

Annexe 1

LE POLYÈDRE DE DIEU

La science de notre temps est médiatisée à l'extrême. Dès qu'on évoque une idée, un projet, il faut vite lui accoler un mot racoleur qui parle à l'imaginaire des gens. Il y a cinquante ans, l'objet dont on imaginait qu'il puisse décrire le destin d'une étoile à neutrons dont la masse, du fait des apports dûs au vent stellaire émis par une étoile compagne, puisse excéder la valeur critique de 2,5 masses solaires s'appelait CORPS DE SCHWARZSCHILD (*). Pas vendeur pour un sou. Le mot COLLAPSAR n'eut guère plus de succès. Mais quand John Archibald Wheeler proposa TROU NOIR le succès fut immédiat et planétaire. Même choix pour la TOE (théorie du tout = theory of everything), la THÉORIE M des gens des SUPERCORDES. En ce moment, nos modernes ploutophysiciens (de ploutos qui, en Grec, signifie « cher ») traquent le boson de Higgs, déjà surnommé LA PARTICULE DE DIEU.

Pour sacrifier un instant à cette mode imbécile et vous faire sourire un peu, voici le polyèdre qui n'a qu'une seule face et une seule arête. On rappelle que edra, en grec signifie face, donc :

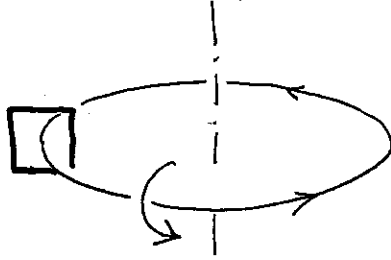
Voici donc le MONOÈDRE le ... « POLYÈDRE DE DIEU »

La Direction

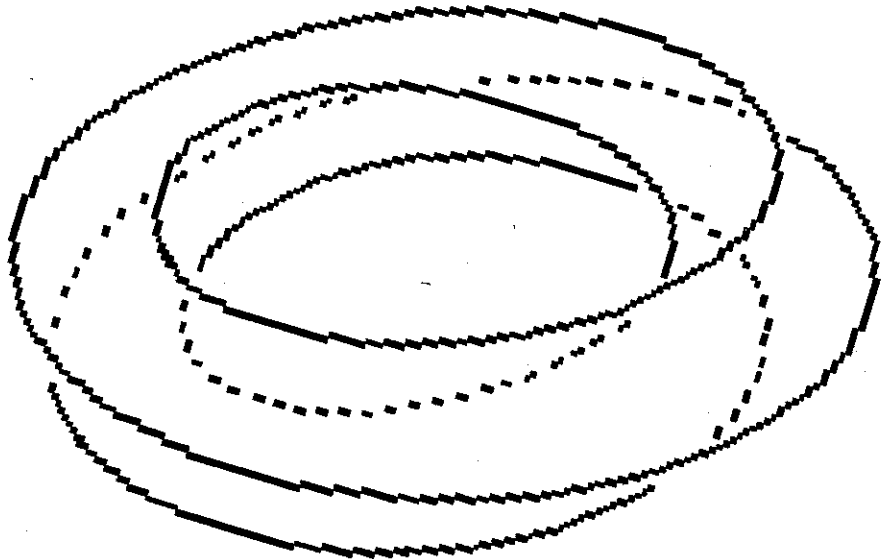
(*) Le modèle du « trou noir » repose sur un bricolage d'une solution de l'équation d'Einstein, due à Schwarzschild (1917) se référant à une région de l'univers VIDE. Nous en reparlerons dans un futur album.

LE MONOÈDRE

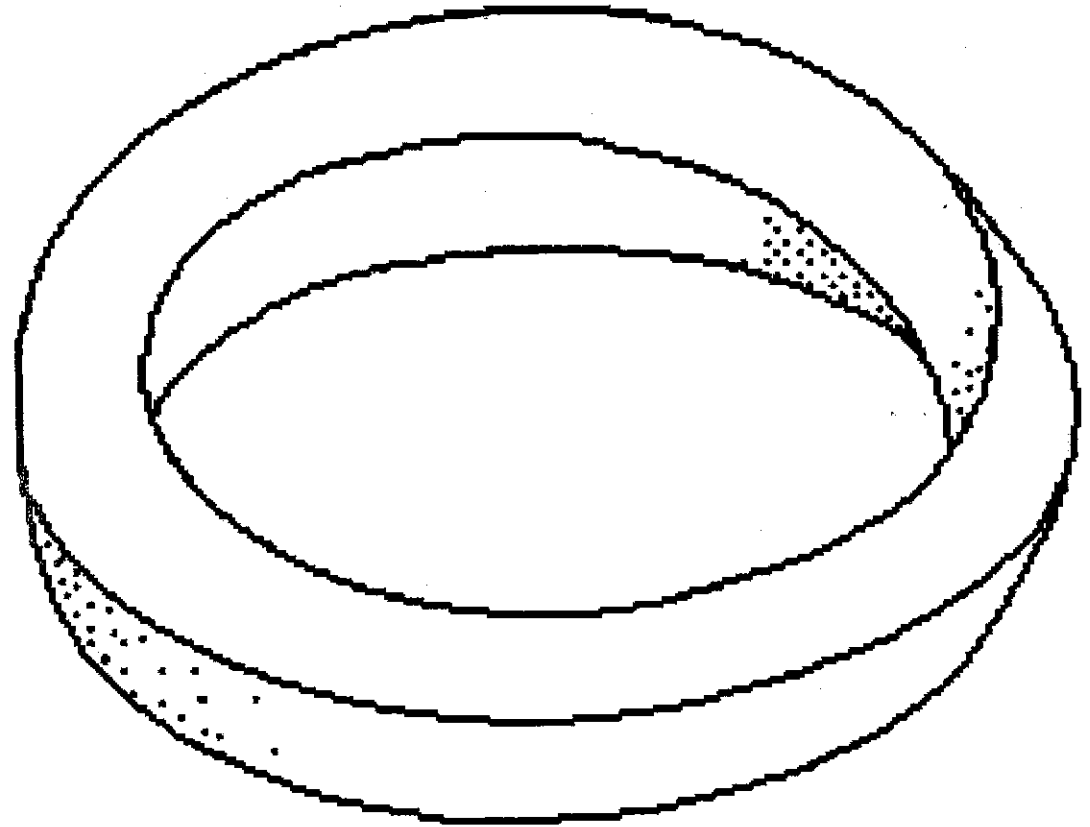
On peut l'engendrer en faisant tourner un carré autour d'un axe contenu dans son plan et en lui imprimant une rotation de $\pi/2$ à chaque tour.



... ou en épaississant un ruban de Möbius



SON ARÊTE UNIQUE

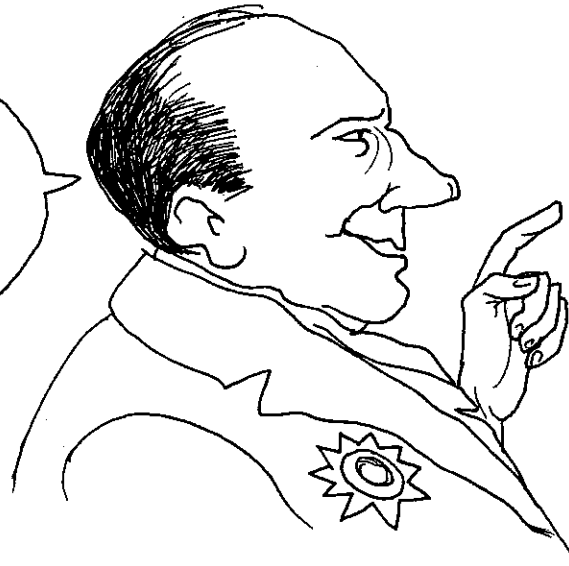


ANNEXE 2

ESPACE-TEMPS & GROUPES

En 1850, Mikhaïl Valisevich Ostrogradsky à Bernhard Riemann

Écoutez, mon cher, pourquoi consacrer tant d'efforts pour explorer ces espaces biscornus, issus de votre imagination, alors que l'espace où nous vivons est bêtement euclidien ?

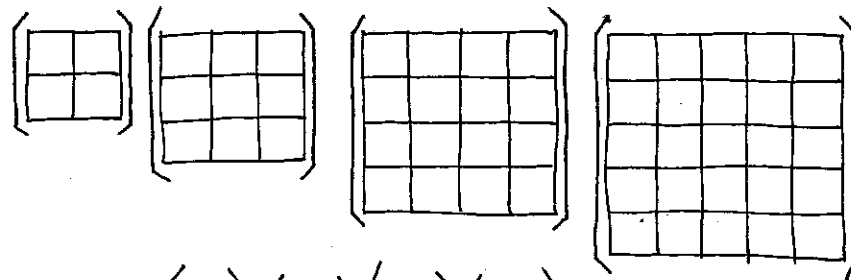


Le temps a passé.

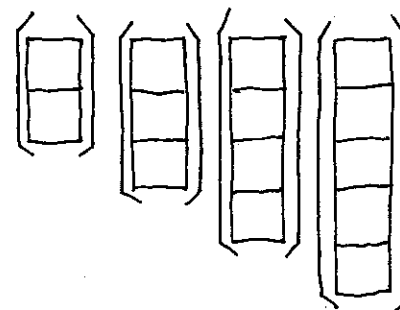
L'évolution permanente de la science montre que tout passe, à chaque fois, par l'abandon de quelque vision naïve issue de nos sens. Les faits nous montrent que les mathématiciens, et spécialement les géomètres ont eu sans cesse une vision des choses que s'est révélée plus proche des expériences des physiciens et des observations des astronomes que des visions antérieures vouées à la désuétude. En maniant de nouveaux concepts, par le jeu du papier-crayon, il fabriquent, peut-être sans s'en rendre compte la réalité de demain. Pour comprendre par exemple la RELATIVITÉ RESTREINTE il va vous falloir opérer un véritable LÂCHER PRISE au plan de votre vision du monde.

Êtes-vous prêt(e) à me suivre ?

La lettre M désignera une MATRICE carrée (n lignes, n colonnes)

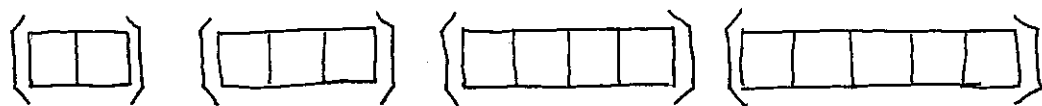


Un VECTEUR COLONNE est une matrice à n lignes et 1 colonne:



etc...

Un VECTEUR LIGNE est une MATRICE à 1 ligne et n colonnes:



etc...

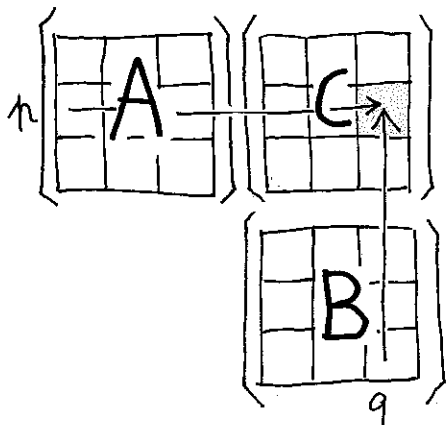
MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES CARRÉES DE MÊME FORMAT

(possédant le même nombre de lignes = nombre de colonnes)

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B$$

on multiplie "LIGNES-COLONNES"



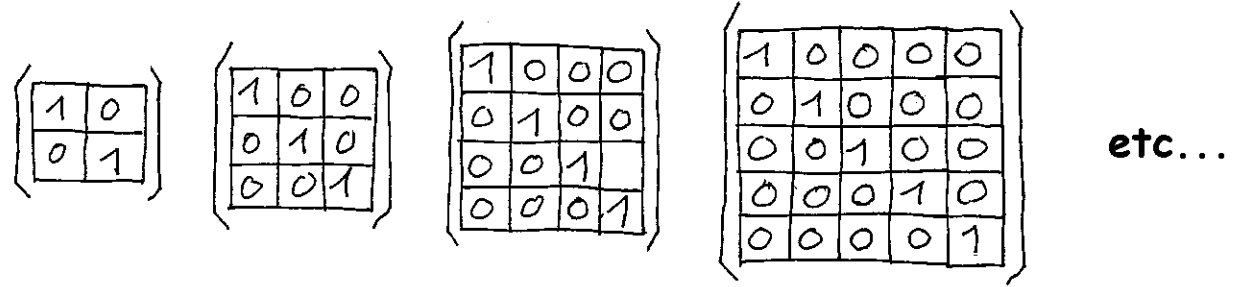
moyen mnémotechnique: on dispose les deux matrices A et B du PRODUIT MATRICIEL $A \times B$ comme ci-contre et on multiplie termes à termes, en les additionnant les termes de la ligne p de la matrice A par les termes de la colonne q de la matrice B . On obtient ainsi le terme de la matrice $C = A \times B$ situé sur sa $p^{\text{ième}}$ ligne et sa $q^{\text{ième}}$ colonne.

FONDAMENTAL: CE PRODUIT N'EST PAS, EN GÉNÉRAL, COMMUTATIF

$A \times B \neq B \times A !$

MATRICES UNITÉ I

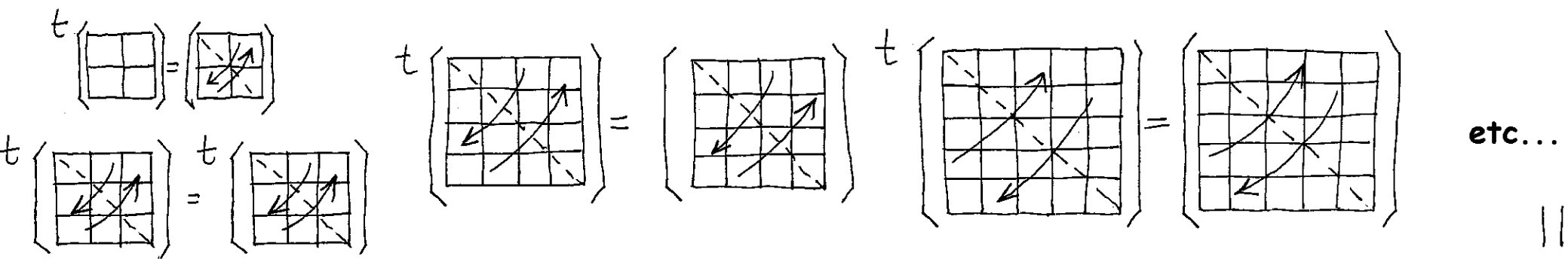
À tout ensemble de matrices carrées à n lignes, n colonnes [on dit "de format (n,n)]
on associe des matrices unité, notées par la lettre I



On a:
 $A \times I = I \times A = A$

TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE, NOTÉE tA

C'est le symétrique du tableau carré par rapport à sa DIAGONALE PRINCIPALE.



ON POSERA que la transposée d'un vecteur, d'une matrice colonne :

$$X = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

est la matrice-ligne correspondante :

$${}^t X = \left(\square \square \square \square \right)$$

MULTIPLICATION D'UNE MATRICE COLONNE OU LIGNE PAR UNE MATRICE CARRÉE

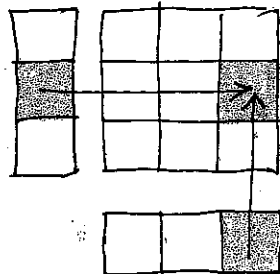
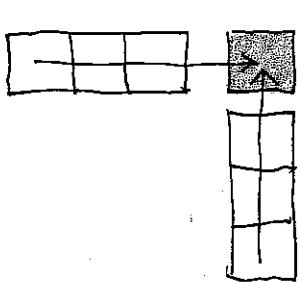
Pour la matrice colonne, MULTIPLICATION À GAUCHE :

$$A \times X = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Pour la matrice ligne, MULTIPLICATION À DROITE :

$$A \times {}^t X = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \times \left(\square \square \square \square \right)$$

PRODUITS D'UNE MATRICE COLONNE \Leftrightarrow ET D'UNE MATRICE LIGNE



${}^t X \times X =$ matrice à 1 ligne, 1 colonne = SCALAIRE

$X \times {}^t X =$ matrice carrée de format (n,n)

alors, un scalaire est une matrice à une seule ligne et une seule colonne !?!

bref, quand on va dans une épicerie, on multiplie et on additionne des matrices

et on ne nous disait rien!

$$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

Un NOMBRE COMPLEXE (a,b) ou $a + ib$ est en fait la matrice carrée:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

et le nombre imaginaire i c'est

$$i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i \times i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

Alors que LES MATRICES et le CALCUL MATRICIEL sont des éléments essentiels à la compréhension de notre physique et de nos mathématiques, leur enseignement est partout tombé en ... désuétude!

les matrices carrées peuvent posséder un INVERSE, noté A^{-1} tel que :

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$$

Un premier théorème, sans démonstration :

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

Un second théorème, sans démonstration :

$${}^t(A \times B) = {}^t B \times {}^t A$$

les démonstrations sont faciles, mais sans grand intérêt (si le coeur vous en dit...)

avec cet outillage, nous allons pouvoir nous rendre aux avant-postes de la science

attention, le voila qui revient!

mais... ça n'est pas la bonne direction !?!



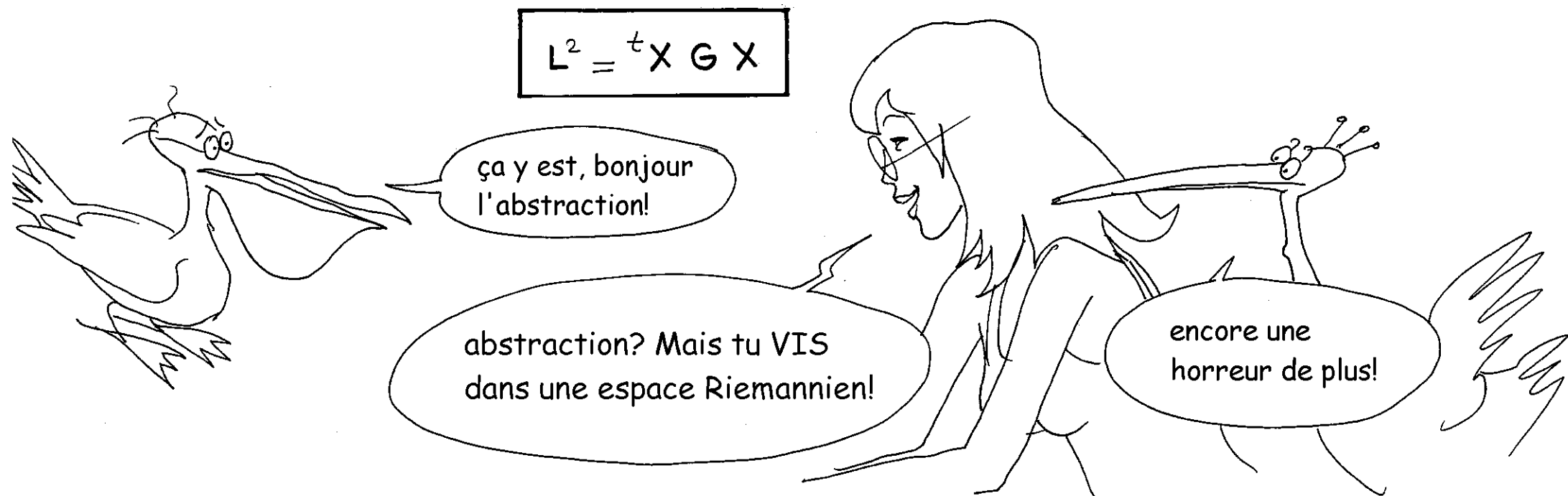
ESPACES RIEMANNIENS (*)

on appellera MATRICES DE GRAM des matrices carrées dont les termes non diagonaux sont nuls et dont les termes de la DIAGONALE PRINCIPALE valent ± 1

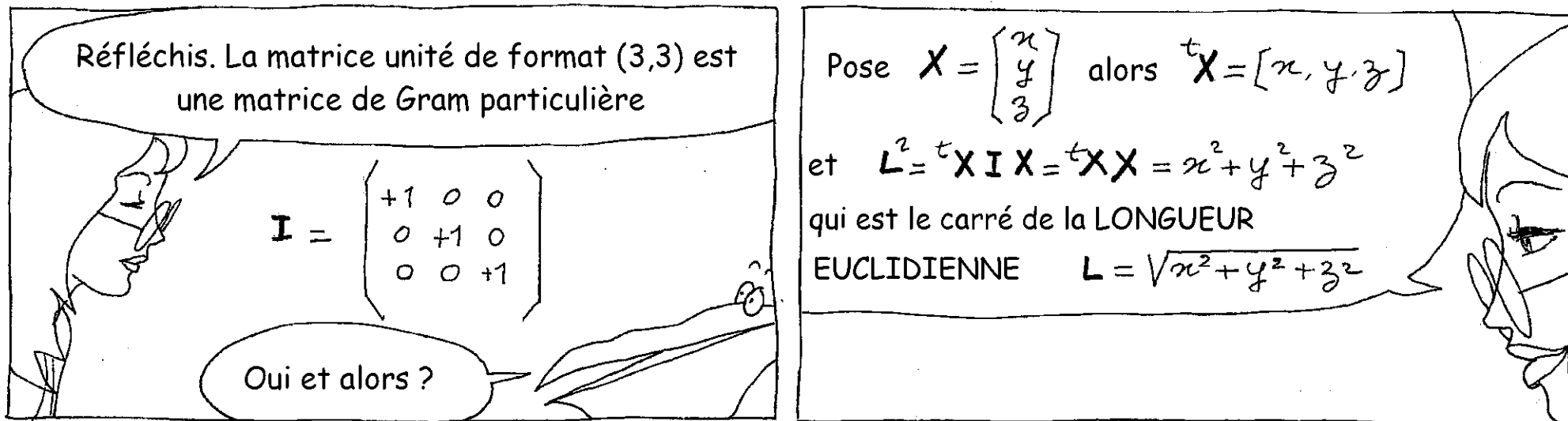
$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ etc...}$$

Soit un vecteur X appartenant à un espace \mathcal{E} , à n dimensions. On dira que cet espace est RIEMANNIEN si le carré de la longueur du vecteur X se définit par :

$$L^2 = {}^t X G X$$



(*) les mathématiciens ne sont pas tous d'accord sur la terminologie. Disons que nous décidons de regrouper sous cette appellation les espaces ayant une signature constituée par des signes ± 1



SIGNATURE

La Signature de ces espaces est la suite des signes de la métrique de Gram. Dans le cas de l'espace euclidien à trois dimensions c'est $(+ + +)$

Dans un espace à deux dimensions la matrice de Gram correspondant à un espace euclidien serait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la signature $(+ +)$

Nous allons maintenant nous poser la question suivante: existe-t-il un ensemble de matrices M qui, agissant sur le vecteur $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ préservant sa longueur ?

Nous allons effectuer de manière formelle le calcul dans le cas le plus général, celui d'un espace riemannien à n dimensions défini par sa matrice de Gram G .

Soit M une matrice agissant sur le vecteur X en le transformant en un vecteur :

$$X' = MX$$

le carré de la longueur, de la norme du vecteur X' est

$$L'^2 = {}^t X' G X' = {}^t (MX) G (MX) = ({}^t X {}^t M) G (MX) = {}^t X ({}^t M G M) X$$

les longueurs L' et L seront égales si :

$${}^t M G M = G$$

Appliquons cela à un espace euclidien de dimension n :

$${}^t M M = I$$

Ce qui signifie tout simplement que :

$$M^{-1} = {}^t M$$

On qualifie ces matrices d'orthogonales. Nous allons expliciter dans le cas 2d

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad ; \quad c^2 + d^2 = 1 \quad ; \quad ac + bd = 0$$

On cherche les matrices $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ qui satisfont ces relations.

Ces matrices M forment un ensemble \mathcal{M}

Nous allons voir qu'elles forment un

GROUPE

Voilà le mot magique de la physique qui lâché. Mais qu'est-ce qu'un groupe ?

C'est un ensemble de trucs qui agissent sur un ensemble de machins. En l'occurrence ici les trucs sont des MATRICES et les machins les points, ou les point d'un espace.

Souriau a coutume de dire :

- Un groupe c'est fait pour transporter.
- La façon de transporter vaut mieux que ce que l'on transporte.

Dans la BD on avait lu "dis-moi comment tu te meus, je te dirai QUOI tu es"

Là, on pourrait dire :

Dit moi comment tu te laisses transporter et je te dirai à quelle famille d'être géométriques tu appartiens. Bref, dans quel espace tu habites.

D'où la relation étroite GROUPE \Leftrightarrow GÉOMÉTRIE

les axiomes qui définissent un groupe ont été introduit par le Norvégien Sophus Lie.
on appelle aussi les groupes de matrices des GROUPES DE LIE. Passons aux Axiomes.

- Soit un ensemble de machins agissant les un sur les autres - Appelons les $\alpha, \beta, \gamma \dots$

Ils forment un ensemble \mathcal{E}

- On peut les composer à travers une LOI DE COMPOSITION qu'on écrira $\gamma = \alpha \circ \beta$

1 : si α et β appartiennent à l'ensemble, $\alpha \circ \beta$ appartient aussi à l'ensemble
on dit que cette loi de composition est INTERNE (au groupe \mathcal{E})
(les chiens ne font pas des chats)

2 : Il existe un élément, appelons-le e , dit ÉLÉMENT NEUTRE, tel que pour tout élément α du groupe, on ait $e \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha$

3 : Tout élément α possède un RÉCIPROQUE, noté α^{-1} tel que :

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = e$$

4 : L'opération de composition est associative, c'est à dire que :

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

on ne se servira pratiquement JAMAIS de ce quatrième axiome. En effet il est au contraire très difficile de trouver des opérations de composition NON-ASSOCIATIVES

Le physicien ne travaillera QUE sur des GROUPES DE MATRICES appelés aussi GROUPE DE LIE.

- On aura des ENSEMBLES DE MATRICES CARRÉES M

- L'opération de composition o sera la MULTIPLICATION MATRICIELLE $M_1 \times M_2$
NON-COMMUTATIVE

- L'élément neutre e sera systématiquement la matrice unité I dans le format considéré (n,n)

GROUPES DISCRETS

On appelle ainsi des groupes (ici, de matrices) formant des ensembles à un nombre fini d'éléments
les matrices de Gram à 2 lignes, 2 colonnes forment un groupe à quatre éléments

$$g = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

accessoirement, elles sont identiques à leur inverse. Que représentent-elles ?

faisons les AGIR sur les vecteurs $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ d'un espace 2d

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \right. \text{symétrie par rapport à l'axe oy}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \right. \text{symétrie par rapport à l'axe ox}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \right. \text{symétrie par rapport à l'origine}$$

Nos conditions sont satisfaites: les symétries conservent les longueurs

GROUPE À 1 (ou plusieurs) PARAMÈTRES

Les matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ obéissent à nos critères et constituent le groupe des rotations du plan autour de l'origine.

C'est un groupe à 1 paramètre (l'angle θ)

jusqu'ici j'ai l'impression de comprendre.
Ça a l'air simple, somme toute, non ?

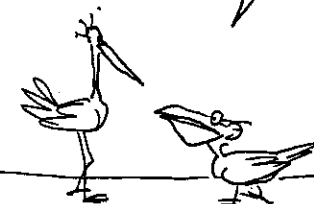
on dit ça. Mais avec l'auteur,
moi je me méfie. Ça commence simple,
mais soudain il vous fait fumer les
neurones, grave...

il y a des niveaux de réflexion ou le cerveau
devrait être équipé d'un fusible!

le nombre de paramètres est
appelé la DIMENSION DU
GROUPE, mais ça n'a rien à voir
avec la dimension de l'espace
sur lequel on le fera AGIR



le TOPOLOGICON, moi je ne m'en
suis jamais vraiment bien remis



Les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

forment un groupe nommé $SO(2)$, pour "spécial orthogonal"

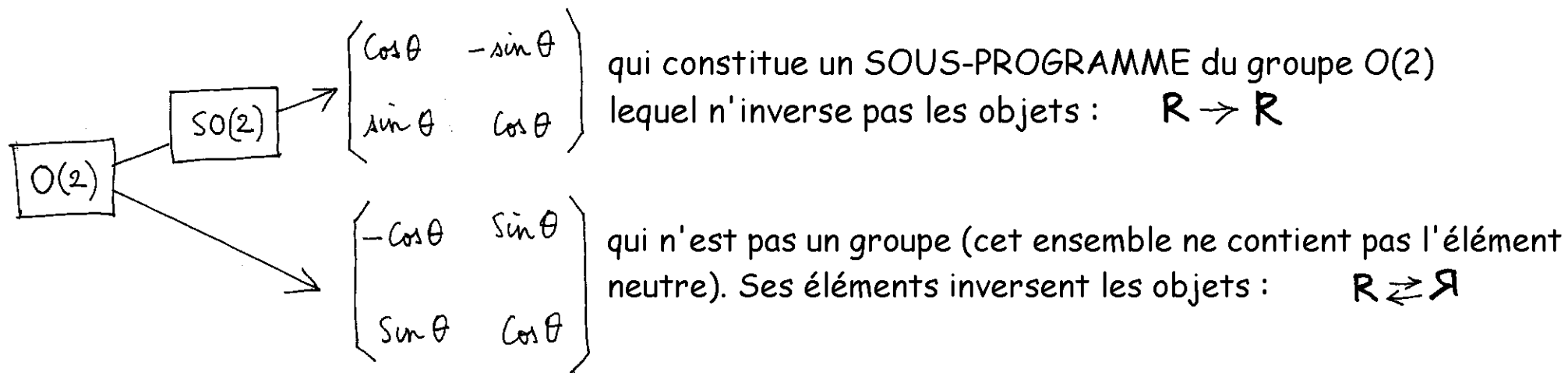
ORIENTATION

En multipliant cette matrice par une des deux matrices inversant les objets ($\mathbb{R} \rightleftharpoons \mathfrak{R}$)
comme par exemple celle qui opère une symétrie par rapport à l'axe oy on obtient:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

on remarquera que $\theta = \pi$ donne
la symétrie par rapport à l'axe ox

On obtient un second ensemble de matrices qui sont aussi des matrices orthogonale puisque obéissant à ${}^tMM = I$. La réunion de ces deux ensembles constitue le GROUPE ORTHOGONAL $O(2)$. On dira que ce groupe dont nous appellerons l'élément a a DEUX COMPOSANTES.



GROUPE D'ISOMÉTRIE

L'ensemble des actions conservant les longueurs, dans un espace à deux dimensions combinent :

- Rotations
- Symétries
- Translations

ce qui peut se traduire à l'aide de matrices :

$$\begin{array}{l}
 \boxed{E(2)} \rightarrow \boxed{SE(2)} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\theta - y \sin\theta + \Delta x \\ x \sin\theta + y \cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{R \rightarrow R} \\
 \boxed{E(2)} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \cos\theta + y \sin\theta + \Delta x \\ x \sin\theta + y \cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{R \rightleftharpoons R}
 \end{array}$$

on obtient le GROUPE D'EUCLIDE 2D $E(2)$ qui est le GROUPE D'ISOMÉTRIE de l'espace EUCLIDIEN À DEUX DIMENSIONS. Sa première COMPOSANTE $SE(2)$ ("Spécial Euclide 2d") forme un SOUS-GROUPE. La seconde est un ensemble de matrices QUI INVERSENT LES OBJETS, mais ne constitue pas un groupe.

En 2d il est possible d'expliciter complètement les calculs. Ce qui a été fait en 2d peut être étendu en 3d. La matrice de Gram est la matrice unité 3d

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le carré de la longueur est $L^2 = {}^t \mathbf{X} \mathbf{I} \mathbf{X}$ la signature: $(+ + +)$

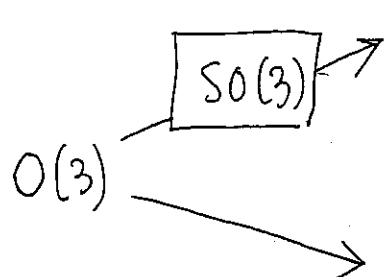
Soit une matrice M agissant sur le vecteur X selon $\mathbf{X} = M \mathbf{X}'$

La conservation de la longueur conduit à $L'^2 = {}^t \mathbf{X}' \mathbf{I} \mathbf{X}' = {}^t (M \mathbf{X}) (M \mathbf{X}) = {}^t \mathbf{X} ({}^t M M) \mathbf{X}$

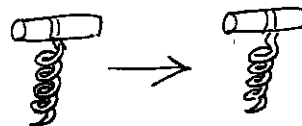
$L' = L$ si:

$${}^t M M = \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad M^{-1} = {}^t M$$

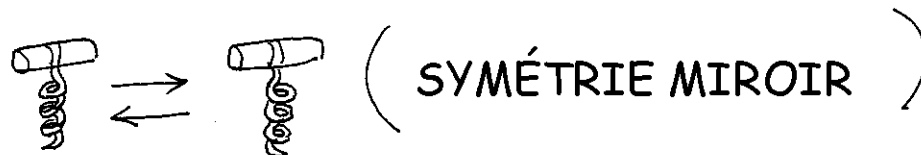
Les matrices jouissant de cette propriété, qui sont des matrices carrées (3,3) sont dites ORTHOGONALES et constituent le GROUPE ORTHOGONAL $O(3)$ qui possède DEUX COMPOSANTES :



N'inverse pas les objets 3D



Inverse les objets 3D



En ajoutant le vecteur translation

$$c = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

On construit le groupe d'Euclide 3D $E(3)$ qui hérite de la propriété du groupe orthogonal $O(3)$ autour duquel il est construit, dont on appellera l'élément a et qu'on écrira :

$$0 = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \Delta x \\ \hline & a & & \Delta y \\ \hline & (3,3) & & \Delta z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \quad \text{agissant sur} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

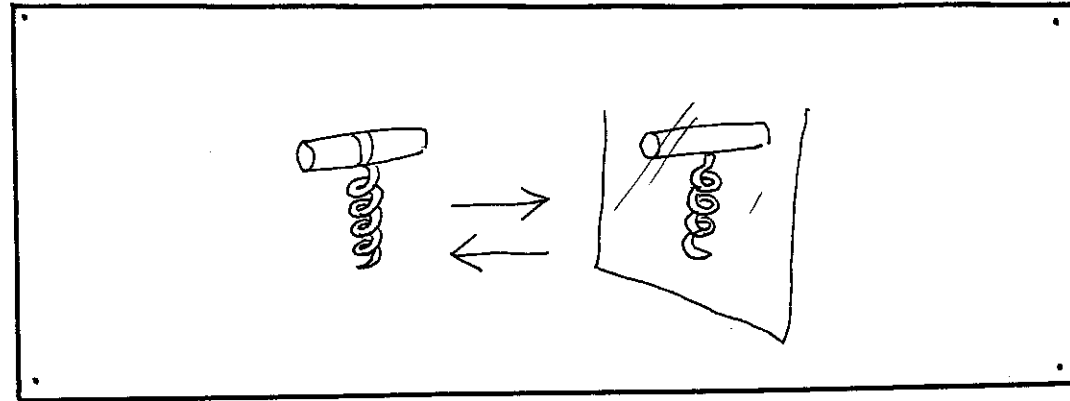
cette ACTION, écrite sous forme matricielle permet aux éléments du groupe d'Euclide 3D $E(3)$ d'agir sur les vecteurs X diffère des multiplications matricielles habituelles du genre

$$X' = MX$$

qui n'est qu'une forme d'ACTION parmi d'autres. Le concept d'action est essentiel et nous nous en resserrirons par la suite.

La moitié des matrices constituant le groupe d'Euclide transforme les objets orientables (le tire-bouchon) en leur image en miroir. On dira qu'ils opèrent

une P-SYMÉTRIE
ou "symétrie de parité"



QUAND LES MATHÉMATICIENS INVENTENT LES MIROIRS

C'est là que le mathématicien précède le physicien pour certaines démarches. Après avoir pratiqué les rotations et les translations le mathématicien invente la notion de groupe, les matrices de Gram, construit le SOUS-GROUPE $SE(3)$, qui n'inverse pas les objets en les TRANSPORTANT PHYSIQUEMENT. Mais le groupe secrète des éléments que le simple transport physique ne peut créer. En combinant rotations et translations on ne pourra jamais créer un TIRE-BOUCHON GAUCHE à partir d'un TIRE-BOUCHON DROIT. Or le groupe complet prédit "l'existence" de tels objets, habitant "de l'autre côté du miroir, ÉNANTIOMORPHES"



ainsi donc, nous pensons habiter dans un espace RIEMANIEN ELLIPTIQUE, ou ESPACE EUCLIDIEN 3d, de signature (+ + +) qui nous donne entre autre le THÉOREME DE PYTHAGORE. Mais quid d'espaces à signature (- - -) ?

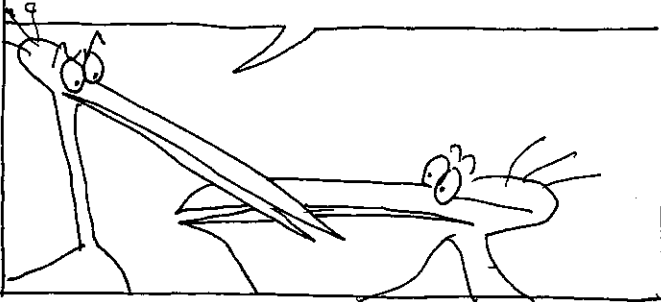


on les appelle IMPROPREMENT EUCLIDIENS. Les longueurs sont IMAGINAIRES PURES:

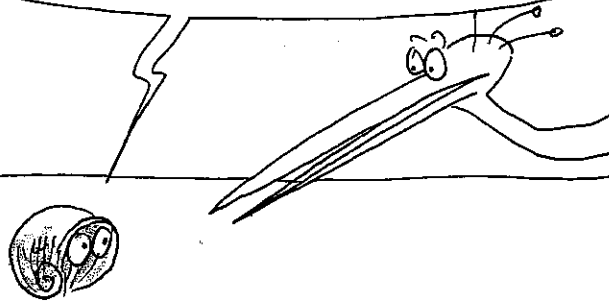
$$L = \sqrt{-x^2 - y^2 - z^2}$$

on reviendra à la fin de tout cela sur d'étranges espaces-temps où le temps est imaginaire pur

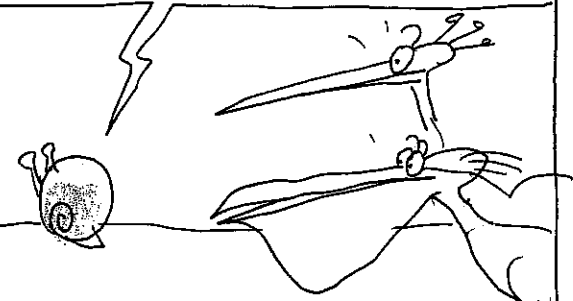
là, il ne faut pas exagérer. Un temps imaginaire pur ne peut-être que le produit de l'imagination



oui, mais l'imagination c'est QUOI ?

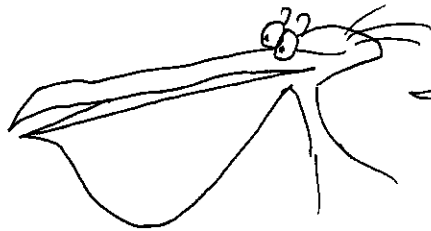


objets mathématiques, avez-vous donc une âme ?



ESPACE RIEMANNIENS HYPERBOLIQUES

Ce sont ceux dont la SIGNATURE comporte des signes + et des signes -. L'émergence de la THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE a simplement consisté à réaliser qu'au lieu de vivre dans un espace euclidien de signature (+ + +): une HYPERSURFACE 3d perpendiculaire au temps, nous vivons dans un espace riemannien hyperbolique, de signature (+ - - -), L'ESPACE DE MINKOWSKI



Tirésias, comment pouvez-vous préférer de pareilles horreurs ?

La matrice de GRAM est alors

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

changeons de lettre pour désigner un vecteur de l'espace-temps :

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on définira un vecteur translation spatio-temporelle qu'on écrira :

$$C = \Delta \xi = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

On considérera des vecteurs infinitésimaux :

$$d\xi = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

On obtiendra alors (en faisant c , vitesse de la lumière, = 1) la longueur infinitésimale :

$$ds^2 = {}^t d\xi G d\xi = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

qu'on appellera MÉTRIQUE (de MINKOWSKI) et qu'on pourra écrire avec un simple changement de variables :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nous allons procéder comme nous l'avons fait pour le groupe d'Euclide et l'espace euclidien. Nous allons débiter par un espace-temps 2d :

$$\eta = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

où l'élément de longueur, sa métrique 2d est avec, comme métrique de Gram :

$$ds^2 = {}^t d\eta G d\eta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons construire le GROUPE D'ISOMÉTRIE de cet espace...

on va procéder comme on l'a fait pour l'espace euclidien. Abandonnons un instant la présentation sous forme différentielle. Nous allons rechercher un groupe de matrices L , agissant sur le vecteur ξ selon :

$$\xi' = L \xi$$

qui préserve cette étrange "longueur hyperbolique", c'est à dire telle que :

$$L^T G L = G \quad \text{si :}$$

$$\boxed{L^T G L = G}$$

en 4d ce sont des matrices 4 lignes, 4 colonnes, de format (4,4). La formule ci-dessus est la définition du groupe (de matrices) de LORENTZ. Pour pouvoir expliciter, nous allons nous limiter à un espace-temps 2d (t,x)

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } a^2 - c^2 = 1 \quad ; \quad b^2 - d^2 = 1 \quad ; \quad ab - cd = 0$$

$$\text{ce qui nous fournit une première } \begin{pmatrix} ch\eta & sh\eta \\ sh\eta & ch\eta \end{pmatrix}$$

$$\text{puisque } ch^2\eta - sh^2\eta = 1$$

⇒ les lignes trigonométriques sont remplacées par les lignes hyperboliques

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \eta = \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2} \\ \operatorname{sh} \eta = \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right. \quad z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

le GROUPE DE LORENTZ est l'équivalent des rotations, dans l'espace de MINKOWSKI

GROUPE DISCRET

les matrices de Gram 2d sont des matrices de Lorentz, obéissant à

$${}^t L G L = G$$

${}^t G G G = G$ avec $G G = I$ et ${}^t G = G$, donc en 2d nous avons le groupe discret :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nous obtiendrons le groupe de Lorentz complet, à quatre composantes

$\begin{bmatrix} \operatorname{ch} \eta & \operatorname{sh} \eta \\ \operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \operatorname{ch} \eta & -\operatorname{sh} \eta \\ \operatorname{sh} \eta & -\operatorname{ch} \eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\operatorname{ch} \eta & \operatorname{sh} \eta \\ -\operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\operatorname{ch} \eta & -\operatorname{sh} \eta \\ -\operatorname{sh} \eta & -\operatorname{ch} \eta \end{bmatrix}$
--	--	--	--

sous-groupe orthochrone

sous-ensemble antichrone

RELATIVITÉ RESTREINTE

On a parlé RELATIVITÉ RESTREINTE. Mais la théorie d'Einstein c'est quoi ?



reprends le calcul de la LONGUEUR dans cet espace de Riemann hyperbolique qu'est L'ESPACE DE MINKOWSKI sous forme différentielle, donnée par la MÉTRIQUE :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

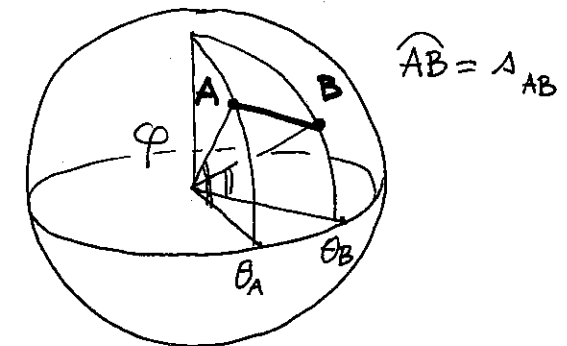
Cela veut dire que nos MOUVEMENTS SONT INSCRITS (*) sur une hypersurface 4d. Sur celle-ci (x,y,z,t) sont des COORDONNÉES. Dans PLUS RAPIDE QUE LA LUMIÈRE on explique que le plaquage d'un système de coordonnées sur cette hypersurface correspond à

la lecture faite par le PHYSICIEN de cette hypersurface où la seule grandeur INTRINSÈQUE est la longueur S. Il y a le même rapport entre ces coordonnées et cette longueur S, qui se mesure en MÈTRES et qu'on convertit en TEMPS PROPRE τ grâce à la relation $ds = c dt$ où c est une vitesse caractéristique qu'entre les coordonnées de longitude θ et de latitude φ utilisées pour repérer des points sur une sphère et la longueur du chemin parcouru \widehat{AB} . Ce que montre cette formule c'est que quand on se donne ces coordonnées (x,y,z,t) on peut en déduire une vitesse

$$V = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

Pour que le temps $d\tau$ reste réel il faut que $V < c$
le mouvement limite correspondra à $V = c$, et alors $d\tau = 0$

⇒ le temps propre du PHOTON est "gelé"



(*) en arabe: MEKTOUB

Pour les particules qui cheminent à $V < c$ s'opère la CONTRACTION DE LORENTZ

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

τ c'est le temps qu'indique la montre du passager cheminant à la vitesse V , ce qui est illustré dans l'album TOUT EST RELATIF. Et quand V tend vers c "le temps gèle dans les chronomètres". Mais revenons au GROUPE DE LORENTZ. Ses éléments agissent sur des suites de points de l'espace-temps qui constituent un MOUVEMENT. En faisant agir un élément L du groupe de Lorentz sur un mouvement donné on obtient un autre mouvement. Le fait que le groupe contienne des éléments ANTICHRONES montre que les mouvements À REBROUSSE-TEMPS doivent être pris en considération. À titre d'exemple voici une matrice qui appartient au groupe de Lorentz :

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^t L G L = G \quad \text{avec} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'action est :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

INVERSION DU TEMPS

Quand nous avons défini le GROUPE ORTHOGONAL, sous-groupe du groupe d'isométrie de l'ESPACE EUCLIDIEN, nous l'avons complété à l'aide du vecteur des TRANSLATIONS SPATIALES

$$C = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

en construisant le GROUPE D'EUCLIDE, son groupe d'isométrie

élément du groupe orthogonal $O(3)$

$$\begin{pmatrix} a & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De même, à partir du GROUPE DE LORENTZ nous allons bâtir le GROUPE DE POINCARÉ, groupe d'isométrie de l'espace de MINKOWSKI.

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{translations} \\ \text{spatio-temporelles} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{M} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le groupe de Poincaré, à travers son sous-groupe $\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hérite des propriétés du groupe de Lorentz et possède comme celui-ci quatre composantes :

- DEUX ORTHOCHRONES (n'inversant pas le temps)
- DEUX ANTICHRONES (inversant le temps)

Il nous reste à comprendre la SIGNIFICATION PHYSIQUE de cette inversion temporelle

ESPACE, GROUPE ET OBJETS

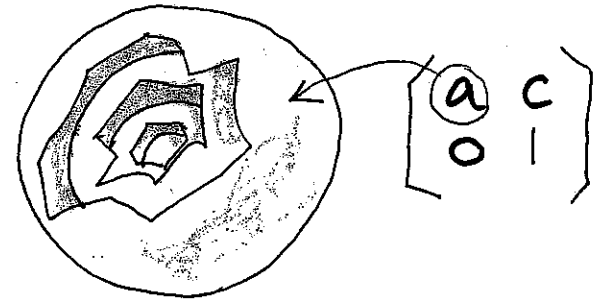
On est parti de l'espace euclidien et on s'est mis en 2d pour pouvoir expliciter les calculs. On a alors construit son GROUPE D'ISOMÉTRIE, le GROUPE D'EUCLIDE. Celui-ci accompagne donc l'espace euclidien et permet d'AGIR sur les objets, des points habitant dans cet espace. Mais on peut prendre le problème à l'envers: se donner le groupe, en tant qu'objet abstrait, purement mathématique, permettant d'envisager des ACTIONS et découvrir "l'espace qui va avec", le seul où ces actions peuvent être réalisées - "l'espace qui va bien", en quelque sorte. Ainsi l'espace et son groupe (d'isométrie) se confèrent-ils mutuellement leur existence.

Mais il y a plus encore - le groupe engendre les OBJETS de l'espace auquel il est lié en tant qu'INVARIANTS PAR L'ACTION D'UN SOUS-GROUPE. Donnons un exemple: les rotations autour d'un point, dans l'espace euclidien 2d constituent un de ses sous-groupes. Les objets invariants sont alors la famille de cercles centrée sur ce point. C'est ainsi, en terme de groupe qu'on définit le cercle!



Lucretius, poète et philosophe romain, 1er siècle avant JC, imagina que les objets étaient fait d'atomes en comparant l'analogie entre l'écoulement de l'eau et du sable (Voir L'ASPIRISOUFFLE pages 15 à 17)

Dans le groupe d'Euclide 3d, les rotations autour d'un point constituent aussi un des ses sous-groupes. Quel sont les objets que les ACTIONS DE CE SOUS-GROUPE laissent INVARIANT ? Réponse: la famille des SPHÈRES centrées sur ce point. Le concept d'INVARIANT par telle ou telle action du groupe ou d'un de ses sous-groupes est un concept fondamental de la THÉORIE DES GROUPEs. Dans ce groupe d'Euclide, d'où le temps est absent, le groupe fait naître lui-même des OBJETS qui peupleront l'espace auquel il est lié.



Quand le temps intervient, le groupe devient un GROUPE DYNAMIQUE. Il ne gère plus les objets statiques, mais des ENSEMBLES DE "POINTS ÉVÈNEMENTS" qu'on peut nommer TRAJECTOIRES ou MOUVEMENTS. Au début du siècle la remarquable mathématicienne allemande Emmy Noether (qualifiée par Einstein de "mouvement de la physique") a laissé son nom à un des théorèmes les plus important de la physique qui dit qu'à tout sous-groupe d'un groupe dynamique correspond un INVARIANT qui lui correspond.

Dans le GROUPE DE POINCARÉ nous trouvons le SOUS-GROUPE DES TRANSLATIONS TEMPORELLES, représenté par la matrice ci-contre. Groupe à 1 paramètre, il lui correspond alors un invariant, scalaire: L'ÉNERGIE E C'est ainsi, en termes de groupes, qu'on définit l'énergie!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \Delta t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Second sous-groupe: celui des TRANSLATIONS SPATIALES (matrice ci-contre), groupe à trois paramètres (Δx , Δy , Δz).

Il lui correspond un nouvel invariant:

l'IMPULSION

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

c'est ainsi, à l'aide de GROUPE DYNAMIQUES qu'on définit l'impulsion. Les grandeurs de la physique deviennent ainsi des OBJETS GÉOMÉTRIQUES, et cette démarche de GÉOMETRISATION DE LA PHYSIQUE constitue un des piliers de la PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

En continuant à jouer à ce petit jeu on pourrait considérer le sous-groupe des TRANSLATIONS SPATIO-TEMPORELLES (matrice ci-contre)

L'objet invariant serait alors le QUADRIVECTEUR IMPULSION-ÉNERGIE

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \Delta t \\ x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}$$

À quoi servent les GRANDEURS DE LA PHYSIQUE ? Bonne question.

Réponse = ON PEUT LES ADDITIONNER !

Le groupe de Poincaré dépend de dix paramètres (on dit qu'il est "de dimension dix", simple terminologie de matheux). Il y en a 3 pour la translation spatiale, 1 pour la dimension temporelle. Il en reste six, qui représentent la dimension du GROUPE DE LORENTZ, qui gère "les rotations spatio-temporelles". Si on considère le groupe de Lorentz comme un sous-groupe du groupe de Poincaré :

Le théorème de Noether nous dit qu'il doit lui correspondre un "objet" défini par six paramètres qui sera invariant par l'action de ce sous-groupe

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{S} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \mathbb{S} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbb{S} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dans cet objet se cache le SPIN. Souriau a montré en 1972 sa nature PUREMENT GÉOMÉTRIQUE. Il a la dimension d'un moment cinétique. Or le groupe de Poincaré gère les mouvements du POINT MATÉRIEL RELATIVISTE. L'interprétation du spin en tant qu'objet purement géométrique est préférable.

Le "MOMENT"

Les sous-groupes correspondent à une sorte de "démontage du groupe, pièce par pièce, rouages par rouages". Lorsqu'on a fait l'opération inverse, on reconstitue le groupe. L'ensemble des invariants dénombrés plus haut constitue ce que Souriau a appelé le "moment"

$$\text{moment} = \{ E, p_x, p_y, p_z, \dots, \text{SPIN} \}$$

ACTIONS D'UN GROUPE

Je connaissais la multiplication matricielle: $X' = MX$, mais je ne connaissais pas cette façon de faire AGIR un groupe de matrices de manière à gérer, par exemple dans le groupe d'Euclide, d'un coup les rotations, les symétries et les translations

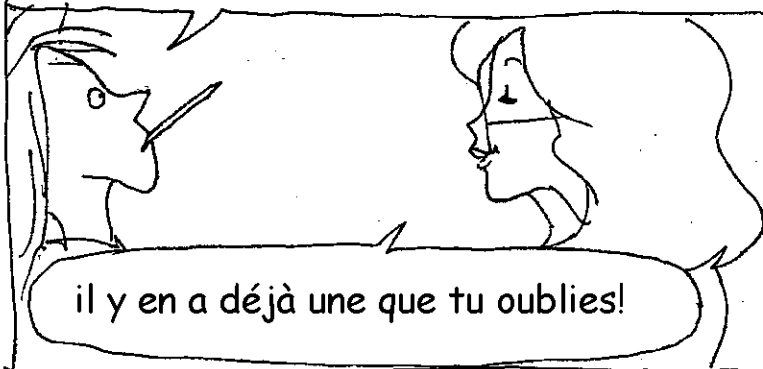
$$X' = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} aX + c \\ 1 \end{bmatrix}$$



c'est un gadget sympa

mais c'est tout sauf un gadget, une simple astuce. C'est une ACTION

mais... il n'y a pas trente six façons de faire AGIR UN GROUPE. Il y a celle-la, et c'est tout, non?



il y en a déjà une que tu oublies!

l'action de l'élément g du groupe sur un autre élément g'

$$g \times g' = g''$$

ça t'en fait déjà deux

alors qu'est ce que c'est qu'une ACTION DE GROUPE ?

Un groupe peut AGIR sur les éléments d'un ensemble U et ses ACTIONS se définissent comme suit :

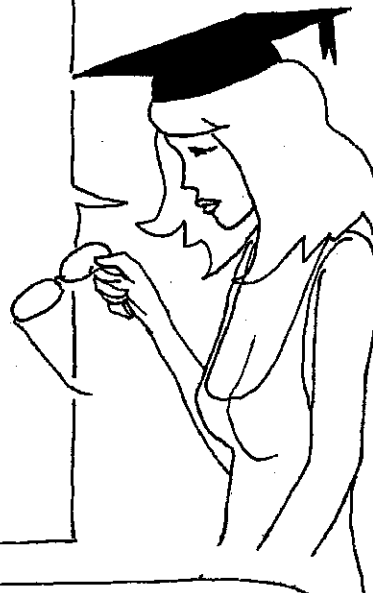
Soit g l'élément du groupe

Soit \circ l'opération de composition

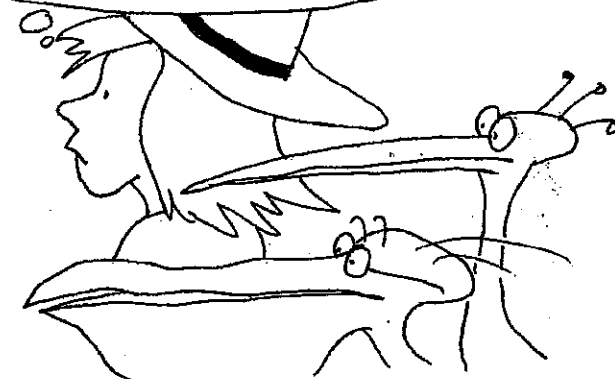
Soit u l'élément de l'ensemble U

$A_g(u)$ sera une action de g sur U si

$$A_{g''}(u) = A_g[A_{g'}(u)]$$



on dirait un machin plus ou moins transitif...



Si l'action est simplement l'opération de composition \circ

$$g \circ (g' \circ u) = (g \circ g') \circ u = g'' \circ u, \text{ ça marche.}$$

Donc l'opération de composition est une action.



ravi de l'apprendre.
Nous enfonçons des
portes ouvertes, non ?

Essayons avec :

$$A_{g'}(x) = \begin{bmatrix} a' & c' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'x + c' \\ 1 \end{bmatrix}$$

qui transforme x en $x' = a'x + c'$



et plus qu'à
remettre ça

et alors ?

J'écris $A_g(x') = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a'x+c' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'x + ac' + c \\ 1 \end{pmatrix}$

et là, je suis perdu, je ne reconnais plus rien...



mais non, tout va bien. Fais le produit des deux matrices :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac'+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & c'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce que tu as obtenu c'est $\begin{pmatrix} a'' & c'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :

$$A_g [A_{g'}(x)] \text{ donne bien } A_{g''}(x) \text{ avec } g'' = g \times g'$$

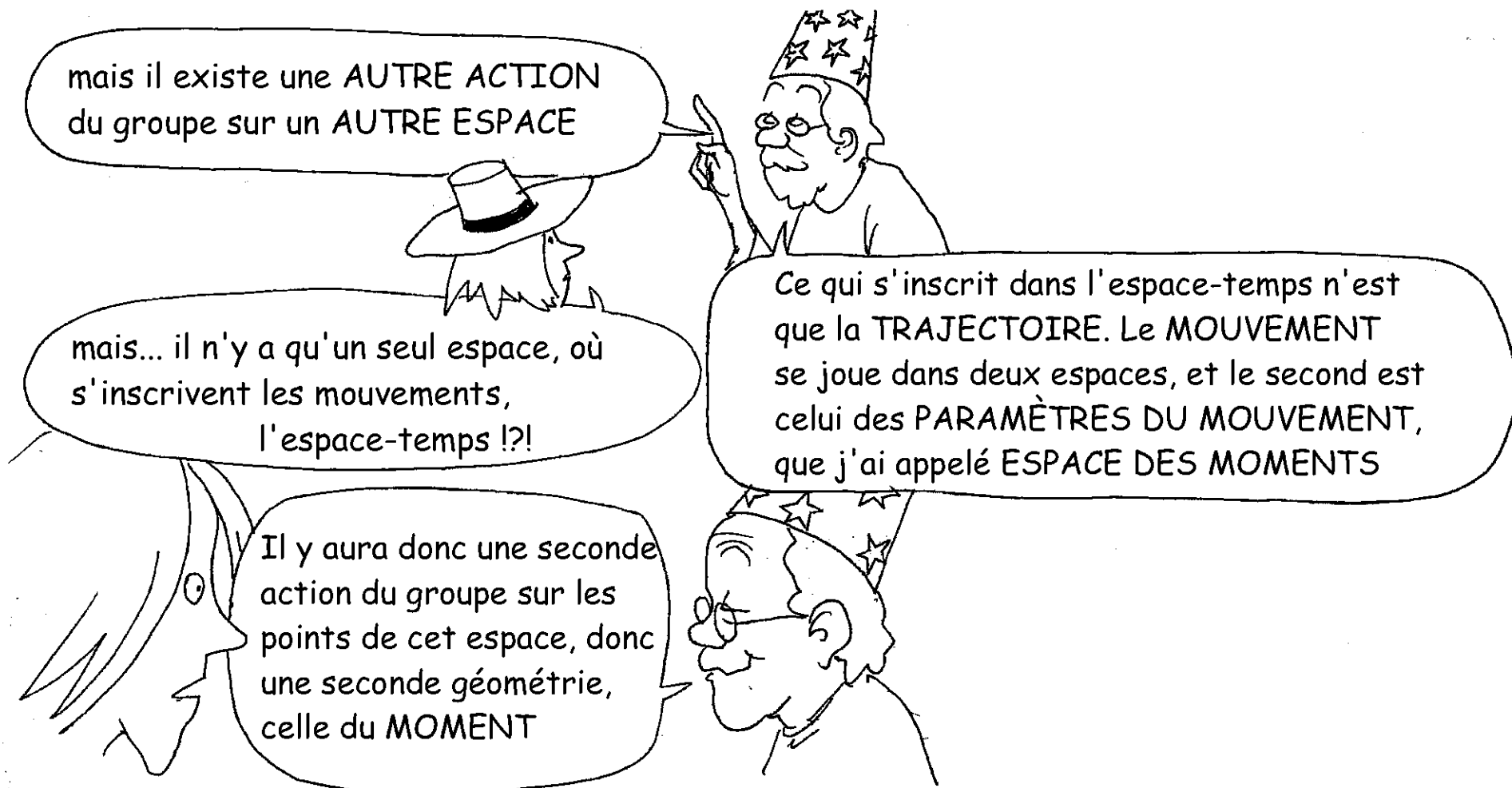
Ça veut dire que $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien une ACTION d'un

élément g du groupe d'Euclide sur les points x de l'espace.



et, de la même façon $\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est aussi une ACTION du GROUPE DE POINCARÉ sur les "points-événements" ξ de l'ESPACE-TEMPS

ATTENTION UNE GÉOMÉTRIE PEUT EN CACHER UNE AUTRE!



mais il existe une AUTRE ACTION
du groupe sur un AUTRE ESPACE

mais... il n'y a qu'un seul espace, où
s'inscrivent les mouvements,
l'espace-temps !?!

Il y aura donc une seconde
action du groupe sur les
points de cet espace, donc
une seconde géométrie,
celle du MOMENT

Ce qui s'inscrit dans l'espace-temps n'est
que la TRAJECTOIRE. Le MOUVEMENT
se joue dans deux espaces, et le second est
celui des PARAMÈTRES DU MOUVEMENT,
que j'ai appelé ESPACE DES MOMENTS



$$J' = g \times J \times {}^t g$$

où J est une matrice ANTISYMETRIQUE

on peut vérifier que c'est bien une ACTION.

$$A_g[A_g'(J)] = g \times [g' \times J \times {}^t g'] \times {}^t g = g g' J {}^t g' {}^t g$$

mais ${}^t[AB] = {}^t B {}^t A$ donc ${}^t g' {}^t g = {}^t(g g')$ et si $g'' = g g'$

$$A_g[A_g'(J)] = g'' \quad {}^t g'' = A_{g''}(J)$$

La matrice J a nécessairement le même format que le format (5,5) des matrices g du groupe. Dans une matrice antisymétrique les termes symétriques par rapport à la diagonale principale sont opposés. Donc ceux de cette diagonale principale sont égaux à zéro (qui est son propre opposé). On peut donc dénombrer les composants de cette matrice :

0	l
$-l$	0

(2,2)

0	$-l_z$	$-l_y$
l_z	0	$-l_x$
$-l_y$	l_x	0

(3,3)

0	$-l_z$	l_y	f_x
l_z	0	$-l_x$	f_y
$-l_y$	l_x	0	f_z
$-f_x$	$-f_y$	$-f_z$	0

(4,4)

0	$-l_z$	l_y	f_x	$-p_x$
l_z	0	$-l_x$	f_y	$-p_y$
$-l_y$	l_x	0	f_z	$-p_z$
$-f_x$	$-f_y$	$-f_z$	0	$-E$
p_x	p_y	p_z	E	0

(5,5)

Format	Nombre de composants
(2,2)	1
(3,3)	3
(4,4)	6
(5,5)	10



Je peux découper cette matrice antisymétrique J de format $(5,5)$ en une matrice antisymétrique M de format $(4,4)$ et un QUADRIVECTEUR p , à quatre composantes. Et je pourrai écrire tout cela de façon plus compacte. Cela me permettra d'expliciter le calcul de l'action du groupe de Poincaré sur cette matrice-moment J de manière plus commode, tout simplement

$$\begin{array}{c}
 J = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -l_z & l_y & f_x & -p_x \\ \hline l_z & 0 & -l_x & f_y & -p_y \\ \hline -l_y & l_x & 0 & f_z & -p_z \\ \hline -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -E \\ \hline p_x & p_y & p_z & E & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -l_z & l_y & f_x & -p_x \\ \hline l_z & 0 & -l_x & f_y & -p_y \\ \hline -l_y & l_x & 0 & f_z & -p_z \\ \hline -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -E \\ \hline p_x & p_y & p_z & E & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & -l_z & l_y & f_x \\ \hline l_z & 0 & -l_x & f_y \\ \hline -l_y & l_x & 0 & f_z \\ \hline -f_x & -f_y & -f_z & 0 \\ \hline \end{array} \\
 P = \begin{array}{|c|} \hline p_x \\ \hline p_y \\ \hline p_z \\ \hline E \\ \hline \end{array} \\
 {}^t P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p_x & p_y & p_z & E \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$J = \begin{pmatrix} M & -P \\ {}^t P & 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vu sous cet angle, ce découpage est logique



il n'y a plus qu'à expliciter le calcul $J' = g \times J \times {}^t g$

$${}^t q = \begin{pmatrix} {}^t L & 0 \\ {}^t C & 1 \end{pmatrix} \quad J' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & -P \\ {}^t P & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^t L & 0 \\ {}^t C & 1 \end{pmatrix}$$

$$J' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M {}^t L - P {}^t C & -P \\ {}^t P {}^t L & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L M {}^t L - L P {}^t C + C {}^t P {}^t L & -L P \\ {}^t P {}^t L & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M' &= L M {}^t L - L P {}^t C + C {}^t P {}^t L \\ P' &= L P \end{aligned}$$

je veux bien. Mais à quoi vont me servir ces magnifiques formules ?



elle est pas belle, la science ?

En adoptant le regard du physicien on va donner à ces composantes du MOMENT une INTERPRÉTATION PHYSIQUE. Dans le quadrivecteur P, E c'est l'énergie et $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$ c'est l'impulsion.

mais cette matrice antisymétrique M, elle représente quoi ?

on va la décomposer, elle aussi

C'est une manie !



$$M = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{Bmatrix} S & f \\ {}^t f & 0 \end{Bmatrix}$$

La vitesse V est implicitement présente dans la matrice L du groupe de Lorentz. Si on considère un mouvement qui s'effectue selon une direction privilégiée, par exemple oz avec une vitesse V et une translation $\Delta z = c$ et si par ailleurs $c = V \Delta t$ on se situe dans un système de coordonnées où on accompagne, au fil de cette translation spatio-temporelle la particule dans son mouvement. On montre alors que le vecteur f est nul.

La matrice S s'écrit alors:

0	-S	0
S	0	0
0	0	0



C'est le SPIN de la particule

Souriau a consacré en 1972(*) le caractère PUREMENT GÉOMÉTRIQUE du SPIN: une matrice antisymétrique (3,3)

La méthode de QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE qu'il a inventée permet de montrer que ce spin S ne peut être qu'un multiple d'une quantité fixe: \hbar . On a vu que le fait qu'une particule soit dotée d'une charge électrique était équivalent au fait de dire qu'elle évoluait dans une espace doté d'une CINQUIÈME DIMENSION, la dimension de KALUZA. C'est le fait que cette dimension soit fermée sur elle-même qu'entraîne que la charge électrique soit quantifiée. Dans l'espace-temps il existe une "forme de fermeture" qui fait qu'un objet se retrouve identique à lui-même sous l'action d'une rotation de 360° . La quantification du Spin, dans une certaine mesure, découle de cette propriété. Il existe une relation étroite entre quantification et fermeture d'une dimension. En exploitant l'outil groupe et la fermeture de la 5ième dimension, Souriau fait émerger l'équation de Klein-Gordon du groupe de Poincaré (et l'équation de Schrödinger du groupe de Galilée, groupe dynamique gérant le mouvement du point matériel non relativiste)

L'INVERSION DU TEMPS ENTRAINE L'INVERSION DE L'ÉNERGIE

On a vu plus haut, que l'élément du groupe de Lorentz pouvait être mis sous la forme:

$$L = \mu L_0 \quad \mu = \pm 1$$

où L_0 représente l'élément du sous-groupe orthochrone (qui n'inverse pas le temps).

Sous cette forme l'action s'écrit:

$$M' = L_0 M {}^t L_0 - \mu L_0 P {}^t C + \mu C {}^t P L_0$$

$$P' = \mu L_0 P$$

Considérons l'action la plus simple possible où il y a inversion du temps ($\mu = -1$). Dans le groupe orthochrone L_0 , choisissons la matrice unité I . Annulons la translation spatio-temporelle C . L'élément du groupe s'écrit :

$$g = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'action sur l'espace-temps, l'espace des trajectoires se réduit à :

$$\xi' = -\xi \Rightarrow t \Rightarrow -t$$

C'est l'inversion du sens du temps le long de la trajectoire. L'action sur le moment est:

$$M' = M \Rightarrow \text{le spin } S \text{ reste inchangé}$$

$$P' = -P : E \rightarrow -E$$

ça y est, ça a été dur
mais on y est arrivé



ANNEXE 4: L'ANTIMATIÈRE

Page 40 nous avons évoqué l'idée que pour qu'un point matériel relativiste soit doté d'une charge électrique e il fallait envisager son déplacement non dans un espace à quatre dimension, mais dans un espace à cinq :

$$\{t, x, y, z, \zeta\}$$

ζ étant la cinquième dimension, ou DIMENSION DE KALUZA. Page 137 on avait introduit la MÉTRIQUE DE MINKOWSKI

$$ds^2 = {}^t d\xi G d\xi = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

on va partir d'un ESPACE DE KALUZA, Riemannien hyperbolique, défini par sa signature (+ - - - -) et sa matrice de Gram :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La métrique de l'espace de Kaluza est :

$$d\Sigma^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - dS^2$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{M} \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ S \\ r \end{pmatrix}$$

$$d\Sigma^2 = {}^t d\Omega \Gamma d\Omega$$

on peut alors rechercher le groupe d'isométrie de cet espace de Kaluza et on trouvera un groupe dont la représentation matricielle ressemble trait pour trait à celle du groupe de Poincaré, avec une dimension de plus :

$$\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad {}^t \Lambda \Gamma \Lambda = \Gamma$$

ce groupe agit sur les points de l'espace de Kaluza:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Omega \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \Omega + C \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur C représente cette fois une translation à cinq dimensions :

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \xi \end{pmatrix}$$

les translations selon la dimension ζ représentent un sous-groupe de ce groupe :

dont la représentation
matricielle est :

sous groupe à 1 paramètre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \xi + \Delta \xi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le théorème de Noether nous dit qu'alors un nouveau scalaire sera invariant sous l'action de ce sous-groupe, et ce scalaire est

LA CHARGE ÉLECTRIQUE e

le groupe de Kaluza est construit à partir d'un groupe Λ

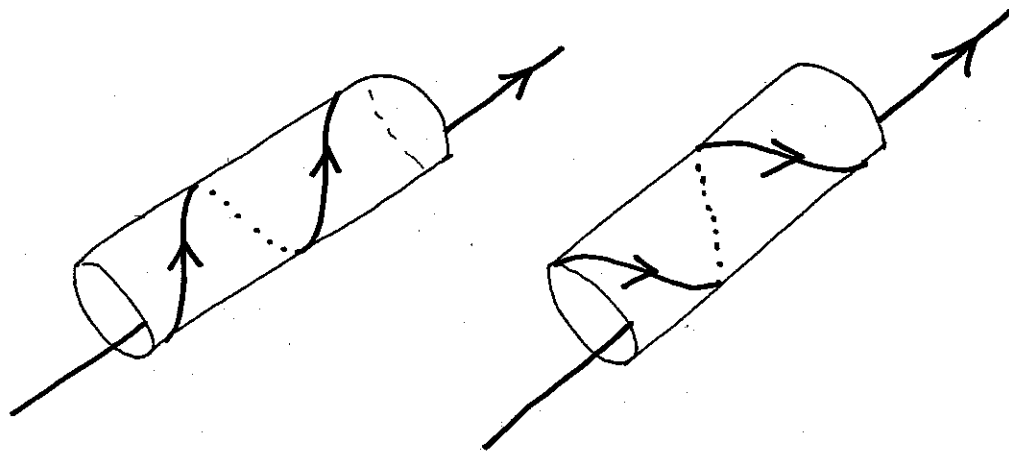
le groupe de Lorentz est un de ses sous-groupes :

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

voici un autre sous-groupe du groupe de Kaluza

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu r \\ \mu S \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \mu r \\ \mu S \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mu = \pm 1$$

les éléments ($\mu = -1$) de ce groupe inversent la cinquième dimension. Pour reprendre le dessin de la page 42 : (la cinquième dimension est fermée)



Le sens de l'enroulement du mouvement de la particule est inversé. On démontre (...) que ceci entraîne l'inversion de la charge électrique e

Ceci ne saurait représenter une définition géométrique de l'antimatière. Une particule possède des CHARGES QUANTIQUES et la charge électrique e n'est que l'une d'entre elles. Mais on voit poindre l'idée: "le statut d'antimatière relève d'un type de mouvement dans un espace de dimension supérieure".

SOUS-GROUPES DE LORENTZ ORTHOCHRONE et ANTICHRONE

Le GROUPE DE LORENTZ L possède quatre composantes

L_n (neutre), L_s (inverse l'espace), L_t (inverse le temps), L_{st} (inverse l'espace et le temps)

La "composante neutre" est un sous-groupe qui contient l'élément neutre, à la différence des trois autres ensembles et n'inverse... ni l'espace ni le temps. Ci-après, quelques matrices qui appartiennent aux ensembles (\in signifie "appartient à" et $\{ \}$ ensemble)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{L_n\}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \{L_s\}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{L_t\}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \{L_{st}\}$$

ANNEXE 5: GROUPE GÉMELLAIRE

On peut regrouper ces quatre ensembles de matrices en deux sous-ensembles:

$$L_0 \text{ (orthochrone)} = \{L_n, L_s\} \quad L_a = \{L_t, L_{st}\}$$

Le premier sous-ensemble est un sous-groupe du groupe de Lorentz. Ce regroupement permet l'écriture :

$$L = \mu L_0 \text{ avec } \mu = \pm 1 \text{ car } L_t = -L_s \text{ ; } L_{st} = -L_n$$

Dans ce gros calcul matriciel qu'on a pas osé vous mettre dans ces pages (mais que vous pourriez très bien suivre) "L'ACTION" la plus générale des composantes du groupe de Poincaré sur "son espace des moments" contient la relation (Souriau 1972)



$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = L \times \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \mu L_0 \times \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Les éléments $\mu = -1$ correspondent aux transformations ANTICHRONES qui inverse le temps. La matrice unité (4,4) I fait partie du groupe de Lorentz. Quand on se limite à inverser le temps on voit que ceci inverse l'énergie, mais aussi l'impulsion P

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E' = -E \quad \boldsymbol{\mu}' = -\boldsymbol{\mu}}$$

Si on prend le groupe de Kaluza

$$\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tous les calculs peuvent être reconduits en 5d et on obtiendra en particulier avec :

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ e \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\pi}' = \Lambda \boldsymbol{\pi}$$

On peut décomposer le groupe Λ en deux composantes, l'une orthochrone et l'autre antichrone, et écrire

$$\Lambda = \mu \Lambda_0 \quad \text{avec} \quad \mu = \pm 1$$

les composantes ANTICHRONES ($\mu = -1$) inversent:

- L'énergie E
- L'impulsion p
- La charge électrique e

On peut exprimer Λ en utilisant le sous-ensemble orthochrone L_0 du groupe de Lorentz et, en rajoutant ($\lambda = \pm 1$) introduire (dans les deux feuillets) la dualité matière-antimatière

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mu L_0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Le sous-groupe du groupe de Kaluza pour lequel on opte s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} \mu L & 0 & \Delta \mathcal{M} \\ 0 & \lambda & \Delta \mathcal{S} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{M} \\ \mathcal{S} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ANNEXE 6: ESPACES IMAGINAIRES AVEZ-VOUS DONC UNE ÂME ?

On se rappelle qu'en faisant interagir les deux sous-ensembles cosmiques d'énergies et de masses opposées, on avait représenté ces deux feuilletts comme le revêtement d'un projectif, lequel, dans le cas de deux dimensions (t,x) devenait une SURFACE DE BOY (*) (voir page)
On avait également envisagé que les deux "pôles" l'un figurant le BIG BANG et l'autre le BIG CRUNCH, au lieu d'être identifiés, correspondent à un passage, un pont reliant les deux feuilletts. Ceci faisait disparaître la singularité et d'autre part, en 2d, donnait à l'objet-univers la topologie d'un tore T^2 agencé en revêtement à deux feuilletts d'une bouteille de Klein K^2 (plus facilement "lisible" dans le Topologicon, page).

L'espace frontière est alors un cercle S^1

(*)Abondamment décrite dans le TOPOLOGICON

Si on se place maintenant en 5d il faut supposer qu'on puisse construire une solution avec deux métriques du type

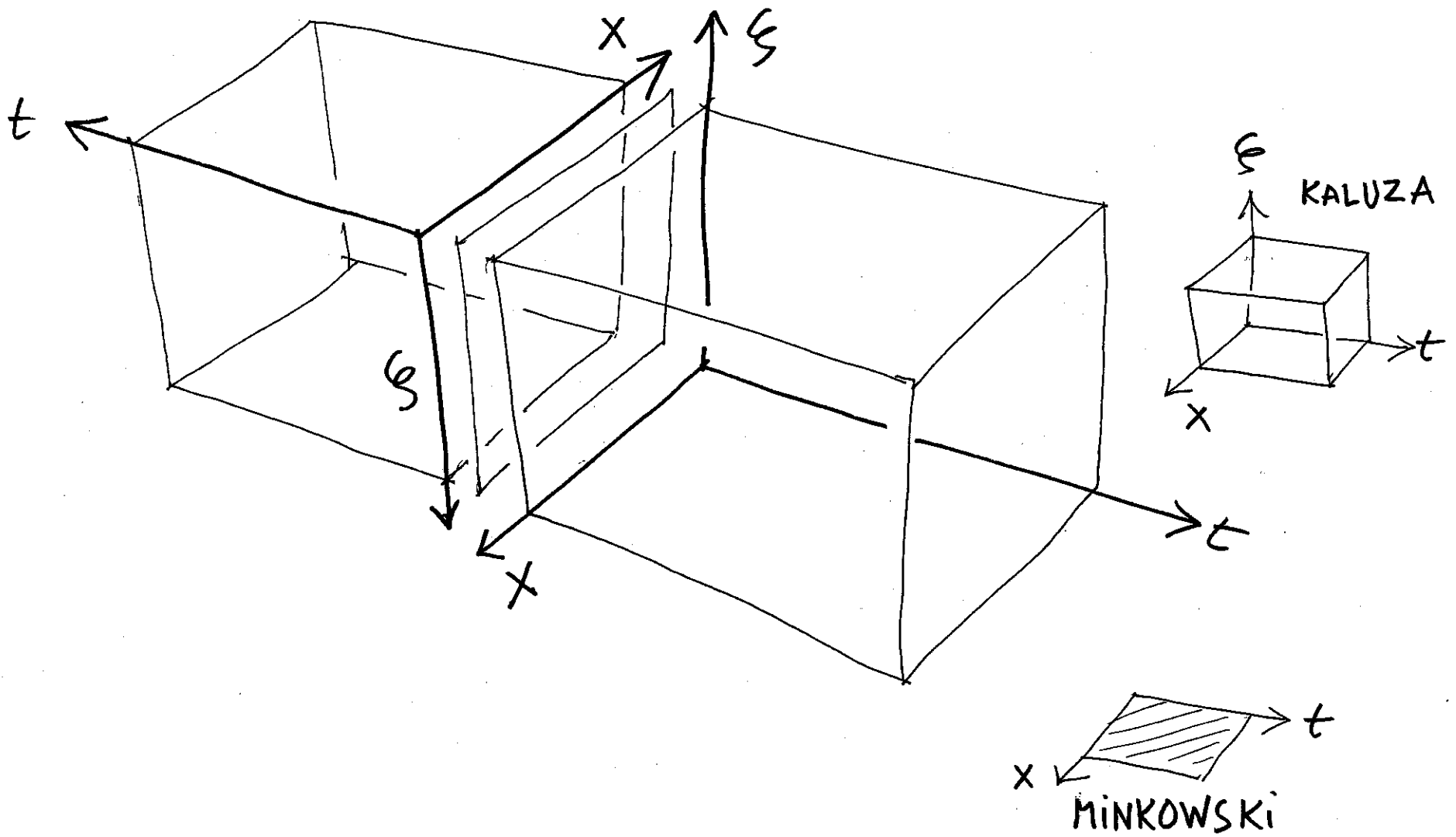
$$d\Sigma^2 = R^2 [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\mathcal{S}^2]$$

Dans l'Univers primitif (voir PLUS RAPIDE QUE LA LUMIÈRE), avant la BRISURE DE SYMÉTRIE les deux facteurs d'échelle (Warp factors) sont supposés égaux. À la jonction il y a dégénérescence dimensionnelle. La métrique de l'espace-frontière devient alors :

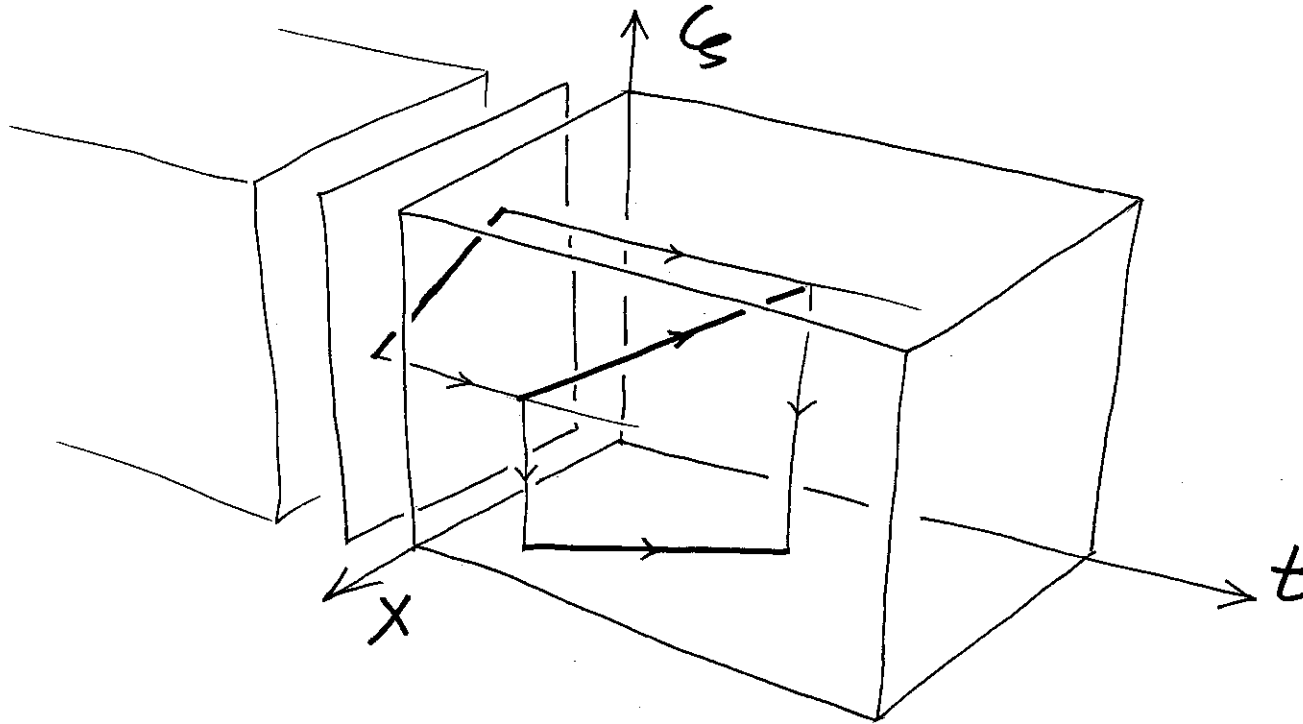
$$d\sigma^2 = R_{\min}^2 [-dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\mathcal{S}^2] < 0$$

DANS CET ESPACE-FRONTIÈRE, LA LONGUEUR EST IMAGINAIRE PURE
PEUT-ELLE ÊTRE ASSIMILÉE À UN TEMPS IMAGINAIRE ?

DANS TOUS LES CAS DE FIGURE, QUELLE SIGNIFICATION (META)PHYSIQUE
DONNER À CETTE STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE ?



le "TOY MODEL"



Personne ne s'est jamais hasardé à fournir un quelconque modèle de ce que pouvait être la CONSCIENCE avec son corollaire : le CHOIX. On a ci-dessus une image amusante où une "ligne de destin", achrone, inscrite dans cet espace frontière (x,y,z,ζ) de signature $(- - - -)$ peut se projeter d'une infinité de manières possibles dans l'un des deux feuillets d'espace-temps (X,t) , le choix de telle ou telle projection représentant un DEGRÉ DE LIBERTÉ

L'ÉTERNITÉ C'EST LONG SURTOUT À LA FIN



je me demande ce qui
peut se passer ... à la fin



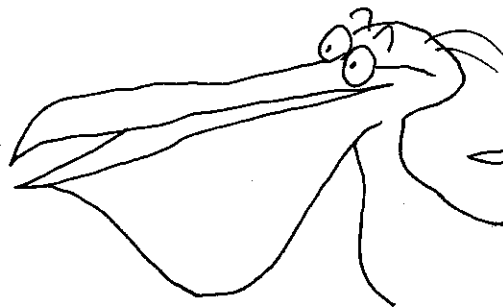
la fin de quoi ?



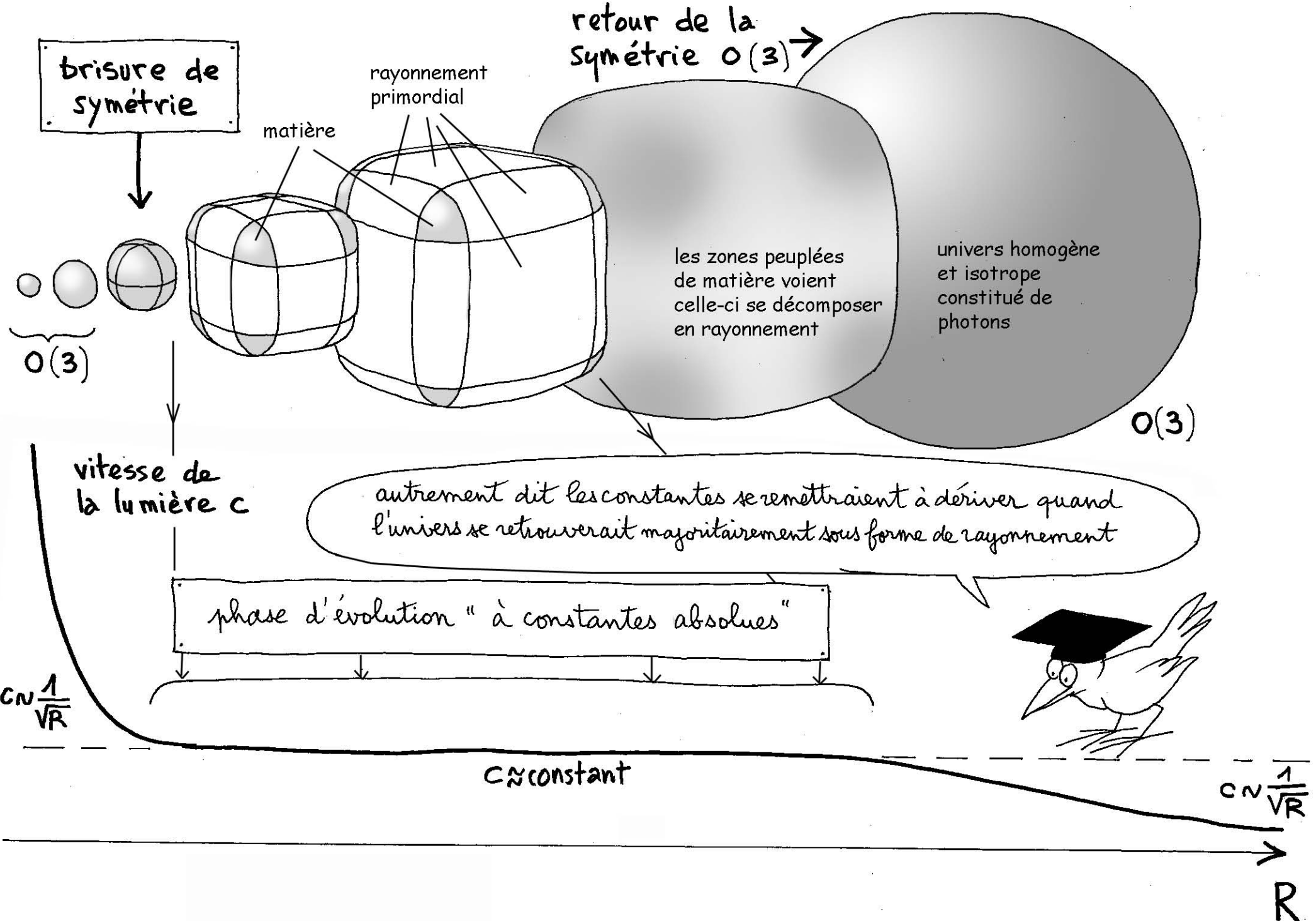
Spéculer sur le
futur, c'est ce qu'il
y a de plus facile. On ne peut
pas vérifier et cela permet de
dire n'importe quoi

eh bien, la fin de **TOUT**

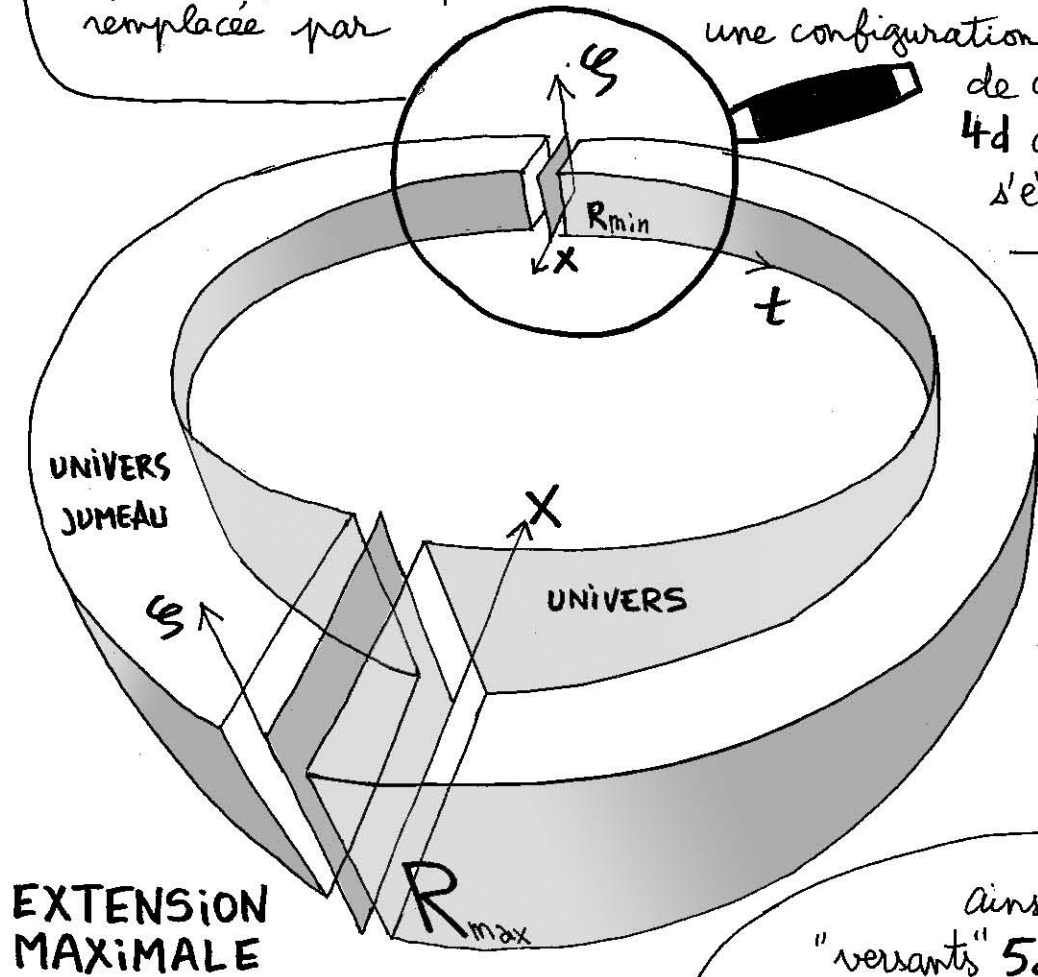
j'ai une idée. Si dans un passé lointain l'univers n'est plus
composé que de rayonnements, est-ce qu'il n'en serait pas
de même dans le futur le plus lointain ?



tu suggères qu'on observerait
l'inverse, c'est à dire une
réapparition de la symétrie $0(3)$



la représentation proposée a remplacé la "singularité initiale" par une structure 4d où l'extension spatiale passerait par une valeur minimale R_{min} . Dans cette même optique "l'expansion indéfinie" serait remplacée par une configuration d'extension maximale R_{max} . Et rien n'empêche de connecter ces deux "extrêmes" par une nouvelle structure 4d à métrique elliptique (----) et où le temps s'écoulerait selon des valeurs **IMAGINAIRES PURES**



ainsi toute trajectoire s'inscrivant dans ces deux "versants" 5d d'univers se projetterait sur ces structures 4d à temps imaginaire selon des courbes différentes, puisque ces espaces sont quadridimensionnels. Quelle histoire!

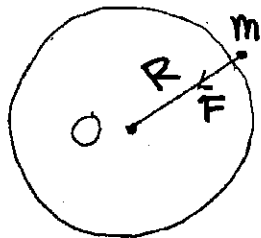


c'est (MEKTOUB)²

ANNEXE 7:

SOLUTIONS NEWTONIENNES

En 1934 Milne et Mac Crea créèrent une immense surprise en faisant émerger l'équation de Friedman, donnant la loi d'évolution de la dimension caractéristique R de l'univers avec trois fois rien de calcul et la loi de Newton. La méthode consiste à considérer un bout d'univers, contenu dans une sphère de rayon R et de centre O , ρ étant la densité de matière dans ce milieu. On



cherche alors quelle est l'accélération R'' à laquelle cette masse est soumise en supposant que le point O est fixe. On peut alors démontrer que la force, radiale, à laquelle cette masse m est soumise se limite à celle d'une masse $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ qui serait située en O et qui représente la masse contenue dans cette sphère de rayon R

$$F = -\frac{Gm}{R^2} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = m R''$$

on obtient l'équation différentielle :

$$R'' = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{4\pi G \rho R^3}{3} \right)$$

Si la masse est conservée $\rho R^3 = C^{te}$ on obtient l'équation de Friedman

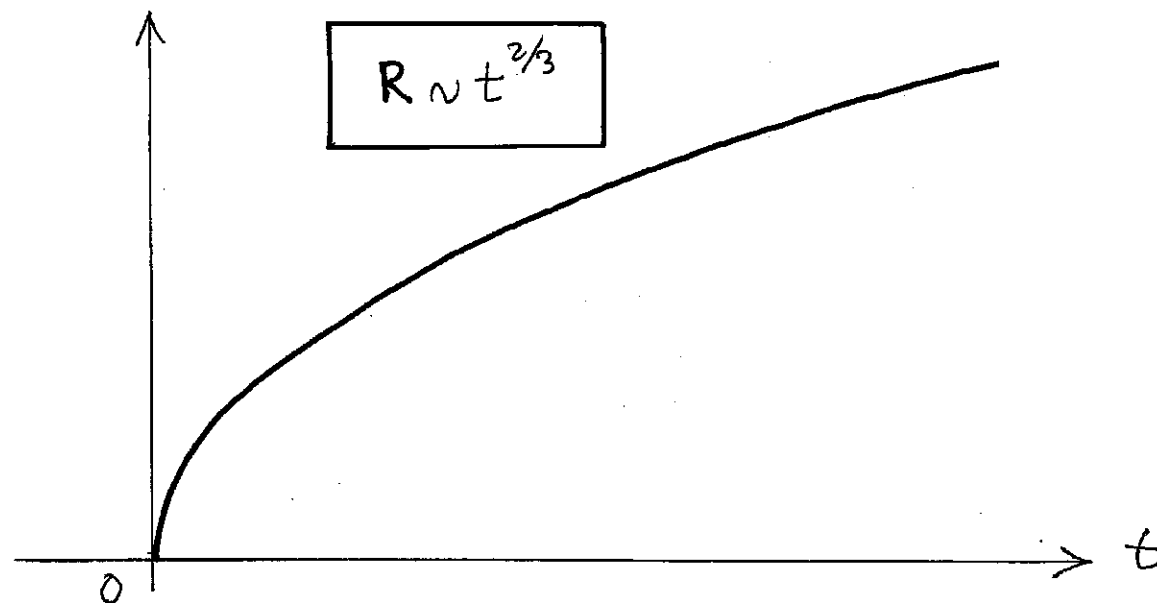
$$R'' = -\frac{a^2}{R^2}$$

qui possède trois types de solutions qui font toutes les trois état d'une décélération, infinie pour $R = 0$ puis décroissant au fil de l'expansion $R(t)$ au fil du temps. Nous chercherons la loi en

$$R \sim t^m$$

$$R' = ma^2 t^{m-1} \quad ; \quad R'' = m(m-1)a^2 t^{m-2} \quad ; \quad R^2 R'' = m(m-1)a^6 t^{3m-2}$$

qui conduit à la solution parabolique:



Imaginons maintenant que l'évolution de l'Univers soit régie par deux contenus, l'un représentant des masses positives m^+ et l'autre des masses négatives m^- . En outre, comme nous nous sommes efforcé de le faire comprendre dans l'album, cette expansion se joue à travers deux FACTEURS D'ÉCHELLE R^+ et R^- (Warp factors)

Considérons une masse m^+ , positive située sur une sphère de rayon R^+ dont le centre est supposé fixe. Dans le cadre d'une approximation newtonienne calculons l'accélération $R^{+''}$ qu'elle subit. Elle peut être calculée en considérant, comme précédemment, la quantité de masse positive contenue dans cette sphère (et ramenée à son centre O):

$$\frac{4}{3} \pi \rho^+ R^{+3}$$

Il nous faut ensuite tenir compte de la MASSE APPARENTE de la masse négative contenue dans cette sphère et qui est :

$$\frac{4}{3} \pi \rho^- R^{+3} \quad \text{avec} \quad \frac{\rho^-}{\rho^+} = \frac{R^{+3}}{R^{-3}}$$

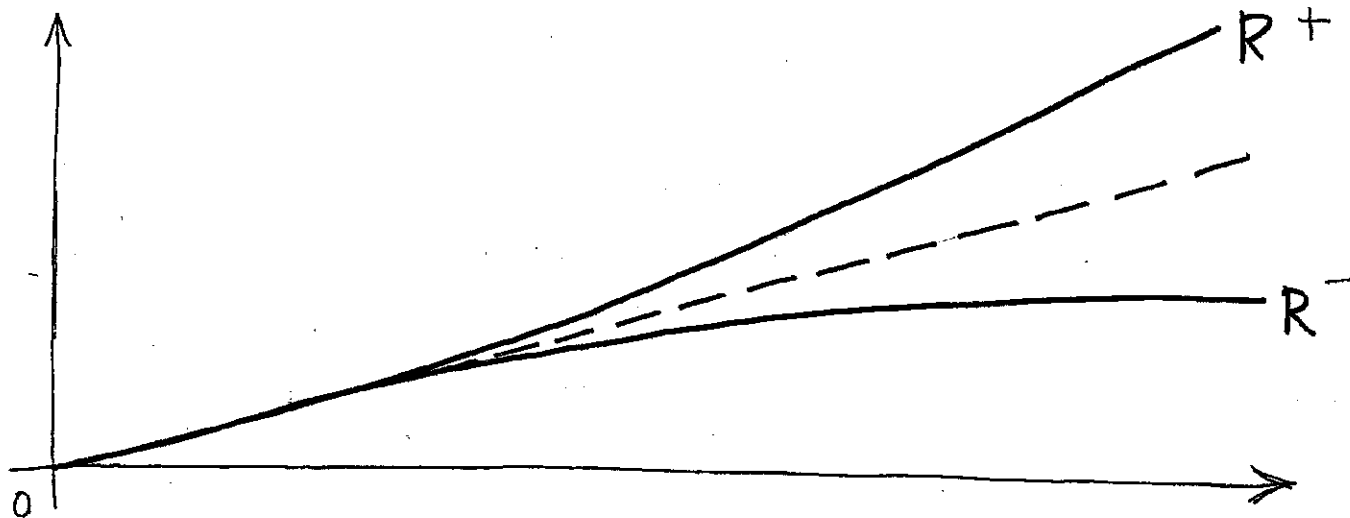
L'équation différentielle donnant $R^+(+)$ est alors :

$$R^{+''} = -\frac{Gm^+}{R^{+2}} \times \frac{4\pi R^{+3}}{3} (\rho^+ - \rho^-) = -\frac{a^2}{R^{+2}} \left(1 - \frac{R^{+3}}{R^{-3}} \right)$$

En faisant le même raisonnement en utilisant cette fois l'accélération $R^{-''}$ subie par une masse m^- et en prenant la constante (arbitraire) a égale à 1 on aura le système des deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} R^{+''} = -\frac{1}{(R^+)^2} \left(1 - \frac{(R^+)^3}{(R^-)^3} \right) \\ R^{-''} = -\frac{1}{(R^-)^3} \left(1 - \frac{(R^-)^3}{(R^+)^3} \right) \end{cases}$$

qui admet la solution linéaire (instable) $R^+ = R^- \sim t$



L'instabilité de la solution, en supposant que les masses positives subissent une accélération tardive donnera l'illusion de l'action d'une ÉNERGIE NOIRE.

Ces deux mondes constitués d'énergies et de masses de signes opposés interagissent. Dans le cas figuré à la page précédente les masses négatives, plus denses accélèrent le phénomène de l'expansion des masses positives, associées au facteur d'échelle $R^+(+)$. Phénomène inverse dans le "négamonde" où des observateurs, constitués de masses négatives et recevant des signaux véhiculés par des PHOTONS À ÉNERGIE NÉGATIVE, constateraient au contraire un ralentissement du phénomène d'expansion.

Le début de la courbe, où l'expansion semble linéaire, peut sembler incompatible avec les observations. Mais alors intervient une BRISURE DE SYMÉTRIE et une VARIATION DES CONTANTES, en particulier de la vitesse de la lumière, sans laquelle la grande homogénéité de l'univers primitif n'est pas explicable. Tout ceci fait l'objet de l'album

PLUS RAPIDE QUE LA LUMIÈRE