le coordinate spazio-temporali di un oggetto in movimento in un quadro di riferimento inerziale, come mostrato nell'equazione (4), ed espressa come segue:

$$d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2$$

Può anche essere scritto in questo modo, dove può essere espresso come una sommatoria sugli indici  $\alpha$  e  $\beta$  :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Questa equazione utilizza il tensore metrico  $\eta_{\alpha\beta}$  dello spazio di Minkowski (che descrive lo spazio-tempo piatto nella relatività speciale) per calcolare l'intervallo spazio-temporale  $d\tau^2$



in termini di differenziali di coordinate  $d\xi^\alpha$  e  $d\xi^\beta$ . Il tensore metrico di Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  ha componenti che sono -1 per gli intervalli di tipo temporale e +1 per gli intervalli di tipo spaziale sulla diagonale e 0 fuori dalla diagonale, come segue :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che le seguenti espressioni rappresentano le regole di trasformazione differenziale tra due sistemi di coordinate. Esse mostrano come un piccolo cambiamento nell'insieme delle coordinate  $x^\mu$  e  $x^\nu$  porta a un piccolo cambiamento in un altro insieme di coordinate  $\xi^\alpha$  e  $\xi^\beta$ .

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

$$d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Ora, se sostituiamo queste due forme differenziali nell'espressione (5), possiamo ricavare la seguente espressione:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Da questo possiamo ricavare il seguente tensore metrico:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Il tensore metrico gioca un ruolo fondamentale nella relatività generale perché determina la geometria dello spazio-tempo e il modo in cui la gravità agisce tra due oggetti situati alle coordinate  $x^\mu$  e  $x^\nu$  nello stesso quadro di riferimento. Permette di trasformare le coordinate di questi oggetti nella distanza tra loro, tenendo conto della curvatura locale dello spazio-tempo, che può variare a seconda della distribuzione di materia ed energia. Contrariamente all'intuizione convenzionale, la distanza tra due punti nello spazio-tempo curvo dipende da questa curvatura e può variare notevolmente. Il tensore metrico è quindi uno strumento matematico fondamentale per calcolare l'intervallo tra due eventi, che comprende anche la misurazione del tempo trascorso tra di essi in presenza di un campo gravitazionale.

Poiché gli indici  $\mu$  e  $\nu$  sono muti e ripetuti, sono soggetti alla convenzione di somma di Einstein e possono quindi essere scambiati nell'espressione del tensore metrico. Ciò implica che il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  è simmetrico, cioè  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ .

NB: D'ora in poi consideriamo  $g^{\mu\nu}$  come l'inverso di  $g_{\mu\nu}$  che è espressa dalla seguente relazione con sommatoria sull'indice ripetuto  $\alpha$  che produce il simbolo di Kronecker :

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$$

dove  $\delta_{\nu}^{\mu}$  è il simbolo di Kronecker che, come abbiamo visto in precedenza, è uguale a 1 quando  $\mu = \nu$  e 0 altrimenti. Questa relazione definisce la natura dell'inverso del tensore metrico nella geometria differenziale e nella relatività generale.

### 2.3.5 Simboli di Christoffel

I simboli di Christoffel, indicati con  $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$  sono derivati dal tensore metrico e forniscono informazioni essenziali sulla geometria dello spazio-tempo. Non sono essi stessi dei tensori, ma sono derivati dal tensore metrico, che è un tensore reale.

Per calcolare i simboli di Christoffel, si prendono le derivate parziali delle componenti del tensore metrico e si applica una combinazione specifica di queste derivate. La formula per i simboli di Christoffel del secondo tipo è data da :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

Ogni termine implica una derivata parziale del tensore metrico rispetto alle coordinate e  $g^{\beta\alpha}$  è l'inverso del tensore metrico, assicurando che stiamo sommando sugli indici appropriati. Come vedremo in seguito, i simboli di Christoffel svolgono un ruolo centrale nella determinazione delle geodetiche, che descrivono la traiettoria delle particelle e della luce nello spaziotempo curvo e sono utilizzate nelle equazioni del moto della Relatività Generale.

*Dimostrazione.* Esprimeremo ora i simboli di Christoffel in termini del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ . A tal fine, consideriamo la derivata parziale di  $g_{\mu\nu}$  rispetto alle coordinate  $x^{\lambda}$ . Questa operazione introduce le derivate seconde delle funzioni di trasformazione delle coordinate  $\xi^{\alpha}$  che possono essere integrate nell'espressione dei simboli di Christoffel (6).

Prima di iniziare i calcoli, ecco alcuni suggerimenti preliminari per semplificarli:

- Il tensore metrico è simmetrico, quindi  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ .
- Per sostituire  $\nu$  con  $\alpha$  dobbiamo prima sostituire il pedice silenzioso esistente  $\alpha$  con  $\sigma$ .

Otteniamo il tensore metrico come segue:

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

Applicando la regola del prodotto per la derivazione e ricordando che  $\eta_{\sigma\beta}$  è una costante, otteniamo :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

Le derivate parziali secondarie previste appaiono sul lato destro dell'equazione (due volte):

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

Per integrare l'espressione dei simboli di Christoffel (6) in questa relazione, dobbiamo applicare la seguente trasformazione a entrambe le parti per isolare la derivata parziale e introdurre una somma sull'indice ripetuto  $\beta$  :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left( \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right)$$

Tuttavia, sappiamo che :

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma$$

e secondo la (7), questo simbolo di Kronecker è uguale a 1 quando  $\sigma = \lambda$  allora :

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Possiamo quindi sostituirla nell'espressione (8), avendo cura di riformulare in modo analogo gli indici corrispondenti nella nuova espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \\ \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \end{aligned}$$

*NB:* Non mettiamo  $\beta$  sul simbolo di Christoffel perché è un indice di somma silenzioso nel termine in cui vogliamo assegnarlo, quindi sceglieremo un'altra lettera,  $\rho$  :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

Infine, possiamo dedurre dalla (8) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

Pertanto, la differenziazione del tensore metrico può essere espressa in 3 modi diversi (gli ultimi 2 comportano nuovi indici scambiando  $\nu$  e  $\mu$  e sostituendo  $\mu$  con  $\alpha$ ) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu} \Gamma_{\alpha\nu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

Questi tre modi di esprimere la differenziazione ci permettono di ottenere un risultato semplificato sommando i primi due e sottraendo l'ultimo: (9a) + (9b) - (9c) :

$$g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

$$g^{\beta\alpha}g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)g^{\beta\alpha}$$

$$\delta_{\rho}^{\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)g^{\beta\alpha}$$

Quindi, finalmente :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

Questa espressione del simbolo di Christoffel ci permette di stabilire un legame tra la curvatura dello spazio-tempo indotta dalla forza gravitazionale e le derivate spaziali del tensore metrico. È essenziale per la formulazione delle equazioni che governano le geodetiche nella teoria della Relatività Generale. □

*Esempio di calcolo dei simboli di Christoffel per una metrica sferica :*

In coordinate sferiche, l'elemento linea  $ds^2$  per uno spazio tridimensionale è espresso come segue:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$$

dove  $dr$ ,  $d\theta$  e  $d\phi$  sono i differenziali della coordinata radiale  $r$  dell'angolo polare  $\theta$  e dell'angolo azimutale  $\phi$  rispettivamente. Il corrispondente tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  in coordinate sferiche è diagonale ed è dato da :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

*Dimostrazione.* La relazione tra le coordinate cartesiane e quelle sferiche può essere dedotta dalla Figura 2.3 :

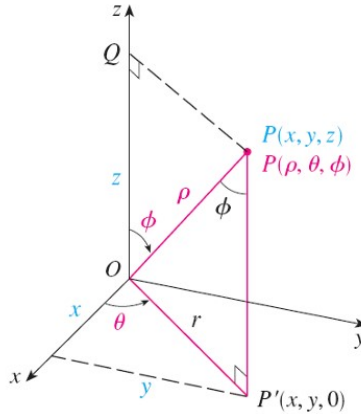


Figura 2.3 - La posizione del punto  $P$  è definita dalla distanza  $\rho$  e dagli angoli  $\theta$  (colatitudine) e  $\phi$  (longitudine)

Se si considerano i triangoli  $OPQ$  e  $OPP'$ , si ha :  $z = \rho \cos \phi$ ,  $r = \rho \sin \phi$  dove  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Pertanto :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

Utilizzando le notazioni fisiche della Figura 2.6, il passaggio alle coordinate cartesiane è dato da :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned}$$

Tuttavia, la metrica in coordinate cartesiane è data da :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Per esprimere questo dato in coordinate sferiche, sostituiamo  $x$ ,  $y$  e  $z$  con i loro equivalenti in coordinate sferiche, ottenendo la (11).  $\square$

Per calcolare i simboli di Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$  troviamo prima l'inverso del tensore metrico, che per una metrica diagonale è semplicemente :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

Per il tensore metrico dato, calcoliamo le derivate parziali necessarie per i simboli di Christoffel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} &= 2r, \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} &= 2r\sin^2(\theta), \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} &= 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta).\end{aligned}$$

Inserendo queste derivate parziali nella formula del simbolo di Christoffel (10), le calcoliamo sommando l'indice ripetuto  $\alpha$ . Per il tensore metrico dato, la maggior parte dei simboli di Christoffel sarà nulla perché è diagonale e dipende solo da  $r$  e  $\theta$ . I simboli di Christoffel non nulli sono :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\sin^2(\theta) \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot(\theta)\end{aligned}$$

NB:

- Il simbolo di Christoffel  $\Gamma_{\theta\theta}^r$  è calcolato come segue:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left( -\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} \right)$$

poiché l'unica derivata non nulla di  $g_{\theta\theta}$  è rispetto a  $r$ . Sostituendo i valori, si ottiene :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial(r^2)}{\partial r} \right) = -r.$$

- Un altro esempio è il simbolo di Christoffel  $\Gamma_{r\theta}^\theta$  che viene calcolato come segue:

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} \right)$$

dove l'unico termine non nullo è  $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}$ . Si ottiene così :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \right) (2r) = \frac{1}{r}.$$

*Calcolo del tensore di Riemann, del tensore di Ricci e dello scalare di Ricci*

In questo spazio sferico, tutte le componenti del tensore di Riemann e del tensore di Ricci, così come lo scalare di Ricci, sono nulle, illustrando la geometria di uno spazio piatto.

*Dimostrazione.* Il tensore di curvatura di Riemann è definito dall'espressione :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}$$

Prendiamo, ad esempio, i simboli di Christoffel forniti dalla (12):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Possiamo calcolare le componenti del tensore di Riemann. Ad esempio, possiamo calcolare  $R_{r\theta r}^{\theta}$  :

$$R_{r\theta r}^{\theta} = \partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda} - \Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda}$$

Pertanto, per calcolare la componente del tensore di Riemann  $R_{r\theta r}^{\theta}$  si ha :

- Il primo termine  $\partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta}$  è zero perché  $\Gamma_{rr}^{\theta}$  è zero.
- Il secondo termine  $\partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta}$  implica la derivata parziale di  $\Gamma_{\theta r}^{\theta}$  rispetto a  $r$  che è  $-\frac{1}{r^2}$ .
- Il terzo termine è la somma di  $\lambda$  di  $\Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda}$  ma poiché  $\Gamma_{rr}^{\lambda}$  è zero per  $\lambda \neq r$  questo termine è zero.
- Il quarto termine è la somma  $\lambda$  di  $\Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda}$  che per  $\lambda = \theta$  dà  $\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$ .

La somma dei due termini non nulli (termini 2 e 4) è :

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

Pertanto, il valore  $R_{r\theta r}^{\theta}$  del tensore di Riemann è zero.

Il tensore di Ricci, ottenuto contraendo il tensore di Riemann sul primo e sul terzo indice, è dato da :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$$

Infine, lo scalare di Ricci, che è la traccia del tensore di Ricci, viene calcolato come segue:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

Poiché il tensore di Riemann è nullo, ne consegue che anche il tensore di Ricci e il suo scalare sono nulli. □

**Codice di calcolo Mathematica :**

```
(*Importa il pacchetto*)
(*-----*)
Bisogni["OGRe`"]
```

```

(*Definizione delle coordinate*)
TNewCoordinates["Spherical", {r, \[Theta], \[Phi]}]
(*Definizione del tensore metrico*)TShow@
  TNewMetric["Tensore metrico sferico", "Sferico",
    DiagonalMatrix[{1, r^2, r^2 Sin[\[Theta]]^2}]]]
(*Elemento di linea*)
TLineElement["SphericalMetricTensor"]
(*Calcolo dei simboli di Christoffel*)
TList@TCalcChristoffel["SphericalMetricTensor"] (*calcolo dei simboli di
Christoffel*)
(*Calcolo del tensore di Riemann*)
TList@TCalcRiemannTensor["SphericalMetricTensor"]
(*Calcolo del tensore di Riemann*)
TList@TCalcRicciTensor["SphericalMetricTensor"]
(*Calcolo scalare di Ricci*)
TList@TCalcRicciScalar["SphericalMetricTensor"] (*Calcolo dello scalare
Ricci*)

```

### 2.3.6 Applicazione dell'equazione geodetica nel limite del campo debole

Scriviamo l'espressione del simbolo di Christoffel e dell'equazione geodetica come segue (se  $\nu = 0$  coordinata temporale, altrimenti coordinata spaziale  $x, y, z$ ) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$$

dove

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\sigma,\nu}$$

**NB:**

- L'equazione rappresenta la derivata parziale della componente del tensore metrico  $g_{\mu\sigma}$  rispetto alla coordinata  $x^{\nu}$  e viene spesso scritta con una virgola seguita dall'indice di differenziazione, che in questo caso è  $\nu$ . Notazione con virgola  $g_{\mu\sigma,\nu}$  è un'abbreviazione comune nella relatività generale per le derivate parziali delle componenti del tensore.
- Nel contesto della relatività speciale, è comune utilizzare un sistema di unità di misura in cui la velocità della luce  $c$  è definita come uguale a 1 ( $c = 1$ ). Questo semplifica le equazioni e rende più facile l'espressione di alcune grandezze. In questo sistema di unità di misura, le distanze sono espresse in unità di tempo (ad esempio, anni luce anziché metri) grazie all'equivalenza  $c = 1$ . Per fare ciò, il tempo deve essere espresso in secondi e le unità di lunghezza diventano la distanza percorsa dalla luce in un secondo, che viene espressa in secondi luce (equivalenti ad "anni luce"). Possiamo quindi esprimere la metrica come segue:



$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Tuttavia, considereremo ora che il tempo  $t$  espresso finora, sarà il tempo corretto  $\tau$  nell'espressione della metrica, per esprimerla come segue:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Mostreremo ora che l'equazione (13) si riduce all'equazione del moto newtoniana quando i campi gravitazionali sono deboli e statici (cioè nella relatività speciale dove  $g_{\mu\nu}$  è molto vicino a  $\eta_{\mu\nu}$  e indipendente dal tempo), e quando le velocità sono molto più piccole della velocità della luce, vale a dire  $v/c \ll 1$  che può essere espressa come segue:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$$

*NB:* Nella teoria della gravità linearizzata, assumiamo che lo spazio-tempo sia quasi piatto. A tale scopo, rappresentiamo il tensore metrico totale  $g_{\mu\nu}$  come somma della metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  che descrive lo spazio-tempo piatto come visto in precedenza, e di una piccola "perturbazione" che rappresenta le deviazioni da questa piatezza.  $h_{\mu\nu}$  che rappresenta le deviazioni da questa planarità dovute alla presenza di massa o energia. Lo vedremo più avanti nello studio del dipolo respingente per un sistema stazionario (Sezione 3.3).

Integrando questo tensore metrico nell'espressione (14), ci rendiamo conto che le derivate parziali del tensore metrico dipendono solo da  $h_{\mu\nu}$  poiché  $\eta_{\mu\nu}$  è costante e le sue derivate sono nulle. Pertanto, nella teoria linearizzata della gravità, i simboli di Christoffel possono essere approssimati considerando solo i contributi della perturbazione  $h_{\mu\nu}$ . Questo perché i simboli di Christoffel sono definiti dalle derivate prime del tensore metrico e in un campo gravitazionale debole,  $h_{\mu\nu}$  è piccolo rispetto a  $\eta_{\mu\nu}$ . Quindi, quando calcoliamo i simboli di Christoffel per un campo gravitazionale debole, trascuriamo le derivate di  $\eta_{\mu\nu}$  e prendiamo in considerazione solo le derivate di  $h_{\mu\nu}$ . Otteniamo quindi:

$$g_{\mu\sigma,\nu} = h_{\mu\sigma,\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma} \quad \text{et} \quad g_{\nu\sigma,\mu} = h_{\nu\sigma,\mu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma})(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Dato che  $h_{\mu\nu}$  è piccolo, ci rendiamo conto che il prodotto di  $h^{\lambda\sigma}$  con le sue derivate parziali contribuirà a termini di ordine due o superiore (ad esempio,  $h^2$ ,  $h^3$  ecc.). Questi termini di ordine superiore saranno significativamente più piccoli dei termini di primo ordine che stiamo cercando. Pertanto, nel calcolare i simboli di Christoffel, trascuriamo i prodotti di  $h_{\mu\nu}$  e le sue derivate, il che implica che i contributi di  $h^{\lambda\sigma}$  sono trascurabili rispetto a quelli di  $\eta^{\lambda\sigma}$ . Otteniamo quindi:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Questa approssimazione semplifica il processo di calcolo della curvatura dello spazio-tempo nei campi gravitazionali deboli ed è fondamentale per l'analisi delle onde

gravitazionali, dove le perturbazioni  $h_{\mu\nu}$  rappresentano ondulazioni nella curvatura dello spazio-tempo.

Consideriamo ora due casi:

- Per  $\lambda = 0$  che corrisponde alla coordinata temporale nella relatività generale, l'equazione dei simboli di Christoffel del primo tipo diventa specifica per la coordinata temporale. Utilizzando il tensore metrico di Minkowski  $\eta$  il tensore metrico e la perturbazione  $h$  il simbolo di Christoffel per  $\lambda = 0$  è dato dall'equazione :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}\eta^{0\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Poiché  $\eta^{0\sigma}$  non è zero solo quando  $\sigma = 0$  che porta a  $\eta^{00} = 1$  otteniamo la seguente relazione :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0})$$

Tuttavia, poiché il campo gravitazionale è statico, cioè la metrica spazio-temporale non varia con il tempo, la derivata parziale del tensore metrico rispetto al tempo ( $\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$ ) è pari a zero. Questo ci permette di considerare il sistema in regime stazionario rispetto alla metrica spazio-temporale :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu})$$

- Per le coordinate spaziali denotate da  $\lambda = i$  (dove  $i, j, k$  rappresentano gli indici spaziali), i simboli di Christoffel possono essere calcolati utilizzando la metrica di perturbazione  $h_{\mu\nu}$ . Il tensore metrico di Minkowski  $\eta^{i\sigma}$  viene utilizzato per aumentare l'indice ed è uguale a  $-1$  quando gli indici coincidono. Pertanto, i simboli di Christoffel per le coordinate spaziali sono dati da :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Tuttavia, dato il segno negativo delle componenti spaziali dell'equazione di  $\eta^{i\sigma}$  l'equazione per  $\sigma = i$  si semplifica in :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2}(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i})$$

Il segno negativo riflette la convenzione di segno opposto per le componenti spaziali del tensore metrico di Minkowski rispetto alla componente temporale.

Integriamo ora questi risultati nell'equazione geodetica (13) per ogni caso:

- Perché  $\lambda = 0$  sappiamo che  $x^\lambda = x^0 = ct$  allora :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Tuttavia, il seguente prodotto genererà una somma sugli indici ripetuti  $\mu$  e  $\nu$  quantità di ordine 0, 1 e 2 :

$$(h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

Considerando che le quantità di ordine superiore, in particolare di ordine 1 e 2, sono altamente trascurabili, soprattutto perché si basano sulla già piccola quantità  $h_{\mu\nu}$  che è molto inferiore a  $\eta_{\mu\nu}$ , conserveremo solo i termini di ordine zero. In questo contesto, l'ordine zero si riferisce ai termini in cui  $\mu$  e  $\nu$  sono entrambi uguali a 0, il che corrisponde alle componenti temporali. Questa semplificazione ci porta alla seguente equazione:

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{00,0} + h_{00,0}) c^2 \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

In questa approssimazione, solo i termini che coinvolgono la coordinata temporale contribuiscono in modo significativo all'equazione del moto, semplificando l'analisi delle geodetiche spazio-temporali in un campo gravitazionale debole.

Tuttavia, poiché il campo gravitazionale è statico, queste quantità sono pari a zero, quindi :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} = 0$$

Ciò implica che  $t$  è proporzionale a  $s$  il che significa che :

$$s = ct$$

- Per le coordinate spaziali denotate da  $\lambda = i$  dalla (15), otteniamo :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} (h_{\mu i, \nu} + h_{\nu i, \mu} - h_{\mu\nu, i}) \frac{1}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

Tuttavia, come detto in precedenza, manterremo solo le quantità di ordine 0 per  $\mu$  e  $\nu$  che sono uguali a 0. Data la natura statica dei campi gravitazionali, otteniamo la seguente equazione :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} h_{00, i} = 0$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00, i}$$

Poiché  $i$  è un indice spaziale che assume i valori 1, 2 o 3, troviamo una forma di equivalenza "accelerazione - forza" che può essere rappresentata in forma vettoriale:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

con

$$\phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$$

Il legame tra il potenziale gravitazionale e la componente temporale del tensore metrico può essere stabilito introducendo la (16) nella (17):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

Il potenziale gravitazionale  $\phi$  è equivalente alla velocità al quadrato ( $c^2$ ). Sapendo che  $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$  possiamo verificare localmente che per la Terra,  $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = \frac{2G \cdot M_t}{R_t \cdot c^2} = 10^{-9} \ll \eta_{00} = 1$  utilizzando la nota espressione per il calcolo del potenziale gravitazionale :

$$\phi = \frac{GM}{R}$$

### 2.3.7 Le soluzioni di Karl Schwarzschild e Ludwig Flamm

Karl Schwarzschild sviluppò una soluzione geometrica completa all'equazione (18), costituita da due metriche pubblicate in due articoli separati ((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a)):

- **La prima soluzione** descrive, utilizzando la metrica sottostante, la geometria esterna di una massa sfericamente simmetrica come una stella di raggio  $r_n$  nel vuoto esterno all'oggetto, dove non c'è materia, cioè nella Figura 2.4 :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

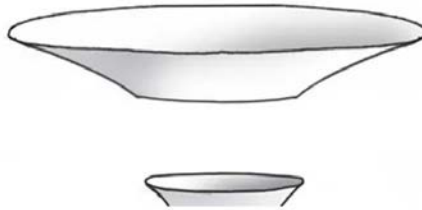


Figura 2.4 - Porzione di un'ipersuperficie di Flamm

- **La seconda soluzione**, spesso indicata come soluzione interna di Schwarzschild, è strutturata dalla seguente metrica, che descrive la geometria dello spaziotempo all'interno di un corpo statico, a simmetria sferica, di fluido incompressibile come una stella di raggio  $r_n$  Figura 2.5 :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^2}{3c^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2$$

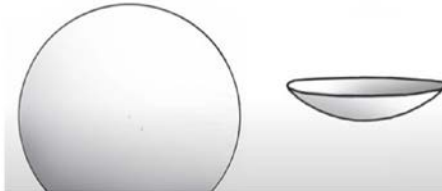


Figura 2.5 - Porzione di una sfera

Questo approccio prevede l'unione di due segmenti di soluzioni spazio-temporali, nello specifico due regioni di ipersuperfici, ciascuna caratterizzata da una metrica distinta. L'unione avviene su un confine comune, garantendo la continuità della geometria dello spaziotempo e la coerenza fisica della soluzione combinata attraverso l'interfaccia. Nello stesso anno, un giovane matematico offrì la propria interpretazione del lavoro di Schwarzschild. Il suo nome era Ludwig Flamm. Il suo lavoro e il suo nome sono rimasti in gran parte sconosciuti agli specialisti di cosmologia per un semplice motivo: il suo articolo è stato tradotto in inglese solo nel 2012. Egli aveva una perfetta padronanza della geometria di oggetti come le ipersuperfici Riemanniane tridimensionali ((Flamm 1916)). Basandosi sulla metrica esterna di Schwarzschild, Kruskal sviluppò il suo famoso modello, considerato il fondamento della teoria dei buchi neri. In effetti, estendendo analiticamente la soluzione esterna di Schwarzschild, egli elimina "algebricamente" la singolarità delle coordinate che si trova all'"orizzonte degli eventi" per  $r = R_s$  (raggio di Schwarzschild), introducendo un nuovo sistema di coordinate. Questo sistema è progettato per rendere la metrica regolare ovunque, tranne che in corrispondenza della "singolarità fisica centrale" per (raggio di Schwarzschild).  $r = 0$  ((Martin D. Kruskal 1960), (Jean-Marie Souriau 1965)). Ma questo modello ha davvero senso dal punto di vista fisico?

### 2.3.8 Costruzione delle geodetiche per la metrica esterna di Schwarzschild

Consideriamo la metrica esterna di Schwarzschild (6.53) tratta da (Adler, Bazin e Schiffer 1975) (Pagina 194) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

dove  $m$  è una costante di integrazione semplice (una lunghezza),  $x^0$  è un indicatore cronologico (anch'esso una lunghezza) e  $s$  è la lunghezza misurata sull'ipersuperficie 4D.

Gli autori scrivono:

$$x^0 = ct$$

Una geodetica è un percorso inscritto nell'ipersuperficie, corrispondente a una lunghezza minima :

$$\delta \int ds = 0$$

Ciò significa che questa lunghezza :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\}$$

ha un valore minimo lungo un percorso parametrizzato in questo modo :  $t(s), r(s), \theta(s), \phi(s)$ .

Scriviamo :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$$

Ciò significa cercare percorsi che riducano al minimo :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) \right\} ds$$

La quantità tra parentesi quadre è :

$$L = L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad \text{ou} \quad L = L(x^i, \dot{x}^i)$$

Questo problema fu risolto dal matematico francese Lagrange, portando a quelle che oggi sono note come equazioni di Lagrange.

Il calcolo delle geodetiche è un problema di "estremo vincolato". Questo perché consideriamo tutti i percorsi che collegano due punti  $a$  e  $b$  e sono quindi legati a questi punti. Le geodetiche sono quindi date dalle equazioni :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

Con :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2$$

Le prime tre equazioni di Lagrange (6.75), (6.76), (6.77) tratte da (Adler, Bazin e Schiffer 1975), corrispondenti alle variabili  $\theta, \phi$  e  $t$  sono le seguenti:

$$\frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) = r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{ds}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

Se dividiamo ogni termine della metrica (25) per  $ds^2$  :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

Nella relatività generale, sfruttare la simmetria sferica di una soluzione può semplificare l'analisi delle geodetiche. Nel caso della metrica di Schwarzschild, che è effettivamente a simmetria sferica, questa simmetria può essere sfruttata per ridurre il problema a due dimensioni.

La metrica di Schwarzschild, in coordinate sferiche, dipende dalle variabili  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  e  $t$ . La simmetria sferica significa che la metrica non cambia quando si compiono rotazioni intorno al centro. Questa proprietà ci permette di semplificare il problema scegliendo geodetiche che rimangono in un piano costante. È prassi comune scegliere il piano equatoriale per semplificare i calcoli, che corrisponde a impostare  $\theta = \pi/2$ . In questo piano, il valore  $\theta$  non cambia, il che significa che  $d\theta = 0$  e quindi la componente della metrica che coinvolge  $d\theta$  scompare (vedi Figura 2.6).

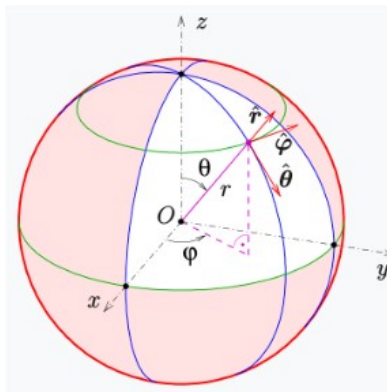


Figura 2.6 - Vec tori in coordinate sferiche

Esaminando poi la lagrangiana (che è una funzione che riassume la dinamica di un sistema) associata a questa metrica, si possono trovare le equazioni del moto per le geodetiche. Per un oggetto che si muove nel piano equatoriale, la componente azimutale del suo momento angolare, legata a  $\phi$  Questo è una conseguenza della simmetria assiale della metrica rispetto all'asse perpendicolare al piano equatoriale. Matematicamente, ciò è espresso dall'equazione :

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{costante}$$

dove  $h$  è una costante di moto (momento angolare per unità di massa),  $r$  è la coordinata radiale e  $\dot{\phi}$  è la derivata della coordinata azimutale  $\phi$  rispetto al tempo proprio  $s$  (il tempo misurato da un orologio che si muove con l'oggetto).

Questo ci dice che la quantità  $r^2 \dot{\phi}$  rimane costante lungo la geodetica.

L'equazione (19) può essere integrata per ottenere :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l = \text{costante}$$

Per sostituzione, si ottiene l'equazione differenziale :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

che dà  $r$  in funzione del parametro  $s$ . Ma utilizzando un'equazione presentata in precedenza, possiamo passare a un'equazione differenziale con la derivata :

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

Da (20) e (21), otteniamo :

$$\dot{r} = \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

Possiamo quindi ottenere l'equazione differenziale che lega  $r$  e  $l$  :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

Possiamo quindi passare dalla variabile  $r$  a una variabile  $u$  come ad esempio:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r' = -\frac{u'}{u^2}$$

Quindi, dalla (22), possiamo dedurre :

$$d\phi = \frac{dr}{r'} = \frac{du}{u'}$$

Il che ci porta a :

$$(1 - 2mu) = c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu)$$

che si riduce a:

$$u'^2 = \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3$$



Quindi, dalla (23), l'integrazione dà :

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{dv}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} v - v^2 + 2mv^3}}$$

Questa è una soluzione esatta dell'equazione di Einstein, che esprime l'angolo  $\phi$  come integrale di  $u = \frac{1}{r}e$ , viceversa, ci dà  $u$  come funzione inversa (implicita) di  $\phi$  e dà luogo a geodetiche "quasi-ellittiche", che dipendono dalle due costanti di integrazione  $l$  e  $h$ .

Se  $h$  è grande, significa che la geodetica percorsa da una particella di prova devierà da una traiettoria radiale di caduta libera perché avrà una quantità significativa di momento angolare specifico. Di conseguenza, la sua traiettoria sarà meno influenzata dalla forza di gravità diretta verso il corpo centrale, facendola deviare da una caduta radiale diretta e seguendo un percorso più curvo o "quasi-ellittico".

Ignorando la regione interna alla sfera di Schwarzschild ( $r < 2m$ ), è possibile rappresentare in 3D le geodetiche piane associate a questa metrica stazionaria. La rappresentazione della sfera di Schwarzschild può essere pensata come un cerchio che si proietta nello spaziotempo lungo la dimensione temporale di Schwarzschild  $t_s$ . Se consideriamo una stella di neutroni con un raggio di 10 km, essa rimarrà stabile al limite Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) di circa 2 masse solari. Il limite TOV rappresenta la massa critica massima che una stella di neutroni può avere rimanendo stabile. Questo pone l'*orizzonte di* una massa puntiforme equivalente a una distanza dal suo centro di circa 6 km ( $r_s = \alpha$ ). Poiché il raggio della stella è circa 3/2 volte  $r_s$  posizioniamo l'*orizzonte di* questo oggetto a  $r_s = 2$  per un raggio di 3. Questa configurazione mi ha permesso di rappresentare, con Mathematica, le geodetiche di una particella di prova che segue una traiettoria di caduta verso questo oggetto, come mostrato nella figura 2.7.

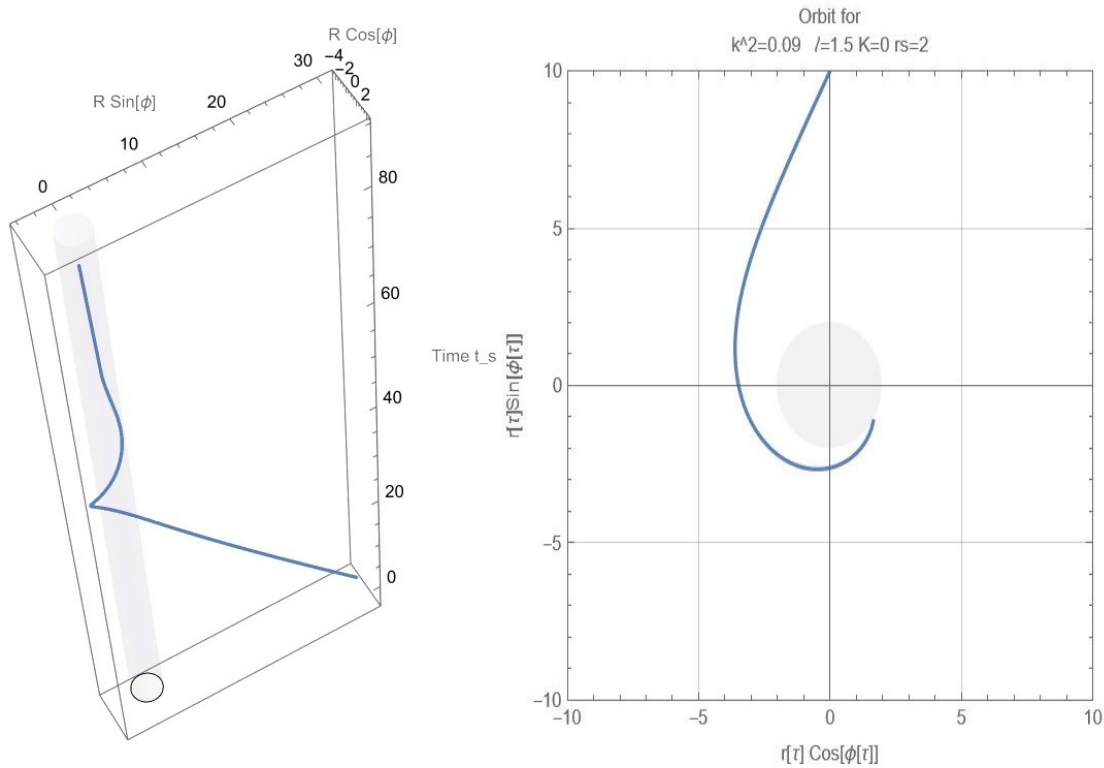


Figura 2.7 - Rappresentazione di una geodetica in caduta nel sistema di coordinate  $(r, \phi, t_s)$

Qualunque sia la direzione del moto della geodetica, in questo caso centripeto, con questa scelta di coordinate temporali, ci vorrebbe un tempo infinito per avvicinarsi alla sfera di Schwarzschild. In effetti, come si può vedere dalle figure 2.8 e 2.9, per un osservatore distante, qualsiasi oggetto che si avvicini all'orizzonte di una stella di neutroni vicina alla sua criticità fisica o di un oggetto supermassiccio, come quelli il cui approccio alternativo sarà studiato nel capitolo 7, subirebbe una dilatazione temporale prossima a quello che è noto come raggio di Schwarzschild. Tuttavia, per l'oggetto stesso (o per un osservatore che si muove con l'oggetto), il tempo continuerebbe a progredire normalmente (rispettivamente, la curva blu rispetto a quella tratteggiata).

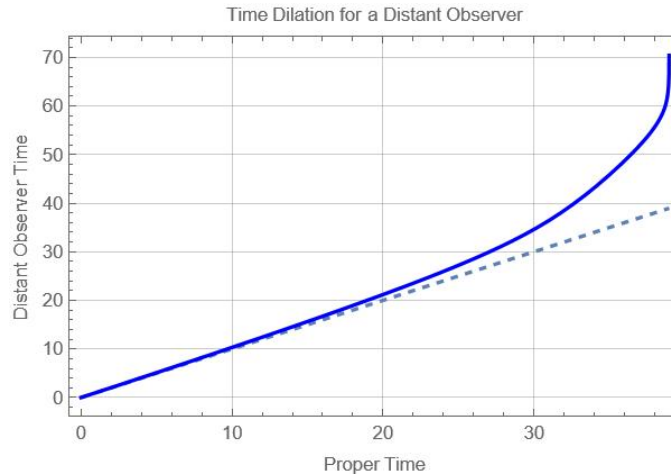


Figura 2.8 - Dilatazione temporale per un osservatore distante

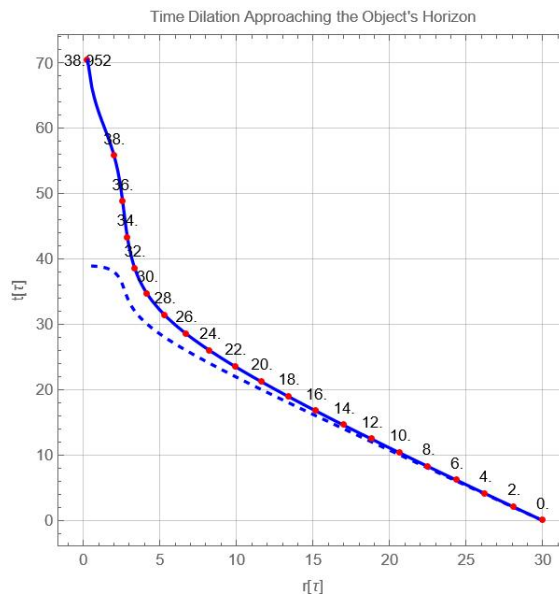


Figura 2.9 - Tempo dilatazione reale in avvicinamento all'orizzonte dell'oggetto

Dal punto di vista di questo osservatore distante, l'oggetto impiegherebbe apparentemente un tempo infinito per raggiungere l'orizzonte. Di conseguenza, verrebbe percepito come un graduale rallentamento, apparendo quasi congelato o fermo in prossimità dell'orizzonte.

Questo fenomeno è una conseguenza della relatività generale, che prevede che la presenza di una massa significativa curvi lo spazio-tempo. Questa curvatura influenza lo scorrere del tempo, portando alla dilatazione temporale in campi gravitazionali intensi.

Questo aspetto è uno dei pilastri della teoria dei buchi neri. Ma esiste un'altra alternativa?

La

esploreremo più avanti, nel Capitolo 5.

### 2.3.9 La soluzione di Roy Kerr

Nel 1963, Roy Kerr, eminente matematico neozelandese, rivoluzionò la comprensione della relatività generale nel contesto del modello dei buchi neri, proponendo una nuova soluzione all'equazione di campo di Einstein. A differenza della metrica esterna di Schwarzschild ((Schwarzschild 1916b)), utilizzata come base per il modello statico a simmetria sferica dei buchi neri, la soluzione di Kerr è assi-simmetrica e rappresenta un buco nero rotante ((Kerr 1963)). Questa scoperta fu particolarmente significativa all'epoca perché forniva un modello più realistico per molti oggetti celesti.

La metrica di Kerr è espressa in coordinate Boyer-Lindquist  $(t, r, \theta, \phi)$  ((Chaskalovic 2009)), e il suo elemento di linea è dato per  $c = 1$  da :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2$$

dove

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

$M$  è la massa dell'oggetto centrale rotante, spesso un buco nero, che influenza lo spaziotempo circostante, e  $a$  è il momento angolare specifico dell'oggetto rotante. Il termine importante da notare è  $-\frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi$  che rappresenta la resistenza allo spaziotempo dovuta alla rotazione dell'oggetto, tipicamente un buco nero. Questa caratteristica può essere interpretata come una manifestazione dell'idea di Ernst Mach sulla relatività del moto, dove lo spaziotempo stesso sembra essere influenzato dalla presenza di materia in movimento.

La rilevanza della soluzione di Kerr è stata ulteriormente sottolineata dalla scoperta delle pulsar nel 1967, inizialmente intese come stelle di neutroni che ruotano a velocità incredibilmente elevate, raggiungendo talvolta le mille rotazioni al secondo. Sebbene la metrica di Kerr sia applicata principalmente al modello dei buchi neri, le sue implicazioni per la comprensione di altri oggetti astrofisici compatti, come le stelle di neutroni, sono altrettanto significative.

Il famoso astrofisico Subrahmanyan Chandrasekhar ha salutato la soluzione di Kerr come un importante progresso nella ricerca matematica applicata alla fisica teorica ((Chandrasekhar 1983)).

Ciò che è importante sottolineare dell'approccio di Kerr è la possibilità di esplorare altre proprietà di rappresentazione, come l'introduzione, ad esempio, di un termine  $drdt$  nella metrica esterna di Schwarzschild, le cui implicazioni saranno esplorate nel Capitolo 5.

## 2.4 Il lavoro di Andrei Sakharov e Jean-Marie Souriau

Il modello cosmologico di Giano riunisce la teoria della relatività generale di Albert Einstein, il lavoro di Andrei Sakharov sulla fisica delle particelle e sulla cosmologia e il lavoro di Jean-Marie Souriau sulla geometria simplettica. In base alla teoria dei gruppi dinamici, spiega come l'inversione del tempo implichi un'inversione dell'energia e quindi della massa.

In effetti, l'asimmetria barionica dell'universo è considerata uno dei problemi più significativi della fisica attuale. Più precisamente, si riferisce all'osservazione che nell'universo c'è una quantità netta di barioni (particelle composte da tre quark, come protoni e neutroni), ma quasi nessun antibarione (particelle composte da tre antiquark). L'universo avrebbe dovuto essere creato con una quantità uguale di materia barionica e di antimateria antibarionica fin dal Big Bang, il che avrebbe portato alla loro reciproca annichilazione, con la trasformazione della loro massa in fotoni. Ma cosa è successo a questa antimateria primordiale?

Negli anni '60, gli scienziati scoprirono che il tasso di produzione di materia (dalla combinazione dei quark primordiali) avviene leggermente più velocemente del tasso di produzione di antimateria (dalla combinazione degli antiquark), un fenomeno noto come "violazione CP" ((Cronin 1964)). Si tratta di un fenomeno paradossale, perché in precedenza tali processi di combinazione erano stati considerati simmetrici. Tuttavia, come risultato di questa *violazione CP*, nell'universo primordiale fu sintetizzata più materia e prevalse sull'antimateria.

Il fisico russo Andrei Sakharov è stato il primo, a partire dal 1967, a ripristinare la simmetria globale, ritenendo che l'universo non fosse costituito da un'unica entità, ma da due universi gemelli emanati dalla stessa singolarità del Big Bang, con due frecce del tempo opposte dal momento in cui si è verificato l'evento.  $t = 0$ . La singolarità iniziale  $\Phi$  inverte non solo il tempo (*simmetria T*), ma anche la parità (*simmetria P*, detta anche "enantiomorfia") e la coniugazione di carica (*simmetria C*, che trasforma una particella nella sua antiparticella e viceversa), inducendo la completa *simmetria CPT* ((Sacharov 1967),(Sacharov 1980),(Sacharov 1982)). La *violazione della simmetria CP* è invertita anche nell'universo gemello, il che significa che l'antimateria ha prevalso sulla materia. Va notato che Sakharov si è concentrato sulla descrizione della *simmetria CPT* solo nel contesto della fisica delle particelle, senza quindi coinvolgere la gravitazione nel suo modello, cosicché gli universi gemelli non interagiscono mai se non al momento della loro nascita, come nella Figura 2.10:

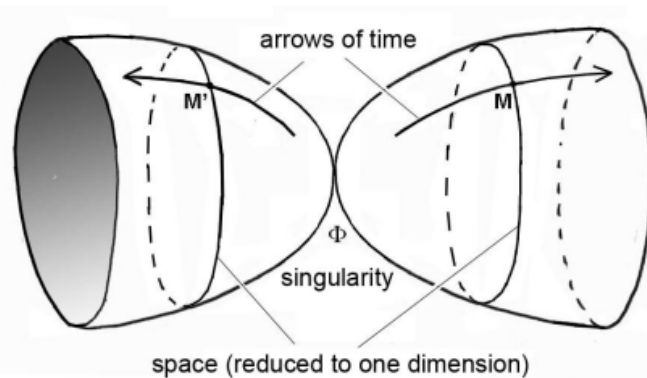


Figura 2.10 - Modello cosmologico di Sakharov

## 2.5 L'approccio bimetrico introdotto dalla geometria riemanniana iperbolica

La geometria riemanniana iperbolica svolge un ruolo cruciale nel modello cosmologico di Giano. Questa branca della geometria studia gli spazi curvi con curvatura negativa costante. Questa geometria permette di concettualizzare spazi con curvature sia positive che negative. Tuttavia, è importante notare che attualmente non esiste una teoria matematica bimetrica o multimetrica introdotta nella geometria Riemanniana iperbolica su cui si possa basare un modello cosmologico bimetrico. In effetti, gli attuali modelli teorici rimangono euristici. Ad esempio, due approcci sono stati tentati nel 2002 e nel 2008 rispettivamente da Thibault Damour ((Damour e Kogan 2002)) e Sabine Hossenfelder ((Hossenfelder 2008)). Uno si basava sull'introduzione di gravitoni pesanti e leggeri in un sistema di equazioni di campo bimetriche, l'altro era più o meno simile al nostro modello.

In effetti, Damour e Kogan tentano di costruire una teoria a "due membrane", che coinvolge uno spettro di gravitoni massicci, ma questo documento di 40 pagine si arresta bruscamente. Di sfuggita, dimostrano che questa bigravità deve obbedire a un sistema di due equazioni di campo accoppiate:

$$2M_L^2 \left( R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^L R(g^L) \right) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L = t_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^L$$

$$2M_R^2 \left( R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^R R(g^R) \right) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R = t_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^R$$

Successivamente, Sabine Hossenfelder propose un modello raffinato che affrontava il concetto di massa negativa nell'universo. Tuttavia, nel 1957, Hermann Bondi tentò di introdurre queste masse nel modello di Albert Einstein. Ma il cosiddetto fenomeno delle perdite rivelò contraddizioni fisiche, tanto che il modello violava i principi fondamentali della fisica, come il principio di azione-reazione e l'equivalenza ((Bondi 1957)). Hossenfelder si spinse oltre, formulando una coppia di nuove equazioni di campo accoppiate:

$$R_{vk} - \frac{1}{2} g_{vk}^{(g)} R = T_{kv} - \underline{V} \sqrt{\frac{h}{g}} a_v^k a_k^v \underline{T}_{vk}$$

$$R_{\underline{v}\underline{k}} - \frac{1}{2} h_{\underline{v}\underline{k}}^{(h)} R = \underline{T}_{\underline{v}\underline{k}} - \underline{W} \sqrt{\frac{g}{h}} a_k^{\underline{v}} a_{\underline{v}}^k T_{kv}$$

Poi, non riuscendo a risolvere l'incongruenza con i principi fisici e ritenendo che fosse inestricabilmente legata alla "gravità bimetrica", ha rinunciato.

Ciò che accomuna questi due approcci è che sono puramente teorici e non hanno fornito risultati convalidati dalle osservazioni. L'unico merito che si può attribuire al nostro

modello cosmologico, rispetto ai due precedenti, è che ha molti punti di ancoraggio con l'osservazione e diverse predizioni fisiche che vedremo nella Sezione 3.2

La geometria riemanniana iperbolica è una branca della geometria riemanniana che studia gli spazi curvi con curvatura negativa costante, corrispondente matematicamente a una forma iperbolica spesso descritta come "a sella". Più precisamente, la curvatura negativa costante dello spazio iperbolico può essere descritta come il comportamento asintotico dell'iperbole in entrambe le direzioni: i rami dell'iperbole divergono indefinitamente senza mai convergere. Questa caratteristica è una proprietà importante dello spazio iperbolico e può essere utilizzata per distinguerlo dalla geometria euclidea e dalla geometria sferica di Riemanni.

Ad esempio, nella Figura 2.11, le linee rosse che disegnano i triangoli sono le *geodetiche della* superficie. In termini semplici, una *geodetica* è il percorso più breve tra due punti nello spazio. Immaginiamo di trovarci in uno spazio euclideo piatto, come su un grande foglio di carta; in questo caso, questo percorso è semplicemente una linea retta. Ma sulle superfici curve, sia a curvatura positiva (geometria sferica) sia a curvatura negativa (geometria iperbolica, come la sella di un cavallo), è possibile tracciare una *geodetica* utilizzando una corda o un elastico teso tra due punti della superficie, che rappresenta il percorso più breve. Quindi, a differenza della geometria euclidea in cui la somma degli angoli di un triangolo è uguale a 180 gradi, questa somma supera i 180 gradi nella geometria sferica (Riemanniana) ed è inferiore a 180 gradi nella geometria iperbolica (anch'essa un tipo di geometria Riemanniana).

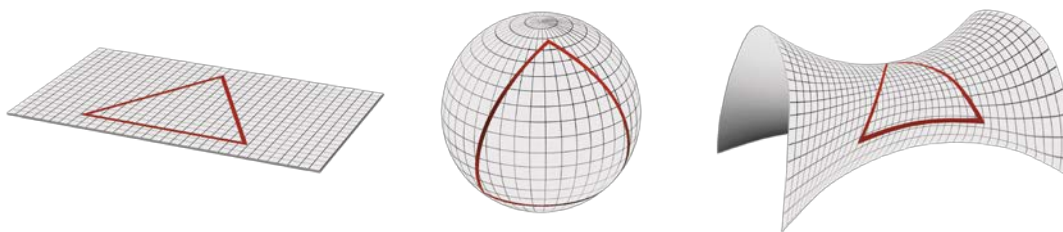


Figura 2.1 1 - Tipi di curvatura spaziale

È importante notare che uno spazio euclideo "piatto", cioè uno spazio con curvatura nulla, non è necessariamente un piano. Prendiamo l'esempio precedente di un foglio di carta: anche se viene piegato più volte, come il ferro ondulato, la sua curvatura rimane ovunque nulla. Ciò significa che la *geodetica* tracciata sulla sua superficie non cambia, perché il foglio non si allunga. Lo stesso vale per le superfici euclidee chiuse, come un cilindro o un cono: contrariamente a quanto si potrebbe pensare, non hanno curvatura. Secondo la geometria euclidea, anche se sembrano curve, possono essere considerate "piatte" perché la loro superficie può essere dispiegata in un piano senza allungarsi.

Il concetto del Modello Cosmologico di Giano, che verrà sviluppato nel prossimo capitolo, consiste nell'associarlo a una "geometria gemellare" definita da una relazione tra spazi a curvatura positiva e spazi a curvatura negativa, secondo un sistema di due equazioni di campo accoppiate.

## 3 Modello cosmologico 3Janus

### 3.1 Descrizione

Il Modello Cosmologico di Giano propone una visione rivoluzionaria dell'universo, caratterizzato da una varietà riemanniana con due metriche distinte. Queste metriche gestiscono le masse positive e negative in modo unico, offrendo un'interpretazione coerente nell'ambito della relatività generale, confermata dalle osservazioni, evitando i paradossi tradizionali.

Sulla base del modello cosmologico di Andrei Sakharov di due universi bimetrici non interagenti, è stato sviluppato un nuovo modello come un singolo universo costituito da un'unica varietà riemanniana con due metriche, ovvero un'ipersuperficie quadridimensionale con due strati ripiegati l'uno sull'altro in *simmetria CPT*, ma questa volta interagenti per effetto gravitazionale.

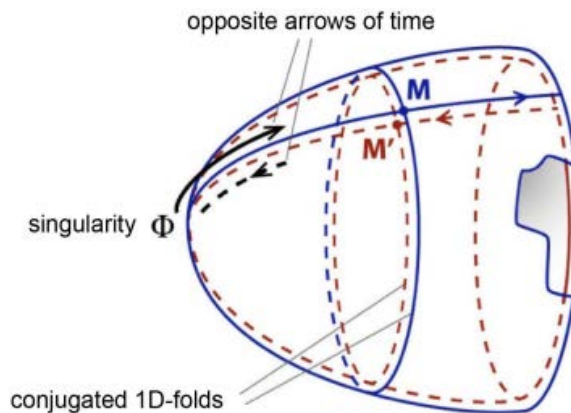


Figura 3.1 - Modello Cosmologico Janus

Il primo strato è reticolato con una certa unità di lunghezza che fornisce una metrica attraverso la quale la materia di energia e massa positiva passa tra due punti di questo spazio-tempo a una velocità limitata dalla teoria della relatività speciale (sezione 2.2.2). E la sua controparte, ripiegata su se stessa ma al quadrato, secondo un'unità di lunghezza 100 volte più corta e una velocità 10 volte superiore per la materia di energia e massa negativa (fotoni che evolvono nelle stesse proporzioni), con un tempo di attraversamento 1000 volte più veloce. Questo modello offre quindi due famiglie di geodetiche che attraversano lo spazio-tempo in due modi diversi e a velocità diverse, rendendo possibili i viaggi interstellari e spiegando diversi fenomeni fisici come la scomparsa dell'antimateria primordiale e il confinamento delle galassie ((Petit e d'Agostini 2014),(Petit 2018)). Dimostra inoltre che gli stati energetici negativi sono compatibili con la meccanica quantistica.

Questo modello è costruito su due equazioni di campo accoppiate che sono un'estensione dell'equazione di campo di Einstein, offrendo un'alternativa credibile alla presenza di energia oscura (potere repulsivo) e di materia oscura (appiattimento delle curve di



rotazione galattica) nel cosmo e integrando con successo le masse negative nella Relatività Generale. Si

basa sulla derivazione di equazioni da un concetto chiamato "*lagrangiana*". In fisica, spesso utilizziamo dei principi per spiegare come gli oggetti o le particelle si muovono e interagiscono tra loro. Nel nostro caso, utilizziamo i principi di variazione, che sono formule matematiche che descrivono come un sistema fisico si evolve nel tempo minimizzando una quantità specifica chiamata "*azione*". Questo concetto di variazione deve essere "*covariante*", il che significa che rimane lo stesso indipendentemente dal quadro di riferimento inerziale scelto. Ciò implica che si applica a tutti gli osservatori, indipendentemente dalla loro velocità.

La derivazione logica di questi principi dovrebbe condurci a equazioni che descrivono i moti e le interazioni di un sistema di particelle in modo tale da renderle valide per tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro moto relativo. L'"azione" è definita come l'integrale della *lagrangiana* in un certo periodo di tempo, che ci permette di descrivere la cinetica e la dinamica di un sistema fisico. La *lagrangiana* è una funzione calcolata a partire dall'energia cinetica e potenziale del sistema, oltre che da altri fattori che possono influenzarne il comportamento. Utilizzando il principio di minima azione, si cerca di trovare la traiettoria del sistema che minimizza l'"azione", ossia il percorso per il quale il valore dell'"azione" è il più piccolo possibile. Le equazioni del moto si ottengono differenziando questa traiettoria di minima azione rispetto al tempo.

### 3.2 Implicazioni

La cosmologia è in crisi. Il primo esempio è il tasso di espansione dell'Universo, che da 13,8 miliardi di anni si gonfia come un gigantesco pallone. Quando gli astrofisici hanno utilizzato i loro telescopi per misurare l'attuale tasso di espansione, noto come costante di Hubble ( $H_0$ ), hanno trovato un valore incompatibile con quello previsto dal Modello Standard della Cosmologia ( $\Lambda$ CDM), la teoria che attualmente descrive meglio la storia dell'Universo, dalla sua origine (il Big Bang) e dai primi atomi fino ai giorni nostri, attraverso le prime stelle e galassie.

La costante di Hubble ( $H_0$ ) è un parametro chiave della cosmologia che misura la velocità di espansione dell'Universo. Indica la velocità con cui le galassie si allontanano l'una dall'altra in funzione della loro distanza. Recentemente, tuttavia, due principali metodi di misurazione hanno prodotto risultati significativamente diversi:

- Da un lato, le misurazioni locali che utilizzano l'osservazione diretta delle galassie e la scala di distanza cosmologica basata su candele standard come le cefeidi e le supernove di tipo Ia, danno un valore di  $H_0$  di 73 km/s/Mpc<sup>2</sup>. Questa misura proviene dalla collaborazione *Shoemaker-Levy* guidata dall'americano Adam Riess.

---

<sup>2</sup> Un megaparsec equivale a circa 3,26 milioni di anni luce. Per ogni megaparsec di distanza, l'espansione dell'Universo aumenta la velocità di separazione delle galassie di 73 chilometri al secondo.

- D'altra parte, i dati del fondo cosmico a microonde<sup>3</sup>, analizzati nell'ambito del Modello Standard della cosmologia, suggeriscono un valore più basso di 67,4 chilometri al secondo per megaparsec (km/s/Mpc). Questo metodo si basa sui dati del satellite Planck.

Questa discrepanza, se non è attribuibile a errori di misura, richiede una rivalutazione di alcuni aspetti fondamentali del Modello Standard, come il ruolo dell'energia oscura nell'accelerare l'espansione cosmica. Il Modello Cosmologico di Giano attribuisce questo effetto antigravitazionale alle masse negative e ne specifica la natura, un argomento che approfondiremo più avanti nella sezione dedicata [3.3](#).

Come ulteriore esempio, il James Webb Space Telescope (JWST), con le sue avanzate capacità di osservazione nell'infrarosso, è stato progettato per osservare l'Universo nelle primissime fasi della sua evoluzione, compresa la formazione delle prime galassie. Le recenti osservazioni del JWST rivelano oggetti o comportamenti che non corrispondono alle previsioni del Modello Standard, portando a una completa revisione delle sue basi. Secondo il Modello Standard della cosmologia, l'universo ha vissuto un periodo di buio dopo il Big Bang, seguito dalla formazione delle prime stelle e proto-galassie qualche centinaio di milioni di anni dopo. Queste prime strutture si sono evolute in grandi galassie nel corso dei primi miliardi di anni, un processo guidato dalla gravità della materia oscura. Le galassie hanno continuato a svilupparsi e a raggrupparsi per miliardi di anni, formando i vari tipi osservati oggi. Si ritiene che la materia oscura e l'energia oscura svolgano un ruolo cruciale in questo processo, influenzando rispettivamente la formazione delle strutture e l'espansione dell'universo.

Il recente studio pubblicato sulla rivista *Nature Astronomy* (Boylan-Kolchin 2023) si riferisce alla scoperta da parte di Mike Boylan-Kolchin, professore associato di astronomia presso l'Università del Texas ad Austin, della formazione più precoce del previsto di diverse galassie ad alto redshift (tra 500 e 700 milioni di anni dopo il Big Bang) molto più massicce della nostra (10 miliardi di masse solari).

Per esempio, *Abell 2744 Y1* è un ammasso di galassie situato nella costellazione dello Scultore a circa 13,2 miliardi di anni luce di distanza e ci appare come quando l'universo aveva solo 650 milioni di anni (Figura [3.2](#)).

---

<sup>3</sup> Il fondo cosmico a microonde (CMB) è la radiazione elettromagnetica emessa circa 380.000 anni dopo il Big Bang, quando l'universo si era raffreddato a sufficienza perché elettroni e protoni si combinassero per formare gli atomi.

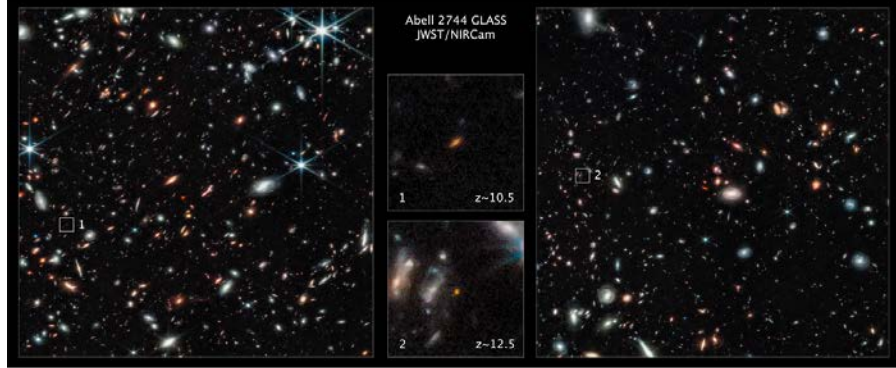


Figura 3.2 - Immagine del James Webb Telescope - Abell 2744 Y1

Questa osservazione del James Webb Space Telescope conferma ancora una volta una delle previsioni del Modello Cosmologico di Giano. Il Modello Cosmologico di Giano getta quindi nuova luce su questioni cosmologiche fondamentali, le cui risposte sono confermate da numerose osservazioni e previsioni, tra cui, ma non solo, le seguenti:

- Spiegazione del confinamento delle galassie tramite spazi vuoti occupati da masse negative che contribuiscono alla loro stabilità come nella Figura 3.3 ((Farnes 2017)).

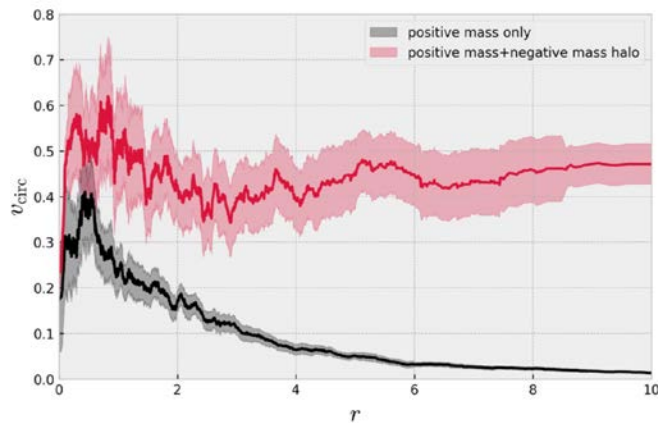


Figura 3.3 - Differenza tra le velocità circolari co urbe di una galassia composta da particelle di massa positiva rispetto a un'altra circondata da un alone di particelle di massa negativa.

- Spiegazione della forma delle curve di rotazione delle galassie (appiattimento)
- Questo modello spiega l'accelerazione gravitazionale più elevata del previsto delle stelle che orbitano ai bordi delle galassie, dovuta alla presenza di masse negative.

- Spiegazione dell'alta velocità delle galassie in ammassi dovuta al contributo antigravitazionale delle masse negative.
- Propone una descrizione matematicamente dettagliata del comportamento delle galassie, basata su un approccio comune alle equazioni di Vlasov e di Poisson. Prevede che le velocità delle stelle all'interno di una galassia siano organizzate in un ellissoide orientato verso il centro galattico, ipotesi confermata dalle misure delle velocità residue delle stelle vicine al sistema solare.
- Spiega gli effetti di lensing gravitazionale intorno alle galassie, come in 3.4.

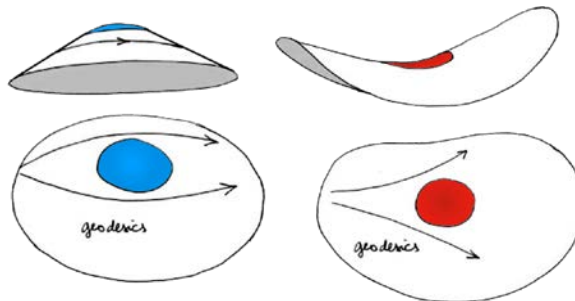


Figura 3.4 - Effetti delle lenti gravitazionali

- Spiegazione della struttura lacunosa dell'universo occupata da ammassi di masse negative sotto forma di bolle di sapone interconnesse come in 3.5.

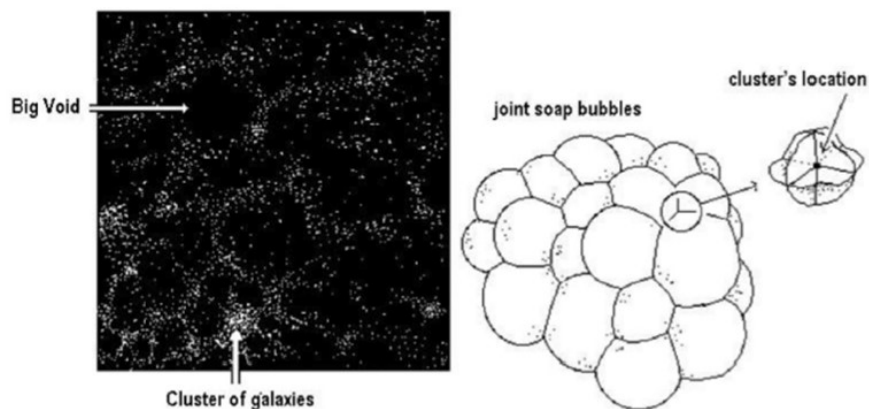


Figura 3.5 - Struttura del gap

Questa struttura è stata stabilita nel 2018 anche da Tsvi Piran nel suo articolo (Piran 2018), in cui evidenzia la distribuzione delle galassie in quelli che chiama "muri" dovuti alla compressione antigravitazionale delle regioni sub-dense di masse negative concentrate nella materia oscura degli spazi vuoti. Le osservazioni mostrano che questi spazi vuoti occupano una parte significativa del volume dell'Universo. La correlazione tra i vuoti nella distribuzione delle galassie e le regioni a bassa densità di materia oscura dimostra chiaramente l'origine gravitazionale di questi vuoti. Le regioni primordiali subdense, note come "vuoti cosmologici negativi", agiscono come masse gravitazionali negative e fungono da semi per i vuoti osservati. I centri di queste regioni subdense sono masse gravitazionali effettive che respingono la materia, allineandola lungo le pareti tra i centri. I vuoti sono centrati

attorno a queste masse e sono circondati da pareti di galassie. Alla fine le pareti si rompono, facendo sì che i vuoti si fondano con altri vuoti, creando una rete più ampia di vuoti che confina le galassie.

- Previsione e conferma della formazione precoce di tutte le galassie recentemente osservate dal James Webb Space Telescope ((Ferreira et al. 2022)). Il modello suggerisce infatti che tutte le galassie si siano formate insieme durante i primi 100 milioni di anni della storia dell'universo (primordiale). Questa formazione è avvenuta quando la massa positiva è stata violentemente compressa tra più ammassi di massa negativa, creando un'alta pressione. La forte contrazione della materia e dei gas dovuta all'effetto antigravitazionale delle masse negative ha indotto un notevole riscaldamento, che ha portato a un rapido raffreddamento facilitato da una struttura a lenzuolo. Questo tempo di raffreddamento ha permesso di raggiungere una temperatura sufficiente per avviare le reazioni di fusione termonucleare, consentendo la nascita delle prime stelle e il loro raggruppamento per formare le galassie che conosciamo oggi.
- Spiegazione delle galassie lontane ad alto redshift ( $> 7$ ) che appaiono come nane (luminosità ridotta). Questo perché gli ammassi di massa negativa (come nella regione del Dipole Repeller, che studieremo nella sezione 3.3) creano un effetto di lente gravitazionale negativa sui loro fotoni, che ha l'effetto di attenuare la loro luminosità.
- Confermate le verifiche relativistiche locali, come l'avanzamento del perielio di Mercurio o la deflessione dei raggi luminosi da parte del Sole. Poiché i due tipi di massa si respingono e considerando che la densità di massa negativa è quasi trascurabile in prossimità del Sole, la prima equazione del sistema corrisponde all'equazione di campo di Einstein (cfr. sezione 3.3.4.2).

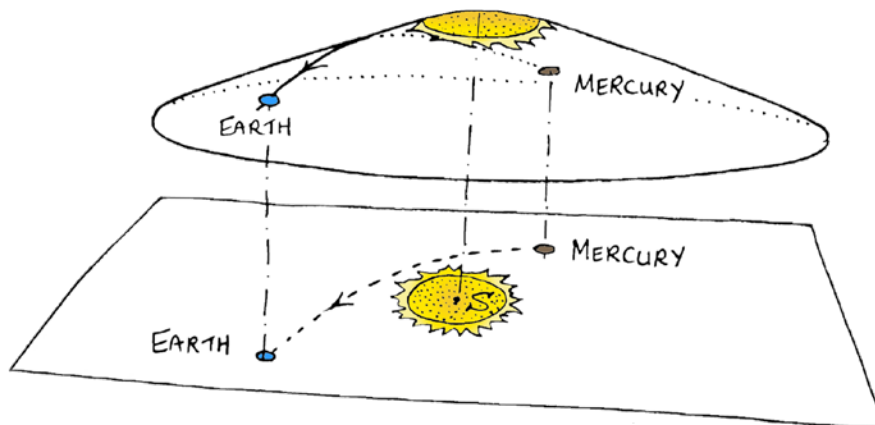


Figura 3.6 - Deformazione dello spazio-tempo indotta dalla massa del Sole

- Lo sfruttamento dell'asimmetria tra le due popolazioni di masse positive e negative ha portato alla coerenza con i dati delle osservazioni delle supernove di tipo Ia. L'osservazione delle supernove di tipo Ia è stata uno strumento fondamentale per determinare le distanze degli oggetti celesti e studiare l'espansione dell'universo. Le supernove di tipo Ia sono esplosioni di supernove che si verificano in sistemi stellari

binari in cui una stella nota come nana bianca assorbe materiale da una stella compagna fino a raggiungere una massa critica, causandone l'esplosione. Questa asimmetria potrebbe essere causata da processi come la rotazione o il campo magnetico della stella compagna, che trasferisce materia alla nana bianca. Se l'asimmetria esiste, potrebbe portare a una differenza di luminosità tra le supernove di tipo Ia, il che potrebbe spiegare le osservazioni.

- Spiegazione della natura del Grande Respingente scoperto nel gennaio 2017 (si veda la sezione 3.3), dove è stato dimostrato che esiste in una regione apparentemente vuota dell'universo, opposta a quella dell'Attrattore di Shapley, che sembrava respingere tutta la materia.

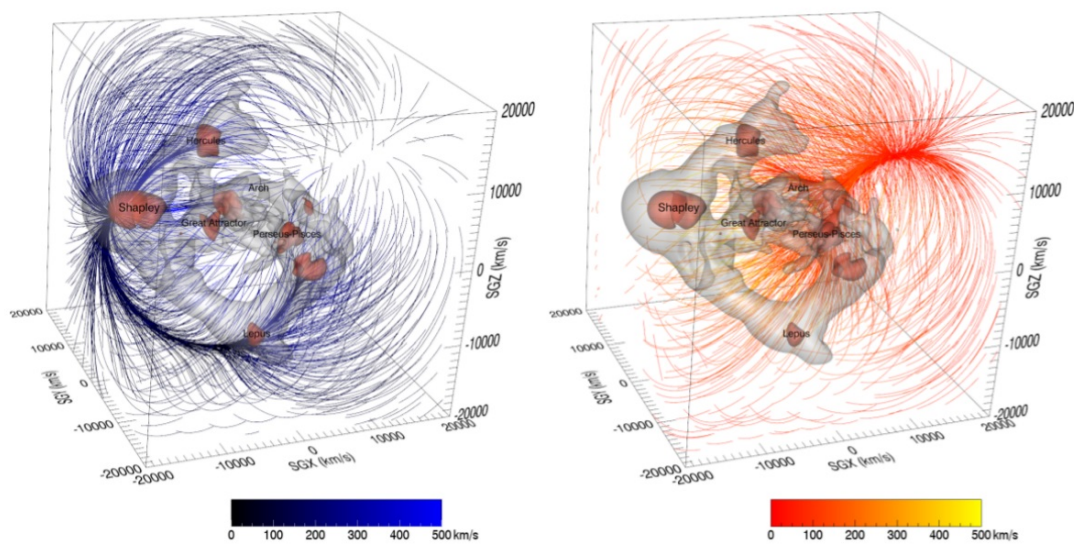
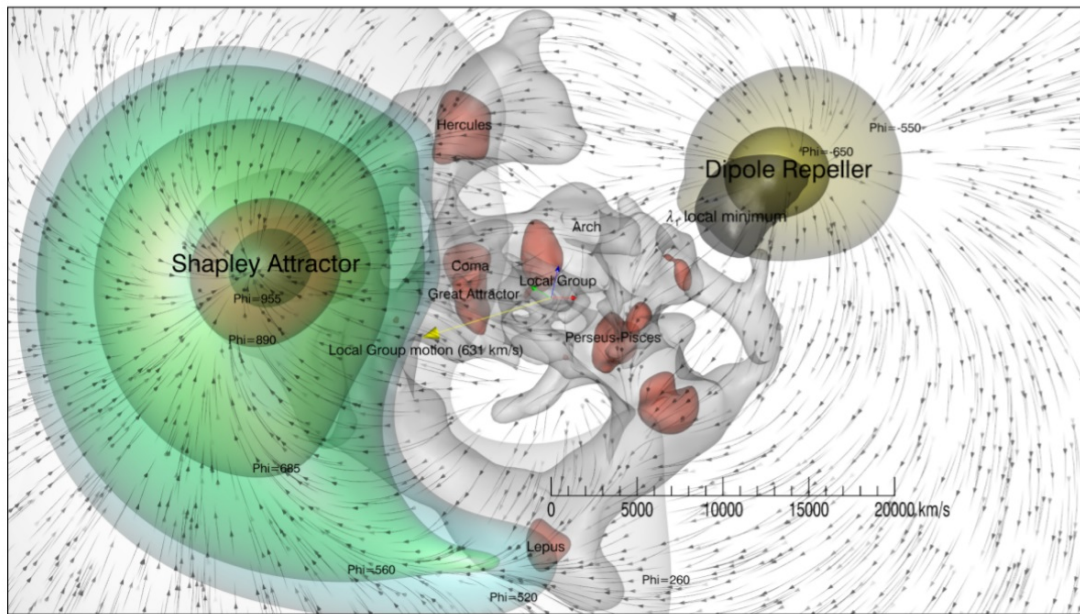
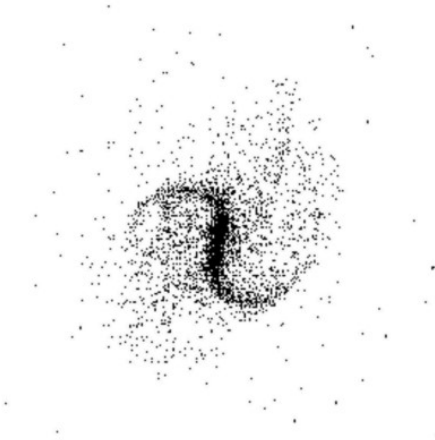
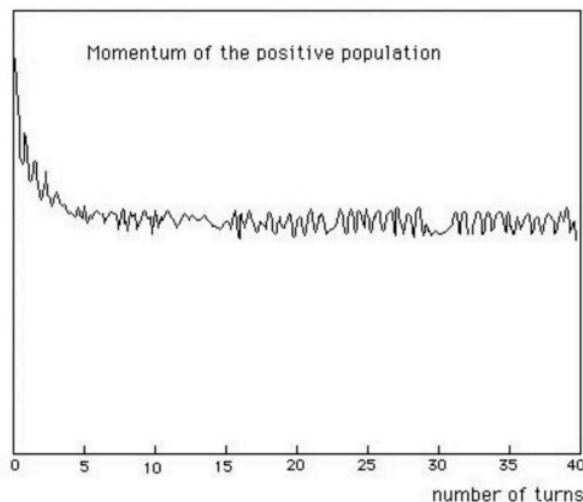


Figura 3.7 - Il respingente grande

- Il modello dimostra una struttura galattica a spirale debole, guidata dall'attrito dinamico che trasferisce continuamente la quantità di moto all'ambiente meno denso di massa negativa, permettendo ai bracci della spirale di ruotare in modo persistente e stabile intorno alla galassia. Come illustrato di seguito, quando i bracci passano attraverso regioni ad alta densità (massa positiva), rallentano e perdono energia, mentre quando passano attraverso regioni a bassa densità, accelerano e guadagnano energia. Questo crea onde di densità che si propagano attraverso la galassia, trasferendo la quantità di moto all'ambiente di massa negativa.



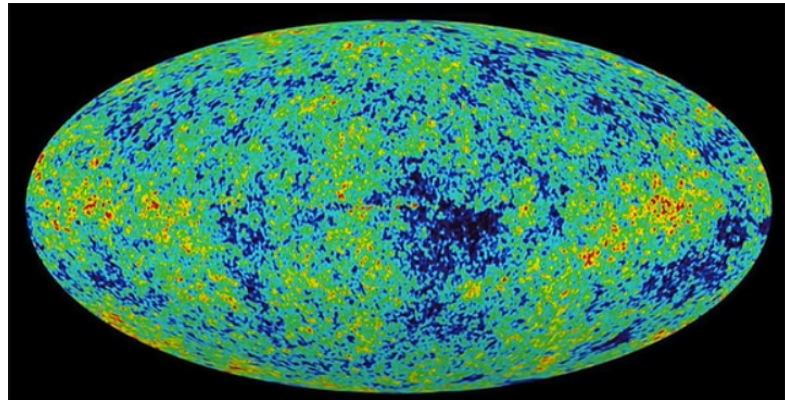
*Figura 3.8 - Spirale barrata di una simulazione numerica (1992: 20.000 punti)*



*Figura 3.9 - Evoluzione del momento cinetico (1992: 20.000 punti)*

- Spiegazione del perché non è stata osservata l'antimateria cosmica, che emette fotoni a energia negativa.
- Spiegazione della natura dei componenti invisibili dell'universo: antiprotoni, antineutroni, antielettroni, antiidrogeno e antielio di massa negativa. Questi elementi costituiscono l'antimateria primordiale, che non può essere osservata perché emette fotoni di energia negativa.

- **Congettura recentemente confermata nel settembre 2023 (Anderson 2023):** L'antimateria C-simmetrica (a simmetria di carica), sviluppata in laboratorio e che emette fotoni ad energia positiva, viene spinta gravitazionalmente verso il basso proprio come la materia ordinaria.
- Il modello offre una propria interpretazione delle fluttuazioni nel fondo cosmico a microonde (CMB) attribuendole alla risposta della materia ordinaria di massa positiva alle fluttuazioni di densità nelle celle adiacenti dell'universo popolate da una distribuzione di materia di massa negativa. Questa situazione è legata all'instabilità gravitazionale che si verifica all'interno di queste celle. L'analisi di queste fluttuazioni fornisce un mezzo per valutare la relazione tra i fattori di scala dei due tipi di materia. Si può notare che il rapporto  $\frac{a(+)}{a(-)}$  è dell'ordine di 100. Possiamo quindi dedurre che il rapporto  $\frac{c(-)}{c(+)}$  è dell'ordine di 10 ((Petit 2018)). Ciò implica che l'effetto complessivo sarebbe quello di ridurre di un fattore mille il tempo necessario per il viaggio interstellare per gli oggetti che riescono a invertire la loro massa, consentendo loro di muoversi lungo le geodetiche descritte dalla metrica  $h_{\mu\nu}$  della seconda equazione di campo (24), come studieremo nella prossima sezione.



*Figura 3.10 - Fonte cosmologica diffusa*

- Redshift gravitazionale di 3 dedotto dalle prime due immagini di oggetti supermassicci situati al centro delle galassie M87 e Via Lattea (si veda lo studio effettuato nella sezione 7).
- Attualmente non esiste una risposta alla domanda: "*Cosa c'era prima del Big Bang?*". Secondo il Modello Cosmologico di Giano, una struttura topologica dell'universo, "*interagendo con la sua controparte anticronica*", elimina questa domanda invalidando il significato dell'avverbio "*prima*". Infatti, come vedremo più avanti, al momento del Big Bang la freccia del tempo si inverte.



## 3.3 Il respingente di dipolo

### 3.3.1 Introduzione

Nel 2017, Yehudi Hoffman, B. Tully, H. Courtois e D. Pomarède hanno pubblicato la prima mappa molto dettagliata dell'universo (Hoffman et al. 2017). Questa mappa si basava non solo sulle posizioni delle galassie, ma integrava anche il loro campo di velocità sottraendo l'influenza dell'espansione di Hubble dalle misure grezze del loro redshift. I risultati sono stati incredibilmente impressionanti e sono considerati una delle più importanti scoperte osservative della cosmologia odierna, paragonabile per importanza alla scoperta di Edwin Hubble di un secolo fa. Prima di questo studio, si sapeva che alcune galassie mostravano moti convergenti verso una regione chiamata Grande Attrattore. L'analisi del 2017 ha rivelato l'influenza di un'altra struttura più grande oltre il Grande Attrattore, chiamata Attrattore di Shapley. Tuttavia, la scoperta più notevole è stata l'identificazione di una regione quasi opposta a queste due formazioni, dove non sono state rilevate galassie. Al contrario, c'era un vuoto significativo circondato da galassie vicine che mostravano un movimento di allontanamento da questa regione, formando un modello "*a perdita*" centrato su questo vuoto. Inizialmente chiamato Dipole Repeller, è stato poi chiamato Dipolar Attractor quando si è capito che era legato a formazioni attrattive. La comprensione di questo fenomeno, che non può essere attribuito ad artefatti di misurazione, richiede indubbiamente un significativo progresso nella comprensione della dinamica cosmica.

### 3.3.2 Alcuni tentativi di interpretazione

A quattro anni dalla scoperta iniziale, ci sono stati pochi tentativi di modellizzare il fenomeno del dipolo repulsore. Nel suo recente articolo (Neiser 2020), Neiser non si concentra su questa questione, ma propone invece ipotesi sulla natura del Big Bang, sul vuoto quantistico e sull'origine dell'universo. Neiser ipotizza che l'antimateria potrebbe avere un effetto gravitazionale repulsivo, portando alla formazione di stelle di neutrini e antineutrini che si respingono a vicenda. Aspetti simili della repulsione primordiale dell'antimateria sono menzionati da Benoit-Lévy et al. nel 2012 ((Benoit-Lévy e Chardin 2012)), ma senza ulteriori giustificazioni. Heald, nel suo articolo (Heald 2020), cita la situazione di Laniakea, che è spinta dal repulsore di dipolo e attratta dall'attrattore di Shapley. Ancora una volta, l'idea di una repulsione tra materia e antimateria viene suggerita come possibile spiegazione della struttura su larga scala dell'universo e dell'organizzazione dei vuoti. Tuttavia, non viene fornito alcun modello concreto per l'oggetto centrale nel grande vuoto e l'assenza di luce emessa rimane inspiegabile. Nel 2018, Vuyk suggerisce nel suo articolo (Vuyk 2018) l'esistenza di un'ipotetica quinta forza, mentre Hoffman et al. utilizzano simulazioni numeriche per ricostruire una distribuzione di materia oscura coerente con i dati osservativi ((Hoffman et al. 2018)). Da queste esplorazioni emergono due schemi esplicativi: uno che coinvolge ipotetici oggetti composti da antimateria repulsiva, che non sono osservabili, e l'altro che suggerisce una discrepanza nella distribuzione della materia oscura. Le osservazioni hanno rivelato che l'espansione dell'universo sta accelerando, indicando la presenza di una componente con pressione negativa ((Perlmutter et al. 1999), (Riess et al. 2004), (Schmidt et al. 1998)). Un modello proposto per spiegare questo fenomeno suggerisce l'esistenza di masse negative che possono contribuire a questi effetti antigravitazionali, combinando le influenze repulsive

della materia oscura e dell'energia oscura sulle componenti di massa positiva. Questa ipotesi è al centro dei lavori corrispondenti ai riferimenti (Petit 1995) (Petit e D'Agostini 2014a) (Petit e D'Agostini 2014b) (Petit, D'Agostini e Debergh 2018) (Petit, D'Agostini e Debergh 2019) (Petit e D'Agostini 2021a) (Petit e D'Agostini 2021b).

### 3.3.3 Interpretazione delle lacune della materia oscura

Esaminiamo la possibilità che un vuoto di materia oscura possa produrre l'effetto repulsivo osservato. Possiamo iniziare considerando un vuoto sferico all'interno di una distribuzione uniforme di materia oscura e utilizzare l'equazione di Poisson per analizzare questo sistema:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} = 4\pi G \rho_{dm}$$

Questa equazione è lineare e descrive il potenziale gravitazionale in funzione della densità. Sovrapponendo due distribuzioni di densità  $\rho_1$  e  $\rho_2$  il potenziale gravitazionale risultante è la somma dei potenziali associati a queste due distribuzioni:  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ .

Considerando una distribuzione di densità uniforme  $\rho_{dm}^{unif}$  otteniamo un potenziale  $\psi_1$  che è la soluzione dell'equazione di Poisson :

$$\psi_1 = \frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}_1 = -\frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

Ora, introducendo un volume con densità opposta pari a  $-\rho_{dm}^{unif}$  si crea un potenziale  $\psi_2$  che è la soluzione della seguente equazione di Poisson :

$$\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_2}{dr} = -4\pi G \rho_{dm}^{unif}$$

Questa soluzione è :

$$\psi_2 = -\frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

Si ottiene quindi lo stesso campo gravitazionale, ma con segno opposto. È quindi repulsivo e proporzionale alla distanza dal centro della sfera.

Quindi, calcolando i potenziali gravitazionali associati a queste due distribuzioni, possiamo osservare che il potenziale gravitazionale risultante è nullo all'interno del vuoto. In altre parole, la forza gravitazionale esercitata dalla distribuzione uniforme della materia oscura è esattamente bilanciata dalla forza gravitazionale esercitata dalla densità opposta che crea il vuoto:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Tuttavia, qualunque sia la posizione scelta come origine delle coordinate, il campo gravitazionale rimane non nullo all'interno del vuoto. Ciò significa che la forza

gravitazionale non è perfettamente bilanciata, il che sembra contraddire l'idea che il vuoto crei un campo gravitazionale repulsivo.

Per risolvere questo paradosso, l'equazione di Poisson deve essere considerata come la versione linearizzata dell'equazione di Einstein in situazione stazionaria, che definisce il potenziale gravitazionale in termini di una perturbazione della metrica di Lorentz:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}$$

Il calcolo classico dà per la densità propria  $\rho_0$  ((Adler, Bazin e Schiffer 1975)) :

$$\varepsilon \sum_{i=0}^3 \gamma_{00|i|i} = -\chi\rho_0$$

*NB:* Nel contesto del limite di campo debole studiato nella Sezione 2.3.6, l'equazione (26) mette in relazione le derivate seconde spaziali della componente temporale  $\gamma_{00}$  del tensore metrico alle sorgenti gravitazionali, rappresentate dalla densità locale di massa-energia  $\rho_0$ . Questo ci aiuta a capire come la curvatura dello spazio-tempo reagisce alla distribuzione di massa-energia, mantenendo una relazione precisa tra questi due aspetti.

Pertanto, il potenziale gravitazionale è definito come (27) da :

$$\psi = -\frac{c^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}$$

Quindi, la (26) può essere identificata con l'equazione di Poisson. Tuttavia, questo approccio non può essere applicato a una distribuzione uniforme infinita di materia oscura. La conclusione è che è semplicemente impossibile definire un potenziale gravitazionale all'interno di una distribuzione uniforme di materia, perché l'instabilità gravitazionale tende a portare alla formazione di ammassi, non di vuoti, e non esiste un quadro chiaro per la formazione di tali vuoti.

### 3.3.4 Interpretazione con il modello cosmologico di Giano

Consideriamo ora l'interazione tra due entità: la materia ordinaria con massa positiva che interagisce con la massa negativa attraverso gli effetti gravitazionali. Questo modello che coinvolge la massa negativa tiene conto dell'influenza della materia oscura e dell'energia oscura.

Possiamo descrivere questo sistema di due entità con metriche di  $g$  e  $h$ . Sia  $G$  e  $H$  siano i corrispondenti scalari di Ricci. Consideriamo quindi la seguente azione a due strati:

$$A = \int_{\mathcal{E}} \left( \frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \left( \frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x$$

I termini  $S_{(g)}$  e  $S_{(h)}$  forniranno i termini di origine relativi alle popolazioni delle due entità, mentre i termini  $S_{(h,g)}$  e  $S_{(g,h)}$  genereranno i tensori di interazione.  $\Gamma^{(g)}$  e  $\Gamma^{(h)}$  sono le

costanti di Einstein per ciascuna entità. Per  $\kappa = \pm 1$  applichiamo il principio di minima azione. La derivazione lagrangiana di questa azione ci dà :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta A \\
&= \int_{\mathcal{E}} \delta \left( \frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \delta \left( \frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x \\
&= \int_{\mathcal{E}} \delta \left[ \frac{1}{2\Gamma(g)} \left( \frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x \\
&\quad + \int_{\mathcal{E}} \delta \left[ \frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left( \frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \right] \delta h^{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^4x
\end{aligned}$$

Per qualsiasi variazione  $\delta g^{\mu\nu}$  e tutte le variazioni  $\delta h^{\mu\nu}$  otteniamo localmente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Gamma(g)} \left( \frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0 \\
\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left( \frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} &= 0
\end{aligned}$$

Introduciamo i seguenti tensori:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(g,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(g)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(h)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \\
T_{\mu\nu}^{(g,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

Nella relatività generale, la derivata covariante è un modo per generalizzare la nozione di derivata parziale agli spazi curvi. A differenza di una derivata parziale ordinaria, la derivata covariante tiene conto della curvatura dello spazio-tempo.

Allora, per un tensore  $A_{\nu\sigma}^{\rho}$  la sua derivata covariante lungo un indice  $\mu$  è data dall'espressione :

$$\nabla_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} A_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} A_{\nu\lambda}^{\rho}$$

Possiamo quindi dedurre le due espressioni seguenti:

$$\nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}$$

$$\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$$

NB:

- La (28b) si ottiene dalla (28a) semplicemente scambiando  $\mu$  e  $\nu$ .
- Il termine  $\partial_\mu A_{\nu\sigma}^\rho$  è la derivata parziale ordinaria del tensore. Se lo spazio-tempo fosse piatto (come nella fisica newtoniana), questo sarebbe sufficiente per descrivere la variazione del tensore.
- Termini con simboli di Christoffel  $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  e  $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$  rappresentano la correzione dovuta alla connessione spazio-temporale, che tiene conto della curvatura dello spazio-tempo. In effetti, nello spazio curvo, la connessione (rappresentata dai simboli di Christoffel  $\Gamma$ ) introduce una correzione. Questa correzione è necessaria perché le basi dello spazio tangente (lo spazio in cui vive il tensore) cambiano da un punto all'altro dello spaziotempo. Quindi,  $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\nu\sigma}^\lambda$  è il termine che corregge la variazione del tensore  $A_{\nu\sigma}^\lambda$  quando ci si sposta nella direzione  $\mu$  per l'indice maggiore  $\rho$ .  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{\lambda\sigma}^\rho$  e  $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\rho$  sono termini che sottraggono il contributo dovuto alla variazione degli indici inferiori  $\nu$  e  $\sigma$ . Questi termini assicurano che la derivata covariante rispetti le regole di trasformazione tensoriale.

In sintesi, la derivata covariante  $\nabla_\mu$  di un tensore è una combinazione della sua derivata parziale ordinaria e di termini che compensano i cambiamenti nella geometria dello spazio-tempo. È costruita in modo tale che la derivata del tensore sia essa stessa un tensore, cosa che non avviene per la derivata parziale ordinaria.

Il tensore di Riemann è legato ai simboli di Christoffel dalla seguente equazione :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

NB: Il tensore di Riemann  $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$  è una grandezza matematica della relatività generale che descrive la curvatura intrinseca dello spazio-tempo. È definito come la differenza tra le derivate parziali dei simboli di Christoffel e la somma dei prodotti dei simboli di Christoffel stessi. Il termine  $\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho$  è la derivata parziale del simbolo di Christoffel  $\Gamma_{\nu\sigma}^\rho$  rispetto alla coordinata  $x^\mu$ . Questo termine misura come varia il simbolo di Christoffel quando si muove nella direzione  $\mu$ . Il termine  $\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$  è simile al primo termine, ma con la derivata parziale presa in una direzione diversa,  $x^\nu$ . I termini  $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$  e  $\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$  descrivono il prodotto di due simboli di Christoffel che rappresentano l'interazione tra due connessioni spazio-temporali. Misura come la curvatura in una direzione influenza la curvatura in un'altra direzione.

Poi si ottiene:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

Questo ci dà:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$$

Contraendo gli indici  $\rho$  e  $\sigma$  nella relazione precedente utilizzando la convenzione di sommatoria di Einstein, secondo la quale un indice ripetuto implica una sommatoria implicita su quell'indice, possiamo esprimere la variazione del tensore di curvatura Ricci che soddisfa l'identità di Palatini ((Tsamparlis 1978), (Palatini 1919)) :

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho})$$

*NB:* Nella relatività generale, la geometria dello spazio-tempo è descritta da una quantità chiamata tensore metrico, denotata da  $g_{\mu\nu}$ . Questo tensore contiene tutte le informazioni sulle distanze e sugli angoli nello spazio-tempo.

Lo scalare di Ricci, indicato con  $R$  è una misura della curvatura dello spazio-tempo in un determinato punto. Si calcola sommando (o contraendo) le componenti del tensore di Ricci  $R_{\sigma\nu}$  con il tensore metrico  $g^{\sigma\nu}$ . Matematicamente, è come moltiplicare le matrici del tensore di Ricci e del tensore metrico, quindi aggiungere i termini lungo la diagonale.

Inoltre, la derivata covariante del tensore metrico deve essere uguale a zero, ossia  $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$ . In altre parole, quando ci si muove nello spaziotempo, il modo in cui si misurano le distanze e gli angoli non cambia. Questa è una proprietà fondamentale dello spaziotempo nella relatività generale, che indica che la geometria locale non cambia quando ci si sposta, indipendentemente dalla curvatura globale.

In sintesi, lo scalare di Ricci  $R$  ci dà un'idea della curvatura dello spaziotempo in un punto, e il fatto che  $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$  garantisce che la forma dello spaziotempo rimanga coerente mentre ci muoviamo, qualunque sia la curvatura complessiva, cioè questa coerenza è assicurata dalla compatibilità della metrica con la connessione di Levi-Civita, che garantisce che concetti geometrici come lunghezze e angoli rimangano costanti mentre vengono trasportati nello spaziotempo.

Si può quindi dedurre che:

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\delta R_{\sigma\nu} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}(\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho})) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - g^{\sigma\nu}\nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\mu}) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}B^{\rho} \end{aligned}$$

*NB:* Per il calcolo di cui sopra, dobbiamo tenere conto di due regole:

- Le proprietà della derivata covariante e la regola di Leibniz (la regola per il prodotto della derivata). La regola di Leibniz per la derivata covariante è simile a quella per la derivata ordinaria e si scrive come segue:

$$\nabla_{\rho}(AB) = (\nabla_{\rho}A)B + A(\nabla_{\rho}B)$$

dove  $A$  e  $B$  possono essere campi scalari, vettoriali o tensoriali.

- Come già detto, gli indici ripetuti sono chiamati indici *silenziosi* secondo la convenzione di sommatoria di Einstein. Infatti, è utile ricordare che quando il pedice di una variabile compare due volte in un termine, una volta in posizione superiore e una volta in posizione inferiore, ciò implica una sommatoria su tutti i possibili valori che il pedice può assumere. Ad esempio  $A^\mu B_\mu$  implica  $\sum_\mu A^\mu B_\mu$ . Consideriamo i simboli di Christoffel  $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$  e  $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$ . In queste espressioni, gli indici  $\mu$  e  $\rho$  sono esempi di indici muti secondo la convenzione di sommatoria di Einstein. Ciò significa che l'espressione  $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$  in cui la somma viene eseguita su tutti i possibili valori di  $\mu$  è identica a  $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$  dove la somma viene eseguita su tutti i possibili valori di  $\rho$ . Possiamo quindi applicare gli indici di sommatoria  $(\rho, \nu) \rightarrow (\mu, \rho)$  nell'ultimo termine.

Calcolato in due modi diversi, si ottiene :

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \nabla_\mu (\sqrt{|g|}) B^\mu + \sqrt{|g|} \nabla_\mu (\delta B^\mu) = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu + 0 = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \\ \nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \sqrt{|g|} \delta B^\nu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + 0 = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)\end{aligned}$$

*NB:* Allo stesso modo, la derivata del determinante del tensore metrico, rappresentata da  $\sqrt{|g|}$  è anch'essa nulla se presa in modo covariante, ovvero  $\nabla_\mu \sqrt{|g|} = 0$ . Quest'ultima proprietà semplifica l'espressione degli integrali di volume ed è fondamentale per l'applicazione del teorema della divergenza nello spaziotempo curvo.

Quindi, possiamo dedurre che:

$$\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)$$

Consideriamo ora il contributo di  $\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu$  nell'azione. Sia  $n^\mu$  sia un vettore unitario normale a  $\partial\mathcal{E}$ ,  $\varepsilon = n^\mu n_\mu$  e  $y^a$  che rappresenta le coordinate adattate al confine  $\partial\mathcal{E}$  e  $h_{ab}$  la metrica indotta da  $g_{ab}$  sul confine. Si ha  $|\varepsilon| = 1$  e  $\sqrt{|h|} d^3 y$  è una forma di volume di dimensione  $(n - 1)$  sul contorno, con  $h = \det(h_{ab})$ . Per il teorema di Stokes, abbiamo :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g} d^4 x &= \int_{\mathcal{E}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) d^4 x \\ &= \int_{\partial\mathcal{E}} \varepsilon \delta B^\mu n_\mu \sqrt{|h|} d^3 y\end{aligned}$$

Assumeremo che la metrica non vari al confine (o che non ci sia un confine). In questo caso, il termine  $\nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g}$  non contribuisce all'azione, quindi abbiamo :

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\rho B^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \approx R_{\mu\nu}$$

Tuttavia, in base al corollario con  $a = \frac{1}{2}$  abbiamo :

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

Possiamo quindi dedurre che:

$$\frac{R \delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

*NB:* Per i calcoli di cui sopra, è necessario spiegare due cose:

- La variazione del determinante del tensore metrico, indicato come  $\delta g$  è legata alla variazione del tensore metrico stesso,  $\delta g_{\mu\nu}$  attraverso la relazione  $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$  dove  $g$  è il determinante del tensore metrico e  $g^{\mu\nu}$  è il suo inverso. Questa relazione deriva dalla proprietà matematica dei determinanti, dove la derivata di un determinante può essere espressa come il determinante moltiplicato per la traccia del prodotto dell'inverso della matrice e della derivata della matrice. Nel caso di una piccola variazione, la variazione della radice quadrata del determinante negativo del tensore metrico,  $\delta\sqrt{-g}$  è data da  $\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ . Questa formula è essenziale per ricavare le equazioni di campo di Einstein dall'azione di Einstein-Hilbert, poiché permette di integrare l'azione sulla varietà spazio-temporale a quattro dimensioni.
- Nel nostro studio utilizziamo il teorema di Stokes per semplificare un calcolo cruciale. Questo teorema stabilisce un'interessante relazione tra l'integrale della derivata di un campo vettoriale su una regione tridimensionale e l'integrale dello stesso campo vettoriale lungo il confine di questa regione. Consideriamo un semplice esempio: immaginiamo una superficie chiusa nello spazio (come la superficie di una sfera). Se vogliamo calcolare qualcosa all'interno di questa superficie (per esempio, la somma dei valori di un campo), il teorema di Stokes ci permette di farlo semplicemente esaminando ciò che accade sulla superficie stessa. L'equazione (29), che abbiamo presentato nel nostro calcolo, segue questa idea. Ci dice che l'integrale della derivata di un campo ( $\nabla_{\mu}\delta B^{\mu}$ ) su una regione quadridimensionale ( $\mathcal{E}$ ) può essere equivalente all'integrale della divergenza di un altro campo ( $\sqrt{|g|}\delta B^{\mu}$ ) sulla stessa regione ( $\mathcal{E}$ ). Questa equivalenza si ottiene attraverso la metrica e un elemento di volume quadridimensionale ( $d^4x$ ). L'equazione (30) semplifica ulteriormente l'espressione portandola al confine della regione ( $\delta\mathcal{E}$ ). Essa ci mostra che questa equivalenza può essere espressa come un integrale lungo il confine ( $\delta\mathcal{E}$ ), utilizzando i vettori normali ( $n_{\mu}$ ) a questo confine e la metrica indotta su di esso ( $\sqrt{|h|}d^3y$ ). In altre parole, questa equazione ci permette di capire cosa succede sulla superficie della nostra regione senza dover calcolare cosa succede all'interno. In breve, il teorema di Stokes ci permette di razionalizzare i nostri calcoli, mostrandoci come i fenomeni all'interno di una regione possano essere compresi semplicemente esaminando ciò che accade sul confine di quella regione. Questo



trucco matematico è essenziale per risolvere questi problemi complessi.

Dalle equazioni (31a) e (31b) si ottiene :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(h,g)}$$

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(g,h)}$$

Introdotte le (32a) e (32b), tenendo conto della (33), possiamo quindi dedurre le equazioni di campo accoppiate che descrivono il sistema delle due entità:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left( T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = \kappa \Gamma^{(h)} \left( T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

Dove  $T_{\mu\nu}^{(h,g)}$  e  $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$  sono i tensori di interazione del sistema di due entità corrispondenti alla "geometria indotta", cioè al modo in cui ogni distribuzione di materia su uno strato dell'universo contribuisce alla geometria dell'altro (interazione tra popolazioni di masse positive e negative). Questo sistema deve obbedire alle condizioni di Bianchi, che sono espresse dalla seguente relazione :

$$\nabla_{\mu}^{(g)} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \nabla_{\mu}^{(h)} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = 0$$

Supponiamo che i fluidi all'interno delle entità  $g$  e  $h$  siano perfetti, con densità di energia corrispondenti ai seguenti tensori sorgente :

$$T_{\mu\nu}^{(g,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(h,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h)} \end{pmatrix}$$

Prenderemo  $\{\alpha^{(g)} > 0, \beta^{(g)} > 0\}$  e  $\{\alpha^{(h)} < 0, \beta^{(h)} < 0\}$ . Faremo in modo che le leggi di interazione siano tali che due particelle appartenenti alla stessa entità si attraggano, mentre si respingano quando appartengono a entità diverse.

Introduciamo i loro tensori di interazione:

$$T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h,g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h,g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h,g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h,g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g,h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g,h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g,h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g,h)} \end{pmatrix}$$

Per ottenere le leggi di interazione desiderate nell'ambito dell'approssimazione newtoniana, occorre scegliere  $\kappa = -1$ . Il sistema di equazioni diventa quindi:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left( T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) = \Gamma^{(g)} \left( T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left( T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) = -\Gamma^{(h)} \left( T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

### 3.3.4.1 Verifica di un sistema non stazionario, omogeneo e isotropo

Se assumiamo che l'universo bimetrico, strutturato dalle equazioni di campo accoppiate (34a) e (34b), sia omogeneo e isotropo, la metrica di Robertson-Walker diventa, secondo (Adler, Bazin e Schiffer 1975) :

$$(ds^{(f)})^2 = (c^{(f)})^2 dt^2 - (a^{(f)})^2 \left[ \frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left(1 + k^{(f)} \frac{r^2}{4}\right)^2} \right] \quad \text{ou } f \in \{g, h\}$$

Si noti che  $a^{(f)}$  è il fattore di scala,  $k^{(f)}$ ,  $c^{(f)}$  e  $\Gamma^{(f)}$  sono rispettivamente l'indice di curvatura, la velocità della luce e la costante di Einstein per ciascuna entità.

Se introduciamo queste metriche nel sistema di equazioni (34a) e (34b) con le pressioni  $p^{(g)} \approx 0$  e  $p^{(h)} \approx 0$  otteniamo il seguente sistema di equazioni classiche:

$$\frac{3}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left( \frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = -\Gamma^{(g)} \left[ \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left( \frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = 0$$

$$\frac{3}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left( \frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = \Gamma^{(h)} \left[ \Phi \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left( \frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = 0$$

Applicando i metodi matematici classici di (Adler, Bazin e Schiffer 1975), le condizioni di compatibilità delle equazioni (35a), (35b), (35c) e (35d) danno :

$$3 \frac{da^{(g)}}{a^{(g)}} + \frac{d[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

$$3 \frac{da^{(h)}}{a^{(h)}} + \frac{d[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

Quindi l'energia (e la massa) si conserva per un universo di polvere:

$$E = \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^3 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^3$$

Se abbiamo :

$$\Phi = \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3, \quad \phi = \Phi^{-1}$$

Le equazioni di campo accoppiate diventano :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left[ T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left[ T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right]$$

Se entrambe le entità sono dominate dalla radiazione. Il tensore di interazione di modo misto sarà :

$$T_{\mu}^{\nu(f)} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r^{(f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_r^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_r^{(f)} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{cases} \text{si } \rho_r^{(f)} > 0 \text{ alors } p_r^{(f)} > 0 \text{ pour } f = g \\ \text{si } \rho_r^{(f)} < 0 \text{ alors } p_r^{(f)} < 0 \text{ pour } f = h \end{cases}$$

NB:

- In un contesto cosmologico, il tensore energia-impulso  $T_{\mu}^{\nu(f)}$  viene utilizzato per descrivere la distribuzione e l'interazione di materia ed energia nell'universo. Per un campo specifico  $f$  la componente temporale  $T_0^{(f)}$  rappresenta la densità di energia, che è un determinante fondamentale della curvatura dello spazio-tempo. Le componenti spaziali  $T_i^{(f)}$ , invece, rappresentano la pressione esercitata nelle direzioni spaziali, che influenza anche la struttura dello spazio-tempo. In un modello bimetrico, in cui si considerano due campi distinti - uno per ogni strato dell'universo - le condizioni associate descrivono le relazioni tra le densità di energia e le pressioni di ciascun campo, riflettendo il modo in cui queste entità interagiscono e influenzano collettivamente la dinamica cosmica.
- Il tensore energia-impulso è espresso in forma diagonale quando l'universo è considerato isotropo e omogeneo, cioè le sue proprietà fisiche sono indipendenti dalla direzione e dalla posizione. Questa assunzione, fondamentale per il modello cosmologico standard, è nota come principio cosmologico (sezione 2.2.3). L'isotropia implica che l'universo appare identico in tutte le direzioni; non esiste una direzione preferita in cui la distribuzione della materia o dell'energia differisca. Omogeneità significa che, su larga scala, ogni regione dell'universo assomiglia a qualsiasi altra regione. Di conseguenza, i flussi trasversali di energia e di quantità di moto, che sarebbero rappresentati da termini non diagonali nel tensore, sono assenti, poiché non esiste un moto privilegiato o un flusso di energia in una direzione specifica. Solo le densità di energia e le pressioni nelle direzioni spaziali, che sono uniformi e non variano con la direzione, compaiono nella matrice del tensore energia-impulso, spiegando la sua forma diagonale.

Poi, introducendo la pressione radiativa indotta da ogni entità :

$$p_r^{(g)} = \frac{\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2}{3}, \quad p_r^{(h)} = \frac{\rho_r^{(h)}(c^{(h)})^2}{3}$$

Possiamo quindi considerare che l'entità trasportata dalla metrica  $h$  chiamata energia oscura e materia oscura, potrebbero essere attribuite a masse negative che, nella fase radiativa, obbedirebbero alla stessa equazione di stato:

$$\beta^{(h)} = \frac{\alpha^{(h)}}{3}$$

In queste condizioni, la relazione di conservazione è sempre espressa, nella sua forma radiativa, dalla conservazione della somma delle due energie, quella del gas di fotoni e quella delle masse negative:

$$\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 + \alpha^{(h)}(a^{(h)})^4 = \rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 = \text{Costante}$$

La soluzione esatta del sistema, per gli indici di curvatura  $k^{(g)} = k^{(h)} = -1$  e  $\Gamma^{(f)} = -\frac{8\pi G}{c^4}$  dove  $f \in \{g, h\}$  diventa una soluzione delle seguenti equazioni :

$$a^{(g)^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} = \frac{\Gamma^{(g)}}{2} E$$

$$a^{(h)^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} = -\frac{\Gamma^{(h)}}{2} E$$

Se si assume che  $E < 0$  allora  $a^{(g)} > 0$  e  $a^{(h)} < 0$ . Possiamo quindi concludere che la parte visibile del nostro universo sta accelerando, mentre le specie negative stanno decelerando. Qui si osserva l'effetto della specie negativa dominante, che porta al fenomeno dell'accelerazione dell'espansione cosmica, poiché il lato destro della prima equazione diventa positivo ((Petit e D'Agostini 2021b)):

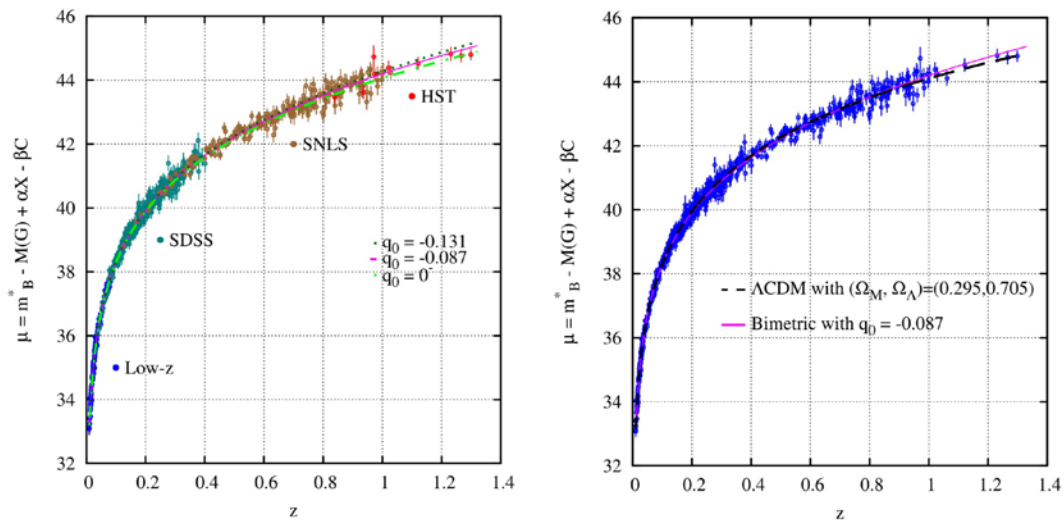


Figura 3.11 - Diagramma di Hubble dei due modelli (redshift lineare)

Questo sistema a due specie permette di consolidare gli effetti attribuiti alla materia oscura e all'energia oscura in un'unica entità composta da masse negative che combina le due azioni, come illustrato dal diagramma seguente:

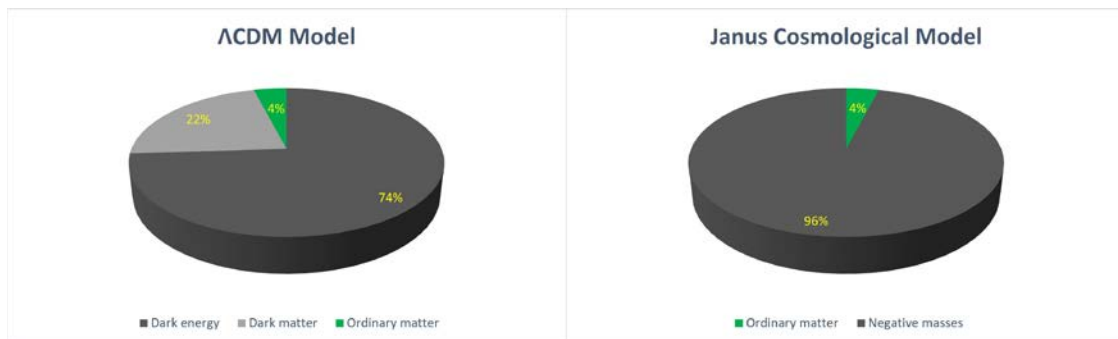


Figura 3.12 - Modelli dell'universo

### 3.3.4.2 Verifica locale di un sistema stazionario

Nello studio dell'universo, spesso semplifichiamo i modelli per renderli più maneggevoli. Una semplificazione comune è quella di considerare una piccola regione dello spazio come effettivamente vuota e isolata dalla vasta complessità del cosmo. Questo approccio è particolarmente utile quando siamo interessati a fenomeni che si verificano in brevi periodi di tempo, molto più brevi della scala temporale in cui cambia l'universo stesso. In questi casi, possiamo usare metriche "indipendenti dal tempo", cioè assumere che la struttura dello spazio non cambi con il tempo durante la nostra osservazione.

Per aggiungere un po' di complessità, a volte introduciamo le cosiddette "perturbazioni" al modello. Queste perturbazioni sono piccole modifiche allo spazio altrimenti semplice che stiamo considerando. Ci permettono di studiare come piccoli cambiamenti o perturbazioni possano influenzare il sistema. Nel nostro caso, queste perturbazioni sono rappresentate da termini come  $\gamma_{\mu\nu}^{(g)}$  e  $\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$  che indicano piccole deviazioni nella struttura geometrica dello spazio, che potenzialmente rappresentano diversi aspetti o componenti dell'universo.

$$g_{\mu\nu}^{(g)} = \eta_{\mu\nu}^{(g)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(g)}, \quad g_{\mu\nu}^{(h)} = \eta_{\mu\nu}^{(h)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$$

Per la metrica, abbiamo :

$$(ds^{(g)})^2 = (c^{(g)})^2 dt^2 - (a^{(g)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

$$(ds^{(h)})^2 = (c^{(h)})^2 dt^2 - (a^{(h)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

In cosmologia, quando si parla di "condizioni quasi stazionarie", ci si riferisce a una situazione in cui si presume che alcuni aspetti dell'universo siano relativamente costanti nel periodo che stiamo studiando. Più specificamente, in questo contesto, si assume che i "fattori di scala" dell'universo, che descrivono come le dimensioni dell'universo cambiano nel tempo, siano costanti. Si tratta di un'approssimazione utile per studiare alcuni fenomeni a breve termine.

Per studiare la fisica di questo scenario, utilizziamo la cosiddetta "espansione seriale" delle equazioni di campo. Si tratta di una tecnica matematica che prevede la scomposizione di equazioni complesse in parti più semplici e gestibili. Tuttavia, ci concentriamo solo sulle parti più significative: in questo caso, ignoriamo i termini di ordine due e superiore, poiché hanno un impatto minimo sui risultati per gli scenari su piccola scala o a breve termine.

Le due equazioni semplificate che ne risultano descrivono il comportamento delle perturbazioni in questo universo quasi stazionario. Queste equazioni comportano termini come  $\varepsilon\gamma_{00}$  e  $\delta\rho$  che rappresentano piccoli cambiamenti nella geometria dello spazio e nella densità della materia, rispettivamente.

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(g)} = -\Gamma^{(g)} \left[ \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(h)} = \Gamma^{(h)} \left[ \delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 \right]$$

Inoltre, definiamo dei "potenziali gravitazionali" per ogni componente dell'universo, denotati da  $\psi^{(g)}$  e  $\psi^{(h)}$ . Questi potenziali sono legati ai cambiamenti nella geometria dello spazio e sono fondamentali per comprendere gli effetti gravitazionali nelle diverse regioni o componenti dell'universo (come (36)).

$$\psi^{(g)} = \frac{(c^{(g)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(g)}, \quad \psi^{(h)} = \frac{(c^{(h)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(h)}$$

Otteniamo :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(g)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = -\Gamma^{(g)} \frac{(a^{(g)})^2}{2} \left[ \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = \Gamma^{(h)} \frac{(a^{(h)})^2}{2} \left[ \delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 \right]$$

In fisica, in particolare nello studio dello spazio e dell'universo, come abbiamo visto in questo paragrafo 2.3.8, le "equazioni geodetiche" descrivono come gli oggetti si muovono sotto l'influenza della gravità. In parole povere, queste equazioni ci dicono quale sarà il percorso di un oggetto che si muove unicamente sotto l'influenza della gravità. Ad esempio, il modo in cui i pianeti orbitano intorno alle stelle o come gli oggetti cadono sulla Terra.

Nel nostro scenario, abbiamo a che fare con due diversi strati dell'universo, ciascuno con le proprie proprietà. Il primo strato, che possiamo considerare come l'universo della materia ordinaria, segue un insieme di regole. Il secondo strato di masse negative, associato alla materia oscura e all'energia oscura, segue un altro insieme di regole.

Le due equazioni seguenti sono il modo di esprimere matematicamente come gli oggetti si muoverebbero in questi due diversi strati (rispettivamente lo strato della materia ordinaria e quello delle masse negative). Queste equazioni assomigliano alla classica equazione di Poisson in fisica, utilizzata per descrivere i campi gravitazionali. Tuttavia, le equazioni hanno una caratteristica speciale: tengono conto delle diverse "velocità della luce" in ogni strato. Questa modifica è fondamentale per esplorare teorie che vanno oltre la nostra comprensione standard della fisica.

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(g)})^2} \frac{\partial \psi^{(g)}}{\partial \xi_\alpha}$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = - \frac{1}{(a^{(h)})^2} \frac{\partial \psi^{(h)}}{\partial \xi_\alpha}$$

Le leggi di interazione che abbiamo scelto garantiscono che le entità degli strati strutturati dalle metriche  $g$  e  $h$  si escludono a vicenda (3.13).



Figura 3.13 - Leggi dell'azione inter tra le masse

Di conseguenza, possiamo considerare una regione in cui è presente solo una delle due entità. Concentrandosi sul quadro di riferimento strutturato dalla metrica  $g$  che è popolato da materia ordinaria come nel sistema solare, il sistema di equazioni di campo accoppiate si semplifica in :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} T_{\mu\nu}^{(g,g)}$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)}$$

La prima equazione può essere identificata con l'equazione di Einstein senza la costante cosmologica  $\Lambda$ . Questa equazione rappresenta il Modello Standard della gravità per la materia ordinaria. La seconda equazione cattura quello che potremmo chiamare "effetto geometria indotta". Essa descrive come la geometria dello spazio, influenzata dalla presenza di materia ordinaria in una sfera di raggio  $r$  e densità  $\rho^{(g)} = \rho$  influisce sulle geodetiche dello strato di massa negativa. Di conseguenza, possiamo dedurre che questo modello bimetrico, in cui la materia ordinaria in uno strato interagisce con le masse negative situate in un secondo strato, è in linea con i test standard della relatività generale a livello locale. Rimane tuttavia fondamentale verificare la consistenza di questo sistema in condizioni stazionarie e disomogenee.

### 3.3.4.3 Natura dell' antimateria primordiale

Seguendo le proposte di Sacharov in (Sacharov 1967), (Sacharov 1980) e (Sacharov 1979), supponiamo che la coppia materia/antimateria nel primo strato del nostro universo sia costituita da quark e antiquark a energia positiva. Allo stesso tempo, una coppia materia/antimateria in un secondo strato sarebbe composta da quark e antiquark a energia negativa. Se la sintesi della materia nel primo strato (la prima coppia) fosse più veloce, mentre la sintesi dell'antimateria nel secondo strato (la seconda coppia) fosse più lenta, si potrebbe ipotizzare che gli oggetti situati al centro dei grandi vuoti nella struttura su larga scala dell'universo, come indicato dal fenomeno del dipolo repulsore, siano composti da antimateria. Questa antimateria comprende antiprotoni, antineutroni e antielettroni con energia negativa, cioè con massa negativa ((J. M. Souriau 1997)). Questi ultimi potrebbero



formare oggetti sferoidali composti da antiidrogeno (elementi leggeri) con proprietà repulsive simili alle immense protostelle formatesi durante la fase radiativa primordiale (all'inizio dell'universo).

La rete lacunare di massa positiva confina questo spazio di densità negativa, impedendone la fusione. Al contrario, questi conglomerati di massa negativa fungono da punti di ancoraggio per questa rete porosa nell'universo delle masse positive, garantendo la stabilità complessiva.

Le stelle di massa positiva assomigliano inizialmente ad ammassi sferoidali di gas, riscaldati a temperature comprese tra i 1000 e i 2000°C. Queste protostelle si raffreddano gradualmente, emettendo radiazioni principalmente negli spettri del rosso e dell'infrarosso. Per trasformarsi in stelle complete, la materia e i gas devono subire una contrazione gravitazionale, raggiungendo temperature e densità sufficientemente elevate da innescare reazioni di fusione termonucleare. Questo processo di contrazione libera energia termica, che viene irradiata sulla superficie della stella sotto forma elettromagnetica, compresa la luce visibile. Questo rilascio di energia è proporzionale al quadrato del raggio della stella. Le stelle più grandi hanno superfici più ampie e possono dissipare più calore. Tuttavia, la quantità di calore prodotta è proporzionale al cubo del raggio della stella, legato al suo volume. Quindi, per le stelle molto massicce, il tasso di raffreddamento può essere relativamente lento e può essere necessario un tempo considerevole perché la temperatura raggiunga la soglia necessaria per innescare le reazioni di fusione termonucleare che permettono alla stella di brillare.

Nel nostro mondo positivo, si ritiene che le reazioni di fusione nucleare possano iniziare nel cuore di una protostella quando la temperatura raggiunge un optimum di circa 10 milioni di gradi Celsius. È a questa temperatura che i nuclei di idrogeno, che costituiscono la maggior parte della materia nella protostella, acquisiscono un'energia cinetica sufficiente a superare la barriera elettrostatica dovuta alla loro carica positiva. Quando questa barriera viene superata, i nuclei di idrogeno possono fondersi per formare elio, liberando una notevole quantità di energia radiante e termica. Questa temperatura ottimale consente una reazione di fusione nucleare più efficiente, producendo il caratteristico bagliore delle stelle.

Ad esempio, una protostella molto massiccia e molto calda di massa negativa può impiegare molto tempo per raffreddarsi a sufficienza per iniziare le reazioni di fusione, perché il processo di contrazione della protostella deve generare abbastanza calore per compensare la perdita di calore in superficie.

Di conseguenza, queste protostelle molto massicce di massa negativa hanno tempi di raffreddamento così lunghi che non si accenderanno mai (superando l'età dell'universo). Di conseguenza, nessuna galassia, nessun elemento pesante, nessuna molecola o qualsiasi altra forma di materia necessaria allo sviluppo della vita nel mondo negativo può formarsi.

### 3.3.4.4 Simulazioni digitali 2D

Le simulazioni numeriche bidimensionali sono state effettuate utilizzando due serie di 5000 punti di massa, che rappresentano ammassi di materia ordinaria (densità di popolazione  $\rho^{(g)}$ ) e di masse negative (densità di popolazione  $\rho^{(h)}$ ).

È stata mantenuta una significativa asimmetria tra le due popolazioni, con  $|\rho^{(h)}|$  è molto più grande di  $\rho^{(g)}$ . Inoltre, a entrambi gli insiemi sono state applicate distribuzioni di velocità termiche Maxwelliane 2D, con una velocità media della distribuzione delle masse negative quattro volte superiore a quella della materia ordinaria.

Queste simulazioni hanno rivelato una struttura lacunosa di masse negative al centro dei grandi vuoti nella struttura a grande scala dell'universo. Poiché i tempi di Jeans variano inversamente con la radice quadrata della densità, il tempo di sviluppo della distribuzione di massa negativa è più breve. Questo porta alla formazione di una rete regolare di conglomerati sferoidali. La distribuzione di materia ordinaria, quindi, è costretta a occupare lo spazio rimanente, portando a una struttura lacunare simile a un insieme di bolle di sapone unite in simulazioni tridimensionali. Questo modello è stato osservato anche da Brennen nel 1995 (Brennen 1995) (Figure 3.14 e 3.15), come citato da El-Ad nel 1997 ((El-Ad, Piran e Costa 1997)).

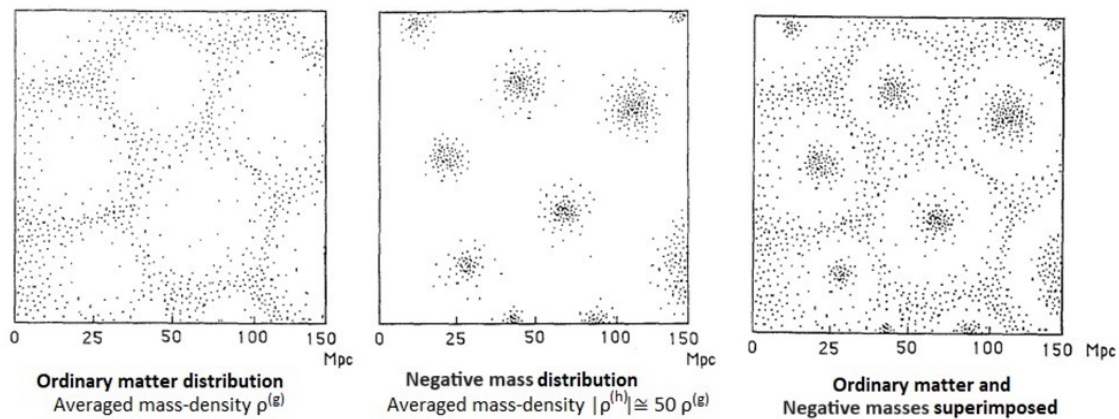


Figura 3.14 - Distribuzione di Materia Ordinaria e Massa Negativa quando  $|\rho^{(h)}| \gg \rho^{(g)}$

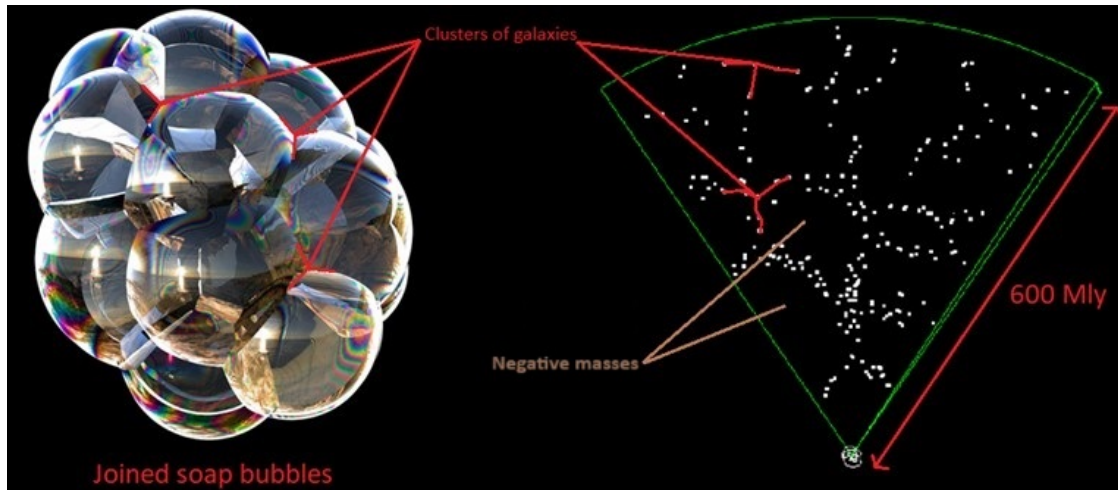


Figura 3.15 - Struttura lacunare sferoidale

È importante considerare che nel quadro di massa negativa mancano dati osservativi da confrontare con le potenziali previsioni numeriche, ad eccezione degli effetti geometrici indotti da questo quadro di riferimento (quello di massa negativa) attraverso fenomeni di lensing gravitazionale, come strutturato dalla metrica  $g_{\mu\nu}$ .

Di conseguenza, la pressione derivata dall'equazione differenziale TOV (Tolman - Oppenheimer - Volkoff) ((Adler, Bazin, e Schiffer 1975)) nello spazio-tempo strutturato dalla metrica  $h_{\mu\nu}$  rimarrà sempre ipotetico. Di conseguenza, non è pratico cercare di strutturare il tensore dell'interazione  $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$  della seconda equazione di campo (34b). Infatti, non potremo mai confrontare i risultati ottenuti dal calcolo delle geodetiche di  $h_{\mu\nu}$  con i dati osservativi relativi al moto di particelle di massa negativa. Dobbiamo invece lavorare con una funzione  $\beta(r)$  (non legata alla pressione negativa) solo per garantire l'esistenza di una soluzione in questo quadro di riferimento. L'aspetto più importante è garantire che la derivata covariante del suo tensore di interazione sia nulla (37).

Per comprendere appieno questo effetto della geometria indotta, dobbiamo collocarci nel contesto del sistema con due equazioni di campo accoppiate del modello. È importante ricordare che questo struttura un'ipersuperficie 4D secondo 2 metriche associate a 2 strati distinti dello spaziotempo. Ogni tipo di massa è associato a una propria metrica, il che implica che una massa crea sempre una curvatura positiva nello spazio-tempo secondo la propria metrica (dove la massa emette fotoni di energia visibile) e sempre una curvatura negativa nella metrica coniugata (dove la massa emette fotoni di energia invisibile), come si può vedere nella figura 3.16 seguente.

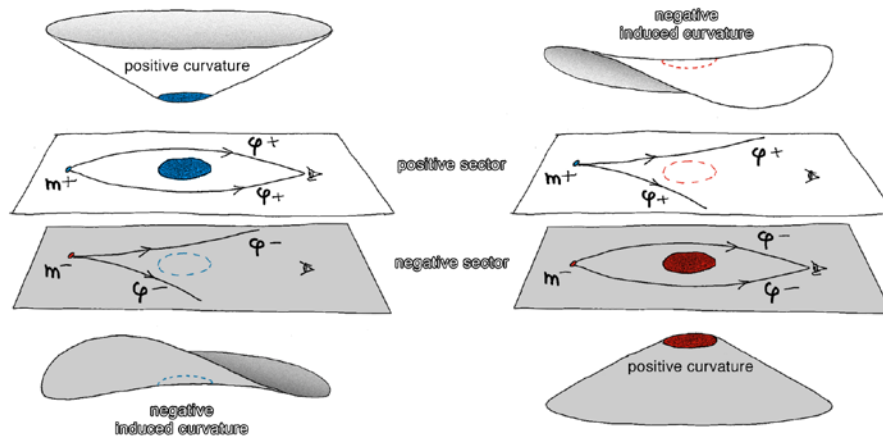


Figura 3. 16 - Effetto geometria indotta

A sinistra della Figura 3.16, l'oggetto massiccio blu appartenente all'universo positivo crea una curvatura positiva. Di conseguenza, produce un effetto di lensing gravitazionale positivo sull'immagine di una piccola massa positiva  $m^+$  che provoca fotoni di energia positiva  $\phi^+$  intorno all'oggetto massiccio blu. Tuttavia, questo oggetto massiccio induce una curvatura negativa nell'universo negativo. Di conseguenza, anche se è invisibile, la sua massa apparente nell'universo negativo è percepita come negativa.

Al contrario, sulla destra della Figura 3.16, l'oggetto massiccio rosso appartiene all'universo negativo. Crea una curvatura positiva rispetto al proprio quadro di riferimento (e non una curvatura negativa). Questo oggetto massiccio induce una curvatura negativa che viene percepita nel nostro universo, anche se i suoi fotoni energetici sono invisibili. Concludiamo quindi che la sua massa apparente è negativa. Questo perché produce un effetto di lente gravitazionale negativa sull'immagine di una massa piccola  $m^+$  che provoca fotoni di energia positiva  $\phi^+$  intorno all'invisibile oggetto massiccio negativo, il cui effetto gravitazionale è sempre presente.

Dal concetto di massa negativa possiamo dedurre diversi corollari:

- In sostanza, non c'è massa negativa (e quindi non c'è energia negativa). Almeno, la "negatività della massa" (e la "negatività dell'energia", perché le due cose sono ovviamente collegate) non è una proprietà fisica intrinseca di una "particella di massa negativa". Infatti, la "negatività" o "positività" della massa è semplicemente una quantità di curvatura misurata localmente nello spazio-tempo da un osservatore. Il segno di questa curvatura è relativo al quadro di riferimento dell'ipersuperficie o della metrica in cui viene misurata la massa. Si tratta, infatti, di una massa apparente la cui presenza è rivelata solo dalla curvatura che induce nello spazio-tempo.

In altre parole, tutte le particelle dotate di massa nell'universo hanno una massa inerziale esclusivamente positiva, ma la loro massa gravitazionale è relativa. Il segno della loro massa gravitazionale è opposto (positivo o negativo) a seconda della prospettiva adottata: una massa distorce lo spazio-tempo nella propria metrica,

inducendo una certa quantità di curvatura che è sempre positiva. Tuttavia, sarà percepita come massa apparente nell'universo opposto, dal quale un osservatore percepirà questa curvatura come negativa. Ciò è dovuto alla natura accoppiata delle equazioni di campo e dà luogo a un effetto chiamato *curvatura coniugata*. Si potrebbe descrivere come *"la stessa massa che induce due curvaturei opposte"*.

Per esempio, la Terra, vista dal nostro quadro di riferimento, ha una massa positiva. Per qualche processo sconosciuto, immaginate di poter invertire la vostra energia (invertire la vostra massa). La Terra (e tutte le stelle del cielo) scomparirebbero perché non sareste più in grado di percepire i fotoni di energia positiva. Tuttavia, potete ancora percepire e misurare la curvatura che continua a indurre nello spazio-tempo. Effettuando questa misurazione, si scoprirebbe che la Terra, ormai invisibile, ha una massa negativa.

Tuttavia, non esistono universi distinti di energie positive e universi di energie negative. Si tratta semplicemente di una scelta arbitraria di nomenclatura. Le due cose sono equivalenti. Per convenzione, chiamiamo il settore in cui viviamo universo positivo. L'inversione della freccia del tempo non significa che iniziamo a vivere *"al contrario"* e che diventiamo più giovani. Si manifesta fisicamente con l'inversione delle energie delle particelle. Ancora una volta, questa inversione è un'osservazione relativa. In pratica, si traduce in uno spostamento verso l'universo opposto.

- È importante notare che le particelle di energia negativa (e i loro fotoni) non possono essere rilevati dagli strumenti ottici perché seguono geodetiche della propria metrica  $h_{\mu\nu}$  distinte dalle geodetiche della nostra metrica  $g_{\mu\nu}$ . Esistono quindi due serie di geodetiche che non si *"intersecano"* mai. Poiché le specie a energia positiva e negativa non possono vedersi ed evolvono lungo due famiglie distinte di geodetiche, i due quadri di riferimento spazio-temporali in cui risiedono sono chiamati rispettivamente quadro di riferimento a massa positiva e quadro di riferimento a massa negativa. Si tratta quindi di due quadri di riferimento all'interno della stessa ipersuperficie 4D, strutturata da due equazioni di campo accoppiate, anziché da una sola. Tuttavia, anche se le masse negative sono invisibili per noi perché non interagiscono elettromagneticamente con il nostro universo e non scambiano fotoni, esse rivelano la loro presenza solo attraverso un effetto antigraavitazionale, perché inducono curvaturei opposte nello spazio-tempo.
- Le masse negative sono diffuse nell'universo, ma le loro proporzioni variano a seconda della regione dello spazio in cui ci troviamo, ed esistono unicamente per contribuire alla sua stabilità attraverso un effetto antigraavitazionale. L'universo è definito da un unico spazio-tempo strutturato da due metriche che ci permettono di misurare la lunghezza o la distanza tra due punti di questo spazio-tempo in due modi diversi, utilizzando due serie distinte di punti di riferimento (tre punti di riferimento spaziali e un punto di riferimento temporale). A scopo didattico, possiamo pensare a questo spazio-tempo come a un foglio di carta con due griglie diverse su ciascuna delle due pagine.

### 3.3.5 Prospettive per il futuro

L'approccio scientifico alla comprensione di un fenomeno può essere riassunto dalla capacità di riprodurlo e misurarlo. È importante notare che è possibile dimostrare in laboratorio il fenomeno dell'inversione di massa invertendo una quantità infinitesimale di materia, a condizione che sia possibile indurre una perturbazione significativa in questa materia producendo parametri elettromagnetici dell'ordine di diverse decine di milioni di tesla in un periodo molto breve, ad esempio utilizzando degli esplosivi. L'Unione Sovietica aveva già prodotto 100 milioni di ampere comprimendo un flusso magnetico con gli esplosivi negli anni '50, utilizzando un generatore magneto-cumulativo ((Pavlovskii 1994)). Sarebbe poi possibile dimostrare questa inversione di massa misurando le onde gravitazionali emesse e rilevate dagli interferometri laser Virgo e Ligo.

L'unificazione della teoria della relatività con la meccanica quantistica sarebbe possibile solo attraverso la quantizzazione della gravità. Tuttavia, nella Teoria della Relatività non esiste il concetto di quantizzazione dell'energia, ad eccezione dell'equivalenza massa-energia, perché l'equazione di campo di Einstein non descrive fundamentalmente le particelle. Per questo motivo la teoria delle stringhe è l'unico approccio contemporaneo accettato e accettabile per colmare il divario tra Relatività e Meccanica Quantistica. Tuttavia, l'unificazione è impossibile seguendo questo approccio perché la Meccanica Quantistica considera le forze in termini di campi e in questi campi è necessaria una particella per trasmettere l'interazione. Ad esempio, il fotone è la particella elementare che trasmette il campo elettromagnetico e la sua quantificazione è possibile grazie all'inclusione di cariche elettriche positive e negative. D'altra parte, l'unica particella che emerge dalla teoria delle stringhe per trasmettere la gravità è il gravitone, ma questa pseudo-particella non è mai stata osservata sperimentalmente. In effetti, il concetto di gravità quantistica rimane speculativo in questo modello. Una congettura alternativa per quantificare la gravità su scala quantistica sarebbe quella di considerare l'esistenza di masse di segno opposto che esibiscono proprietà repulsive nel modello computazionale, simile al modello dei fotoni con cariche elettriche di segno opposto per trasmettere l'interazione.

## 4 Contributo alla cosmologia e alla fisica delle particelle

### 4.1 Introduzione ai gruppi dinamici

*La teoria dei sistemi dinamici è una* branca della matematica che si concentra sullo studio del movimento e del cambiamento nel tempo. Il suo scopo è capire come i sistemi si evolvono in funzione delle loro condizioni iniziali e delle forze esterne che agiscono su di essi. *La geometria simplettica è un'integrazione* della teoria dei sistemi dinamici e della geometria differenziale, che studia le forme e le proprietà degli spazi curvi, in particolare come questi spazi si deformano e si piegano sotto l'influenza di forze esterne. Questo campo, che affonda le sue radici nella meccanica hamiltoniana, esamina oggetti matematici chiamati "*varietà simplettiche*", che hanno una struttura unica che permette di misurare le dimensioni. A differenza della geometria riemanniana, che utilizza un tensore metrico per misurare lunghezze e angoli, la geometria simplettica utilizza una forma matematica

chiamata "*forma simplettica*" per misurare le aree.

Jean-Marc Souriau è stato uno dei principali pionieri della geometria topologica simplettica. Ha sviluppato il concetto di quantificazione geometrica, trasformando quantità fisiche fondamentali come l'energia e la quantità di moto in oggetti puramente geometrici. Il lavoro di Souriau ha dato un significato fisico all'inversione della freccia del tempo nel nostro modello cosmologico ((Bergmann e Einstein 1938), (Kaluza 1921)).

## Che cos'è un gruppo?

In termini matematici, si riferisce a certe matrici che agiscono su altre matrici. Ma dal punto di vista fisico, cosa rappresenta?

Secondo J-M Souriau, un gruppo viene creato per il trasporto e il metodo di trasporto è più significativo dell'entità trasportata: "*Dimmi come ti muovi e ti dirò chi sei*".

La nostra attenzione si concentra sui gruppi di Lie (si veda (Bourbaki 2006)), che sono sia gruppi che varietà differenziali ("*spazi curvi*" proiettati localmente su uno spazio euclideo n-dimensionale). Sono essenziali per descrivere i moti e le trasformazioni nello spazio. Due gruppi chiave sono il gruppo ortogonale  $O(3)$  e il gruppo euclideo  $E(3)$  :

- **Il gruppo ortogonale  $O(3)$**  è utilizzato per descrivere rotazioni e simmetrie in tre dimensioni, preservando le distanze nello spazio. Include un sottogruppo cruciale chiamato  $SO(3)$ , il gruppo di rotazione, che si occupa delle rotazioni attorno a un asse.
- **Il gruppo euclideo  $E(3)$**  descrive movimenti tridimensionali come rotazioni, simmetrie e traslazioni. Basato sul gruppo ortogonale  $O(3)$ , può essere scomposto in una forza e in una coppia applicate a un oggetto in meccanica solida. È un gruppo in cui il teorema di Pitagora può essere utilizzato per calcolare la distanza tra due punti. Questo gruppo trasforma un punto con coordinate  $x, y, z$  in un nuovo punto con coordinate  $x', y', z'$ . La caratteristica unica di questo gruppo dinamico è la capacità di generare una famiglia di oggetti geometrici invarianti all'interno del gruppo. Ad esempio, una retta sottoposta a traslazione rimane una retta, il che la rende un oggetto geometrico invariante unidimensionale. La sfera è un esempio perfetto di oggetto simmetrico tridimensionale. La sua proprietà unica è che rimane invariata sotto le rotazioni intorno al suo centro, dimostrando la simmetria rotazionale. In termini geometrici, ciò significa che una sfera passa attraverso se stessa durante qualsiasi movimento di rotazione, mantenendo le sue proprietà geometriche in modo coerente in ogni punto. In fisica, in particolare nello studio dello spazio-tempo nella relatività generale, la soluzione di Schwarzschild è un concetto importante. Descrive il campo gravitazionale all'esterno di una massa a simmetria sferica e non rotante, come un buco nero. La metrica di Schwarzschild, soluzione delle equazioni di campo di Einstein, è invariante rispetto alle rotazioni e alle traslazioni nel tempo e nello spazio, come l'invarianza osservata nella geometria euclidea ma applicata allo spaziotempo curvo della relatività generale. Nello

spaziotempo di Schwarzschild, le geodetiche sono determinate dalla curvatura dello spazio, descritta dalla metrica di Schwarzschild. Per un oggetto che si muove lungo una geodetica, si conservano alcune quantità come il suo momento angolare e la sua energia rispetto alla massa che causa la curvatura dello spaziotempo. Questa conservazione è il risultato delle simmetrie dello spazio-tempo, analogamente alle leggi di conservazione della meccanica classica.

I gruppi di Lie descrivono quindi i movimenti nello spazio preservando le distanze e le lunghezze. Sono gruppi isometrici quando le proprietà geometriche degli oggetti in movimento rimangono invariate (distanze e angoli) nello spazio durante una trasformazione. Le rotazioni sono esempi di simmetrie nello spazio tridimensionale, poiché non alterano le proprietà geometriche dello spazio. Ad esempio, la rotazione di un cubo non altera le distanze tra i suoi vertici. In altre parole, le proprietà geometriche dell'oggetto rimangono invariate, anche se la sua posizione è stata modificata.

Secondo la teoria della relatività speciale, invece di vivere in uno spazio euclideo tridimensionale  $[x, y, z]$  con una firma  $(+ + +)$  in cui il tempo è un'entità separata, in realtà esistiamo in uno spazio-tempo quadridimensionale in cui le tre dimensioni spaziali sono perpendicolari a una dimensione temporale  $[t, x, y, z]$  chiamato spazio di Minkowski, la cui firma è  $(- + + +)$ .

Il gruppo dinamico associato a questo spazio è il gruppo di Poincaré. Esso permette di generare moti speciali, come il moto di particelle prive di massa come i fotoni (che non sono mai a riposo ma si muovono sempre alla velocità della luce, non influenzati dalla gravità in termini di velocità, ma solo modificabili in energia) e una famiglia di particelle di massa non nulla. Questo gruppo dinamico, applicato alla relatività speciale, comprende il movimento di masse o fotoni con una possibile inversione della freccia del tempo, cioè dal passato al futuro e viceversa, e può essere rappresentato in forma matriciale come segue:

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dove  $L$  è la matrice del gruppo di Lorentz che descrive come cambiano le coordinate spazio-temporali tra diversi quadri di riferimento inerziali. Queste trasformazioni includono le rotazioni nello spazio e le trasformazioni di Lorentz (boost), che sono cambiamenti di quadri di riferimento che si muovono a velocità costante l'uno rispetto all'altro.  $C$  è un vettore corrispondente alle traslazioni spazio-temporali in  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

In effetti, la metà degli elementi del gruppo dinamico inverte il tempo, il che significa che se consideriamo un elemento spazio-temporale come una massa o un fotone e applichiamo un movimento temporale dal passato al futuro, possiamo eseguire lo stesso movimento nella direzione opposta utilizzando il gruppo di Poincaré. Pertanto, secondo la teoria di Souriau contenuta nella sua opera *"Struttura dei sistemi dinamici"* ((Kaluza 1921)), se il gruppo dinamico può far muovere i fotoni o le masse con una freccia del tempo in direzione opposta, allora anche la loro energia, e quindi la loro massa, può essere invertita.

*N.B.:* Il gruppo ristretto di Poincaré tratta esclusivamente il moto relativistico *"ortocrono"* in quattro dimensioni dello spazio di Minkowski, passando dal passato al futuro. La sua forma matriciale include la sottomatrice di Lorentz  $L_0$  come segue:



$$\begin{pmatrix} L_0 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo ora considerare questi movimenti con energia e massa negative e una freccia del tempo opposta come parte della Fisica? Possono essere misurati o osservati?

Le particelle con energia negativa emettono fotoni di energia negativa, quindi non possono essere osservate o misurate otticamente. Tuttavia, è stato osservato e misurato che l'espansione dell'universo sta accelerando a causa della pressione negativa legata all'energia oscura ((Perlmutter et al. 1999)). La pressione è una densità di energia per unità di volume.

Quindi l'espansione dell'universo è direttamente collegata all'energia negativa. Ciò suggerisce che una parte sostanziale dell'universo, attualmente definita come materia oscura ed energia oscura, influisce su questa espansione attraverso l'effetto gravitazionale. Questo approccio dinamico e geometrico fornisce quindi una risposta alla sua origine e natura. Potrebbe contenere masse o fotoni carichi di energia negativa.

## 4.2 Diverse simmetrie associate a ciascun operatore d'inversione

Il gruppo ristretto di Poincaré tratta il moto relativistico in quattro dimensioni dello spazio di Minkowski. Il gruppo di Poincaré è il gruppo secondo la seguente matrice :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $C$  è il vettore corrispondente alle traslazioni spazio-temporali in  $\mathbb{R}^{1,3}$  :

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Agisce su punti dello spazio di Minkowski:

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Questo gruppo a 10 dimensioni è il gruppo isometrico di questo spazio, definito dalla sua metrica :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Il gruppo di Lorentz secondo la sua sottomatrice  $L$  appartenente allo spazio  $\mathcal{L}$  ha quattro componenti connesse:

- $\mathcal{L}_n$  la componente neutra, non inverte né lo spazio né il tempo.
- $\mathcal{L}_s$  inverte lo spazio.

- $\mathcal{L}_t$  inverte il tempo ma non lo spazio.
- $\mathcal{L}_{st}$  inverte sia lo spazio che il tempo.

Le prime due componenti sono raggruppate per formare il sottogruppo noto come "ortocrono" o gruppo di Lorentz ristretto:

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_n \cup \mathcal{L}_s$$

Gli ultimi due componenti formano l'insieme "anticrone", i cui componenti invertono il tempo:

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_t \cup \mathcal{L}_{st}$$

Si noti che :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &= -\mathcal{L}_s & \mathcal{L}_{st} &= -\mathcal{L}_n \\ \mathcal{L}_{st} &= -\mathcal{L}_n & \mathcal{L}_t &= -\mathcal{L}_s \end{aligned}$$

### 4.3 Gruppo dinamico di Lorentz

L'applicazione dell'azione coadiuvante di un gruppo dinamico al duale della sua algebra di Lie, iniziata dal matematico Jean-Marie Souriau, ha fatto luce su alcuni aspetti dell'approccio seguito in fisica. Il gruppo dinamico di Lorentz ristretto, limitato alle sue due componenti ortocrone, traduce aspetti della relatività speciale attraverso le proprietà di invarianza che ne derivano. Nel 1970, J-M Souriau ha stabilito che l'analisi delle componenti del suo momento evidenzia la natura geometrica di uno spin (non quantizzato) ((J. M. Souriau 1964) (J. M. Souriau 1997)). Il gruppo di Lorentz ha due componenti ortocrone connesse, ovvero la prima componente neutra, che contiene l'elemento neutro del gruppo, e la seconda componente enantiomorfa, che inverte lo spazio sinonimo della *simmetria P*. Nella teoria dei gruppi dinamici, una classificazione in termini di moti diventa ovvia. A questo punto, l'azione di questi elementi invertitori dello spazio è illustrata nel fenomeno della polarizzazione della luce, in cui qualsiasi fotone "destra" può essere convertito in un fotone "sinistro". Questo gruppo può essere rappresentato da una famiglia di matrici  $4 \times 4$   $L$  definita assiomaticamente come  $L^T G L = G$  dove  $L^T$  è la trasposizione della matrice di Lorentz  $L$  e  $G$  è la matrice metrica di Minkowski, spesso chiamata matrice di Gram in questo contesto. Nella relatività speciale, essa è generalmente rappresentata da una matrice diagonale con elementi  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Questa equazione significa che la trasformazione di Lorentz preserva il prodotto scalare di Minkowski, una condizione cruciale per la coerenza della teoria della relatività speciale.

### 4.4 Gruppo dinamico di Poincaré ristretto

Il prodotto del gruppo di Lorentz con il gruppo delle traslazioni spazio-temporali ci permette di costruire il gruppo dinamico ristretto di Poincaré, sempre limitato alle sue due componenti ortocrone. Nel suo momento, troviamo prima l'energia legata al sottogruppo delle traslazioni temporali. Poi l'impulso, legato alle traslazioni spaziali, i quali sono legati

dall'invarianza del modulo del quadrivettore energia-impulso sotto l'azione del gruppo di Lorentz. La matrice associata a questo gruppo deve includere la sottomatrice "ortocrona" di Lorentz  $L_o$  di dimensione  $3 \times 3$  nonché il vettore di traslazione  $C$  e componenti aggiuntive per completare la sua struttura (si veda (45)).

#### 4.5 Gruppi dinamici ristretti di Kaluza e Janus

Aggiungendo una traslazione lungo una quinta dimensione al gruppo ristretto di Poincaré, formiamo un gruppo di Lie che chiamiamo *gruppo ristretto di Kaluza* ((Bargmann, Bergmann e Einstein 1941), (Bergmann 1942), (Bergmann e Einstein 1938), (Kaluza 1921), (Klein 1926)). Questo gruppo non è il gruppo di Kaluza a 15 dimensioni associato a una varietà lorentziana a 5 dimensioni, ma un nuovo gruppo a 5 dimensioni che conta solo le traslazioni. Questa nuova dimensione conferisce all'impulso uno scalare aggiuntivo che può essere identificato con la carica elettrica  $q$  che può essere positiva, negativa o nulla, e che non è ancora stata quantificata. Dimostriamo quindi la traslazione geometrica secondo uno scalare  $\phi$  dando alle masse una carica elettrica invariante. Quindi, introducendo una nuova simmetria che riflette l'inversione della quinta dimensione, sinonimo di inversione dello scalare da  $q$  a  $-q$  raddoppiamo il numero di componenti connesse da 2 a 4. L'azione sul momento lega poi questa nuova simmetria all'inversione della carica elettrica  $q$ . Si ottiene così il modello geometrico della coniugazione di carica o *simmetria C*, che traduce la simmetria materia-antimateria introdotta da Dirac. È quindi logico chiamare questa nuova estensione *Gruppo di Giano ristretto*.

#### 4.6 Gruppo Giano Dinamico

Introducendo una nuova simmetria al gruppo precedente, che descriviamo come *simmetria T* e che converte la materia in antimateria con massa negativa - un concetto che potremmo chiamare *antimateria nel senso di Feynman* - costruiamo il *Gruppo Dinamico di Giano*. In questo modo, raddoppiamo il numero di componenti connessi da quattro a otto, raggruppati in due sottoinsiemi: "ortocrono", che mantiene le proprietà di tempo ed energia, e "anticrono", che inverte tempo ed energia. Di conseguenza, si evidenzia la traslazione geometrica che consiste nel dotare le masse di una carica elettrica invariante. Come ha dimostrato Jean-Marie Souriau, pioniere della teoria dei gruppi dinamici, già nel 1970 ((J. M. Souriau 1964), (J. M. Souriau 1997)), questo approccio ha permesso di conferire una natura puramente geometrica a elementi chiave che hanno segnato il progresso della fisica relativistica.

Ecco la matrice associata al Gruppo Dinamico di Giano, da cui è possibile ricostruire tutti i gruppi di simmetria:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^\mu & 0 & \phi \\ 0 & T^\lambda S^\nu L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{0,1\}, \phi \in \mathbb{R}, L \in \mathcal{L}, C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}$$

- **Simmetria P:**

Dobbiamo applicare  $\mu = 0, \lambda = 0$  e  $\nu = 1$  quindi otteniamo :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Questo operatore di simmetria corrisponde all'inversione dello spazio, dove si considera un elemento della seconda componente connessa del gruppo ortocrono. È questa simmetria che inverte l'elicità di un fotone, trasformando un "fotone destro" in un "fotone sinistro", il che corrisponde al fenomeno della polarizzazione della luce.

- **Simmetria C:**

Dobbiamo applicare  $\mu = 1, \lambda = 0$  e  $\nu = 0$ .

Partendo dall'elemento  $L_n$  del gruppo di Lorentz ristretto ortocrono, invertendo la quinta dimensione che porta la carica elettrica  $q$  si ottiene l'operatore "simmetria C" o "coniugazione di carica" (quantistica) :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

È questa simmetria che rappresenta la trasformazione "Materia-Antimateria".

- **Simmetria T:**

Dobbiamo applicare  $\mu = 0, \lambda = 1$  e  $\nu = 0$ .

Questa operazione rimuove la simmetria C ( $Jan_{11} = 1$ ) e la simmetria P ( $Jan_{22} = -L_s$ ) come segue:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_t & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simmetria CP:**

dobbiamo applicare  $\mu = 1, \lambda = 0$  e  $\nu = 1$ .

Questa operazione aggiunge la simmetria C ( $Jan_{11} = -1$ ) e la simmetria P ( $Jan_{22} = L_s$ ) come segue:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

NB: Si può dedurre anche eliminando la simmetria T ( $Jan_{22} = L_s$ ) dalla simmetria CPT utilizzando questa operazione : **CP = T · CPT**

- **Simmetria CPT:**

dobbiamo applicare  $\mu = 1, \lambda = 1$  e  $\nu = 1$ .

Sappiamo che l'elemento  $L_n$  del gruppo neutro non inverte né il tempo né lo spazio, quindi l'elemento  $Jan_{22} = -L_n$  inverte sia lo spazio che il tempo per formare l'operatore di simmetria *PT*. Tuttavia, se aggiungiamo la simmetria *C* ( $Jan_{11} = -1$ ), formiamo il gruppo di Giano *CPT* con simmetria di carica come segue:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simmetria PT:**

dobbiamo applicare  $\mu = 0, \lambda = 1$  e  $\nu = 1$ .

Rimuovendo la simmetria *C* ( $Jan_{11} = 1$ ) dalla simmetria *CPT* utilizzando questa operazione :  $\mathbf{PT} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{CPT}$  otteniamo :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simmetria CT:**

dobbiamo applicare  $\mu = 1, \lambda = 1$  e  $\nu = 0$ .

Eliminando la simmetria *P* ( $Jan_{22} = -L_s$ ) dalla simmetria *CPT* seguendo questa operazione :  $\mathbf{CT} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{CPT}$  otteniamo :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Operatore neutro:**

dobbiamo applicare  $\mu = 0, \lambda = 0$  e  $\nu = 0$ .

L'oggetto si muove nelle cinque dimensioni senza cambiare la sua natura. Si considera

solo l'elemento neutro del sottogruppo "ortocrono" ( $Jan_{22} = L_n$ ) :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

È importante notare che Feynman ritiene che l'applicazione della simmetria *PT* al moto delle particelle porti alla creazione di antimateria attraverso l'applicazione della simmetria *C*. Di conseguenza, la simmetria *PT* è equivalente alla simmetria *C*, il che significa che una

particella di materia "*vista in uno specchio*" e che si muove all'indietro nel tempo è antimateria.

Questa prospettiva deriva dal lavoro di Weinberg, "*Teoria quantistica dei campi*", nella sezione 2.6, intitolata "*Inversione dello spazio e inversione del tempo*" ((Weinberg 2000)). In effetti, si applica una scelta arbitraria per l'operatore di inversione  $T$ , che fa sì che l'operatore  $CPT$  diventi l'identità.

Quindi, dato che  $CPT = I$  ne consegue che  $PT = PT \cdot I = PT \cdot CPT = C$ . Pertanto, la visione di Feynman si basa principalmente sulla meccanica quantistica, dove i teorici quantistici fanno scelte a priori del tutto arbitrarie sugli operatori  $P$  e  $T$ , vincolati dalla "*necessità di evitare l'emergere di stati a energia negativa (considerati non fisici)*". Di conseguenza, l'operatore  $P$  deve essere lineare e unitario, e l'operatore  $T$  antilineare e antiunitario. Per concludere, a pagina 104 si aggiunge: "*Non si conoscono esempi di particelle che forniscano rappresentazioni non convenzionali di inversioni, quindi queste possibilità non saranno esplorate ulteriormente in questa sede. D'ora in poi, si assumerà che le inversioni abbiano l'azione convenzionale descritta nella Sezione 2.6*". Gli stati di energia negativa (associati alla pressione negativa) esistono perché sono responsabili dell'accelerazione dell'espansione cosmica, come dimostra il lavoro di Perlmutter, vincitore del premio Nobel nel 2011 ((Perlmutter et al. 1999)). Tuttavia, all'epoca della nascita della teoria quantistica dei campi, questo fenomeno non era ancora noto.

Di conseguenza, per Feynman, la presenza dell'operatore di inversione temporale  $T$  nella sua *simmetria* globale  $PT$  non porta all'inversione di massa, ma trasforma la materia in antimateria a massa positiva per inversione di carica attraverso la *simmetria*  $C$ . Dal punto di vista del gruppo di Giano, partendo dal moto di una particella di massa positiva nello spazio a 5 dimensioni, la *simmetria*  $C$  (portata dall'inversione della quinta dimensione) trasforma questa particella (questo moto) in un'antiparticella di massa positiva che possiamo chiamare "*antiparticella di tipo Dirac*". D'altra parte, l'effetto  $PT$  applicata a una particella produce un'antiparticella con energia e massa negative, a causa della *simmetria*  $T$ , che può essere chiamata "*antiparticella di tipo Feynman*". L'equivalenza  $PT = C$  secondo Feynman non è più applicabile.

## 4.7 Implicazioni

I contributi significativi di questo studio riguardano principalmente i campi della meccanica quantistica e della cosmologia:

- Un aspetto notevole **della meccanica quantistica** è l'inversione dell'energia e della massa di alcuni oggetti. Questo porta all'esplorazione di due categorie di antimateria: un tipo di antimateria con massa positiva derivante dalla *simmetria*  $C$ , nota come *antimateria nel senso di Dirac*, è quella prodotta in laboratorio ed è stato recentemente dimostrato che si comporta allo stesso modo della materia ordinaria sotto l'influenza della gravità ((Anderson 2023)). L'altra, originata dalla *simmetria*

*PT* con massa negativa, nota come *antimateria in senso feynmaniano*, corrisponde all'antimateria primordiale situata tra le galassie e si trova in particolare sotto forma di conglomerati nel *Grande Deflettore* ((Hoffman et al. 2017)). Sorge una domanda intrigante sulla possibilità di oggetti con massa ed energia negative in fisica. Tali entità suggerirebbero la presenza di stati energetici negativi nella meccanica quantistica. Quando si tratta di *simmetria T*, i fisici quantistici adottano tradizionalmente una prospettiva antilineare e antiunitaria per l'operatore *T*, al fine di escludere gli stati di energia negativa, che sono generalmente considerati non intrinseci alla fisica. Analogamente, l'operatore *P* è scelto come unitario e lineare per ragioni simili (si veda (Weinberg 2000)). Queste scelte sono alla base del teorema *CPT*, rafforzando l'idea che la *simmetria PT* si allinei con la *simmetria C*. D'altra parte, l'adozione di un operatore *T* lineare e unitario rivela che gli stati a energia negativa sono un risultato naturale nelle equazioni di Schrödinger e Dirac (si veda (Debergh et al. 2018)), aprendo la strada a nuove aree di ricerca. Inoltre, le osservazioni cosmologiche hanno confermato che l'espansione dell'universo sta accelerando, attribuita alla pressione negativa associata all'energia oscura, come evidenziato dal lavoro di Perlmutter, vincitore del premio Nobel nel 2011. Poiché la pressione rappresenta una densità di energia per unità di volume, questo fenomeno è direttamente collegato all'energia negativa che influenza l'espansione dell'universo.

- **Nel campo della cosmologia, la relatività generale rifiuta fermamente il concetto di massa negativa**, citando l'emergere del fenomeno della fuga e confliggendo con i principi di azione-reazione e di equivalenza (vedi (Bondi 1957)). Di conseguenza, qualsiasi nuovo modello che proponga l'integrazione di stati di energia e massa negativi richiederebbe un'estensione del quadro geometrico fondamentale della relatività. La teoria dei gruppi dinamici, incentrata su vari gruppi come Lorentz, Poincaré e Kaluza, fornisce un quadro per descrivere un universo privo di forze e caratterizzato da una struttura piatta e non curva. In tale universo, le particelle seguono le geodetiche dello spazio di Minkowski in una metrica lorentziana o navigano in uno spazio fibroso influenzato da una quinta dimensione, aperta o chiusa. Questo approccio teorico suggerisce la coesistenza di due tipi distinti di materia, che esistono in modo isolato senza interazioni reciproche. Le particelle in questi spazi non interagiscono tra loro. Questa prospettiva innovativa apre nuovi modi di comprendere le interazioni tra particelle, spazio e tempo.

## 5 Interpretazione alternativa del modello del wormhole accoppiato con una fontana bianca come *membrana a senso unico*

Lo studio della metrica esterna sviluppata da K. Schwarzschild nel 1916, come soluzione all'equazione di Einstein nel vuoto, rivela l'introduzione di un'ipotesi: l'invarianza per simmetria temporale di  $t \rightarrow -t$  comunemente nota come "staticità". Questa ipotesi, che all'epoca non aveva alcuna base fisica provata, portò all'eliminazione di un termine trasversale  $dr dt$  nella metrica. In questo modo, è stata fatta una scelta arbitraria di coordinate, caratterizzata proprio dall'assenza di questo termine trasversale  $dr dt$ . Lo scopo di questo studio è di esplorare le possibilità fisiche di un nuovo approccio basato sull'introduzione di un termine trasversale  $dr dt$  nella metrica e di dimostrare la possibilità di costruire un *Wormhole* e una *Fontana Bianca* come *membrana a senso unico*, collegando due spazi semi-riemanniani *PT-simmetrici* attraverso un "ponte" che può essere attraversato solo in una direzione.

### 5.1 Soluzioni dell'equazione di Einstein che riflettono diverse topologie

Nel 1916, Karl Schwarzschild pubblicò due articoli successivi ((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a)). Il primo presentava la costruzione della soluzione dell'equazione di Einstein nel vuoto, basata sulle seguenti ipotesi:

- *Stazionarietà*: indipendenza dei termini della metrica rispetto alla coordinata temporale, ossia invarianza per traslazione temporale.
- *Isotropia* e simmetria sferica, cioè invarianza da  $SO(3)$ .
- Nessun termine incrociato  $dr dt$ .
- Lorentziano all'infinito.

Egli integrò rapidamente questa soluzione, chiamata metrica esterna di Schwarzschild, con una metrica interna (Schwarzschild 1916a) che descriveva la geometria all'interno di una sfera riempita di un fluido di densità costante  $\rho_0$  e una soluzione dell'equazione di Einstein con un secondo membro. Le condizioni per collegare le due metriche (continuità delle geodetiche) erano soddisfatte. I fenomeni dell'anticipo del perielio di Mercurio e della deflessione dei raggi luminosi confermano questa soluzione (Figura 3.4). K. Schwarzschild si adoperò per garantire che le condizioni che regolano queste due metriche fossero in linea con la realtà fisica.

Ad esempio, oggi le stelle di neutroni, grazie alla loro densità sbalorditiva e alla loro massa formidabile, fungono da laboratori cosmici naturali, esplorando regioni di densità e gravità inaccessibili nei laboratori terrestri. Consideriamo due modi diversi in cui una stella di neutroni potrebbe raggiungere uno stato di criticità fisica.

In uno scenario in cui la densità della stella,  $\rho_0$  rimane costante, si può definire un raggio caratteristico  $\hat{r}$  può essere definito. Allora, la criticità fisica viene raggiunta quando il raggio della stella è :



$$R_{cr\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_o}}$$

con

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_o}}$$

E così,

- Per la metrica esterna, il raggio della stella doveva essere inferiore a  $\hat{r}$ .
- Per quanto riguarda la metrica interna, il raggio della stella doveva essere inferiore a  $R_{cr\phi}$  perché un raggio maggiore porta a un aumento della pressione all'infinito al centro della stella.

In secondo luogo, per le stelle massicce, una sfera di ferro che implode può presentare uno scenario complesso. Assumendo che la massa della sfera  $M$  si conservi durante l'implosione, dobbiamo considerare due importanti raggi critici:

- Nella parte centrale, il raggio geometrico critico è dato dal *raggio di Schwarzschild*, che è :

$$R_{cr\gamma} = R_s = 2 \frac{GM}{c^2}$$

- Al di fuori di questa massa, il raggio critico fisico è dato dalla (38)

Con la conservazione della massa espressa come  $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$  possiamo esplorare come la variazione della densità  $\rho_o$  durante l'implosione influisce su questi raggi critici.

Infatti, se la criticità fisica viene raggiunta durante l'implosione, abbiamo  $R = R_{cr\phi}$ .

Sostituendo l'equazione di conservazione della massa nella (38), si ottiene :

$$R = R_{cr\phi} = 2,25 \frac{GM}{c^2} > R_{cr\gamma}$$

Da ciò si può dedurre che se la criticità fisica viene raggiunta per una massa  $M$  si verifica prima della comparsa della criticità geometrica.

K. Schwarzschild ha anche sottolineato che le misurazioni riguardavano condizioni molto al di là di quanto fosse compreso nell'ambito della realtà astrofisica del suo tempo.

È inoltre importante notare che la topologia di questa soluzione geometrica è costruita collegando due varietà vincolate lungo il loro confine comune, una sfera  $S^2$  con un'area di  $4\pi R_o^2$  (*raggio della stella*).

Nel 1916, Ludwig Flamm considerò la soluzione esterna come potenzialmente in grado di descrivere un oggetto geometrico. Si trattava allora di tentare di descrivere le masse come una regione di spazio non contrattabile ((Flamm 1916)).

Nel 1934, Richard Tolman fu il primo a considerare una possibile manipolazione della soluzione metrica più generale, introducendo un termine trasversale  $dr dt$ . Tuttavia, per motivi di semplificazione, lo eliminò immediatamente utilizzando un semplice cambio di variabile ((Tolman 1934)).

Nel 1935, Einstein e Rosen proposero una struttura geometrica non contrattile nel contesto di un modello geometrico di particelle, grazie al seguente cambiamento di coordinate ((Einstein e Rosen 1935)):

$$u^2 = r - 2m$$

La soluzione metrica diventa quindi :

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4u^2(u^2 + 2m)du^2 - (u^2 + 2m)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Gli autori ottengono così una struttura geometrica non contrattile, chiamata "*ponte spaziale*", dove una superficie chiusa di area  $4\pi\alpha^2$  corrispondente al valore  $u = 0$  collega due "*foglie*": una corrispondente ai valori di  $u$  da  $0$  a  $+\infty$  e l'altra da  $-\infty$  a  $0$ . Si noti che questa metrica non è lorentziana all'infinito. Sebbene questa metrica, espressa in questo nuovo sistema di coordinate, sia regolare, gli autori fanno notare che in corrispondenza della superficie della Gola il suo determinante diventa nullo. In questa struttura geometrica si distinguono due fogli semi-riemanniani vincolati, il primo corrispondente a  $u > 0$  e il secondo a  $u < 0$ . Corrisponde alla loro giunzione lungo il loro confine comune. Lo spaziotempo globale non rientra nel quadro standard della geometria semi-riemanniana perché non soddisfa la condizione  $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$  alla gola. Come affermato in (Stoica 2014), si inserisce nel quadro più generale della geometria semi-riemanniana singolare, che ammette tensori metrici degenerati.

Nel 1939, Oppenheimer e Snyder, sfruttando il completo disaccoppiamento tra il tempo proprio e il tempo sperimentato da un osservatore distante, in assenza di un termine trasversale in  $dr dt$ , suggerirono di utilizzare la soluzione metrica esterna per descrivere il "*fermo immagine*" dell'implosione di una stella massiccia alla fine della sua vita. Considerando che la variabile  $t$  è identificata con il tempo proprio di un osservatore distante, questo crea un motivo di "*fermo immagine*" come un fenomeno di contrazione la cui durata, in tempo proprio, misurata in giorni, sembra a un osservatore distante svolgersi in un tempo infinito ((Oppenheimer e Snyder 1939)). Questo documento è considerato alla base del modello del buco nero (si veda la sezione [2.3.8](#)).

Nel 1960, Kruskal estese la soluzione geometrica a uno spazio-tempo contrattile, organizzato intorno a una singolarità centrale corrispondente a  $r = 0$ . Le geodetiche sono estese per  $r < \alpha$ . Il modello del buco nero (con simmetria sferica<sup>4</sup>) prende quindi la sua forma definitiva come l'implosione di una massa, in un breve istante, percepito come un "fermo immagine" da un osservatore lontano ((M. D. Kruskal 1960)). La sfera di Schwarzschild viene quindi chiamata "orizzonte degli eventi".

Nel 1988, M. Morris e K. S. Thorne hanno rivisitato questa interpretazione geometrica abbandonando la contrattabilità, non nel tentativo di ottenere un modello geometrico della soluzione, ma per studiare la possibilità di viaggi interstellari, attraverso "wormhole", utilizzando la seguente metrica ((Morris e Thorne 1988)):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Concentrandosi sullo studio della fattibilità dei viaggi interstellari, gli autori evidenziano gli enormi vincoli associati a tale geometria, nonché la sua natura instabile e transitoria.

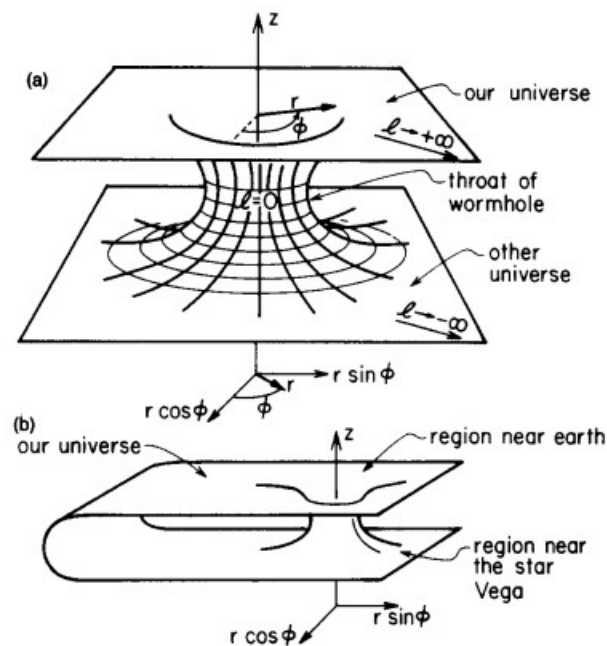


Figura 5.1 - Pagina 396 dell'articolo di M. Morris e K.S. Thorne (1988)

<sup>4</sup> Nel 1963, Roy Kerr costruì la soluzione stazionaria asimmetrica dell'equazione di Einstein nel vuoto. Tuttavia, in questo studio ci limitiamo a interpretare la soluzione stazionaria con simmetria sferica (2.3.9).

## 5.2 L'ipotesi di *staticità*: assenza del termine incrociato $dr dt$

Il concetto di "*staticità*" nella relatività generale si riferisce a una metrica che è stazionaria, cioè invariante sotto la traslazione temporale "*indipendente dal tempo*" di  $t \rightarrow +t$ , e *statica*, cioè invariante sotto la simmetria "*riflessa dal tempo*" di  $t \rightarrow -t$ , il che porta naturalmente all'assenza del termine trasversale  $dr dt$ . Infatti, quando una metrica ha un termine trasversale  $dr dt$ , significa che c'è una dipendenza mista tra le coordinate spaziali e quelle temporali. Questa dipendenza mista rompe l'invarianza per simmetria *temporale riflessa*, perché la metrica non rimane la stessa sotto la trasformazione  $t \rightarrow -t$ . R. Wald menziona questa particolarità nel 1984 nel suo libro "*General Relativity*" a pagina 120 (Wald 1984).

Si può anche notare che a pagina 186 di (Adler, Bazin e Schiffer 1975), il requisito di simmetria *della riflessione temporale* per una linea  $dx^0$  che può essere tracciata "*all'indietro*" fino a  $-dx^0$  (chiamata "*staticità*") è stabilito come assunto iniziale.

In effetti, la nozione di *staticità* nel senso di R. Wald si riferisce all'invarianza per *simmetria di riflessione temporale* di  $t \rightarrow -t$  che è un'ipotesi puramente matematica senza alcun significato fisico. Tuttavia, il nostro studio offre un approccio diverso a questa ipotesi.

## 5.3 Costruzione di una soluzione geometrica infinita lorentziana a due lastre

Si consideri la metrica esterna di Schwarzschild nella sua forma classica sotto la firma (+ - - -):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

### 5.3.1 Simmetria T

La metrica costruita nel 1916 ((Schwarzschild 1916b)), come soluzione dell'equazione di Einstein nel vuoto, era dotata di un'assunzione aggiuntiva, che il suo autore non menzionò, quella dell'invarianza per simmetria temporale. È importante notare che questa assunzione non ha alcuna base fisica e porta all'eliminazione di un termine trasversale  $dr dt$  nella metrica, come Tolman aveva previsto già nel 1934 (pagina 239 di (Tolman 1934)). Al contrario, A. Eddington la introdusse per eliminare la singolarità delle coordinate sulla superficie di Schwarzschild in  $r = \alpha$  utilizzando il cambiamento di variabile ((Eddington 1925),(Koiran 2021)):

$$t_E^\pm = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

La metrica diventa quindi :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{\pm 2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^\pm - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Sappiamo che con queste condizioni, dal punto di vista di un osservatore lontano, il tempo di caduta libera diventa finito (39), mentre il tempo di fuga rimane infinito. La metrica per la quale il tempo di fuga è finito si otterrà effettuando questo cambio di variabile:

$$t_E^- = -t - \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

La metrica diventa quindi :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^-^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Ciò equivale a invertire la coordinata temporale nella (40). Quindi, questa scelta di associare due metriche che descrivono due spazi semi-riemanniani ci porta a considerare una soluzione geometrica globale con due fogli *T-simmetrici* collegati da un "ponte" in questo particolare sistema di coordinate e nel sistema di coordinate di Einstein e Rosen ((Einstein e Rosen 1935)).

Dimostriamo ora che anche queste trasformazioni sono accompagnate da una *simmetria P*.

### 5.3.2 Simmetria P

In questa rappresentazione, le geodetiche radiali del primo foglio sono ortogonali al piano tangente del "ponte spaziale" quando lo raggiungono. Queste stesse geodetiche, quando emergono nel secondo foglio, sono anch'esse ortogonali a questo stesso piano tangente. Consideriamo ora quattro punti che formano un tetraedro, che convergono verso il "ponte spaziale" lungo traiettorie radiali. Possiamo definire un orientamento 3D definendo una direzione di attraversamento per i punti di ciascuno dei triangoli equilateri che formano il tetraedro. Rispetto al *r* sembra che questi punti rimbalzino su una superficie rigida, causando l'inversione dell'orientamento del tetraedro. I tetraedri a monte e a valle diventano quindi *enantiomorfi* (Figura 5.2).

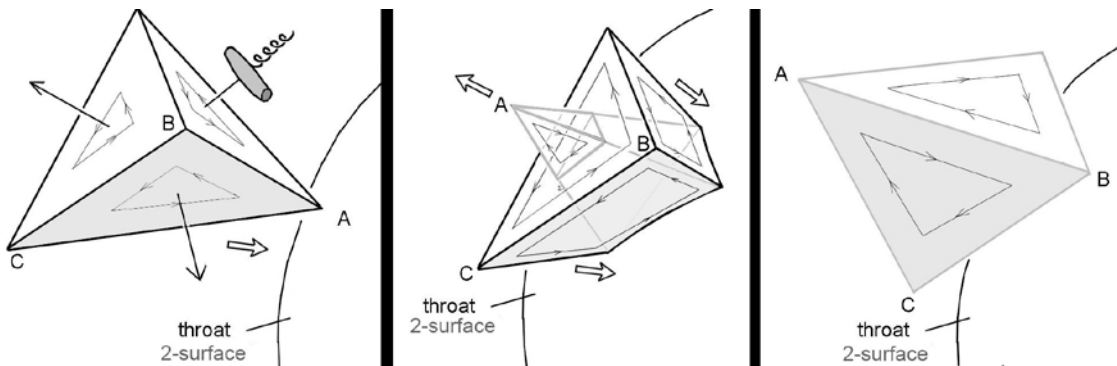


Figura 5.2 - Inversione dello spazio quando si attraversa il "ponte spaziale".

Il cambiamento di orientamento è già visibile nella rappresentazione semplificata in 2D di un wormhole nella Figura 5.1. Guardiamo questa figura dall'alto e immaginiamo un triangolo che scivola lungo la superficie della lastra superiore verso la scanalatura. Osserviamo questa figura dall'alto e immaginiamo un triangolo che scivola lungo la superficie del foglio superiore verso il solco. Dopo aver attraversato la scanalatura, il triangolo inizia a scivolare sul foglio inferiore e ora lo vediamo capovolto dalla nostra posizione sopra il foglio superiore. Dal nostro punto di vista, il suo orientamento è quindi

cambiato. Il significato fisico di questo cambiamento di orientamento sarà discusso nella Sezione 5.3.3.

La struttura geometrica della coppia di metriche (41) e (42) rappresenta quindi un "ponte" che collega due spazi semi-riemanniani *PT-simmetrici*.

L'elemento di questa superficie 2D è quindi dato da :

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} = \alpha^2 \sin(\theta)$$

Poiché questa metrica descrive una superficie sferica 2D (come una sfera di raggio costante in uno spazio-tempo 4D), l'elemento di superficie differenziale è dato da :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Per trovare la superficie minima di questo "ponte spaziale", dobbiamo integrare questo elemento di superficie su tutti gli angoli possibili:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

È quindi non contrattile, con un'area superficiale minima di  $4\pi\alpha^2$ .

### 5.3.3 Identificazione delle due lastre

Nella Sezione 5.3.2 abbiamo descritto il cambiamento di orientamento di un tetraedro che attraversa il solco del wormhole nella Figura 5.2 e di un triangolo che attraversa il solco nella Figura 5.1. Il cambiamento di orientamento del triangolo è visibile solo a chi guarda la Figura 5.1 nel suo insieme. Il cambiamento di orientamento del triangolo è visibile solo a chi guarda la Figura 5.1 nel suo insieme. Di conseguenza, non corrisponde ad alcun fenomeno fisicamente osservabile, poiché qualsiasi osservatore fisico deve trovarsi su una delle due foglie e non può vedere direttamente l'altra foglia. La situazione è la stessa nella Figura 5.2: la foto al centro rappresenta la situazione da un punto di vista in cui potremmo guardare contemporaneamente entrambi i lati del wormhole (B e C non hanno ancora raggiunto la gola, mentre A l'ha già attraversata e sta emergendo dall'altra parte). Anche in questo caso, ciò è impossibile per un osservatore fisico: sembra che la *simmetria P* descritta finora non corrisponda ad alcun fenomeno fisicamente osservabile. Tuttavia, possiamo darle un significato fisico reale con un ingrediente aggiuntivo introdotto da Einstein e Rosen (Einstein e Rosen 1935).

Va ricordato che la loro motivazione non era quella di studiare i viaggi interstellari, come nella Figura 5.1, ma di descrivere le particelle elementari utilizzando le soluzioni alle equazioni della relatività generale. Per citare l'abstract del loro articolo: "*Queste soluzioni implicano la rappresentazione matematica dello spazio fisico con uno spazio di due fogli identici, con una particella rappresentata da un 'ponte' che collega questi fogli*". Einstein e Rosen suggeriscono anche che il problema delle molte particelle potrebbe essere studiato con metodi simili, ma questo lavoro non viene svolto nel loro articolo.

Citiamo ancora (Einstein e Rosen 1935): "Se sono presenti più particelle, questo caso corrisponde alla ricerca di una soluzione senza singolarità delle equazioni modificate (3a), soluzione che rappresenta uno spazio con due fogli congruenti collegati da diversi 'ponti' discreti". Dal loro punto di vista, due punti nella rappresentazione matematica (41) con valori identici di  $\theta, \phi$  ma valori opposti di  $u$  corrispondono quindi a due punti nello spazio fisico con lo stesso valore di  $r$  ( $r = u^2 + m$ ). Se facciamo la stessa identificazione di punti con valori opposti di  $u$  la situazione rappresentata nella foto centrale della Figura 5.2 può essere vista da un osservatore fisico. La *simmetria P* descritta nella sezione 5.3.2 ha ora un significato fisico reale. Svilupperemo l'interpretazione della *simmetria PT* combinata nella prossima sezione.

#### 5.4 Un'altra rappresentazione di questa geometria

Applicando il seguente cambiamento di variabile alle equazioni (40) e (43) :

$$r = \alpha(1 + \text{Log ch}(\rho))$$

Otteniamo le due metriche seguenti:

$$ds^2 = \left( \frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{+2} - \left( \frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ - 2c\alpha \left( \frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^+ - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$ds^2 = \left( \frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{-2} - \left( \frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ + 2c\alpha \left( \frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^- - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Per ottenere la metrica che struttura il secondo foglio per  $\rho < 0$  per garantire la continuità delle geodetiche che traducono il passaggio della materia attraverso il "ponte" con un tempo di fuga finito su questo foglio, dobbiamo applicare la *simmetria T* in cui la coordinata temporale è invertita durante l'attraversamento, ossia  $t_E^+ = -t_E^-$

Queste metriche, che sono lorentziane all'infinito, strutturano quindi due fogli corrispondenti a valori di  $\rho$  che variano rispettivamente da 0 a  $+\infty$  e da  $-\infty$  a 0. Sul "ponte spaziale" per  $\rho = 0$  le componenti  $g_{tt}$  e  $g_{\rho\rho}$  del tensore metrico scompaiono, lasciando solo le ultime due componenti spaziali  $g_{\theta\theta}$  e  $g_{\phi\phi}$  che sono :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

In questo particolare sistema di coordinate, possiamo dedurre che il suo determinante è zero. La *simmetria P* segue dal fatto che i punti adiacenti, questa volta esplicitamente

differenziati, sono dedotti da  $\rho \rightarrow -\rho$ . Questa trasformazione svolge lo stesso ruolo di  $u \rightarrow -u$  nella (41).

Combinando queste soluzioni metriche sotto queste due condizioni, otteniamo un *Wormhole* e una *Fonte Bianca* come *membrana a senso unico*, che collega due spazi semi-riemanniani attraverso un "*ponte*" che può essere attraversato solo in una direzione. Supponiamo inoltre che il *Wormhole* non conduca a un altro universo, come nella Figura 5.1.a, o a un punto distante dello stesso universo, come nella Figura 5.1.b; ma che le due foglie congruenti corrispondano agli stessi punti dell'universo fisico mediante la trasformazione  $u \rightarrow -u$  trasformazione (o  $\rho \rightarrow -\rho$ ), come suggerito in (Einstein e Rosen 1935) e nel paragrafo 5.3.3. Possiamo quindi concludere che i due fogli sono *PT-simmetrici*.

In letteratura, l'inversione della coordinata temporale è stata analizzata in vari modi. In particolare:

- Dalla teoria dei gruppi dinamici di J-M Souriau ((J. M. Souriau 1964),(J. M. Souriau 1997)), dove è stato dimostrato che induce un'inversione di energia. Di conseguenza, la simmetria di inversione temporale trasforma qualsiasi moto di una particella di massa  $m$  in un moto di una particella di massa  $-m$  ((Oppenheimer e Volkoff 1939), pagina 191). A pagina 192 dello stesso libro, l'autore propone un'analisi alternativa che evita le masse negative. Souriau sottolinea che queste alternative devono essere valutate in base alla loro capacità di essere confermate dagli esperimenti.
- Feynman propose un'interpretazione dell'antimateria come materia ordinaria che si muove *all'indietro* nel tempo.
- Dalle analisi teoriche (teorema *CPT*) e dagli esperimenti è noto che le particelle elementari obbediscono a leggi fisiche invarianti sotto la *simmetria CPT*.

La *simmetria PT* scoperta nella Sezione 5.3 può essere considerata come una *simmetria CPT* seguita da una *simmetria C* (inversione della carica elettrica). Otterremmo quindi l'antimateria sul secondo foglio. Se il secondo foglio contiene già materia ordinaria, potrebbe interagire con l'antimateria del primo foglio, costituendo così una fonte di energia.

## 5.5 Conclusione

Introduciamo una nuova costruzione geometrica basata sulla soluzione stazionaria a simmetria sferica dell'equazione di Einstein nel vuoto, con due sole assunzioni ispirate alla fisica: *isotropia* (invarianza per  $SO(3)$ ) e la *stazionarietà* (invarianza per traslazione nel tempo). In questo modo, non aggiungiamo, come è stato fatto in precedenza senza alcuna reale giustificazione fisica, l'invarianza dalla simmetria *inversa* del tempo di  $t \rightarrow -t$  (soluzione "*statica*"). Questa nuova serie di assunzioni meno restrittive introduce la



presenza di un termine trasversale  $dr dt$ , che l'ipotesi di *staticità* aveva precedentemente vietato. Questo nuovo oggetto geometrico si comporta come una "membrana a senso unico", una combinazione tra un *wormhole* e una *fontana bianca* attraverso un "ponte". Con una metrica lorentziana all'infinito, questa struttura collega due spazi semi-riemanniani enantiomorfi *PT-simmetrici* con frecce temporali opposte. Di conseguenza, questo oggetto corrisponde alla copertura di due fogli di uno spaziotempo quadridimensionale, che si presenta come *PT-simmetrico*, collegati lungo un "ponte". Ispirandoci a Einstein e Rosen, abbiamo proposto di rappresentare un punto nello spazio fisico con una coppia di punti congruenti, uno su ciascuno dei due fogli. Abbiamo dimostrato che questa identificazione di punti congruenti dovrebbe portare a effetti fisici osservabili quando un oggetto attraversa il ponte spaziale tra i due fogli.

## 5.6 Appendice

Esaminiamo ora il caso del trasferimento di materia a un secondo strato dell'universo, dove siamo liberi di definire la metrica in uscita verso il secondo foglio. Applicando il seguente nuovo cambio di variabile alla metrica di Schwarzschild (42), invertendo il segno della costante d'integrazione  $\alpha \rightarrow -\alpha$  possiamo così costruire una metrica "repulsiva" sul secondo foglio:

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} + 1 \right|$$

Garantisce la continuità delle geodetiche dal primo foglio al secondo con un tempo finito di caduta libera sul primo e un tempo finito di fuga sul secondo.

La metrica in ingresso che struttura il primo foglio diventa :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

E la metrica in uscita che struttura il secondo foglio diventa :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Prendendo la forma generale :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{\delta 2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

dove  $\delta = -1$  per la metrica che struttura la prima foglia e  $\delta = +1$  per la metrica uscente che struttura la seconda foglia. Quindi, poiché le due metriche sono simmetriche per inversione temporale  $t \rightarrow -t$  la continuità delle geodetiche è assicurata da un foglio all'altro con un tempo finito di caduta libera sul primo e un tempo finito di fuga sul secondo.

Ciò implica che la materia ordinaria potrebbe essere convertita in antimateria di massa negativa, che verrebbe poi trasferita in uno strato separato dell'universo. Questo processo comporta essenzialmente la trasformazione della materia in antimateria di massa negativa. Combinando questa soluzione geometrica con la soluzione precedentemente sviluppata nella Sezione 5.3, possiamo esplorare la fattibilità dei viaggi interstellari sfruttando le proprietà metriche di questo secondo strato.

## 6 Interpretazione topologica del modello

### 6.1 Definizione

In cosmologia, la topologia si riferisce allo studio delle proprietà spaziali fondamentali dell'universo che rimangono invarianti sotto trasformazioni continue. A differenza della geometria, che si concentra su distanze e angoli precisi, la topologia è più interessata a come lo spazio è connesso e strutturato su larga scala. Esamina aspetti quali la connettività, la continuità e i confini dello spazio cosmico, indipendentemente dalla sua forma e dimensione esatta.

In un contesto cosmologico, la topologia aiuta a comprendere la struttura complessiva dell'universo, comprese questioni come se l'universo sia finito o infinito, se abbia "bordi" o sia illimitato e se possa essere connesso in modi non banali (come nei modelli di universi multi-connessi). Ciò include l'esame della forma e della struttura su larga scala dell'universo, determinata dalla distribuzione delle galassie, dal fondo di radiazione cosmica e da altre osservazioni astrofisiche.

La topologia è particolarmente importante per i modelli cosmologici avanzati, come il modello cosmologico di Giano, in quanto fornisce un quadro per esplorare concetti come l'universo multistrato, la connettività tra diverse regioni dello spazio-tempo e altre proprietà non intuitive che possono derivare dalla fisica teorica avanzata.

In breve, la topologia in cosmologia è un potente strumento per esplorare e comprendere la struttura e la natura fondamentale del nostro universo, al di là dei vincoli della geometria classica.

Prima di proseguire con questo capitolo, è fondamentale leggere e comprendere appieno il fumetto *Topologicon* (Petit 1985), scritto dal dottor Jean-Pierre Petit, che è liberamente disponibile su questo sito <http://www.savoir-sans-frontieres.com/>. Quest'opera divulga i concetti di topologia in relazione alla cosmologia e alla relatività generale. In effetti, questo capitolo tratta principalmente di strumenti concettuali piuttosto controintuitivi. Si raccomanda quindi vivamente di leggere questo fumetto in anticipo per una migliore comprensione.

### 6.2 Modello di wormhole

Sviluppando la nuova interpretazione del modello del wormhole discussa nel precedente capitolo 5, proponiamo una prospettiva topologica più profonda in relazione alla relatività generale. Ad esempio, si consideri la sfera della gola  $S^2$  che collega due strati dello spazio-tempo attraverso la *simmetria PT*. Questa configurazione potrebbe essere analoga a un piano proiettivo? In topologia, un piano proiettivo è una superficie non orientabile con proprietà uniche, come le linee che divergono in un punto ma si incontrano nell'altro. Questo suggerisce che la connessione tra gli strati dello spazio-tempo attraverso la gola del wormhole potrebbe sfidare l'orientamento tradizionale dello spazio, evocando il piano proiettivo.

La nostra congettura si basa sulla nullità del determinante metrico su questa superficie, che potrebbe indicare una natura 2D non orientabile. Se la sfera della gola è chiusa e ha una superficie delimitata, potrebbe essere identificata con un piano proiettivo.  $P^2$ . Sebbene

questa idea possa sembrare controintuitiva, essa segue direttamente dalla topologia dell'oggetto descritta dalla soluzione esterna di Schwarzschild (42).

Nel contesto della relatività generale, il concetto di volume elementare nello spazio-tempo curvo è fondamentale. Il volume elementare in dimensioni  $n$  definito da una metrica Riemanniana, è dato da  $dV = \sqrt{|\det(g)|} d^n x$  dove  $g$  è il tensore metrico e  $\det(g)$  il suo determinante. Questo volume elementare non è semplicemente il prodotto dei differenziali delle coordinate, come nello spazio euclideo, ma è modificato dalla struttura curva dello spazio-tempo. Il fattore  $\sqrt{|\det(g)|}$  riflette il modo in cui lo spazio-tempo viene distorto dalla presenza di massa ed energia, secondo le equazioni di Einstein. Nelle regioni ad alta curvatura, questo volume elementare può comportarsi in modo controintuitivo, rivelando caratteristiche topologiche dello spazio-tempo affascinanti e talvolta sorprendenti.

Ricordiamo che la sfera  $S^2$  ha una metrica definita dall'espressione :

$$ds^2 = \alpha^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

La metrica di una sfera è una funzione matematica che descrive le distanze tra i punti sulla superficie della sfera. Poiché questa metrica descrive una sfera 2D (come una sfera di raggio costante in uno spaziotempo 4D), l'elemento differenziale della superficie è dato da :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Si tratta in realtà di un elemento di superficie, perché una sfera è una superficie bidimensionale nello spazio tridimensionale. Integrando questo elemento di superficie, si ottiene la superficie descritta dall'espressione :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

Questo corrisponde alla superficie di una sfera di raggio  $\alpha$ . Si può anche vedere che questa superficie è analoga a quella di un piano proiettivo  $P^2$  un concetto raramente trattato nella geometria standard.

### 6.3 Modello dell' universo

In geometria, una sfera  $S^2$  può essere facilmente visualizzata perché possiamo *immergerla* nello spazio tridimensionale che ci è familiare.  $R^3$ . Tuttavia, un piano proiettivo, ad esempio  $P^2$  non può essere *immerso* nello stesso modo. Un piano proiettivo è un tipo di superficie non orientabile, il che significa che non può essere disposto in piano nello spazio tridimensionale senza che si verifichi un'autointersezione. Per visualizzare un piano proiettivo è necessario ricorrere all'"*immersione*", un metodo in cui la superficie *si interseca da sola* secondo un insieme di *autointersezioni*. Questo concetto sfida la nostra comprensione tradizionale delle forme e degli spazi.

Per comprendere i piani proiettivi di dimensioni più elevate, come ad esempio  $P^3$  o  $P^n$  dobbiamo abbandonare le rappresentazioni visive e adottare il pensiero astratto. Questo spostamento mentale è necessario per esplorare strutture topologiche complesse che vanno oltre le nostre dimensioni.

Ad esempio, una sfera può essere capovolta se consideriamo che ogni striscia che forma i meridiani che la ricoprono è in grado di incrociarsi per "immersione" per formare un rivestimento a due fogli di una striscia di Möbius con tre mezz torsioni ((Morin e Petit 1978)). Questo effetto di "auto-intersezione" è legato solo all'immersione di questo rivestimento nel nostro spazio di rappresentazione tridimensionale  $R^3$ . Possiamo quindi fare il polo  $M$  di un foglio di questa sfera  $S^2$  con il polo opposto  $M'$  dell'altro foglio dello stesso rivestimento. Questo si chiama "congiunzione dei punti antipodali". Questa trasformazione permette alle frecce del tempo, portate dai meridiani di questa sfera, di incontrarsi ma in opposizione su ogni foglio dello stesso rivestimento come nella Figura 6.1.

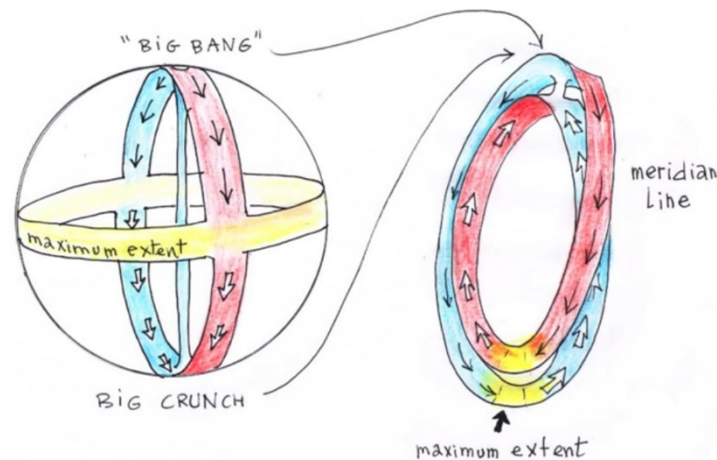


Figura 6.1 - Rovesciare una sfera unendo i punti antipodali

**NB:** Il nastro di Möbius è una superficie con un solo lato e un solo bordo. È un classico oggetto matematico della topologia, una branca della matematica che studia le proprietà degli spazi che rimangono invarianti sotto trasformazioni continue. La striscia di Möbius può essere creata prendendo una striscia di carta, facendola girare a metà e unendo poi le due estremità della striscia. Questa configurazione produce una superficie che, se si inizia a tracciare una linea lungo di essa, tornerà al punto di partenza dopo aver attraversato entrambi i "lati" della striscia senza mai sollevare la penna.

Ciò che rende affascinante il nastro di Möbius è la sua natura non orientabile. In uno spazio normale, come un foglio di carta, esiste una chiara distinzione tra "sopra" e "sotto". Su un nastro di Möbius, invece, non c'è questa distinzione: muovendosi sulla superficie, ci si sposta senza soluzione di continuità dall'alto verso il basso e viceversa.

Il nastro di Möbius viene spesso utilizzato per illustrare concetti importanti della topologia e della geometria, come l'idea di superficie unilaterale e i limiti della nostra intuizione

spaziale. In fisica teorica e cosmologia, la striscia di Möbius può essere utilizzata anche come modello per esplorare strutture spaziali e fenomeni complessi, come la torsione dello spazio-tempo o la connessione tra dimensioni diverse.

Ad esempio, la simmetria PT può essere interpretata come il percorso di un piano proiettivo da un foglio di rivestimento all'altro (Figura 6.2).

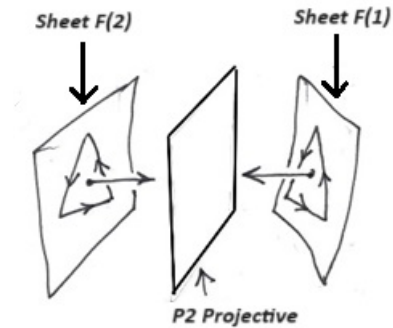


Figura 6.2 -  $P^2$  Proiettore

Affinché un oggetto geometrico sia dotato di un sistema di coordinate funzionali, è essenziale la non nullità del determinante della sua metrica. In particolare, nel contesto delle "coordinate gaussiane", questo principio è cruciale. In uno spazio quadridimensionale, questo requisito permette allo spazio di essere foliato da un insieme di ipersuperfici tridimensionali. Queste ipersuperfici sono "ortogonali" alle geodetiche, cioè perpendicolari ai percorsi che un oggetto in moto libero seguirebbe, e sono caratterizzate unicamente dalla coordinata temporale. La distinzione tra "freccia del tempo" e "tempo proprio" è importante: la freccia del tempo si riferisce a una dimensione temporale unidirezionale, mentre il tempo proprio è una misura del tempo specifica dell'osservatore.

Nel contesto dello spazio-tempo bidimensionale che stiamo esaminando, la foliazione viene eseguita utilizzando una serie di cerchi. Ogni punto di questi cerchi può essere associato a un "vettore tempo", che è ortogonale ai cerchi. In questo caso, l'ortogonalità significa che il vettore tempo è posizionato perpendicolarmente alla superficie di ogni cerchio, formando una componente temporale distinta dello spazio-tempo (Figura 6.3).

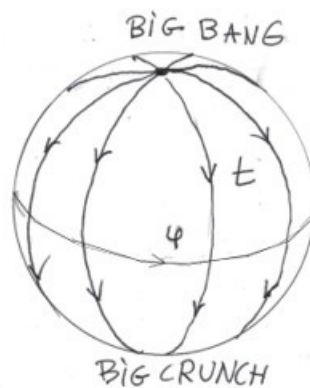


Figura 6.3 - Illustrazione del "vettore tempo" ortogonale a una circonferenza in una famiglia di circonferenze che si trovano all'interno di una sfera.  $S^2$

Tuttavia, questo "oggetto" presenta due punti singolari, ovvero i suoi poli, in cui l'azimut è indefinito. Questi poli rappresentano "singolarità della maglia" inevitabili. Sono due perché la caratteristica di Eulero-Poincaré di questo oggetto è uguale a 2. Ad esempio, se consideriamo un poliedro semplice come un tetraedro per rappresentare un'approssimazione della sfera, che è una piramide a base triangolare, la sua caratteristica di Eulero-Poincaré è  $4$  (vertici) -  $6$  (spigoli) +  $4$  (facce) =  $2$ . La caratteristica di Eulero-Poincaré di una sfera  $S^n$  è uguale a  $2$  se  $n$  è pari e zero se  $n$  è dispari (5.3.3).

Dal nostro punto di vista, l'universo sarebbe una sfera  $S^4$  con due singolarità, il Big Bang e il Big Crunch. Una sfera a quattro dimensioni  $S^4$  è analoga a una sfera regolare, estendendo il concetto a dimensioni superiori. Se consideriamo questa sfera con i suoi due poli, il Big Bang e il Big Crunch, essa può essere mappata da "paralleli" (simili a cerchi paralleli su una superficie 2D  $S^2$ ). Questo processo di foliazione comporta la creazione di strati, o "fette", attraverso la sfera, analogamente alle linee che rappresentano le latitudini sulla Terra. L'orientamento passato-futuro diventa quindi uniforme ovunque. In questo contesto, l'orientamento passato-futuro si riferisce alla direzione del tempo dal Big Bang al Big Crunch, che diventa coerente in tutta la struttura foliata. In relazione a questa normale alle superfici parallele, lo spazio-tempo è orientabile, il che significa che esiste una nozione ben definita di "su" e "giù" nella struttura dello spazio-tempo.

Tuttavia, "piegando" questa superficie (o  $S^2$  o  $S^4$ ), si crea una situazione in cui due parallele si sovrappongono. Piegare, in questo senso, significa manipolare la struttura della sfera in modo tale che diverse parti della superficie entrino in contatto. I loro vettori temporali diventano quindi antiparalleli o opposti, come già detto. Il vettore tempo è un modo per rappresentare la direzione del tempo in ogni punto dello spaziotempo. Quando questi vettori diventano antiparalleli, significa che la direzione del tempo è invertita nei punti di contatto. Questo porta a quello che potremmo definire un "orientamento indotto". L'orientamento indotto si riferisce al nuovo orientamento dei vettori temporali risultante dal processo di piegatura. In ogni punto di questo spazio-tempo, strutturato come una copertura a due fogli di un nastro di Möbius con tre mezzetorsioni (copertura a due pieghe), la "materia antipodale" (sia spaziale che temporale) appare "retrocronica". Un nastro di Möbius con tre mezzetorsioni è una superficie a un solo lato che può essere visualizzata torcendo una striscia di carta tre volte prima di unirne le estremità.

Nell'articolo di Jean-Pierre Petit (Petit 1994), si considera l'interazione dell'universo con il campo gravitazionale creato dal suo antipodo, assumendo che le leggi di interazione siano :

1. Secondo Newton, le masse ordinarie si attraggono reciprocamente.
2. Secondo Newton, le masse "antipodali" si attraggono.

3. Le masse ordinarie e le masse "antipodali" si respingono secondo una legge "anti-Newton".

Questa ipotesi lo portò a "piegare" l'universo dandogli la topologia di un "rivestimento a due fogli" di una superficie 2D.

Così "piegata", la sfera  $S^2$  (superficie chiusa) diventa il rivestimento di un'altra superficie chiusa, la superficie di Boy, che ha un unico polo e la cui caratteristica di Eulero-Poincaré è uguale a 1, come nella figura 6.4. La superficie di Boy è un'unica superficie 3D non orientabile con una sola faccia e un solo spigolo, che ha un punto singolare in cui convergono tutti i punti antipodali. La superficie di Boy è un esempio di superficie non orientabile in 3D con una sola faccia e un solo bordo. È interessante perché, a differenza della sfera classica, ha un punto singolare in cui convergono tutti i punti antipodali. Ciò significa che se si inizia a tracciare una linea sulla superficie di Boy, alla fine si torna al punto di partenza senza aver mai attraversato uno spigolo o usato l'altra faccia, perché non ce ne sono.

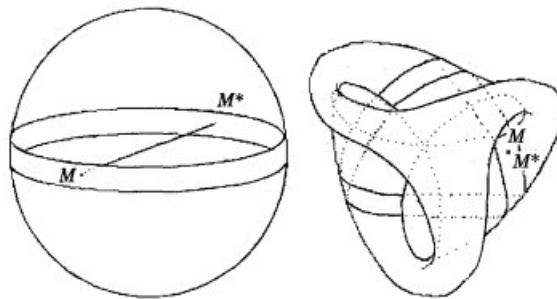


Figura 6.4 - L'intorno dell'equatore di una bi-sfera e la sua posizione sulla superficie di Boy

In questa fase, il Big Bang e il Big Crunch "coincidono".

Al posto di questa singolarità polare si potrebbe prevedere un "tubo" che colleghi queste due singolarità della maglia:

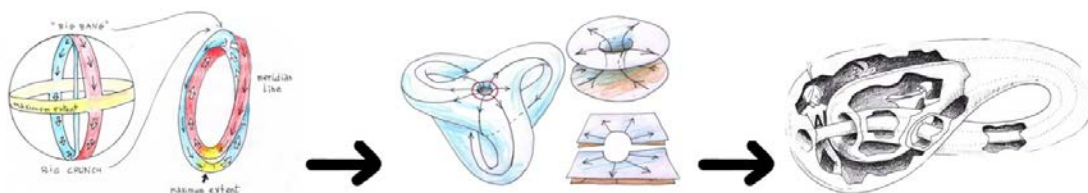


Figura 6.5 - Superficie di Boy al centro dopo la foliazione della sfera  $S^2$  e la bottiglia di Klein  $K^2$  a destra

La natura singolare scompare e l'oggetto diventa il rivestimento di una bottiglia di Klein.  $K^2$  La bottiglia di Klein è una superficie non orientabile priva di confini o interni distinti, la cui caratteristica di Eulero-Poincaré è zero, come mostrato nella Figura 6.5. La bottiglia di Klein è un'altra superficie non orientabile che non ha confini o interni distinti. Immaginate una striscia di Möbius i cui bordi sono uniti. A differenza della superficie di Boy, la bottiglia di Klein non può essere rappresentata nel nostro spazio tridimensionale senza

autointersezione. Il suo interesse risiede nel suo comportamento topologico, in cui i concetti di "*interno*" ed "*esterno*" non sono separati, fornendo una rappresentazione utile per alcune idee di topologia e cosmologia teorica.

Credo che le limitazioni della fisica teorica e della cosmologia negli anni Cinquanta siano da attribuire al ritardo con cui il campo ha abbracciato la topologia. La topologia, lo studio delle proprietà conservate attraverso le deformazioni continue, avrebbe potuto offrire nuovi modi di comprendere il tessuto dell'universo e le sue strutture complesse.



## 7 Interpretazione alternativa degli oggetti supermassicci subcritici M87 e Sagittarius A\*

Le prime immagini di oggetti supermassicci situati al centro delle galassie, pubblicate su *Astrophysical Journal*, sono state interpretate principalmente come buchi neri giganti. Questa interpretazione si basa sull'assenza di spiegazioni alternative ampiamente accettate. Questo studio riesamina queste immagini, in particolare quelle degli oggetti al centro della galassia M87 e della Via Lattea. Evidenzia la possibilità di supermassi subcritiche, il cui raggio è solo del 5,72% più corto del raggio di Schwarzschild calcolato dalla loro massa. Vedremo anche che le parti centrali di queste caratteristiche sono oscurate dall'effetto di redshift gravitazionale, rappresentato da  $z + 1$ . Questo spostamento è calcolato come il rapporto tra la lunghezza d'onda della luce ricevuta da un osservatore distante e quella emessa dalla superficie, corrispondente al rapporto tra le temperature massime e minime osservate del centro e della corona di questi oggetti, un valore straordinariamente vicino a 3. Esploreremo l'idea che la loro stabilità possa derivare da un equilibrio tra il collasso gravitazionale, dovuto a una criticità fisica che si verifica molto prima della criticità geometrica, e un'altissima pressione radiativa a densità costante emanata dai loro centri, proporzionale al quadrato della velocità della luce - un fenomeno considerato per la prima volta da Karl Schwarzschild nel suo secondo articolo pubblicato nel febbraio 1916. La nostra analisi mira ad arricchire la nostra comprensione degli oggetti supermassicci al centro delle galassie proponendo un'interpretazione alternativa.

### 7.1 Introduzione

Le immagini dei due oggetti supermassicci situati al centro della galassia M87 e della Via Lattea hanno suscitato un grande interesse mediatico, venendo subito descritte come "*le prime immagini di buchi neri giganti*". Le immagini sono state pubblicate sulla prestigiosa rivista *Astrophysical Journal* (M87 (Akiyama 2019) e Sagittarius A al centro della Via Lattea (Akiyama 2022)). In basso, una barra collega la tonalità del colore alla cosiddetta "*temperatura di luminosità*":

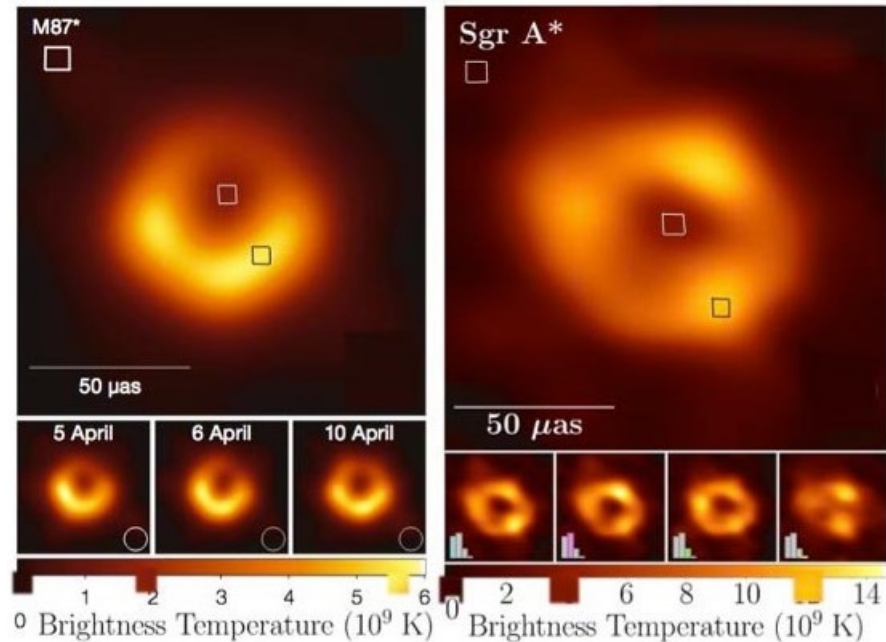


Figura 7.1 - Immagini degli oggetti M87 e Sagittarius A

Nella Figura 7.1, a sinistra, la prima immagine dell'oggetto al centro della galassia M87 è stata pubblicata nel 1999 e mostra temperature minime di luminosità di 1,8 miliardi di gradi e massime di 5,7 miliardi di gradi, con un rapporto vicino a 3. Tre anni dopo, nel 2022, è stata pubblicata una seconda immagine a destra, che mostra temperature minime di 4 miliardi di gradi e massime di 12 miliardi di gradi, anch'essa con un rapporto vicino a 3. Questi due oggetti hanno masse molto diverse: il primo è 1.625 volte più massiccio del secondo. Sembra curioso che, in queste circostanze, per entrambi gli oggetti, una nube di gas caldo in primo piano abbia caratteristiche tali che il rapporto tra le temperature massime e minime sia così vicino a 3 in entrambi i casi. Se l'immagine di un terzo oggetto portasse alla stessa osservazione, sarebbe prudente interrogarsi sulla vera natura di questi oggetti.

Le prime immagini di oggetti supermassicci situati al centro delle galassie erano associate a buchi neri giganti, e la parte centrale non perfettamente nera sembra essere dovuta alla luce emanata da un disco di gas caldo che orbita intorno al buco nero. Tuttavia, come vedremo più avanti in questo studio, una stella di neutroni può raggiungere la criticità in due scenari:

- In modo brusco, con il collasso improvviso di una stella supermassiccia sul suo nucleo di ferro prima di trasformarsi in una supernova.
- Più progressivamente, nei sistemi binari, una stella di neutroni subcritica accumula lentamente massa assorbendo il gas emesso da una stella compagna attraverso un "vento stellare". La massa critica a cui potrebbe potenzialmente subire ulteriori trasformazioni dipende dall'equazione di stato della materia all'interno della stella

di neutroni e può variare. In genere, i modelli attuali stimano che la massa critica necessaria per un'ulteriore trasformazione sia approssimativamente compresa tra 2 e 3 volte la massa solare, vicino al limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

La particolarità di un tale modello è che l'oggetto massiccio deve avere un rapporto di temperatura di luminosità pari a 3 tra la sua corona e il suo centro (temperatura massima e minima). Come dimostreremo più avanti, un'interpretazione alternativa più coerente sarebbe quella di attribuire l'oscuramento della parte centrale di questi oggetti a un effetto di redshift gravitazionale, che dilata o rallenta il tempo in prossimità del loro orizzonte.

Questo perché un oggetto massiccio piega lo spazio-tempo intorno a sé, influenzando la traiettoria non solo degli oggetti massicci ma anche della luce. Quando un fotone passa vicino a un oggetto di questo tipo, la sua traiettoria viene piegata a causa di questa curvatura dello spazio-tempo, un fenomeno noto come lente gravitazionale (vedi Figura 3.4). Tuttavia, non è solo il percorso del fotone a cambiare: allontanandosi dall'oggetto massiccio, il fotone perde energia per sfuggire al forte campo gravitazionale. Questa perdita di energia si traduce in una diminuzione della sua frequenza, che estende la sua lunghezza d'onda verso l'estremità rossa dello spettro luminoso, un fenomeno noto come redshift gravitazionale.

Per calcolare l'energia persa da un fotone a causa del redshift gravitazionale, è essenziale capire che l'energia di un fotone è direttamente correlata alla sua frequenza  $f$  attraverso l'equazione  $E = hf$  dove  $h$  è la costante di Planck.

Se si considera un fotone emesso con una frequenza  $f_e$  e osservato a una frequenza ridotta  $f_r$  a causa dello spostamento rosso gravitazionale, l'energia persa dal fotone può essere espressa come la differenza tra l'energia iniziale e quella finale:

$$\Delta E = h(f_e - f_r)$$

Utilizzando la relazione tra frequenza e lunghezza d'onda ( $f = \frac{c}{\lambda}$ ), dove  $c$  è la velocità della luce, questa equazione può essere riscritta in termini di lunghezza d'onda :

$$\Delta E = hc \left( \frac{1}{\lambda_r} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

E usando la definizione di redshift gravitazionale  $z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}$  possiamo riorganizzare per ottenere un'espressione in termini di  $z$  :

$$\Delta E = hc \left( \frac{1}{\lambda_e(1+z)} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda_e} \left( \frac{z}{1+z} \right)$$

Questa equazione mostra che l'energia persa da un fotone a causa del redshift gravitazionale dipende dalla lunghezza d'onda a cui è stato emesso e dal valore del redshift gravitazionale  $z$  il segno negativo indica una perdita di energia.

Questa perdita di energia non è solo apparente. Per esempio, il fondo cosmico a microonde è la radiazione che ha subito il più grande redshift gravitazionale, con un fattore  $z$  di circa 1.100, che corrisponde a una temperatura molto bassa e a un'energia di circa 3 Kelvin (-270°C), ben al di sotto dell'energia originale (vedi Figura 3.10).

È inoltre importante notare che i getti molto fini e collimati osservati in prossimità di oggetti supermassicci indicano la presenza di un potente campo magnetico che si oppone al collasso dell'oggetto sotto l'effetto della gravità, esercitando un'intensa pressione magnetica contraria. Questi oggetti, come le stelle di neutroni alla loro massa massima, sono subcritici, con un effetto di redshift gravitazionale limitato a 3. Ciò suggerisce che questi oggetti potrebbero essere massicci. Ciò suggerisce che questi oggetti potrebbero essere oggetti massicci subcritici.

Nella scienza, quando un'osservazione non corrisponde alla teoria, di solito è quest'ultima a essere messa in discussione. Tuttavia, in questo recentissimo lavoro pubblicato sull'*Astrophysical Journal* (Medeiros 2023), i ricercatori hanno modificato le osservazioni per renderle conformi al modello dei buchi neri. Hanno generato immagini sintetiche di buchi neri manipolando vari parametri come la massa, il momento angolare, ecc. e selezionando quella che meglio si adattava ai dati osservati utilizzando il software PRIMO, come mostrato nella Figura 7.2.

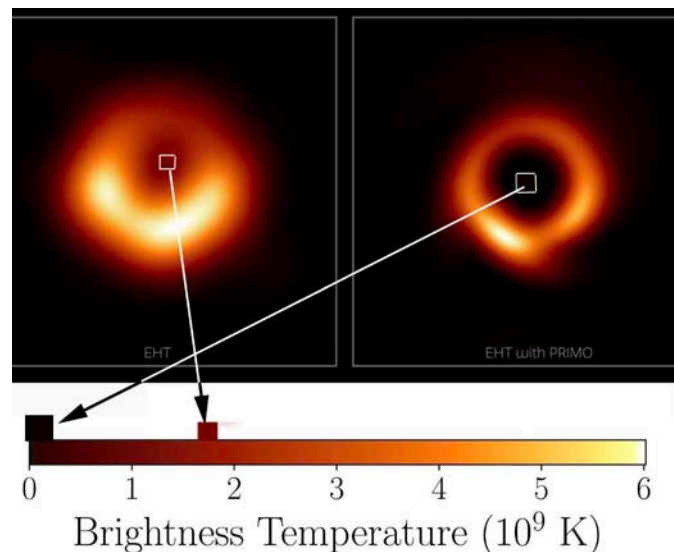


Figura 7.2 - Immagine sintetica del buco nero M87 elaborata da PRIMO a destra rispetto all'immagine originale a sinistra

Il risultato ha confermato la teoria, ma ha sollevato dubbi sul rigore scientifico e sull'obiettività della ricerca.

## 7.2 L'interpretazione alternativa del fenomeno

Un'interpretazione alternativa è quella di attribuire questa variazione di colore dal centro al bordo a uno spostamento verso il rosso di tipo gravitazionale, con  $z = 2$  che porta a un allungamento della lunghezza d'onda di un fattore di  $1 + z = 3$ . Cosa possiamo dire di questi oggetti?

### 7.2.1 Confronto tra criticità fisiche e geometriche

Nella Sezione 5.1 abbiamo esaminato le soluzioni di Schwarzschild alle equazioni di Einstein, evidenziando la metrica esterna di Schwarzschild e la corrispondente metrica interna per un fluido a densità costante  $\rho_0$ . Queste soluzioni sono state confermate da fenomeni come l'avanzamento del perielio di Mercurio e il fenomeno del lensing gravitazionale (Figura 3.4). Karl Schwarzschild cercò di garantire che le condizioni che regolavano queste due metriche fossero coerenti con la realtà fisica.

In uno scenario in cui la densità della stella,  $\rho_0$  rimane costante, si può definire un raggio caratteristico  $\hat{r}$  può essere definito. In effetti, se consideriamo la metrica interna pubblicata da Schwarzschild nel suo secondo articolo del febbraio 1916 (Schwarzschild 1916a):

$$ds^2 = \left( \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Schwarzschild considerava la velocità della luce  $c$  uguale a uno. Quindi l'espressione  $\frac{3}{\kappa\rho_0}$  dovrebbe essere scritta come  $\frac{3c^2}{\kappa\rho_0}$ . Successivamente, K. Schwarzschild definì una costante  $\kappa$  come uguale a  $8\pi k^2$  "dove  $k^2$  è la costante gravitazionale di Gauss", il che gli permise di introdurre il raggio caratteristico  $\hat{r}^2$  pari a  $\frac{3}{\kappa\rho_0}$  e, che è anche il raggio del cerchio che fa parte del meridiano della superficie di Flamm ((Oppenheimer e Snyder 1939)). Pertanto, l'equazione precedente ci porta a:

$$ds^2 = \left( \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \hat{r}^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Poi, poiché K. Schwarzschild utilizza l'angolo  $\chi$  per localizzare i punti all'interno della sfera, passa alla variabile  $r$  applicando il cambiamento di variabile  $r = \hat{r} \sin\chi$ . Si ottiene così la forma moderna della metrica. Tolman fornì un'affermazione precisa nel 1934 dando la seguente ((Tolman 1934)) :

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \left( \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 c^2 dt^2$$

Dove  $r_n$  è il raggio della stella e  $\hat{r}$  è una costante stellare in funzione della sua densità  $\rho_0$ . Si noti che formula l'ordine dei termini, nella metrica, in base alla firma (---+) ma conserva i segni dei rispettivi termini.

Si consideri un osservatore stazionario ( $dr = d\theta = d\phi = 0$ ) situato all'interno di una stella. La metrica diventa :

$$ds = cd\tau = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right] cdt = f(r)dt$$

dove  $\tau$  è il tempo proprio osservato dall'osservatore stazionario all'interno della stella e  $f(r)$  è il fattore tempo.

Allora, come si è visto nella sezione 5.1, quando il fattore tempo è nullo al centro della stella, la criticità fisica viene raggiunta prima della comparsa della criticità geometrica, quando il raggio della stella è solo il 5,72% più piccolo del raggio critico  $\hat{r}$  dedotto dalla sua densità:

$$r_n = R_{cr\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}}$$

### 7.2.2 Redshift gravitazionale vicino alla criticità fisica

La soluzione di Schwarzschild fu poi ripresa, in forma diversa, da Tolman ((Tolman 1934)), Oppenheimer ((Oppenheimer e Snyder 1939)) e altri ((Adler, Bazin e Schiffer 1975)), portando all'equazione di stato, nota come equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), presentata nella sua forma differenziale:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2} \left( \frac{4\pi G}{c^4} p r^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}$$

Il cui valore integrato è stato dato da Karl Schwarzschild un secolo prima (vedi Figura 7.3), dove nel suo secondo articolo (Schwarzschild 1916a) pubblicato nel febbraio 1916, descrive la geometria all'interno di una sfera riempita con un fluido incompressibile di densità costante  $\rho_0$  :

$$f_2 = \frac{3}{x\rho_0} \sin^2 \chi, \quad f_4 = \left( \frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right)^2, \quad f_1 f_2 f_4 = 1. \quad (29)$$

$$\longrightarrow \rho_0 + p = \rho_0 \frac{2 \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left( \frac{x\rho_0}{3} \right)^{-3/2} \left[ \frac{9}{4} \cos \chi_a \left( \chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi \right) - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \right]. \quad (31)$$

Figura 7.3 - La legge della pressione ottenuta nel 1916 da Karl Schwarzschild

In questa formula, la velocità della luce è sempre regolata su un valore unitario. Di conseguenza, questa formula è equivalente a:

$$p = \rho_0 c^2 \left( \frac{\cos \chi - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \right)$$

Poi, come visto nella Sezione 7.2.1, K. Schwarzschild passò alla variabile  $r$  con il seguente semplice cambio di variabile :

$$r = \hat{r} \sin \chi$$

La pressione diventa nulla alla superficie della stella per  $\chi = \chi_a$  con un raggio dato da :

$$r_a = \hat{r} \sin \chi_a$$

Il centro della stella corrisponde a  $\chi = 0$  quindi la pressione diventa :

$$p = \rho_0 c^2 \left( \frac{1 - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - 1} \right)$$

Ciò impone un limite massimo a questo raggio per  $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$  significato :

$$r_a = R_{cr\phi} = \hat{r} \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428 \hat{r}$$

Tuttavia, se consideriamo la massa corrispondente a una criticità fisica :

$$M_{cr\phi} = \frac{4}{3} \pi \hat{r}^3 \rho_0$$

e quella corrispondente alla criticità geometrica :

$$M_{cr\gamma} = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0$$

otteniamo la seguente relazione :

$$M_{cr\phi} = \left( \frac{8}{9} \right)^{\frac{3}{2}} M_{cr\gamma} = 8.838 M_{cr\gamma} = 2.5 M_{solar}$$

Questo valore è compatibile con le masse di alcune stelle di neutroni che abbiamo potuto dedurre direttamente dalle osservazioni disponibili e per le quali Thorne, Wheeler e Misner hanno stimato nel loro libro (pagina 611 di (Thorne, Wheeler e Misner 1973)) la massa critica oltre la quale la pressione vola all'infinito, come mostrato nella Figura 7.4 :

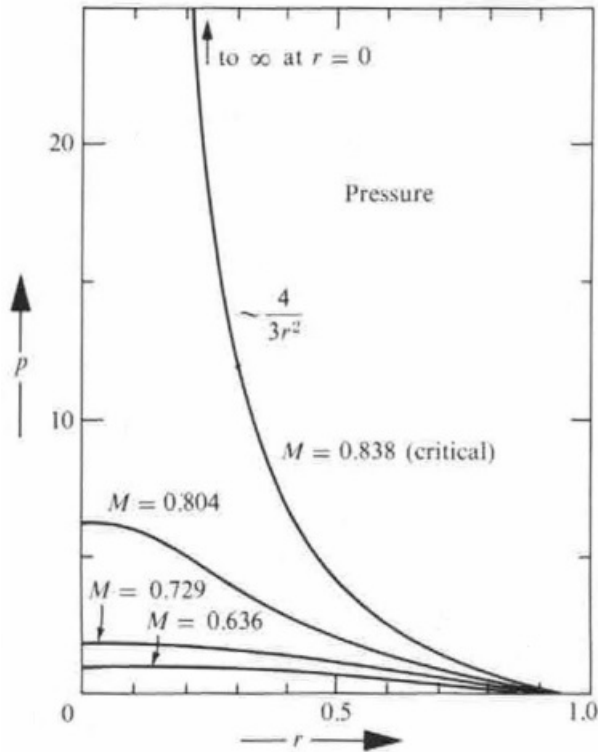


Figura 7.4 - Variazione della pressione all'interno di una stella di neutroni di densità costante

Naturalmente, non avremo mai immagini di stelle di neutroni paragonabili a quelle degli oggetti al centro di M87 e della Via Lattea. Calcoliamo quindi l'effetto del redshift gravitazionale  $z + 1$  (corrispondente a corpi celesti massicci vicini a questa criticità fisica. Questo effetto influisce sulla luce emessa dalla loro superficie in direzione radiale verso un osservatore distante, che la percepirà con una lunghezza d'onda allungata (redshift).  $\lambda_r$  lunghezza d'onda (redshift). È data da:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_a}}}$$

Tuttavia, nella parte centrale, il raggio di criticità geometrica è definito dal raggio di Schwarzschild, che è :

$$R_s = \frac{2GM_{cr\gamma}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \left( \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \right) = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r_a^3 = \frac{r_a^3}{\hat{r}^2}$$

Quindi il redshift gravitazionale darà :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_a^2}{\hat{r}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_a c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3$$

Questo è esattamente il valore dedotto dal rapporto tra le temperature massime e minime dedotte dalle prime due immagini di buchi neri situati al centro delle galassie M87 e Via



Lattea. Quindi le immagini di questi oggetti supermassicci potrebbero anche corrispondere a entità subcritiche, dove la pressione al loro centro - definita come densità di energia per unità di volume - sarebbe infinita o comunque estremamente elevata.

### 7.2.3 Variazione della velocità della luce e della pressione nei plasmi a densità costante

Consideriamo ora un fluido (plasma di idrogeno) con una densità presunta costante. A una temperatura inferiore a 3000° la pressione interna è data da :

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3}$$

dove  $v$  è la velocità media di agitazione termica delle particelle che compongono il plasma. Quindi, il ragionamento secondo cui "se la pressione  $p$  tende all'infinito, allora anche questa velocità dovrebbe tendere all'infinito, il che contraddice un principio centrale della relatività speciale, il "principio di causalità", secondo il quale nessun effetto fisico può propagarsi a una velocità  $v > c$ " (Thorne, Wheeler e Misner 1973)), porterebbe a un'aberrazione fisica.

Tuttavia, in questa regione dello spazio-tempo, la pressione all'interno del plasma diventa radiativa:

$$p_r = \frac{\rho_0 c^2}{3}$$

Se prevediamo di aumentare questa pressione radiativa a densità costante, ciò può essere ottenuto solo considerando una variazione della velocità della luce nel mezzo, che Karl Schwarzschild è stato il primo a prevedere (Schwarzschild 1916a):

Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3 \cos \chi_a - \cos \chi_s}, \quad (44)$$

Figura 7.5 - Variazione della velocità della luce in una sfera di densità costante

Quindi, come ha sottolineato nel suo articolo, l'aumento della velocità della luce segue l'aumento della pressione. Cosa succede quando questa pressione aumenta, così come il valore della velocità della luce? Semplicemente, è chiaro da Karl Schwarzschild (pagina 433 di (Schwarzschild 1916a)) che queste due quantità diventano infinite per  $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$  corrispondente a  $r = R_{cr\phi}$  (44) come si è visto nella Sezione 7.2.2.

Dallo studio di Karl Schwarzschild possiamo dedurre che la stabilità di questi oggetti supermassicci subcritici è dovuta al fatto che il collasso gravitazionale, dovuto alla criticità fisica che si verifica molto prima della criticità geometrica, è compensato da un'altissima pressione radiativa a densità costante dal loro centro, proporzionale al quadrato della velocità della luce.

## 7.3 Conclusione

Abbiamo analizzato le immagini di oggetti supermassicci situati al centro delle galassie, inizialmente presentate su *Astrophysical Journal* come le prime immagini di buchi neri

giganti. Grazie al nostro studio approfondito, proponiamo un'interpretazione alternativa di questi oggetti, che potrebbero corrispondere a caratteristiche supermassicce subcritiche, che mostrano un rapporto tra temperatura massima e minima vicino a 3. Infatti, il loro raggio è solo del 5,72% più corto delle lunghezze di Schwarzschild dedotte dalla loro massa. Questa osservazione si allinea bene con l'effetto di redshift gravitazionale, potenzialmente caratteristico delle stelle di neutroni che si avvicinano alla criticità fisica, come suggerito dalla soluzione geometrica interna di Schwarzschild, pubblicata nel suo secondo articolo nel febbraio 1916. Questa soluzione, in gran parte sconosciuta alla maggior parte dei cosmologi del dopoguerra e tradotta in inglese solo nel 1999, offre una prospettiva unica per osservare questi fenomeni. Esaminando aspetti quali la pressione, la velocità della luce e il fattore tempo all'interno di questi oggetti, ci proponiamo di arricchire il resoconto esistente dei complessi fenomeni astrofisici al centro delle galassie. Ciò include l'esplorazione della loro stabilità, che potrebbe essere mantenuta da un equilibrio tra il collasso gravitazionale, risultante da una criticità fisica che si verifica molto prima della criticità geometrica, e l'elevatissima pressione radiativa a densità costante proveniente dai loro centri, proporzionale al quadrato della velocità della luce. Il lavoro centenario di Karl Schwarzschild ci ricorda che ci sono ancora misteri da svelare all'interno di teorie consolidate. Le questioni che solleviamo, in particolare riguardo all'evoluzione del fattore tempo e alle sue profonde implicazioni per il concetto stesso di tempo, sono cruciali e invitano a ulteriori ricerche. Se le osservazioni future confermeranno le nostre ipotesi, in particolare se verrà scoperta l'immagine di un terzo oggetto supermassiccio con un rapporto di temperatura simile, ciò incoraggerà una rivalutazione di alcuni dei nostri attuali modelli astrofisici. In definitiva, l'universo, in tutta la sua vastità e complessità, continua a stimolarci nella nostra insaziabile ricerca di conoscenza.

## 8 Sfide e dibattiti

### 8.1 Sfide incontrate nella comunicazione e nell'accettazione del Modello

Nei nostri sforzi per diffondere e validare il Modello Cosmologico di Giano, abbiamo incontrato sfide formidabili, in particolare nel campo della pubblicazione scientifica. Questa sezione si propone di descrivere nel dettaglio tali difficoltà, evidenziando le complessità e le distorsioni insite nel sistema di pubblicazione internazionale dominante.

Uno degli ostacoli più significativi che abbiamo incontrato è stato il processo di peer review nelle riviste autorevoli. Abbiamo scoperto che il sistema, così come esiste attualmente, è spesso rigido e impermeabile alle nuove idee, in particolare a quelle che mettono in discussione le basi consolidate della Fisica e della Cosmologia. I nostri tentativi di pubblicare su riviste prestigiose come *Physical Review D*, *Modern Physics Letters A*, *Astrophysical Journal* e *Astrophysics and Space Science*, tra le altre, hanno incontrato resistenza e scetticismo. Questa resistenza non sembra derivare da una nostra mancanza di rigore scientifico, ma piuttosto da una tendenza generale della comunità scientifica a mantenere lo status quo.

Nei nostri tentativi di pubblicazione, abbiamo ricevuto risposte che illustrano le sfide che dobbiamo affrontare. Per esempio, una lettera del dottor Ethan T. Vishniac, editore di *The Astrophysical Journal*, ha sottolineato la natura non convenzionale del nostro lavoro nel contesto della loro pubblicazione:

*Gentile dottor Zejli,*

*Le scrivo in merito al manoscritto sopra citato, che ha recentemente inviato a The Astrophysical Journal.*

*Ho letto il suo manoscritto e ho valutato la sua idoneità alla pubblicazione sulla nostra rivista. La nostra rivista è specializzata in manoscritti che presentano nuovi risultati di osservazioni astronomiche o di teorie applicate direttamente ai sistemi astrofisici. Sfortunatamente, l'argomento del suo manoscritto, che tratta aspetti fondamentali della relatività bimetrica, non rientra nell'area tematica della nostra rivista. Di conseguenza, mi dispiace informarla che non potremo pubblicare il suo manoscritto. Le porgo comunque i miei migliori auguri per le sue ricerche future.*

*L'argomento di questo articolo rientrerebbe perfettamente nell'ambito di una rivista specializzata in fisica della gravità. Come politica generale, non raccomando riviste specifiche. Noterò solo che questo manoscritto non è ben organizzato come un documento di ricerca. La maggior parte dell'articolo passa in rassegna il lavoro precedente e i nuovi risultati e il loro significato sono difficili da distinguere. Ad esempio, nell'abstract non si fa menzione di nessuno dei due.*

*Saluti,*

*Ethan T. Vishniac*

*Caporedattore AAS*

*Università Johns Hopkins*

Ciò significa che, sebbene il nostro manoscritto trattasse aspetti fondamentali della

"relatività bimerica" (cioè bimettrica), non era in linea con l'attenzione della rivista per i nuovi risultati astronomici e le teorie applicate ai sistemi astrofisici. Questa risposta cortese e informativa riflette la tendenza generale a favorire i lavori che si inseriscono nel quadro consolidato della ricerca scientifica. Al contrario, le risposte di *Physical Review D* sono state molto più sintetiche, spesso riassunte dalla frase "Non adatto". Questa breve risposta evidenzia la difficoltà di ottenere l'accettazione di idee che si discostano in modo significativo dai paradigmi esistenti in fisica teorica e cosmologia. Queste interazioni con le principali riviste evidenziano una sfida significativa nella comunicazione di nuove teorie scientifiche: la necessità di allineare il lavoro innovativo con le aspettative e gli standard consolidati delle riviste scientifiche, preservando al contempo l'integrità e la novità della ricerca.

Inoltre, i recenti cambiamenti di politica di *arXiv*, uno dei principali repository di pre-pubblicazione, hanno introdotto un ulteriore livello di complessità. Il nuovo requisito che prevede che i lavori inviati siano inizialmente preceduti dalla pubblicazione su un'importante rivista peer-reviewed può sembrare paradossale e controintuitivo, in particolare per le ricerche pionieristiche che potrebbero incontrare una resistenza iniziale nei forum tradizionali. Questo cambiamento di politica ha ostacolato notevolmente la nostra capacità di condividere rapidamente i risultati preliminari e di interagire più ampiamente con la comunità scientifica.

Nonostante queste sfide, ci sono stati spiragli di speranza e di riconoscimento. Due riviste, la russa *Gravitation and Cosmology* (Pleiades Publishing) e la tedesca *Astronomische Nachrichten*, hanno mostrato la volontà di prendere sul serio il nostro lavoro. Il loro impegno nei confronti della nostra ricerca, anche se non così ampio come avremmo sperato, è un passo positivo verso una più ampia accettazione e comprensione del MCG.

Nella sezione seguente analizzeremo le risposte e le critiche di queste riviste, evidenziando sia i commenti costruttivi sia le aree in cui il processo di peer review potrebbe essere migliorato per accogliere teorie scientifiche innovative.

## 8.2 Discussione sulle critiche e le risposte presentate

Nel corso dei nostri sforzi per pubblicare il Modello Cosmologico di Giano, abbiamo affrontato alcune sfide significative, una delle quali è stato il lungo processo di revisione da parte della rivista *Gravitation and Cosmology*. Dopo otto mesi di insistenti ricerche, la rivista ha finalmente trovato un revisore che valutasse la qualità del nostro lavoro. Tuttavia, il risultato non è stato quello sperato. Ecco la corrispondenza che racchiude l'essenza delle sfide che abbiamo affrontato.

### Risposta da *Gravitazione e cosmologia*

*Caro dottor Zejli,*

*Dopo numerosi tentativi, abbiamo ricevuto un rapporto di referee sul suo articolo GC23-019 "Nature of the Dipole Repeller". Purtroppo, il rapporto contiene una serie di gravi osservazioni*

*critiche. Alla luce di questa relazione, non possiamo accettare il suo articolo per la pubblicazione sulla nostra rivista.*

*Cordiali saluti,  
Dr. Sergey V. Bolokhov  
Comitato di redazione di Gravitazione e Cosmologia*

## **RAPPORTO DELL'ARBITRO**

*Gli autori cercano di spiegare il fenomeno del cosiddetto Dipole Repeller nell'ambito del "modello cosmologico di Giano", che è in realtà una sorta di teoria bimetrica. Il modello stesso contiene alcune entità che è molto improbabile che esistano in natura, come particelle con massa negativa e fotoni con energia negativa. A questo proposito, è opportuno ricordare che recenti esperimenti hanno dimostrato che le particelle di antimateria sono soggette alla stessa forza di gravità delle particelle di materia della stessa massa. Ciò rende ancora più dubbia l'ipotesi degli autori di masse negative. Inoltre, appare strano che la teoria in questione sia invocata per spiegare un solo fenomeno e non abbia alcun impatto su altri sistemi osservati. Un punto debole dell'articolo è che contiene solo argomenti qualitativi senza calcoli specifici che tengano conto dei parametri osservati del respingente.*

### **La mia risposta a questo recensore**

*Gentile dottor Sergey V. Bolokhov,*

*Vi ringraziamo per averci inviato la relazione del referee sul nostro manoscritto "Nature of the Dipole Repeller". Apprezziamo il tempo e lo sforzo investito nella revisione del nostro lavoro. Tuttavia, riteniamo che ci siano alcuni fraintendimenti riguardo ai concetti fondamentali della nostra ricerca, che vorremmo chiarire.*

*1. Sulla massa negativa e l'antimateria: la preoccupazione del referee riguardo alle masse negative alla luce dei recenti esperimenti con l'antimateria mette in luce un aspetto fondamentale del nostro modello che potrebbe essere stato trascurato. Il modello cosmologico Janus, che costituisce la base del nostro articolo, prevede l'esistenza di due tipi distinti di antimateria. L'antimateria di tipo C, simile all'antimateria di Dirac prodotta in laboratorio, risponde alle forze gravitazionali in modo simile alla materia ordinaria. Al contrario, l'antimateria di tipo PT, corrispondente al concetto di massa negativa di Feynman, si propone di esistere al centro dei vuoti cosmici, come il Dipole Repeller. Questo tipo di antimateria esercita un effetto antigravitazionale, che è una componente critica del nostro modello ed è chiaramente descritto a pagina 10 del nostro manoscritto.*

*2. Conferme osservative e applicazioni del modello: la validità del nostro modello va oltre la spiegazione del respingente di dipolo. Offre spunti di riflessione su vari fenomeni astronomici, che potrebbero essere sfuggiti all'autore del nostro articolo:*

*Confinamento e stabilità delle galassie: si spiega con spazi lacunosi riempiti di masse negative.  
Effetti di lentezza gravitazionale: il modello spiega i fenomeni di lentezza gravitazionale*

*intorno alle galassie.*

*Struttura universale: la nostra teoria propone una struttura lacunare dell'universo piena di ammassi di massa negativa, simili a bolle di sapone interconnesse.*

*Curve di rotazione delle galassie e anomalie gravitazionali: Spieghiamo l'appiattimento delle curve di rotazione e l'inattesa accelerazione delle stelle ai confini delle galassie.*

*Formazione precoce delle galassie: supportato dalle recenti osservazioni del James Webb Telescope, il nostro modello suggerisce la formazione simultanea di galassie nei primi 100 milioni di anni dell'universo.*

*Galassie ad alto redshift: ci occupiamo dell'attenuazione della luminosità delle galassie lontane (redshift > 7) dovuta all'effetto di lente gravitazionale negativa degli ammassi di massa negativa.*

*Verifiche relativistiche locali: il modello si allinea a fenomeni come la precessione del perielio di Mercurio e la deviazione della luce da parte del Sole.*

*Osservazioni di supernove: l'asimmetria tra popolazioni di massa positiva e negativa è correlata alle osservazioni di supernove di tipo Ia.*

*3. Errata interpretazione della portata del modello: infine, l'affermazione che la nostra teoria sia invocata solo per spiegare un singolo fenomeno trascura il suo ampio campo di applicazione. Il nostro modello offre spiegazioni per le strutture delle galassie a spirale, per l'invisibilità dell'antimateria cosmica dovuta a fotoni di energia negativa e per la natura dei componenti invisibili dell'universo, tra gli altri.*

*Riteniamo che queste ulteriori informazioni e chiarimenti contribuiscano a risolvere le preoccupazioni sollevate nel rapporto dei referee. Siamo pronti a fornire ulteriori dettagli o revisioni, se necessario.*

*Vi ringraziamo per aver preso in considerazione la nostra risposta e ci auguriamo di avere l'opportunità di contribuire alla rivista.*

*Cordiali saluti*

Purtroppo, dopo la nostra risposta dettagliata che rispondeva a tutte le preoccupazioni del recensore, non abbiamo ricevuto altre comunicazioni. L'editore e il recensore sembravano essersi ritirati dal dialogo, illustrando le sfide e, a volte, le barriere apparentemente insormontabili che si incontrano nel promuovere nuove teorie scientifiche all'interno del quadro consolidato dell'editoria accademica.

### **Analisi critica dei ritorni della rivista *Astronomische Nachrichten***

Anche le nostre interazioni con le *Astronomische Nachrichten* hanno posto delle sfide, ma hanno permesso di approfondire una questione fondamentale nell'accettazione di nuove idee in cosmologia. L'unico recensore, trovato dopo una ricerca durata due mesi, ha avviato un dialogo che ha messo in luce un problema pervasivo: la dipendenza dai presupposti stabiliti da fisici di fama, che poi modellano e solidificano i paradigmi entro cui opera la maggior parte dei cosmologi. L'obiettivo del nostro lavoro è quello di fornire una nuova interpretazione geometrica e

cosmologica della soluzione esterna di Schwarzschild, basata su due assunti principali:

- **Isotropia:** Invarianza sotto l'azione di  $SO(3)$ , cioè il gruppo delle rotazioni e traslazioni spaziali 3D.
- **Stazionarietà:** indipendenza dei termini della metrica rispetto alla coordinata temporale, ossia invarianza per traslazione temporale.

La soluzione generale, come descritta originariamente da Schwarzschild, viene spesso presentata senza un'adeguata giustificazione. Tolman notò nel 1934 ((Tolman 1934)) che la forma più generale include un termine incrociato in  $drdt$ . Tuttavia, questo termine è stato successivamente trascurato per comodità. Questo approccio, compreso quello di Schwarzschild, è stato seguito da molti ricercatori, come discusso in dettaglio nel Capitolo 5. Il recensore ha fatto notare che l'inesistenza di tale termine trasversale deriva dalle ipotesi di simmetria assunte. Ci viene rimproverato di aver trascurato un'ipotesi di simmetria essenziale: la soluzione dovrebbe essere invariante quando  $t$  è cambiato in  $-t$  (come si legge, tra l'altro, nel libro di Wald (Wald 1984)). Di conseguenza, una soluzione con un termine incrociato  $drdt$  non soddisferebbe questa condizione di invarianza, perché cambiando  $t$  a  $-t$  altera il segno del termine incrociato. Ma qual è la base fisica di questa assunzione di simmetria per la variabile tempo? Non c'è. Non è stata menzionata né da Schwarzschild né da molti dei suoi successori.

In effetti, il ragionamento (se così si può chiamare) si basa sul "*modello dei buchi neri*" incentrato sulla "*forma moderna*", dove il termine crociato è assente (42). Si tratta di un'ipotesi puramente matematica, pensata per allinearsi non a realtà osservative tangibili, ma alla convinzione generale dell'esistenza dei buchi neri. Per i cosmologi, quindi, questa ipotesi può sembrare "*naturale*".

La nostra esperienza con le *Astronomische Nachrichten* illustra come i paradigmi consolidati possano influenzare la ricezione di idee innovative in cosmologia, sottolineando la necessità di apertura mentale e di rivalutazione degli assunti fondamentali alla luce dei nuovi sviluppi teorici.

## 9 Conclusione e discussione

Considerando il principio del rasoio di Occam, che favorisce la teoria più semplice e più coerente con i dati osservativi, è ragionevole concludere che il Modello di Giano supera il Modello Standard. Il Modello Cosmologico Janus fornisce un approccio coerente alla spiegazione di molti fenomeni astrofisici, offrendo al contempo una chiara interpretazione dei dati osservativi disponibili. Mentre il Modello Standard presenta incongruenze con i dati osservativi, richiedendo costruzioni ad hoc per aggirare tali incongruenze.

Infatti, il modello di Giano va oltre la semplice proposta di alternative ai fenomeni solitamente attribuiti alla materia oscura e all'energia oscura, come l'accelerazione dell'espansione cosmica, il confinamento delle galassie, i pronunciati effetti di lensing gravitazionale e la quasi perfetta omogeneità del fondo cosmico a microonde (CMB), tra gli altri. Fornisce chiarimenti dettagliati sulla natura e sull'identità dei componenti invisibili dell'universo. Il

modello risolve il paradosso della mancata osservazione dell'antimateria primordiale e offre una spiegazione per il Dipolo Repulsore, vedendolo come un conglomerato di massa negativa. Questa prospettiva rafforza la credibilità del Modello Cosmologico di Giano nello stabilire la struttura su larga scala dell'universo, spiegando al contempo le ragioni della difficoltà di rilevare la massa negativa con gli strumenti di osservazione ottici. Inoltre, rende conto della bassa magnitudine degli oggetti astronomici con redshift gravitazionale superiore a 7 e aderisce al principio di confutabilità stabilendo test osservativi specifici, come la presenza di conglomerati di massa negativa, con il Dipole Repeller come esempio notevole. Inoltre, propone una mappatura alternativa dell'universo basata su una diversa interpretazione dell'effetto di lente gravitazionale debole.

Inoltre, il modello di Giano trova conferma nei dati osservativi più recenti, in particolare quelli ottenuti dal Telescopio Spaziale James Webb, prevedendo la formazione delle galassie nella loro forma attuale durante i primi 100 milioni di anni di età dell'universo. Inoltre, la struttura del suo gruppo dinamico conferisce alla sua geometria la *simmetria CPT*, per la quale una specifica previsione fatta nel 2017 è stata confermata nel settembre 2023. Questa previsione riguarda l'antimateria C-simmetrica (a simmetria di carica), sintetizzata in laboratorio e che emette fotoni a energia positiva, che, secondo le osservazioni, è soggetta a un'attrazione gravitazionale verso il basso, proprio come la materia ordinaria.

Inoltre, apre promettenti strade di ricerca nella meccanica quantistica, suggerendo che l'integrazione degli stati negativi di energia e massa potrebbe essere cruciale per la quantificazione della gravitazione. Il modello di Giano si adatta quindi perfettamente alla natura, non presentando contraddizioni di rilievo.

In questo libro ci siamo addentrati nelle complessità del modello, svelandone le sfumature e il potenziale per far luce sui misteri che da tempo sconcertano cosmologi e fisici.

Questo viaggio attraverso i campi della matematica avanzata, della fisica teorica e della



cosmologia dimostra la capacità del modello di sfidare le prospettive convenzionali e di offrire spiegazioni alternative per fenomeni che i modelli attuali faticano a chiarire completamente. Le discussioni e le analisi presentate mirano ad arricchire la comprensione del lettore e a stimolare la curiosità di esplorare ulteriormente e mettere in discussione i limiti della nostra conoscenza scientifica.

Ritengo che i limiti della fisica teorica e della cosmologia possano essere attribuiti al ritardo con cui il campo ha abbracciato la topologia a partire dagli anni Cinquanta. La topologia, lo studio delle proprietà conservate attraverso le deformazioni continue, avrebbe potuto offrire nuovi modi per comprendere il tessuto dell'universo e le sue strutture complesse.

In conclusione, spero che questo libro serva non solo come guida completa al modello ancorato a una solida base teorica di relatività generale, ma anche come ispirazione e motivazione per una nuova generazione di pensatori che oseranno coraggiosamente esplorare i territori inesplorati della cosmologia. Che possa favorire un più profondo apprezzamento della complessa bellezza del nostro universo e della continua ricerca di comprensione che ci anima come scienziati e come esseri umani.

Nel campo dinamico e in costante evoluzione della cosmologia, questo modello emerge come una luce guida essenziale, che illumina il cammino verso territori inesplorati e nuove prospettive. Questo viaggio è tutt'altro che concluso, anzi, rappresenta un invito continuo all'esplorazione e alla scoperta.

## Bibliografia

- Adler, R., R. Bazin e M. Schiffer. 1975. *Introduzione alla relatività generale*. McGraw-Hill.
- Akiyama, K. et al. 2019. "Primi risultati del telescopio dell'orizzonte degli eventi di M87. I. L'ombra del buco nero supermassiccio". *The Astrophysical Journal*.
- Akiyama, K. et al. 2022. "Primi risultati del telescopio Sagittarius a\* Event Horizon. I. L'ombra del buco nero supermassiccio al centro della Via Lattea".
- Anderson, E. K. et al. 2023. "Osservazione dell'effetto della gravità sul moto dell'antimateria". *Nature*.
- Bargmann, V., P. G. Bergmann e A. Einstein. 1941. "Sulla rappresentazione a cinque dimensioni della gravitazione e dell'elettricità". *Theodore von Karman Anniversary Volume*, 212.
- Benoit-Lévy, A. e G. Chardin. 2012. "Introduzione all'universo di Dirac-Milne". *Astronomia e Astrofisica* 537: A78.
- Bergmann, P. 1942. *Introduzione alla teoria della relatività*. Prentice-Hall.
- Bergmann, P. e A. Einstein. 1938. "Su una generalizzazione della teoria dell'elettricità di Kaluza". *Annali di matematica* 39: 683.
- Bondi, H. 1957. "La massa negativa nella relatività generale". *Reviews of Modern Physics* 29 (3).
- Bourbaki, N. 2006. *Eléments de Mathématique: Groupes Et Algèbres de Lie*. Springer.
- Boylan-Kolchin, Michael. 2023. "Stress test.  $\Lambda$ CDM con galassie candidate ad alto spostamento". *Nature*.
- Brennen, C. E. 1995. *Cavitazione e dinamica delle bolle*. Oxford University Press.
- Chandrasekhar, S. 1983. *La teoria matematica dei buchi neri*. Clarendon Press.
- Chaskalovic, Joël. 2009. "La teoria della gravitazione per la modellazione matematica nel geomarketing". *Journal of Interdisciplinary Mathematics* 12 (3): 417.
- Cronin, J. W. 1964. "La scoperta sperimentale della violazione di CP". *American Physical Society*.
- Damour, T. e Ian I. Kogan. 2002. "Lagrangiani effettivi e classi di universalità della bigravità non lineare". *Phys. Rev. D*.
- Debergh, N. et al. 2018. "Sull'evidenza di energie e masse negative nell'equazione di Dirac attraverso un operatore unitario di inversione temporale".

Dyson, F. W., A. S. Eddington e C. Davidson. 1920. "Determinazione della deflessione della luce da parte del campo gravitazionale del Sole, da osservazioni effettuate durante l'eclissi totale del 29 maggio 1919". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 291-333.

Eddington, A. 1925. "Un confronto con le formule di Whitehead e di Einstein". *Nature*.

Einstein, A. e N. Rosen. 1935. "Il problema delle particelle nella teoria generale della relatività". *Phys. Rev.* 48: 73.

El-Ad, H., T. Piran e L. N. da Costa. 1997. "Mon. Not. R. Astro. Soc."

Farnes, J. S. 2017. "Una proposta per una teoria unificante dell'energia oscura e della materia oscura". *arXiv Physics.gen-Ph*.

Ferreira, Leonardo e altri. 2022. "Panico! At the Disks: First Rest-Frame Optical Observations of Galaxy Structure at  $z>3$  with JWST in the SMACS0723 Field". *The Astrophysical Journal Letters*.

Flamm, L. 1916. "Contributi alla teoria della gravitazione di Einstein".

Heald, G. 2020. "Il caso più forte della repulsione gravitazionale tra materia e antimateria". *Research Gate Publication*, n. 339339776.

Hoffman, Y. et al. 2018. "L'Universo quasi lineare vicino". *Nature Astronomy*.

Hoffman, Y., D. Pomarède, R. B. Tully e H. Courtois. 2017. "Il respingente di dipolo". *Nature Astronomy* 1: 0036.

Hossenfelder, S. 2008. "Una teoria bimetrica con simmetria di scambio". *arXiv*.

Kaluza, Th. 1921. "Sul problema dell'unificazione in fisica". *Sitzungsberichte Pruss. Acad. Sci.* 966.

Kerr, Roy P. 1963. "Il campo gravitazionale di una massa rotante come esempio di metrica algebrica speciale". *Physical Letters* 11: 237.

Klein, O. 1926. "Teoria quantistica e teoria della relatività a cinque dimensioni". *Z.Phys.* 37: 895.

Koiran, P. 2021. "Tempo di caduta nella metrica di Eddington-Finkelstein, con applicazione ai ponti di Einstein-Rosen". *Inter. Jr. Of Mod. Fisica. D* 14.

Kruskal, M. D. 1960. "Estensione massima della metrica di Schwarzschild". *Physical Review* 119 (5).

Kruskal, Martin D. 1960. "Estensione massima della metrica di Schwarzschild". *Physical Review* 119: 1743-45.

Medeiros, L. et al. 2023. "Principal-Component Interferometric Modeling (PRIMO), un algoritmo per i dati EHT. I. Ricostruzione di immagini da osservazioni EHT simulate".

Michelson, A. A. e E. W. Morley. 1887. "Sul moto relativo della Terra e dell'Etere Luminoso". *American Journal of Science* 34: 333-45.

Morin, Bernard e Jean-Pierre Petit. 1978. "Le Retournement de La Sphère". HAL.

Morris, M. e K. S. Thorne. 1988. "I wormhole nello spaziotempo e il loro uso per i viaggi interstellari: uno strumento per l'insegnamento della relatività generale". *Am. J. Phys.* 56: 395.

Neiser, T. F. 2020. "Modello di stella antineutrino degenerata di Fermi dell'energia oscura". *Advances in Astronomy* 2020: Article ID 8654307.

Oppenheimer, J. R. e H. Snyder. 1939. "Sulla contrazione gravitazionale continua". *Phys. Rev.* 56: 455-59.

Oppenheimer, J. R. e G. M. Volkoff. 1939. "Sui nuclei massivi di neutroni". *Physical Review* 55 (4): 374-81.

Palatini, A. 1919. "Deduzione Invariantiva Delle Equazioni Gravitazionali Dal Principio Di Hamilton". *Rend. Circ. Matem. Palermo* 43: 203-12. <https://doi.org/10.1007/BF03014670>.

Pavlovskii, A. I. 1994. "La cumulazione magnetica: una memoria per Andrei Sakharov". In *Megagauss Magnetic Field Generation and Pulsed Power Applications*, a cura di M. Cowan e R. B. Spielman, 9-22. New York: Nova Science Publishers.

Perlmutter, S. et al. 1999. "Misure di  $\Omega$  e  $\Lambda$  di 42 supernove ad alto redshift". *Astrophysical Journal* 517 (2).

Petit, Jean-Pierre . 1985. *Le Topologicon*. Edizione Belin.

Petit, Jean-Pierre. 1994. "Il problema della massa mancante. *IL NUOVO CIMENTO*.

Petit, Jean-Pierre. 1995. "Cosmologia degli universi gemelli". *Astrofisica e scienza dello spazio* 226: 273-307.

Petit, Jean-Pierre. 2018. "Il modello cosmologico di Giano e le fluttuazioni della CMB". *Progress in Physics*.

Petit, Jean-Pierre e G. D'Agostini . 2021a. "Modelli bimetrisi. Quando la massa negativa sostituisce sia la materia oscura che l'energia oscura. Ottimo accordo con i dati osservativi. Risolvere il problema dell'antimateria primordiale". *Banca dati del Centro Nazionale Francese*, 2021a.

Petit, Jean-Pierre e G. D'Agostini. 2021b. "Vincoli sul modello cosmologico di Giano da recenti osservazioni di supernovae di tipo Ia". *Astrofisica e scienze spaziali*, 2021b.

Petit, Jean-Pierre e G. D'Agostini. 2014a. "Modello cosmologico bimetrico con masse positive e negative interagenti e due diverse velocità della luce, in accordo con l'accelerazione osservata dell'universo". *Modern Physics Letters A* 29 (34).

- Petit, Jean-Pierre e G. D'Agostini. 2014b. "L'ipotesi della massa negativa in cosmologia e la natura dell'energia oscura". *Astrophysics And Space Science* 354 (2014b): 611-15.
- Petit, Jean-Pierre e G. d'Agostini. 2014. "Modello cosmologico bimetrico con masse positive e negative interagenti e due diverse velocità della luce, in accordo con l'accelerazione osservata dell'universo". *Lettere di Fisica Moderna A*.
- Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini e N. Debergh . 2018. "Evidenza di energie e masse negative nell'equazione di Dirac attraverso un operatore di inversione temporale unitario". *J. Phys. Comm.* 2 (115012).
- Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini e N. Debergh. 2019. "Consistenza fisica e matematica del modello cosmologico di Giano (JCM)". *Progress in Physics* 15.
- Piran, Tsvi. 2018. "Sulla repulsione gravitazionale". *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/9706049>.
- Riess, A. et al. 2004. "Scoperte supernove di tipo Ia a  $z > 1$  dal telescopio spaziale Hubble, prove di decelerazione passata e vincoli sull'evoluzione dell'energia oscura". *Astrophysical Journal* 607 (2).
- Sakharov, A. D. 1967 . "Violazione dell'invarianza CP, dell'asimmetria C e dell'asimmetria barionica dell'universo". *Pi'sma ZhÉTF* 5 (1): 32-35.
- Sacharov, A. D. 1979. "ZhETF Pis'ma". *JETP* 49: 594.
- Sacharov, A. D. 1980. "Modelli cosmologici dell'universo con inversione della freccia del tempo". *Pi'sma ZhÉTF* 79 (3): 689-93.
- Sacharov, A. D. 1982. "Modelli multifoglio dell'universo". *Pi'sma ZhÉTF* 82 (3): 1233-40.
- Schmidt, B. P. et al. 1998. "La ricerca di supernove ad alto zeta. Misurare la decelerazione cosmica e la curvatura globale dell'universo usando le supernove di tipo Ia". *Astrophysical Journal* 507 (1).
- Schwarzschild, K. 1916a. "Über Das Gravitationsfeld Einer Kugel Aus Inkompressibler Flüssigkeit Nach Der Einsteinschen Theorie". *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.
- Schwarzschild, K. 1916b. "Über Das Gravitationsfeld Eines Massenpunktes Nach Der Einsteinschen Theorie". *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.
- Souriau, J. M. 1964. *Geometria e relatività*. Hermann.
- Souriau, J. M. 1997. *Struttura dei sistemi dinamici, una visione simplettica della fisica*. Birkhäuser Verlag.
- Souriau, Jean-Marie. 1965. "Prolungamenti del campo di Schwarzschild". *Bulletin de La Société Mathématique de France* 93: 193-207.

Stoica, O. C. 2014. "Sui manifesti semi-riemanniani singolari". *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 11.

Thorne, K. S., J. A. Wheeler e C. W. Misner. 1973. *Gravitazione*.

Tolman, R. 1934. *Relatività, termodinamica e cosmologia*. Oxford, Clarendon Press.

Tsamparlis, Michael. 1978. "Sul metodo di variazione di Palatini". *Journal of Mathematical Physics* 19 (3): 555-57.

Vuyk, V. 2018. "Una quinta forza respingente di dipolo nel vuoto, necessaria per creare tutte le forze di attrazione anche intorno ai buchi neri nella teoria quantistica FFF". *Research Gate Publication*, n. 325995732.

Wald, R. 1984. *Relatività generale*.

Weinberg, S. 2000. *La teoria quantistica dei campi: Volume 1, Fondamenti. Volume 2, Applicazioni moderne. Volume 3, Supersimmetria*. Vol. 1-3. Cambridge University Press.