Introduction

La « Mécanique analytique » de Lagrange, publiée à la fin du XVIIIe siècle, est une œuvre inachevée, dont certains chapitres ne sont que des esquisses ; c'est pourquoi on la connaît surtout à travers les travaux de Poisson, Hamilton, Jacobi, qui ont contribué à fixer la *forme* de la mécanique analytique que l'on enseigne aujourd'hui.

La perfection formelle, en mathématiques, n'est jamais négligeable ; elle constitue même un facteur nécessaire de progrès. Mais il semble que la formalisation classique de la mécanique analytique ait laissé échapper une partie importante de la pensée de Lagrange. Sans doute parce que la mathématique de la première moitié du XIXe siècle n'avait pas encore l'ampleur qui eût été nécessaire ; sans doute aussi parce que les succès de la théorie (en mécanique céleste d'abord ; plus tard en mécanique statistique) ne laissaient pas prévoir la nécessité d'une remise en cause de catégories tellement *classiques* qu'elles semblaient *naturelles* : il a fallu attendre le XXe siècle pour apprendre que les mots *temps*, *espace*, *matière* n'ont pas de contenu physique direct, mais qu'ils ne sont que les signes formels de théories physiques révisables, et maintenant périmées.

La mécanique analytique n'est pas une théorie périmée ; mais il apparaît que les *catégories* (1) qu'on lui attribue classiquement : *espace de configuration*, *espace de phases*, *formalisme lagrangien*, *formalisme hamiltonien*, le sont ; ceci simplement parce qu'elles ne possèdent pas la covariance requise ; en d'autres termes, parce qu'elles sont en contradiction avec la *relativité galiléenne* ; à fortiori, elles sont inadéquates à la formulation de la mécanique relativiste, au sens d'Einstein.

Nous allons examiner ce point en choisissant l'exemple d'un point matériel soumis à une force $\mathbf{F}$; nous désignerons par m sa masse, par $\mathbf{r}$ sa position à l'instant t.

(1) Nous prenons ici le mot *catégorie* dans son sens épistémologique (aristotélicien ou kantien par exemple), et non dans son sens algébrique.

Ici, l'*espace de configuration* est l'espace euclidien ordinaire (de dimension 3) dans lequel évolue $\mathbf{r}$; l'*espace de phases* est décrit par le couple $\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}$ étant la vitesse : sa dimension est donc 6 ; l'équation de Newton

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{I}$$

constitue un système différentiel du second ordre sur l'espace de configuration ; on le transcrit par un système du premier ordre sur l'espace de phases :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{F}}{m}\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\,. \tag{II}$$

Dans le cas où la force $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel w, on considère la quantité

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - w \tag{III}$$

appelée *lagrangien* ; l'intégrale du lagrangien entre deux instants arbitraires t_0, t_1

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t \tag{IV}$$

s'appelle *action* hamiltonienne ; les équations du mouvement (I) ou (II) peuvent se trouver en écrivant que cette intégrale est minimum (principe d'Hamilton ou de *moindre action*) ; on peut aussi donner aux équations du mouvement la forme *canonique*

$$\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\,; \qquad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{V}$$

en désignant par q_j ($j = 1, 2, 3$) les composantes de $\mathbf{r}$, par p_j les composantes de $m\mathbf{v}$, et en exprimant le *hamiltonien*

$$H = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + w\,. \tag{VI}$$

en fonction des *coordonnées canoniques* p_j, q_j et de t.

L'extension des équations (V) à des cas plus généraux constitue le *formalisme hamiltonien* qui sert de base aux traités modernes de mécanique analytique.

Mais la définition même de l'espace de phases (comme de l'espace de configuration) suppose le *choix préalable d'un référentiel* (la Terre par exemple) ; or l'espace de phases du même point matériel diffère *essentiellement* pour deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre (même dans le cas le plus simple d'un mouvement de translation rectiligne uniforme), parce que les formules de changement de référentiel *dépendent du temps* ; le hamiltonien H dépend lui aussi de l'observateur ; ainsi même que la variable t dans le cas de la mécanique relativiste (« relativité de la simultanéité »).

Heureusement, cette *subjectivité* des concepts de base possède un remède simple : *il suffit de traiter la variable t comme les autres* ; dans l'exemple choisi, on utilisera l'espace V, de dimension 7, dans lequel évolue le triplet

$$y = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (^1) \tag{VII}$$

en « chassant les dénominateurs » des équations (II), on les mettra sous la forme homogène

$$m\,\mathrm{d}\mathbf{v} - \mathbf{F}\,\mathrm{d}t = 0\,; \quad \mathrm{d}\mathbf{r} - \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = 0\,; \tag{VIII}$$

ces équations définissent, en chaque point y de V, la *direction tangente* à la courbe x décrite par le point y au cours de l'évolution du système (voir la Fig. 1) ; ces courbes sont donc — suivant une terminologie

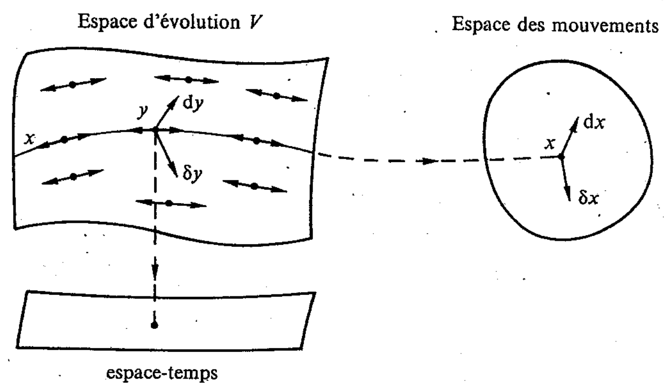

Fig. 1.

(1) y s'appelle parfois une *condition initiale* du mouvement.

classique — les *lignes de force* du champ de directions défini par les équations (VIII) (1) ; il est préférable aujourd'hui de dire *feuilles* plutôt que *lignes de forces*, parce que la théorie des *variétés feuilletées* (§ 5, p. 40) englobe ce problème dans un formalisme plus général et plus puissant.

Cet espace V, que nous appellerons *espace d'évolution* (p. 129), et son champ de directions (ou « feuilletage ») ont, eux, un caractère *objectif*; bien entendu chaque observateur peut repérer V par les paramètres qui lui conviennent.

Il semblerait naturel d'appliquer le même traitement à l'espace de configuration ; dans le cas du point matériel, ceci revient à travailler sur l'*espace-temps*, et non sur l'espace et le temps séparément. Mais on rencontre une grave difficulté conceptuelle dès qu'on s'occupe d'un système plus compliqué ; dans le cas de *deux points matériels*, par exemple, faut-il remplacer l'espace de configuration ou évolue $\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}$ par l'espace de dimension 7 décrit par $\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ t\end{pmatrix}$, ou par l'espace de dimension 8 décrit par $\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ t_1\\ \mathbf{r}_2\\ t_2\end{pmatrix}$, obtenu en observant les deux points à des dates t_1, t_2 différentes ? L'un de ces choix semble naturel en mécanique classique, l'autre en mécanique relativiste ! Puisqu'il s'agit plus d'une affaire d'opinion que de physique, nous proposons simplement de *renoncer à évoquer l'espace de configuration* ; on verra par là suite qu'on n'y perd rien.

Un système dynamique étant ainsi figuré par un feuilletage de l'espace d'évolution, on doit se demander ce qui est spécifique de la mécanique dans une telle description ; la réponse à cette question a été donnée — implicitement — par Lagrange lui-même : le feuilletage est déterminé par un tenseur d'ordre 2, covariant, antisymétrique : nous le noterons σ et nous l'appellerons *forme de Lagrange* (2) ; les composantes de ce tenseur sont en effet les expressions connues sous le nom de *crochets de Lagrange*.

(1) On suppose donc F connu en fonction de y, c'est-à-dire de t, $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$.

(2) Un tenseur covariant antisymétrique d'ordre p s'appelle une *forme différentielle extérieure de degré p*, ou simplement une *p-forme* (p. 36).

σ peut être considéré comme un opérateur bi-linéaire sur les vecteurs de V; si l'on choisit deux tels vecteurs (Fig. 1)

$$\text{(IX)}\qquad dy = \begin{pmatrix}dt\\ d\mathbf{r}\\ d\mathbf{v}\end{pmatrix}, \qquad \delta y = \begin{pmatrix}\delta t\\ \delta\mathbf{r}\\ \delta\mathbf{v}\end{pmatrix}$$

σ leur fait correspondre une sorte de produit scalaire (antisymétrique !) que nous noterons $\sigma(dy)\,(\delta y)$, et qui vaut (1)

$$\text{(X)}\qquad \langle\, m\, d\mathbf{v} - \mathbf{F}\, dt,\ \ \delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\,\delta t \,\rangle - \langle\, m\,\delta\mathbf{v} - \mathbf{F}\,\delta t,\ \ d\mathbf{r} - \mathbf{v}\, dt \,\rangle$$

les crochets $\langle\ ,\ \rangle$ désignant le produit scalaire habituel ; en comparant avec les équations du mouvement (VIII), on voit que le vecteur dy sera *tangent* à la feuille x passant par y s'il vérifie

$$\text{(XI)}\qquad \sigma(dy)\,(\delta y) = 0 \qquad \forall\, \delta y \ (2)\ ;$$

c'est ce qu'on exprime en disant que la direction du feuilletage est le *noyau* de la forme σ (p. 133).

On peut trouver d'autres tenseurs ayant le même noyau (par exemple les multiples de σ) ; la description d'un système par sa forme de Lagrange, que nous adopterons désormais, est donc *plus complète* que sa description par le seul feuilletage ; l'hypothèse selon laquelle σ possède une *signification physique directe* est essentielle, et peut se confronter avec l'expérience. Ainsi, dans les changements de référentiel de la mécanique classique, nous étudions les formules de transformation de la forme σ, et pas seulement celles des équations du mouvement (p. 139) ; ce qui conduit d'ailleurs à décomposer les forces en deux types distincts (3).

La théorie des formes différentielles (p. 32), depuis les travaux de Henri Poincaré et d'Elie Cartan, est devenue un instrument essentiel de la géométrie moderne (géométrie différentielle) ; elle

(1) Dans chaque problème mécanique nouveau, il faut définir l'équivalent de cette expression (voir pp. 133, 135, 182, 188, 190, 194, 195, 201, 205, etc.) ; nous traitons aussi le cas des systèmes comportant des *liaisons* parfaites, holonomes ou non (p. 134).

(2) Le *principe des travaux virtuels* classique n'est qu'une forme tronquée de cette formule (XI).

(3) Exemples de forces du premier type : le *poids*, l'*attraction électrostatique* ; du second type : la *force de Coriolis*, la *force de Laplace* (exercée par un champ magnétique sur une charge électrique en mouvement).

comporte des opérations et des formules spécifiques, très souples et très puissantes, permettant d'exprimer géométriquement des propriétés dont l'écriture classique est assez laborieuse ; ainsi le fait que la force **F** de l'exemple ci-dessus ne dépend pas des vitesses et dérive d'un potentiel s'écrit simplement

(XII) $$\nabla\sigma = 0$$

le signe ∇ représentant l'opération appelée *dérivation extérieure* (p. 37).

Dans les divers *systèmes dynamiques* que l'on rencontre dans la nature, cette condition (XII) est effectivement vérifiée : nous la proposons donc comme *principe de la mécanique*, sous le nom de *principe de Maxwell* [1].

Ce principe de Maxwell est d'ailleurs nécessaire et suffisant pour que, dans la description du système au moyen de l'espace de phases, les équations du mouvement prennent la forme canonique (V) de Hamilton [2] : le principe de Maxwell contient donc l'essence du formalisme hamiltonien, sans en comporter les inconvénients de formulation (p. 143).

De même, le *principe de moindre action* (formalisme lagrangien) disparaît lui aussi, puisque nous avons renoncé à l'espace de configuration grâce auquel il s'énonce ; or les principes variationnels constituent l'un des guides les plus couramment utilisés en physique théorique, depuis Fermat et Maupertuis jusqu'à nos jours ; il importe donc de savoir si on ne perd rien en remplaçant le formalisme lagrangien par le seul principe de Maxwell.

La réponse est fournie par l'expérience : il existe des systèmes qui vérifient le principe de Maxwell, et dont on démontre qu'ils ne possèdent pas de formalisme lagrangien sous-jacent : il s'agit notamment des *particules polarisées*, ou *particules à spin* [3]. On constate aussi que le lagrangien, lorsqu'il existe, n'a pas toujours la covariance requise (p. 153).

(1) J. C. Maxwell a effectivement formulé ce principe dans certains cas particuliers (pp. 141, 142).

(2) A une restriction près : le hamiltonien H peut être, dans certains cas, une fonction *multiforme* sur l'espace de phases.

(3) (pp. 181, 194). Il y a longtemps que l'on sait écrire les équations classiques ou relativistes (L. H. Thomas, 1927) de ces particules, et qu'on les utilise pratiquement (en particulier pour la mesure des moments magnétiques) ; plusieurs auteurs ont cherché en vain un lagrangien correspondant.

Le « formalisme maxwellien » est donc mieux adapté à la description de la nature.

On peut définir, sans ambiguïté, chaque *mouvement* x du système comme étant une *feuille* (ou ligne de force) de V ; la *causalité* (ou *déterminisme*) du système s'exprime par le fait que chaque *condition initiale* y définit un mouvement x et un seul.

Nous allons maintenant considérer l'*ensemble abstrait* des mouvements (p. 132) ; c'est un espace U dont *chaque point x est un mouvement tout entier* (considéré dans son développement temporel complet).

On peut démontrer que chaque mouvement x peut être repéré par un système de n paramètres, non surabondants, fonctions différentiables des conditions initiales ; à une restriction près : il peut être nécessaire d'utiliser différents systèmes de paramètres (ou « cartes ») pour recouvrir U tout entier (de même que plusieurs cartes sont nécessaires pour figurer la Terre toute entière).

La géométrie différentielle nous fournit un vocabulaire précis (pp. 3, 7, 11) pour énoncer ces propriétés :

(XIII) { L'espace des mouvements U possède une *structure de variété* de dimension n.
La correspondance $y \mapsto x$ (Fig. 1) est une application *différentiable ouverte* de V sur U.

Ainsi, dans l'exemple du point matériel, l'espace des mouvements est une variété de dimension 6 [1].

— Il importe de ne pas confondre les *mouvements* avec les *trajectoires* (qui sont les projections des mouvements sur l'espace de configuration ou l'espace de phases, et que l'on obtient en « oubliant » la loi temporelle du mouvement) ; en général l'ensemble des trajectoires *ne possède pas* de structure de variété déduite de celle de V ou de U ; les « intégrales premières uniformes » ne sont pas assez nombreuses pour repérer les trajectoires [2] ; cet « embrouillement » de l'ensemble des trajectoires est l'origine de ce qu'on appelle les

(1) Dans le cas du mouvement képlérien (p. 123), U est donc une variété de dimension 6 (la « variété de Képler ») ; les 6 nombres nécessaires à repérer un mouvement s'appellent les *éléments de l'orbite*. Il semble que cette variété de Képler soit l'une des premières variétés « abstraites » considérées par les mathématiciens.

(2) Dans bien des cas, il n'existe qu'une seule intégrale première de ce type : l'*énergie*. Mais il y a des exceptions ; ainsi les trajectoires képlériennes forment une variété de dimension 5.

problèmes ergodiques. Cette comparaison entre mouvements et trajectoires montre combien les structures de la géométrie différentielle sont importantes pour la physique.

Le fait que l'application $y \mapsto x$ soit *différentiable* permet la construction suivante : ayant choisi un point y de V, des vecteurs dy et δy (formules IX), on peut définir (p. 7) les vecteurs correspondants dx et δx *dans l'espace U*; par analogie avec la théorie des surfaces, on dit que dx et δx sont des *vecteurs tangents à la variété U au point x* (Fig. 1).

Compte tenu de la condition de Maxwell, on peut démontrer (p. 145) que le tenseur σ « passe à l'espace U » [1], c'est-à-dire qu'on peut définir un tenseur de U, encore noté σ, tel que

(XIV) $$\sigma(dy)(\delta y) \equiv \sigma(dx)(\delta x)$$

si bien qu'il suffit de connaître la forme σ sur U pour pouvoir la calculer sur V; comme dx est nul dès que dy est tangent à la feuille, on voit que le noyau (voir ci-dessus XI) de la forme σ de U est réduit à 0 : on dit que σ est *régulière* sur U [2]; on démontre (p. 146) que la forme σ de U vérifie *aussi* l'équation

(XV) $$\nabla\sigma = 0 .$$

On appelle *variété symplectique* (p. 83) toute variété sur laquelle on a défini une 2-forme σ, régulière, vérifiant l'équation $\nabla\sigma = 0$; les résultats ci-dessus se résument donc en disant que

(XVI) *l'espace des mouvements est une variété symplectique.*

La connaissance de la variété symplectique U permet, si on le désire, de remonter à V [3]; la description d'un système dynamique au moyen de son espace des mouvements est donc *aussi complète* que celle que donne l'espace d'évolution; et elle comporte un avantage important : l'espace des mouvements d'un système *composé* de plusieurs parties indépendantes est le *produit direct* (p. 84) des espaces de mouvements individuels; la description de l'espace d'évolution du système composé à l'aide des espaces d'évolution individuels n'a pas la même simplicité (p. 208).

[1] On dit que la forme de Lagrange est un « invariant intégral » du feuilletage de V (p. 45).
[2] On en déduit que la dimension n de U est nécessairement *paire* (p. 78).
[3] On peut, si l'on veut, considérer V comme le produit direct de U par la *droite temporelle*; la forme de Lagrange de V se calcule par la formule (XIV); le principe de Maxwell est automatiquement vérifié, grâce à (XV).

Nous allons donc désormais (p. 159) *renoncer à l'espace d'évolution* — qui n'aura servi que d'intermédiaire épistémologique; ceci va permettre d'*élargir la mécanique classique*; on pourra traiter des systèmes possédant bien un espace symplectique des mouvements, mais ne possédant pas d'espace d'évolution covariant (p. 192) : un cas typique est celui des *photons*, qui prendront ainsi place dans la mécanique, conformément au vœu de Newton.

Revenons à la mécanique classique; comme nous l'avons vu, la définition même de U implique le *principe de causalité*; choisir U comme *catégorie initiale* de la mécanique, c'est admettre sans restriction la causalité : celle-ci quitte son statut de *résultat* de la théorie, pour en devenir une *condition de cohérence.*

Cette démarche pourra sembler périlleuse à certains; elle est cependant indispensable pour aller plus loin. Rappelons toutefois qu'il ne s'agit que d'un aspect bien particulier de la causalité; nous verrons en particulier que le point de vue adopté ici est parfaitement compatible avec le genre d'« indéterminisme » que l'on rencontre en mécanique statistique et en mécanique quantique.

Notons aussi qu'on ne préjuge pas, en opérant ainsi, de la facilité ou de la difficulté des problèmes posés par la résolution effective des équations du mouvement; les problèmes asymptotiques, par exemple, réapparaissent en temps utile, mais sous un aspect renouvelé (p. 284).

— La considération directe de U met en évidence une situation que l'on pourrait appeler le *paradoxe du physicien* : ce dernier, qui se garde bien d'inventer le monde à priori, pense ne s'occuper que des faits *réels*; or l'évolution réelle d'un système matériel, si complexe soit-il, n'est représentée que par *un seul point x* de la variété U [1]; les autres points n'ont donc qu'une existence *virtuelle*; et c'est pourtant en structurant l'ensemble de ces virtualités que le physicien peut, dans une certaine mesure, expliquer et prévoir le réel.

Certains esprits répugnent à accepter cette prise en considération du virtuel (on peut voir là, notamment, la raison du refus à priori de la valeur explicative des principes variationnels, qui font appel explicitement à des « mouvements virtuels »; on notera que la

[1] Henri Poincaré fait remarquer que les lois physiques concernent tous les mondes possibles, alors que le monde réel « n'est tiré qu'à un seul exemplaire ».

formulation symplectique contient *moins de virtuel* que la formulation variationnelle) ; mais il nous semble préférable de « résoudre » le paradoxe en établissant une *dialectique du réel et du virtuel* ; ce qui est possible grâce à la théorie des groupes.

Il est clair, en effet, que les lois de la physique se découvrent en *comparant* des observations ou des expériences, ce qui permet de traiter divers aspects partiels du réel comme des virtualités différentes ; or deux expériences distinctes occupent nécessairement deux régions différentes de l'espace-temps ; on ne peut donc les comparer qu'en les mettant en *correspondance* ; les correspondances ainsi invoquées opérant à la fois sur l'espace-temps et sur son « contenu ».

On présume essentiellement que ces correspondances conservent la structure du virtuel — faute de quoi la comparaison des expériences resterait stérile ; c'est pourquoi notre connaissance scientifique de la nature procède nécessairement d'un appel, explicite ou implicite, à un ensemble d'isomorphismes du virtuel ; ces isomorphismes constituent généralement un *groupe* [1].

Dans le cas d'un système dynamique, nous avons supposé que le virtuel est composé de l'espace des mouvements U, et que sa structure est symplectique ; ses isomorphismes — ou *symplectomorphismes* — s'en déduisent facilement : ce sont les transformations a telles que :

(XVII)
(1) a est une application bi-univoque (bijection) de U sur lui-même ;
(2) a et son inverse sont différentiables ;
(3) a conserve la forme σ :

$$\sigma(dx)\,(\delta x) \equiv \sigma(d[a(x)])\,(\delta[a(x)]) \qquad [2].$$

[1] Ce groupe diffère selon la théorie physique utilisée ; dans les cas les plus simples (expériences répétées dans un même laboratoire), on utilise le groupe des *translations dans le temps* (elles s'écrivent $\mathbf{r} \to \mathbf{r}$, $t \to t +$ Cte dans le référentiel du laboratoire) ; en relativité générale la notion de groupe est insuffisante, il faut utiliser la notion de *recueil* (ou pseudo-groupe) ; voir à ce sujet *Géométrie et Relativité* (cité p. 173). Nous allons rencontrer les groupes correspondant à la mécanique newtonienne et à la mécanique relativiste.

[2] On exprime successivement que a est un isomorphisme de la structure d'*ensemble* de U (propriété (1)) ; puis de la structure de *variété* (propriétés (1) et (2) ; de tels isomorphismes s'appellent *difféomorphismes*) ; enfin de la structure de variété *symplectique*.

Ces symplectomorphismes de U forment évidemment un *group* (p. 97), que nous noterons Can (U) [1]. Il se trouve — et c'est l une propriété essentielle de la géométrie symplectique — que c groupe est *extrêmement riche* [2] (beaucoup plus, par exemple que le groupe des isomorphismes de la structure euclidienne, qu est un groupe de dimension finie) ; en particulier, chaque *grandeu* susceptible d'être *mesurée* (ou « variable dynamique ») peut êtr associée, par une méthode infinitésimale (p. 102), à un groupe d symplectomorphismes de dimension 1 ; inversement, tout group *de dimension finie* [3] de symplectomorphismes (que nous appelleron *groupe dynamique* [4]) peut être, le plus souvent, associé à un systèm de *variables dynamiques* qui sont, par construction, des « constante du mouvement » : on généralise ainsi (p. 107) un théorème formul par Emmy Noether dans le cas du formalisme lagrangien (p. 72) et dont l'importance physique est considérable.

Un groupe dynamique étant donné, l'ensemble des variable dynamiques ainsi construites s'organise en un être géométrique μ que nous appelons *moment* [5].

Le fait que ce moment ne soit défini, à priori, qu'à une constant additive près, déclenche tout un mécanisme algébrique connu sou le nom de *cohomologie* (p. 108) ; mécanisme qui va jouer un rôl important dans l'étude et la classification des systèmes dynamiques

L'application la plus immédiate de la notion de *groupe dynamiqu* est l'étude de la *covariance* de la mécanique ; en écrivant que l structure de l'ensemble des mouvements d'un système dynamiqu *isolé* est la même relativement à tout référentiel d'inertie (ce qu est la formulation naturelle du principe de relativité galiléenne) on montre qu'un certain groupe de dimension 10, le *groupe d Galilée*, est groupe dynamique d'un tel système (p. 148) ; *ce seul fai* va entraîner un grand nombre de conséquences physiques impor tantes.

[1] Parce que les symplectomorphismes de l'espace de phases classique portent le nor de « transformations canoniques » ; on dit aussi parfois « transformations de contact ».

[2] Dans le cas où U est connexe et séparée, on peut montrer que Can (U) opère transiti vement, c'est-à-dire que, pour tout couple x, x' de points de U, il existe des symplectomoı phismes a tels que $a(x) = x'$; ceux-ci forment encore une classe très nombreuse.

[3] Les groupes de dimension finie s'appellent *groupes de Lie* (p. 47).

[4] La connaissance d'un groupe dynamique est un élément important dans la descriptio d'un système ; nous indiquons des exemples : *oscillateur harmonique*, *atome d'hydrogèn* (pp. 155, 156).

[5] Mathématiquement, le moment μ est un *torseur* du groupe, c'est-à-dire un élémen de l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie ; μ dépend du mouvement x.

Tout d'abord, les 10 composantes du moment μ associé permettent d'attacher à chaque mouvement x des grandeurs physiques dont l'interprétation est facile : l'*énergie*, l'*impulsion*, le *moment cinétique*, le *centre de gravité* (p. 153) ; le *principe d'égalité de l'action et de la réaction* se trouve réduit à l'état de théorème (p. 153) ; on établit — sans se référer à une décomposition du système en points matériels — les « théorèmes généraux » de la mécanique : conservation de l'impulsion, du moment cinétique, de l'énergie ; on démontre que tout mouvement du système peut se décrire par le mouvement rectiligne uniforme du centre de gravité (principe de l'inertie de Galilée) et par le mouvement du système « autour » du centre de gravité (théorème de Koenig) ; l'espace des mouvements est *décomposable* (p. 166) (1).

La cohomologie du groupe de Galilée permet d'associer, à chaque système dynamique, un *nombre* m indépendant du mouvement : m s'interprète comme la *masse* du système (p. 153).

On peut effectuer aussi l'*analyse dimensionnelle* de la mécanique (p. 162) ; on est amené à choisir comme grandeurs fondamentales l'*action* A (2), la longueur L et le temps T ; les équations aux dimensions des grandeurs mécaniques sont mieux ordonnées ainsi qu'avec les grandeurs traditionnelles M, L, T ; c'est la cohomologie qui donne à la masse son statut de grandeur dérivée $M = ATL^{-2}$.

Sans rien changer à la formulation symplectique de la théorie, on passe de la *mécanique classique* à la *mécanique relativiste* en remplaçant simplement les formules classiques de changement de référentiel par les formules de Lorentz : ce qui revient à remplacer, comme groupe dynamique, le groupe de Galilée par le *groupe de Poincaré* (3) ; une analyse parallèle à celle de la mécanique classique nous fournit — comme théorèmes — les *principes de la mécanique relativiste* (p. 173) ; les *différences de structure* entre les groupes de Galilée et de Poincaré nous donnerons des *différences de principe* entre les deux mécaniques : la cohomologie du groupe de Poincaré

(1) Géométriquement, on constate que U est le *produit* de deux variétés symplectiques. Ce fait se manifeste par l'apparition d'un *groupe dynamique* de dimension 14, qui prolonge le groupe de Galilée ; ce groupe contient notamment un sous-groupe SO(3), appelé *groupe de spin* ; nous allons voir qu'il disparaît en mécanique relativiste.

(2) $A = ML^2T^{-1}$ est la dimension de l'action hamiltonienne (IV), d'où son nom ; le rôle qu'elle joue ici vient du fait que c'est la dimension du *produit symplectique* (X). Le fait que A soit aussi la dimension de la *constante de Planck* jouera un rôle essentiel dans la quantification (p. 359).

(3) Appelé aussi « groupe de Lorentz non homogène » ; sa dimension est 10 comme celle du groupe de Galilée (p. 170).

étant nulle, il n'existe plus de nombre caractéristique du système, tel que la *masse* classique : le rôle de la masse est joué par l'*énergie* relativiste, qui *ne contient plus de constante additive arbitraire*, mais qui *dépend du mouvement* (pp. 175, 196) ; par ailleurs la *décomposition barycentrique* disparaît : elle était liée à l'existence d'un sous-groupe privilégié du groupe de Galilée (p. 165) qui n'a pas d'équivalent dans le groupe de Poincaré.

Les systèmes dynamiques les plus simples, à priori, sont ceux tels que le groupe de Poincaré opère *transitivement* (c'est-à-dire que tout mouvement virtuel se déduise du mouvement réel par changement de référentiel) : la géométrie symplectique permet de *classer* complètement ces systèmes « élémentaires ».

Les résultats de cette classification (exposée en détails au § 14 dans les cas physiquement intéressants) montrent que l'on obtient ainsi les *particules élémentaires*, telles qu'on les observe effectivement ; la classification se fait à l'aide de deux nombres m et s dont on possède une interprétation physique complète : on reconnaît la *masse* (au repos) et le *spin* (ou *moment cinétique propre*) ; dans le cas de la masse nulle, un troisième nombre intervient, l'*hélicité*, pouvant prendre les seules valeurs ± 1 : le modèle mécanique ainsi construit s'applique au *photon*, polarisé (circulairement) *à droite* ou *à gauche* suivant le signe de l'hélicité. Une case reste libre pour décrire des particules hypothétiques (tachyons) dont la vitesse serait toujours supérieure à celle de la lumière (p. 192).

Signalons aussi que la théorie permet de classer les comportements possibles de ces diverses particules relativement aux *inversions d'espace et de temps* (p. 197) ; de donner une description *non relativiste* des diverses particules (p. 192) ; le modèle non relativiste du photon, en particulier, dépend (en plus du spin et de l'hélicité) d'un nouveau paramètre, la « couleur » (qui s'interprétera comme *fréquence spatiale* après quantification) ; on constate que l'*optique géométrique classique* se déduit de ce modèle en négligeant le spin (p. 221).

On voit, sur ces divers cas, combien la dialectique réel-virtuel féconde la description, apparemment stérile, du mouvement d'un système par un seul point sur une variété symplectique.

A côté de ces aspects théoriques, la « mécanique symplectique » semble avoir de nombreuses applications pratiques, dont nous traitons quelques exemples.

— Citons tout d'abord le *calcul des perturbations* de Lagrange (p. 147), qui joue un rôle fondamental en mécanique céleste ([1]).

— La théorie d'une *particule dans un champ électromagnétique* comporte une part d'hypothèses à priori, hypothèses dont l'arbitraire peut être limité justement par les axiomes symplectiques ; les équations que nous proposons, dans le cas classique comme dans le cas relativiste (p. 205), semblent concorder avec l'expérience : à côté des effets bien connus de charge (force électrostatique et force de Laplace), elles décrivent les *effets magnétiques de spin* (les effets inertiaux de spin étant connus à priori, et non par analogie avec un rotateur) ; on décrit ainsi les expériences de *précession de spin*, de *résonance magnétique* ; on retrouve les équations de Thomas, Bargman, Michel, Telegdi utilisées pour la mesure précise des moments magnétiques (p. 207).

— La théorie de la *diffusion* (*scattering*) joue un rôle très important en mécanique quantique ; la *théorie non quantique de la diffusion* que nous proposons (p. 213) est très générale : elle s'applique par exemple à l'étude d'un *photon qui traverse un instrument d'optique* (les paramètres dont dépend le photon, *couleur* et *hélicité*, laissent prévoir la *dispersion* et la *biréfringence rotatoire* ; on arrive à des notions importantes pour l'optique géométrique ; telle l'*eikonal angulaire* (p. 221)) ; aux *collisions de particules* ((p. 225) ; on trouve à priori les lois de conservation qui régissent le phénomène) ; à la théorie du *gaz parfait*, permettant de tenir compte des collisions des particules entre elles et avec la boîte qui les contient (p. 282) ; nous étudions en détails le cas exemplaire de la *réflexion d'un photon par un miroir plan* ; le traitement relativiste du phénomène, compte tenu de la polarisation du photon, conduit à quelques conclusions intéressantes (changement de l'hélicité, effet Doppler, etc. (p. 222)).

Sur le plan spéculatif, la théorie de la diffusion a l'intérêt de permettre (en mécanique classique comme en mécanique quantique) une étude indirecte de quelques problèmes que l'on ne sait pas traiter directement à l'heure actuelle ; le plus « scandaleux » étant celui de l'*interaction relativiste des particules* ; problème qui ne

([1]) Si l'on cherche, par les méthodes classiques du calcul différentiel, comment varient les éléments de l'orbite d'une planète sous l'effet d'une force perturbatrice, un calcul extrêmement touffu aboutit à ces équations découvertes par Lagrange ; équations dont la simplicité est frappante. La recherche des raisons de cette simplicité a certainement été un facteur essentiel de progrès et de découverte en mécanique théorique.

pourra probablement se résoudre qu'en abandonnant quelques unes de nos idées reçues (pp. 212, 213).

La *mécanique statistique* se formule très simplement à l'aide de l'espace des mouvements U ; il suffit de décrire le comportement du système, non par un *point* de U, mais par une *loi de probabilité* sur U, ou « état statistique » (p. 281) ([1]).

On définit directement l'*entropie* d'une telle loi de probabilité (p. 275) ; en écrivant que l'entropie est *maximum* (compte tenu de certaines conditions associées à un *groupe dynamique*) on définit un *ensemble d'états statistiques* généralisant l'*ensemble canonique de Gibbs*, et possédant quelques propriétés mathématiques intéressantes (p. 276).

Le cas classique correspond au groupe dynamique des *translations dans le temps* ; en admettant à priori que les équilibres statistiques appartiennent à l'ensemble de Gibbs associé, on retrouve facilement les principes et les notions de la thermodynamique classique (température, énergie, chaleur, travail, entropie, potentiels thermodynamiques) et de la théorie cinétique des gaz (pression, chaleurs spécifiques, loi de distribution des vitesses de Maxwell, etc.) (pp. 287 à 297).

Mais si l'on admet aussi les ensembles de Gibbs associés aux divers sous-groupes du groupe de Galilée ou du groupe de Poincaré, on décrit de *nouveaux phénomènes* d'une façon qui semble conforme à l'expérience : *gaz parfaits relativistes* (p. 306) ; *rotation des corps célestes* (p. 305) ; *centrifugeuses*, classiques (p. 303) ou relativistes (p. 308) ; on peut par exemple prévoir l'orientation statistique du spin à l'intérieur d'une centrifugeuse (p. 303).

Dans cette formulation *covariante* de la mécanique statistique, le rôle de la *température* classique est dévolu à un *quadrivecteur* (p. 308) qui indique, en plus de la *température propre*, la *vitesse moyenne* du milieu étudié ; l'orientation temporelle du vecteur température explique pourquoi les particules de masse négative (de même que les tachyons) sont exclus des équilibres que nous connaissons ; on peut conjecturer que ce vecteur figure la « flèche du temps », et trouver ainsi un moyen d'échapper au paradoxe

([1]) La description correspondante sur l'espace de phases constitue un formalisme compliqué, nécessitant une équation aux dérivées partielles au sens des distributions.

d'une irréversibilité statistique fondée sur des lois élémentaires réversibles ; mais il serait agréable de posséder une formulation de la thermodynamique *valable en dehors des états d'équilibres* qui ne se réduise pas à une « thermostatique » adaptée par quelques coups de pouce.

Parmi les exemples traités figure celui de l'*équilibre statistique des photons* à l'intérieur d'une boîte ; en partant du modèle de photon établi précédemment, en admettant l'*indiscernabilité* des photons (1), et en traitant le *nombre* des photons comme une variable aléatoire (2) on obtient une description cohérente du *rayonnement du corps noir*, fournissant notamment la *loi de Stefan-Boltzmann* et la *pression de radiation* (p. 312) ; mais la répartition spectrale obtenue (3) diffère quantitativement de la loi observée (loi de Planck) : on atteint les limites de validité de la mécanique statistique, qui doit être remplacée par la mécanique quantique.

Une des idées fondamentales de la mécanique quantique consiste à « remplacer » les grandeurs de la mécanique classique (variables dynamiques) par des *opérateurs* (appelés *observables*) vérifiant un certain nombre de conditions ; dans la formulation de Dirac, on doit associer linéairement aux variables dynamiques u, v, ... des opérateurs $\hat{u}$, $\hat{v}$, ... de sorte que

$$\begin{cases} \hat{u}.\hat{v} - \hat{v}.\hat{u} \equiv - i\hbar\widehat{[u, v]_P} \\ \hat{1} = \text{opérateur identique} \quad (4). \end{cases}$$

Nous donnons une *solution explicite* de ce « problème de Dirac » (XVIII) (p. 361) ; cette solution passe par la construction d'une variété Y, associée par certaines règles à la variété symplectique U des mouvements classiques : nous dirons que Y est une *variété quantique* (5) et que la construction de Y est une *quantification* de U (pp. 318, 319).

(1) Cette indiscernabilité possède une formulation symplectique précise (p. 209).
(2) Grâce à la notion de « variété de Fock » (p. 310) que nous allons rencontrer à nouveau.
(3) La référence à un modèle mécaniste de photon permet d'échapper aux divergences qui rendent incohérente la loi de Rayleigh-Jeans (« catastrophe ultra-violette »).
(4) $\hbar$ est le quotient par 2π de la constante de Planck ; l'expression $[u, v]_P$ désigne le *crochet de Poisson* de u et v ; c'est une nouvelle variable dynamique, dont la définition est purement symplectique (p. 88).
(5) La *structure quantique* d'une variété se définit uniquement à l'aide d'une 1-forme ϖ (p. 318), vérifiant certains axiomes.

On peut formuler des conditions nécessaires et suffisantes pour que la quantification d'une variété symplectique U soit possible (pp. 321 à 323) ; il se trouve que ces conditions semblent vérifiées dans le cas des systèmes dynamiques que l'on rencontre dans la nature (1) ; on doit donc examiner si les *variétés quantiques* ainsi construites peuvent jouer un rôle dans la formulation de la mécanique quantique.

Notons d'abord que la quantification de l'espace des mouvements, unique dans le cas d'une particule élémentaire (p. 342), peut dans certains cas posséder *plusieurs solutions essentiellement distinctes* ; nous donnons une règle permettant de *recenser les quantifications distinctes* (p. 341) ; cette règle est basée sur la théorie de l'*homotopie* (p. 16). On montre ainsi qu'un système de particules indiscernables possède *exactement deux quantifications* : elles semblent toutes deux réalisées dans la nature (« statistique de Bose-Einstein », « statistique de Fermi-Dirac ») ; contrairement à d'autres quantifications qui ont été proposées (« parastatistiques ») mais qui n'entrent pas dans le présent cadre géométrique.

Nous montrons que les *fonctions d'onde* usuelles de la mécanique quantique peuvent se décrire au moyen de fonctions définies *sur la variété quantique elle-même* (on passe à la description spatio-temporelle usuelle par une transformation de Fourier) ; on trouve ainsi l'*équation de Schrödinger* (p. 369), l'*équation de Klein-Gordon* (p. 372), l'*équation de Dirac* (p. 376), les *équations de Maxwell* quantiques (p. 382), et d'autres (pp. 374, 378). Dans tous ces exemples, on dispose d'une règle systématique pour définir les observables classiques : *impulsion*, *énergie*, *moments*, *position*.

Le cas des « assemblées » de particules indiscernables, en nombre indéterminé, se traite par la même méthode, à partir d'une hypothèse très simple : un mouvement classique de l'assemblée est une *partie finie* de l'espace U des mouvements classiques d'une seule particule.

L'espace U_Φ des mouvements de l'assemblée ainsi défini possède encore une structure de variété symplectique ; nous l'appelons « variété de Fock ».

(1) Dans le cas des particules élémentaires (classiques ou relativistes), il faut et il suffit que le spin (moment cinétique propre) soit un multiple entier de $\hbar/2$ (pp. 328, 332, 335) : ce qui est conforme à l'expérience.

En appliquant à la variété de Fock la quantification de Bose-Einstein ou la quantification de Fermi-Dirac, on voit apparaître les notions et les relations algébriques constituant le formalisme de la « seconde quantification » : *vide quantique* (p. 387), *créateurs* et *annihilateurs* (pp. 386 à 392).

La notion de *variance* se présente ici sous un aspect nouveau, que nous allons esquisser.

Les *isomorphismes de la structure quantique* de Y (ou « *quantomorphismes* ») forment un groupe; chaque quantomorphisme « descend » sur l'espace U des mouvements classiques, et y définit un *symplectomorphisme*.

Réciproquement, on peut chercher à « relever » les symplectomorphismes de U; le problème du relèvement, par un groupe de symplectomorphismes, d'un *groupe dynamique*, conduit à quelques situations non triviales.

Ainsi, dans le cas d'un système linéaire, le groupe des translations se relève par un groupe non abélien, le *groupe de Weyl* (p. 349); dans le cas d'une particule non relativiste, les éléments du groupe de Galilée sont relevables individuellement, mais le groupe *n'opère pas* directement sur la variété quantique Y; ni donc sur les solutions de l'équation de Schrödinger ; c'est V. Bargman qui a montré l'origine *cohomologique* de ce fait — origine qui est en évidence ici (p. 371). On peut faire opérer le *groupe de Poincaré* dans le cas d'une particule relativiste de spin entier [1] ; au contraire, dans le cas du spin $\hbar/2$, ce n'est pas le groupe de Poincaré que l'on peut relever, mais un *revêtement* (p. 14) de ce groupe : ainsi s'explique la variance paradoxale des êtres géométriques utilisés pour l'écriture spatio-temporelle de l'équation de Dirac, les *spineurs*, qui « ne font qu'un demi-tour quand l'espace fait un tour complet » [2].

La description d'un « état » est un problème fondamental de la mécanique quantique; initialement, un état était un *vecteur unitaire* de l'espace de Hilbert sur lequel opèrent les observables ; avec la construction de l'espace de Hilbert proposée ici (p. 357),

(1) Dans le cas du photon, on retrouve ainsi la nature *vectorielle* du potentiel maxwellien A qui correspond à une fonction *scalaire* sur la variété quantique Y (p. 382).

(2) On peut chercher d'autres voies pour expliquer ce paradoxe : postuler une interprétation directe du revêtement du groupe de Poincaré (ce qui revient à modifier la relativité d'une façon qui semble incompatible avec la relativité générale) ; ou bien décrire la fonction d'onde par des êtres géométriques ordinaires, choisis de façon à caractériser le spineur *au signe près* (mais une telle description fait disparaître le caractère linéaire de l'équation d'ondes) ; de tels artifices deviennent ici inutiles.

il est facile d'associer à chaque « état quantique » un « état statistique », c'est-à-dire une loi de probabilité sur l'espace des mouvements classiques : ainsi se trouve formalisée l'*interprétation probabiliste* de la mécanique quantique (p. 360).

Mais on a vite découvert que cette notion d'état n'était pas suffisante pour recouvrir tous les cas expérimentaux ; par exemple les états de la chimie quantique se décrivent par le formalisme de l'« opérateur densité » (p. 397). Plus fondamentalement, on rencontre des états qui ont bien une description vectorielle, mais qui n'appartiennent pas à l'espace de Hilbert postulé initialement [1].

Ces difficultés disparaissent dans la formulation axiomatique de la mécanique quantique basée sur la théorie des C^*-algèbres ; nous proposons ici une solution un peu analogue : elle consiste à considérer les *états quantiques* comme des fonctions définies *sur le groupe des quantomorphismes* de Y, et vérifiant certains axiomes (p. 396) ; en particulier les états sont des « fonctions de type positif » sur ce groupe (p. 395).

Cette définition permet le calcul des *valeurs moyennes quantiques* (p. 396) ; dans certains cas, on peut associer à ces états de nouveaux espaces hilbertiens et des vecteurs de ces espaces (grâce à la construction de Gelfand-Naimark-Segal ; p. 398), ce qui résout certaines difficultés, mais pose de nouveaux problèmes.

De toutes façons, la méthode de quantification exposée ici reste conjecturale : si elle a l'avantage d'être intrinsèque, de donner un sens précis au principe de correspondance (p. 358), et de réunir dans une vue cohérente divers aspects de la mécanique quantique dont les liens logiques ne sont pas évidents autrement, elle laisse ouverts beaucoup de problèmes mathématiques et de questions d'interprétation : nous la présentons surtout comme un sujet de réflexion pour le chercheur.

Ce livre contient des développements de mathématiques pures, qui peuvent être lus indépendamment du reste ; cette lecture ne demande pas d'autres connaissances que celles du premier cycle des Facultés des Sciences.

Le chapitre I est un exposé des *résultats essentiels de la géométrie différentielle* (voir le détail dans la table des matières) ; nous ne

(1) C'est le cas, ici, pour les *fonctions d'onde* des particules élémentaires (p. 370).

donnons que les démonstrations qui servent directement à la compréhension des questions abordées ; le lecteur pourra trouver les autres dans les traités spécialisés.

Le chapitre II, consacré à la *géométrie symplectique*, contient, non seulement les résultats classiques de la théorie (voir la table), mais aussi l'étude détaillée des théorèmes de type *cohomologique* mis en jeu par la notion abstraite de groupe dynamique ; ainsi que la génération réciproque de variétés symplectiques à partir des groupes de Lie ([1]).

Le § 16 (Chap. IV) est consacré à la notion de *mesure* sur une variété ; les démonstrations qui ne sont pas données se trouvent dans le traité de Bourbaki. Le texte est illustré d'exemples variés : convolution sur un groupe de Lie, variables aléatoires, moments, loi normale de Gauss, ensemble de Gibbs d'un groupe dynamique, photométrie classique.

Le § 18 est, lui aussi, purement mathématique ; il semble d'ailleurs que la « quantification géométrique » qui y est exposée puisse servir dans les problèmes de représentation unitaire des groupes ([2]). Nous en profitons d'ailleurs pour énoncer les définitions essentielles de cette théorie, espaces de Hilbert et C^*-algèbres notamment.

Le lecteur physicien pourra commencer la lecture de ce livre par le chapitre III, qui part de l'aspect le plus classique de la mécanique ; puis par les § 17 (mécanique statistique) et 19 (quantification des systèmes) ; il verra comment certaines *structures mathématiques* apparaissent naturellement dans l'étude des systèmes dynamiques ; le but de ce livre serait atteint si cela pouvait lui donner le goût d'en approfondir l'étude et de les utiliser comme instrument de recherche.

([1]) Cet algorithme joue un rôle essentiel dans des recherches récentes sur la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie, à la suite de travaux dus notamment à Dixmier, Kirillov, Bernat, Gelfand, Kostant, Auslander.

([2]) Voir R. F. Streater, University of Maryland, Technical Report N° 707 (1967).