



Chapitre III

Mécanique

§ 12 STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE

POINT MATÉRIEL

- (12.1) — La mécanique classique considère le monde comme formé de *points matériels* : un point matériel, caractérisé par sa *masse* m (non nulle), occupe à chaque *instant* t un *point géométrique* \mathbf{r} ; sa *vitesse* est par définition le vecteur $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$; on suppose connue la *force* \mathbf{F} à laquelle le point matériel est soumis, et l'on écrit l'*équation de Newton*

(12.2)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

Exemple

(12.3)

- Dans le cas du *champ coulombien*, on suppose

$$\mathbf{F} \equiv -km \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

k étant une constante donnée ($r = \|\mathbf{r}\|$ est la distance du point matériel à l'origine O choisie dans l'espace) ; on vérifie immédiatement, par dériva-

tion, que les vecteurs $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ et $\mathbf{e} = \frac{1}{k} \mathbf{l} \times \mathbf{v} + \frac{\mathbf{r}}{r}$ sont constants ;

ces vecteurs sont d'ailleurs orthogonaux.

Par élimination de $\dot{\mathbf{v}}$, on trouve

(12.4)

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{r} \rangle \equiv 0 \quad \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle + \frac{l^2}{k} \equiv r$$

ces relations constituent l'*équation de la trajectoire* : on constate immédiatement qu'il s'agit (si \mathbf{l} n'est pas nul) d'une branche de *conique* de *foyer* O , d'*excentricité* $e = \|\mathbf{e}\|$, de *paramètre* $\frac{l^2}{ke}$, dont le *plan* est perpendiculaire à \mathbf{l} , conique qui se réduit à un cercle si $e = 0$.

— Pour $0 < e < 1$ (trajectoire elliptique), on déduit de (12.4) qu'il existe un nombre u (appelé *anomalie excentrique*) tel que

$$(12.5) \quad \mathbf{r} = \frac{e}{ek} \frac{l^2}{1 - e^2} (e - \cos u) + \frac{e \times \mathbf{l}}{ek} \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} \sin u$$

en portant cette valeur de \mathbf{r} dans l'expression de \mathbf{l} , on trouve une équation différentielle en u qui s'intègre immédiatement et fournit l'équation de Képler

$$(12.6) \quad u - e \sin u \equiv k^2 \frac{[1 - e^2]^{3/2}}{l^3} [t - t_0]$$

t_0 étant une constante.

Connaissant les paramètres \mathbf{l} , e , t_0 , (12.6) et (12.5) permettent de calculer \mathbf{r} en fonction de t ; le mouvement est donc complètement connu; il est conforme aux lois empiriques découvertes par Képler (entre 1605 et 1618) pour le mouvement des planètes.

SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS

Si l'on étudie le mouvement d'ensemble d'un système de points matériels, repérés chacun par un numéro j ($j = 1, 2, \dots, N$), on écrit les équations simultanées

$$(12.7) \quad \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j \quad m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \mathbf{F}_j$$

La mécanique céleste, fondée par Newton (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687) consiste, en première et très bonne approximation, dans le *problème des N corps* : on considère les astres constituant le système solaire comme des points matériels, et on leur applique les équations (12.7), en prenant

$$(12.8) \quad \mathbf{F}_j = C \sum_{\substack{k \\ [k \neq j]}} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3}$$

C étant une constante universelle (constante de Newton).

Il n'est pas nécessaire de faire le bilan des succès de la théorie de Newton : la précision extrême des observations astronomiques n'a pas réussi à la mettre en défaut, jusqu'à une époque récente.

LIAISONS

— L'expérience a montré qu'il était légitime d'appliquer les principes (12.7) de la mécanique classique à des systèmes très divers; mais il est souvent difficile de connaître les forces \mathbf{F}_j ; on est donc souvent obligé de faire des approximations.

L'une des approximations les plus utilisées consiste à considérer un système comme *lié*, c'est-à-dire à écrire des équations de liaison

$$(12.9) \quad u_\lambda(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0 \quad [\lambda = 1, 2, \dots, p]$$

qui sont supposées vérifiées pour *tous* les mouvements du système (exemple : un *solide* est un système de points matériels dont les distances mutuelles sont supposées constantes — bien que les « solides » réels soient toujours élastiques, et susceptibles de vibrations); nous écrivons les équations de liaison sous la forme :

$$(12.10) \quad u \equiv \begin{pmatrix} u_1(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \\ \dots \\ u_p(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \end{pmatrix} = 0$$

en introduisant une variable u à valeurs dans R^p . Nous considérerons l'équation dérivée

$$(12.11) \quad u_t dt + \sum_j u_{r_j} (d\mathbf{r}_j) = 0$$

avec

$$(12.12) \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_{r_j} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_j} \quad (\text{notation (2.21)})$$

Pour traiter un problème dynamique comportant des liaisons, on suppose bien entendu toujours valables les équations

$$(12.13) \quad \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} - \mathbf{v}_j = 0$$

dont la condition de compatibilité avec (12.10) s'écrit

$$(12.14) \quad \boxed{u' \equiv u_t + \sum_j u_{r_j}(v_j) = 0} \quad (1)$$

mais on écrit la loi de Newton sous la forme

$$(12.15) \quad \boxed{m_j \frac{dv_j}{dt} = F_j + F'_j}$$

F_j étant la force « appliquée », supposée connue, et F'_j un terme supplémentaire, appelé « force de liaison », dont l'existence permet la compatibilité des équations.

Cette condition de compatibilité ne suffit pas, en général, à déterminer les forces de liaison ; on fait à leur sujet diverses hypothèses empiriques (« lois du frottement » par exemple) dont les succès sont assez aléatoires.

Cependant l'une de ces hypothèses conduit à des résultats cohérents, et conformes à une certaine idéalisation des expériences : c'est le cas des liaisons parfaites ; il se formule au moyen du principe des travaux virtuels suivant :

$$(12.16) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Si des vecteurs } \delta r_j \text{ vérifient} \\ \sum_j u_{r_j}(\delta r_j) = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

on a

$$\sum_j \langle F'_j, \delta r_j \rangle = 0 \quad (3)$$

Exemples

(12.17) Etudions le principe des travaux virtuels dans le cas d'un solide ; à cet effet, il est utile de remarquer que les permutations de l'espace euclidien

(1) Lorsque cette condition est vérifiée, on dit que l'état des vitesses est compatible avec les liaisons ; si on cherche à établir une liaison avec un état de vitesse incompatible, on produit un choc.

(2) On dit que les vecteurs δr_j sont des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à chaque instant.

(3) Cette expression s'appelle travail virtuel des forces de liaison (dans le déplacement virtuel du système défini par les δr_j).

ordinaire R^3 qui conservent les distances (« déplacements ») peuvent être considérés comme le groupe de Lie G des matrices $\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[A \in O(3), b \in R^3] \text{ opérant sur } R^3 \text{ selon la règle } \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{R^3} (r) = A(r) + b ;$$

on montre qu'un système de déplacements virtuels δr_j est compatible avec les liaisons du solide s'il existe un Z dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G tel que

$$(12.18) \quad \delta r_j = Z_{R^3}(r_j) \quad \forall j \text{ (notation (6.11))}$$

le champ de vecteurs Z_{R^3} s'appelle d'ailleurs un déplacement infinitésimal. Le principe des travaux virtuels (12.16) peut donc s'écrire

$$(12.19) \quad \Theta_I + \Theta_F = 0$$

si l'on a posé

$$(12.20) \quad \begin{cases} \Theta_F(Z) = \sum_j \langle F_j, Z_{R^3}(r_j) \rangle \\ \Theta_I(Z) = - \sum_j \left\langle m_j \frac{dv_j}{dt}, Z_{R^3}(r_j) \right\rangle \end{cases} \quad \forall Z \in \mathcal{G}$$

Θ_F et Θ_I sont visiblement des applications linéaires de \mathcal{G} dans R , c'est-à-dire des torseurs du groupe des déplacements, au sens (11.7) ; on les appelle respectivement torseur des forces appliquées au solide et torseur des forces d'inertie.

— Il est facile de mettre l'équation (12.19) sous la forme

$$(12.21) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum_j m_j v_j \equiv \sum_j F_j \\ \frac{d}{dt} \sum_j m_j r_j \times v_j \equiv \sum_j r_j \times F_j \end{cases}$$

où apparaissent les grandeurs classiques appelées impulsion, moment cinétique, résultante générale, moment résultant ; ces équations (12.21) sont généralement considérées comme les principes de la mécanique du solide. ■

(12.22) — Dans le cas d'un point mobile sur une courbe ou une surface, le principe des travaux virtuels exprime que la force de liaison est constamment perpendiculaire à la courbe (ou à la surface) : la liaison de glissement est donc parfaite lorsqu'elle a lieu sans frottement. ■

EXPRESSION DES FORCES

Quand on considère comme « connues » les forces auxquelles sont soumis les points matériels d'un système dynamique, on suppose qu'il existe des fonctions Φ_j telles que

$$(12.23) \quad F_j \equiv \Phi_j(t, r_1, \dots, r_N, v_1, \dots, v_N)$$

autrement dit, chaque force peut dépendre du temps, de la position et de la vitesse de chacun des points.

Il peut arriver, bien entendu, que certaines de ces variables n'interviennent pas explicitement dans l'expression des forces :

Par exemple, les forces ne dépendent ni du temps, ni des vitesses, dans le cas du problème des N corps (12.8).

(12.24) A priori, on peut supposer d'autres expressions pour les forces : ainsi dans le cas des systèmes héréditaires, on suppose que chaque force dépend par une expression intégrale, de tout le mouvement passé du système. Mais en fait, de telles hypothèses sont plutôt des artifices destinés à donner une description phénoménologique d'un système imparfaitement connu, et leur cohérence n'est pas assurée automatiquement.

En fait, les principes de la Mécanique supposent implicitement l'existence de relations de la forme (12.23) ; c'est cette hypothèse que nous ferons désormais.

ESPACE D'ÉVOLUTION

Dans ces conditions, les équations différentielles de la mécanique, dites aussi équations du mouvement, s'écrivent :

$$(12.25) \quad \frac{dr_j}{dt} - v_j \equiv 0 \quad m_j \frac{dv_j}{dt} - \Phi_j(t, r_1, \dots, r_N, v_1, \dots, v_N) \equiv 0$$

Il est facile de donner la forme standard du § 5 à ces équations ; puisqu'elles expriment les dr_j et dv_j en fonction linéaire de dt , avec des coefficients

(1) Tel par exemple qu'une boîte contenant un gyroscope dont on ignorerait l'existence, ou qu'un système asservi si on ignore la structure du mécanisme d'asservissement.

dépendant de t , des r_k , et des v_k , il suffit de considérer (Fig. 12.1) l'ensemble des multiplets (1)

$$y \equiv \begin{pmatrix} t \\ r_1 \\ \dots \\ r_N \\ v_1 \\ \dots \\ v_N \end{pmatrix}$$

et le champ $[y \mapsto \mathcal{E}]$ de sous-espaces vectoriels de dimension 1 défini par

$$\{ dy \in \mathcal{E} \} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} dr_j - v_j dt = 0 \\ m_j dv_j - \Phi_j(t, r_1, \dots, r_N, v_1, \dots, v_N) dt = 0 \end{array} \right\} \quad \forall j$$

pour que les solutions des équations du mouvement soient les lignes de force du champ $[y \mapsto \mathcal{E}]$ (voir (5.10)).

Nous supposons désormais — ce qui ne semble pas contredire par l'expérience — que les expressions Φ_j des forces sont différentiables (au sens du § 1) ; ceci suppose, nous le savons, que l'ensemble (appelons-le V) où est défini le champ $y \mapsto \mathcal{E}$ est un ouvert de l'espace vectoriel

$$R \times \underbrace{R^3 \times \dots \times R^3}_N \times \underbrace{R^3 \times \dots \times R^3}_N$$

auquel appartient, a priori, la variable y (12.26) ;

(29) V possède donc une structure de variété de dimension $6N + 1$; nous dirons que V est l'espace d'évolution du système.

De plus, l'hypothèse de différentiabilité des Φ_j montre que le champ $y \mapsto \mathcal{E}$ est lui-même différentiable, au sens (5.2).

Nous pouvons donc appliquer les résultats du § 5 [(5.5), (5.10), (5.9)] :

(30) Le champ $y \mapsto \mathcal{E}$ (12.27) donne à l'espace d'évolution V une structure de variété feuilletée ; par chaque point y de V passe une ligne de force (2) : la feuille de y est la plus grande ligne de force connexe passant par y ; nous la considérerons désormais comme le mouvement du système défini par la condition initiale y .

(1) y s'appelle une condition initiale du système.

(2) C'est-à-dire une variété intégrale (de dimension 1).

ESPACES DE PHASES ET ESPACE DES MOUVEMENTS

(12.31) — Puisque la variable t figure dans l'expression (12.26) de y , il existe une application $[y \mapsto t]$ de l'espace d'évolution V sur le temps (Fig. 12. I); on appelle *espace de phases à l'instant t_0* la partie de l'espace d'évolution V définie par l'équation $t = t_0$; il est immédiat de vérifier que l'application $[y \mapsto t]$ est différentiable (1.17), et que les espaces de phases sont des variétés plongées dans V , de dimension $6N$; il est clair, en particulier, que l'application

(12.32)

$$\begin{array}{c}
 m_1 x'_1 \\
 m_1 y'_1 \\
 m_1 z'_1 \\
 \dots \\
 m_N x'_N \\
 m_N y'_N \\
 m_N z'_N \\
 x_1 \\
 y_1 \\
 z_1 \\
 \dots \\
 x_N \\
 y_N \\
 z_N
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 t_0 \\
 r_1 \\
 \dots \\
 r_N \\
 v_1 \\
 \dots \\
 v_N
 \end{array}$$

est une *carte* de l'espace de phases à l'instant t_0 ⁽¹⁾.

(12.33) — Bien qu'il constitue un objet usuel de considération, nous n'utiliserons pas l'espace de phases « intemporel », déduit du précédent en négligeant de préciser la date t_0 ⁽²⁾.

⁽¹⁾ x_j, y_j, z_j (resp. x'_j, y'_j, z'_j) sont les coordonnées cartésiennes de r_j (resp. de v_j); l'introduction des masses m_j pour l'instant simple fantaisie, sera utile en (12.103).

⁽²⁾ On peut préciser sa structure en identifiant deux conditions initiales y_1 et y_2 qui ne diffèrent « que par la date » (de même qu'on a l'habitude d'identifier des points de l'espace à des instants différents); mais cette identification est incompatible avec l'invariance galiléenne; on ne peut lui donner une définition qu'en se rapportant à un référentiel arbitraire — la Terre par exemple.

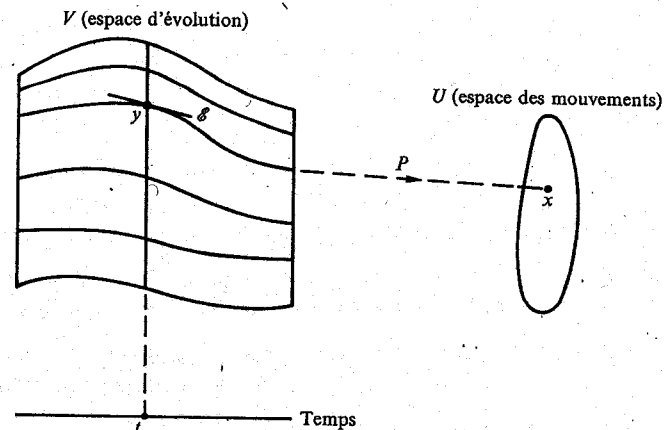
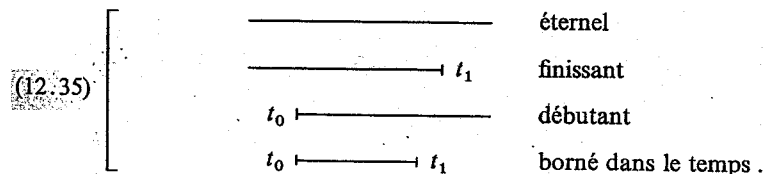


Fig. 12. I.

(12.34) — Si l'on fait $dt = 0$ dans l'équation $dy \in \mathcal{E}$ (voir (12.27)), on trouve immédiatement $dr_j = 0, dv_j = 0$ (les masses étant supposées non nulles), d'où $dy = 0$; par conséquent $\mathcal{E} \cap \ker\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)$ est réduit à 0; chaque espace de phases $t = t_0$ est donc transversal au feuilletage (définition (5.14)).


Nous savons aussi que le feuilletage donne à V une structure de variété de dimension 1, dont les composantes connexes sont les feuilles [(5.7), (5.8)]; la condition de transversalité exprime que $\frac{\partial t}{\partial y}$ n'est pas nul sur l'espace vectoriel (\mathcal{E}) tangent à V pour cette nouvelle structure, c'est-à-dire que $\frac{\partial t}{\partial y}$ ne s'annule pas sur cette variété de dimension 1. On peut en déduire que l'application $y \mapsto t$ est un difféomorphisme sur chaque composante connexe, et que par conséquent chaque feuille possède une *carte* $t \mapsto y$; on peut montrer aussi que l'ensemble de définition de $t \mapsto y$ est un intervalle ouvert, borné ou non (supérieurement et inférieurement).

Ce résultat peut aussi s'établir par application directe du théorème général (3.2) concernant les équations différentielles. Il permet de classer les mouvements d'un système mécanique en quatre types éventuels, suivant le schéma suivant :



(12.36) Ces quatre cas peuvent se présenter effectivement, par exemple dans le cas de l'attraction coulombienne : les mouvements rectilignes, dans lesquels le vecteur \mathbf{l} (12.3) est nul, aboutissant à des chocs du point mobile avec le centre attractif.

(12.37) Nous voyons de plus que chaque espace de phases $t = t_0$ ne coupe une feuille qu'en un point au plus, donc qu'il constitue une section transversale du feuilletage (5.15); celui-ci est donc sécable (5.15), puisqu'il passe un espace de phase $t = t_0$ par chaque point y de \mathcal{E} ; par application de (5.16), on arrive au résultat suivant (Fig. 12.1) :

(12.38)  L'ensemble U des mouvements d'un système dynamique possède une structure de variété, quotient de l'espace d'évolution V par son feuilletage; si l'on désigne par $P(y)$ le mouvement défini par la condition initiale y , P est une application différentiable de V sur U ; la restriction de P à un espace de phase $t = t_0$ est un difféomorphisme de cet espace de phase à U (¹).

(12.39) — U est une variété de dimension $6N$: si on choisit un instant t_0 , et si on désigne par F_{t_0} la carte (12.32) de l'espace de phase à l'instant t_0 , $P \cdot F_{t_0}$ est une carte de l'espace des mouvements (5.16); en faisant varier t_0 , on obtient évidemment un atlas de U .

FORME DE LAGRANGE

Revenons à l'espace d'évolution V , et posons *a priori* :

(12.40)
$$\sigma(dy) (\delta y) = \sum_j \langle m_j dv_j - F_j dt, \delta r_j - v_j \delta t \rangle - \sum_j \langle m_j \delta v_j - F_j \delta t, dr_j - v_j dt \rangle .$$

Il est clair que σ est une 2-forme de V (Définition (4.26)), et que l'équation différentielle du mouvement $dy \in \mathcal{E}$ (Notation (12.27)) entraîne

(12.41)
$$\sigma(dy) (\delta y) = 0 \quad \forall \delta y$$

ce qui s'écrit aussi, avec la convention (4.2)

(12.42)
$$\sigma(dy) = 0 ,$$

soit

(12.43)
$$dy \in \ker (\sigma) .$$

(¹) Mais pas nécessairement sur U : on laisse ainsi échapper les mouvements qui seraient éventuellement déjà finis ou pas encore commencés à la date t_0 .

Cette 2-forme σ a été introduite par Lagrange, dans l'étude de la mécanique céleste, dès 1808 (¹) — au langage près, bien entendu. Son expression directe (12.40) se trouve dans Gallissot (²).

Pour des raisons qui vont apparaître plus loin, nous généraliserons la formule (12.40) en choisissant des vecteurs \mathbf{B}_j , fonctions différentiables de y sur V , et en posant

(12.44)

$$\mathbf{E}_j \equiv \mathbf{F}_j + \mathbf{B}_j \times \mathbf{v}_j \quad \forall j$$



(12.45)

$$\sigma(dy) (\delta y) \equiv \sum_j \langle m_j dv_j - \mathbf{E}_j dt, \delta r_j - v_j \delta t \rangle - \sum_j \langle m_j \delta v_j - \mathbf{E}_j \delta t, dr_j - v_j dt \rangle + \sum_j \langle \mathbf{B}_j, dr_j \times \delta r_j \rangle$$

σ est encore une 2-forme, que nous appellerons *forme de Lagrange*; le champ $y \mapsto \sigma$ est différentiable sur l'espace d'évolution V .

— Par des transformations élémentaires, on trouve la formule équivalente à (12.45) :

(12.46)
$$\left[\begin{array}{l} \sigma(dy) (\delta y) \equiv \sum_j \langle m_j dv_j - [\mathbf{E}_j - \mathbf{B}_j \times \mathbf{v}_j] dt, \delta r_j - v_j \delta t \rangle - \sum_j \langle m_j \delta v_j - \mathbf{E}_j \delta t + \mathbf{B}_j \times \delta r_j, dr_j - v_j dt \rangle \end{array} \right] \quad (3)$$

qui montre que l'équation $\sigma(dy) (\delta y) = 0$ [$\forall \delta y$] peut s'écrire

(12.47)
$$\left\{ \begin{array}{l} m_j dv_j - \mathbf{F}_j dt = 0 \\ dr_j - v_j dt = 0 \end{array} \right. \quad \forall j .$$

(12.48)

Par conséquent les équations du mouvement peuvent s'écrire



$$\sigma(dy) = 0 ;$$

l'espace vectoriel \mathcal{E} de (12.27) est égal à $\ker (\sigma)$.

(12.49)

— Ce résultat est indépendant du choix des \mathbf{B}_j ; il s'applique en particulier au cas $\mathbf{B}_j \equiv 0, \mathbf{E}_j \equiv \mathbf{F}_j$, où la forme de Lagrange se réduit à l'expression (12.40).

(¹) « Mémoires de la première Classe de l'Institut pour 1808 »; « Mécanique Analytique », tome II (édition posthume).

(²) F. Gallissot, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 4 (1952) pp. 145-297.

(³) Noter que l'antisymétrie de σ n'est plus évidente sur cette expression (12.46).

FORME DE LAGRANGE POUR LES SYSTÈMES LIÉS

Considérons un système soumis à des liaisons, pour lequel nous employons les notations (12.9) à (12.15). Nous laissons au lecteur le soin d'établir les résultats algébriques suivants, où intervient la forme de Lagrange σ :

(12.50) \diamond Supposons que le rang de l'opérateur linéaire

$$[u_{r_1} \ u_{r_2} \ \dots \ u_{r_N}]$$

soit égal à p ⁽¹⁾, alors :

a) L'équation (12.11) $u_i dt + \sum_j u_{r_j} (dr_j) = 0$ peut s'écrire

$$dy \in H$$

H étant un espace vectoriel de dimension $6N + 1 - p$.

b) L'espace vectoriel $\text{orth}(H)$ est isotrope ⁽²⁾;

c) La condition de compatibilité $u' = 0$ (12.14) peut s'écrire

$$\ker(\sigma) \subset H$$

ou aussi

$$H \text{ co-isotrope} \quad (3);$$

d) $H' = \ker\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)$ est un espace vectoriel de dimension $6N + 1 - p$;

la dimension de $K = H \cap H'$ est égale à $6N + 1 - 2p$;

⁽¹⁾ Il y a des cas où l'on peut réaliser cette condition en supprimant certaines équations de liaison, qui sont conséquences des autres (exemple : N points formant un solide, lorsque $N \geq 5$); dans le cas contraire, on a un système qui est susceptible de se coïncider (exemple : une tige de longueur l dont les extrémités se déplacent sur un cercle de diamètre l).

⁽²⁾ Définitions (8.2) et (8.4), appliquées à la forme de Lagrange σ (12.45).

⁽³⁾ C'est-à-dire $\text{orth}(H) \subset H$ (Définition (8.4)).

(12.50) e) Compte tenu de la condition $u' \equiv 0$, le principe des travaux virtuels (12.16) et les équations de définition des vitesses $\frac{dr_j}{dt} - v_j \equiv 0$ (12.13) peuvent s'écrire

$$dy \in \text{orth}(H)$$

f) On a $H' \cap \text{orth}(H) = K \cap \text{orth}(K)$

la dimension de cet espace vectoriel \mathcal{E}' est égale à 1; son intersection avec $\ker\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)$ est réduite à 0 ⁽⁴⁾.

(12.51) — Ces résultats montrent comment est assurée la cohérence des résultats du principe des travaux virtuels (moyennant la condition \diamond): les équations de liaisons $u = 0$, $u' = 0$ déterminent une variété V' , de dimension $6N + 1 - 2p$, plongée dans l'espace d'évolution V , admettant K comme espace vectoriel tangent (Théorème (1.40)).

Désignons par σ' la 2-forme induite par σ sur V' :

$$(12.52) \quad \sigma'(dy)(\delta y) = \sigma(dy)(\delta y) \quad \text{si } y \in V', \quad dy \in K, \quad \delta y \in K;$$

la formule $\mathcal{E}' = K \cap \text{orth}(K)$ montre que $\mathcal{E}' = \ker(\sigma')$ (voir (9.30)); comme les équations du mouvement avec les liaisons parfaites s'écrivent $dy \in \mathcal{E}'$, comme l'on a $\dim(\mathcal{E}') = 1$ et $\dim\left(\mathcal{E}' \cap \ker\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right) = 0$, on peut appliquer à V' , σ' , \mathcal{E}' les résultats établis ci-dessus pour V , σ , \mathcal{E} : les mouvements, lignes de forces du champ $y \mapsto \mathcal{E}'$, appartiennent à l'un des types (12.35); les espaces de phases $t = t_0$ de V' sont des sections transversales; l'ensemble des mouvements possède une structure de variété (de dimension $6N - 2p$).

(12.53) C'est pourquoi nous dirons que V' est l'espace d'évolution du système lié, et que σ' est sa forme de Lagrange.

(12.54) — Ceci s'applique en particulier au mouvement d'un solide : la dimension de l'espace d'évolution est 13, celle de l'espace des mouvements 12 ⁽²⁾.

⁽⁴⁾ Ces résultats (f) mettent en jeu le fait que les masses m_i ont toutes le même signe.

⁽²⁾ Ces nombres se réduisent à 11 et 10 respectivement si les points du solide sont alignés.

(12.55) — En dehors des liaisons étudiées jusqu'ici — dites *holonomes* — on rencontre (en particulier dans les problèmes de roulement sans glissement) des liaisons qui se formulent par une condition

$$u_t dt + \sum_j u_{r_j} dr_j = 0$$

analogue à (12.14), mais sans que les u_t, u_{r_j} soient les dérivées partielles d'une variable u (on les suppose seulement fonctions différentiables de t et des r_j). On leur applique les mêmes règles que ci-dessus (12.13) à (12.16); le théorème (12.50) est encore valable; le mouvement avec liaisons parfaites non holonomes est donc encore défini par les équations $dy \in \mathcal{E}'$; mais en général \mathcal{E}' n'est plus le noyau d'une 2-forme σ' induite de σ .

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL

(12.56) Un événement X , ou « point de l'espace-temps », est repéré par le couple $\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix}$, constitué par la place \mathbf{r} de l'événement (qui appartient à l'espace euclidien R^3) et sa date t , qui est un nombre.

En fait, un même événement peut aussi être repéré par un autre couple $\begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \end{pmatrix}$, si on change par exemple le choix de l'origine. Nous appellerons *référentiel* l'application $\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto X$ choisie; si \mathcal{R} et \mathcal{R}^* sont deux référentiels, on peut écrire

$$(12.57) \quad X \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \equiv \mathcal{R}^* \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \end{pmatrix};$$

il existe alors une formule de *changement de référentiel*, que l'on peut écrire

$$(12.58) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \end{pmatrix} \equiv \mathcal{R}^{*-1} \circ \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix}$$

En mécanique classique, on considère qu'il est possible de choisir une fois pour toutes, les unités de longueur et de temps, ainsi que d'orienter

l'espace et le temps; ceci s'exprime mathématiquement par le fait que la formule de passage d'un référentiel à un autre est donnée par une formule

$$(12.59) \quad \begin{cases} \mathbf{r}^* \equiv A(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \\ t^* \equiv t + t_0 \end{cases}$$

t_0 étant un nombre, \mathbf{R} un élément de R^3 , A une rotation, c'est-à-dire un élément du groupe $SO(3)$ (notation (6.64), (6.65)).

On suppose que t_0 est fixe, mais que A et \mathbf{R} peuvent dépendre de t ; on suppose de plus que les applications $t \mapsto A$, $t \mapsto \mathbf{R}$ sont différentiables.

Comme $A \in SO(3)$, on a les identités

$$(12.60) \quad \overline{A} \cdot A \equiv 1 \quad (\text{notation (6.53)})$$

$$(12.61) \quad A(\mathbf{x}) \times A(\mathbf{y}) \equiv A(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3)$$

ce qui s'écrit aussi

$$(12.62) \quad j(A(\mathbf{x})) \equiv A \cdot j(\mathbf{x}) \cdot A^{-1};$$

rappelons que nous notons $j(\mathbf{x})$ l'opérateur « produit vectoriel par \mathbf{x} » défini par

$$(12.63) \quad j(\mathbf{x})(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \quad \text{soit} \quad j \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

En dérivant (12.60), on montre qu'il existe un vecteur Ω tel que

$$(12.64) \quad \frac{dA}{dt} = -A \cdot j(\Omega)$$

Ω , qui peut dépendre aussi de t , s'appelle *rotation instantanée* du nouveau référentiel par rapport à l'ancien.

Appliquons les formules (12.59) aux points d'un système :

(12.65)

$$\begin{aligned} t^* &\equiv t + t_0 \\ \mathbf{r}_j^* &\equiv A(\mathbf{r}_j + \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Si l'on introduit la vitesse et l'accélération d'entraînement du point n° j qui sont par définition :

(12.66)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j &\equiv \boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{r}_j + \mathbf{R}] - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \\ \boldsymbol{\Gamma}_j &\equiv \left[j \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right) + j(\boldsymbol{\Omega})^2 \right] (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}) - \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \end{aligned}$$

et si l'on pose :

(12.67)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^* &\equiv A(\mathbf{v}_j - \mathbf{U}_j) \\ \mathbf{B}_j^* &\equiv A(\mathbf{B}_j + 2m_j \boldsymbol{\Omega}) \\ \mathbf{E}_j^* &\equiv A(\mathbf{E}_j - \mathbf{B}_j \times \mathbf{U}_j - m_j \boldsymbol{\Gamma}_j) \end{aligned}$$

on peut vérifier que l'expression de la forme de Lagrange σ à l'aide des nouvelles variables s'obtient simplement en faisant la substitution

(12.68)

$$t \rightarrow t^*, \quad \mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}_j^*, \quad \mathbf{v}_j \rightarrow \mathbf{v}_j^*, \quad \mathbf{E}_j \rightarrow \mathbf{E}_j^*, \quad \mathbf{B}_j \rightarrow \mathbf{B}_j^*$$

dans l'expression (12.45) de σ (les masses m_j étant conservées).

(12.69)

— Les valeurs (12.67) de \mathbf{v}_j^* , \mathbf{B}_j^* , \mathbf{E}_j^* sont d'ailleurs *les seules* qui permettent de compléter (12.65) de façon à avoir cette propriété.

PRINCIPE DE RELATIVITÉ GALILÉENNE

(12.70)

Il existe cependant des référentiels privilégiés physiquement, appelés *référentiels d'inertie*; quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre, la rotation instantanée et l'accélération d'entraînement sont nuls; on en déduit aisément que les formules de passage (12.59) peuvent s'écrire

(12.71)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} A &\in \text{SO}(3), \quad \mathbf{b} \in R^3, \quad \mathbf{c} \in R^3 \\ e &\in R \end{aligned}$$

$A, \mathbf{b}, \mathbf{c}, e$ étant *constants*; réciproquement, si on passe d'un référentiel d'inertie à un second référentiel par les formules ci-dessus, le second est aussi un référentiel d'inertie.

En mécanique classique, on admet sous le nom de *principe de relativité galiléenne*, l'hypothèse suivante :

(12.72)

Soit V l'espace d'évolution d'un système dynamique *isolé* ⁽¹⁾.
Le champ $y \mapsto \sigma$ qui définit la forme de Lagrange de V est le même dans tous les référentiels d'inertie.

Désignons par G l'ensemble des matrices a considérées en (12.71) :

(12.73)

$$a \equiv \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} A &\in \text{SO}(3), \quad \mathbf{b} \in R^3, \quad \mathbf{c} \in R^3 \\ e &\in R \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ces matrices forment un groupe de Lie, homéomorphe à $\text{SO}(3) \times R^7$ (donc connexe et de dimension 10); on l'appelle *groupe de Galilée*; son *algèbre de Lie* est l'ensemble \mathcal{G} des matrices

(12.74)

$$Z \equiv \begin{bmatrix} j(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &\in R^3; \quad \boldsymbol{\beta} \in R^3; \quad \boldsymbol{\gamma} \in R^3 \\ \varepsilon &\in R \end{aligned}$$

(12.75)

— Le groupe de Galilée est un *sous-groupe de Lie* (6.31) du groupe de matrices $\text{GL}(R^3 \times R^2)$ (le critère (6.33) est applicable).

— En appliquant les formules de changement de référentiel ci-dessus (12.66, 67) on voit que ce principe peut aussi se formuler de la façon suivante :

(12.76)

Soit a un élément du groupe de Galilée (notation (12.73)); soit V l'espace d'évolution d'un système dynamique isolé, rapporté à un référentiel d'inertie.

⁽¹⁾ On entend par là le fait que les actions du reste de l'univers sur le système sont *négligeables* (exemple : le système solaire). Cette notion suggère quelques questions délicates (Cf. le *principe de Mach*).

(12.76) Si l'on pose

$y \equiv \begin{bmatrix} t \\ r_1 \\ \dots \\ r_N \\ v_1 \\ \dots \\ v_N \end{bmatrix}$	$a_V(y) \equiv y^* \equiv \begin{bmatrix} t^* \\ r_1^* \\ \dots \\ r_N^* \\ v_1^* \\ \dots \\ v_N^* \end{bmatrix}$	$t^* \equiv t + e$	$r_j^* \equiv A(r_j) + bt + c$	$v_j^* \equiv A(v_j) + b$	$\forall j,$
------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------	--------------------------------	---------------------------	--------------

a_V est un *difféomorphisme* de V sur V ; le champ $\Phi[y \mapsto \sigma]$ définissant la forme de Lagrange vérifie

\clubsuit $\Phi(y)(dy)(\delta y) \equiv \Phi(y^*)(dy^*)(\delta y^*)$

ce qui peut aussi s'écrire ⁽¹⁾

\spadesuit
$$\begin{cases} [y \mapsto E_j](y^*) \equiv A(E_j) + A(B_j) \times b \\ [y \mapsto B_j](y^*) \equiv A(B_j) \end{cases}$$

(12.77) — On vérifie facilement que l'application $a \mapsto a_V$ définie ci-dessus (12.76) fait *opérer* le groupe de Galilée sur l'espace d'évolution, au sens (6.4).

(12.78) — Dans le cas d'un système isolé lié, on complète le principe de relativité galiléenne en supposant que les équations de liaisons sont, elles aussi, les mêmes dans tous les référentiels d'inertie. Si les liaisons sont holonomes, il est facile de voir que les résultats précédents (12.76, 77) s'appliquent encore à l'espace d'évolution du système lié et à sa forme de Lagrange, appelés V' et σ' en (12.53).

⁽¹⁾ $[y \mapsto E_j](y^*)$ désigne évidemment la variable $\Phi_j(y^*)$, Φ_j étant l'application $[y \mapsto E_j]$ qui fait passer de y à E_j (voir (2.8)).

PRINCIPE DE MAXWELL

Nous donnerons ce nom ⁽¹⁾ à l'hypothèse suivante :

(12.79) La forme de Lagrange σ d'un système dynamique a une *dérivée extérieure nulle* sur l'espace d'évolution : $\nabla\sigma \equiv 0$.

Si l'on porte la définition (12.45) de la forme σ dans la définition (4.32) de la dérivée extérieure, et si l'on développe, il vient tous calculs faits :

(12.80)
$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\frac{\partial E_j}{\partial v_k} \equiv 0 \quad \frac{\partial B_j}{\partial v_k} \equiv 0} \quad \forall j, k \\ \boxed{\frac{\partial \overline{E}_k}{\partial r_j} - \frac{\partial E_j}{\partial r_k} \equiv 0, \quad \frac{\partial B_j}{\partial r_k} \equiv 0} \quad \text{si } j \neq k \\ \boxed{\text{rot } E_k + \frac{\partial B_k}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{div } B_k \equiv 0} \quad \text{(2)} \quad \forall k. \end{array} \right\}$$

(12.81) — Ce système est *équivalent* au principe de Maxwell $\nabla\sigma \equiv 0$; s'il est vérifié dans un référentiel, il le sera donc encore dans *n'importe quel autre* (même si ce n'est pas un référentiel d'inertie).

(12.82) — Dans la définition de la forme de Lagrange σ , nous avons choisi arbitrairement les vecteurs B_j , et en avons déduit les E_j par la formule

$$E_j \equiv F_j + B_j \times v_j$$

les forces F_j étant supposées connues.

⁽¹⁾ A cause de (12.86) et aussi parce que l'une des équations (12.80), $\frac{\partial \overline{E}_k}{\partial r_j} - \frac{\partial E_j}{\partial r_k} \equiv 0$, s'appelle parfois *loi de réciprocité de Maxwell*.

⁽²⁾ Le *rotationnel* du vecteur E_k peut être défini par l'identité

$$\frac{\partial E_k}{\partial r_k} - \frac{\partial \overline{E}_k}{\partial r_k} \equiv j(\text{rot } E_k),$$

la *divergence* de B_k par

$$\text{div } B_k \equiv \text{Tr} \left(\frac{\partial B_k}{\partial r_k} \right).$$

On peut donc, si l'on veut, formuler le principe de Maxwell de la façon suivante :

« On peut choisir les \mathbf{B}_j de façon que $\nabla\sigma = 0$ ».

Il est facile de vérifier, dans ce cas, que le choix des \mathbf{B}_j est unique : le principe de Maxwell, s'il s'applique, fait disparaître l'arbitraire qui subsistait jusqu'ici dans la définition de la forme de Lagrange.

Exemples

On vérifie facilement la validité du principe de Maxwell dans les cas suivants :

Problème des N corps (12.8), avec (dans un référentiel d'inertie)

$$(12.83) \quad \mathbf{B}_j \equiv 0, \quad \mathbf{E}_j \equiv C \sum_{k \neq j} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3} \blacksquare$$

Point pesant dans le vide :

$$(12.84) \quad \mathbf{E} \equiv m\mathbf{g}, \quad \mathbf{B} \equiv 2m\boldsymbol{\Omega} \quad (\text{dans un référentiel terrestre})$$

\mathbf{g} est l'accélération de la pesanteur, $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur rotation de la terre. ■

Particules chargées dans un champ électromagnétique extérieur :

On prend :

$$(12.85) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_j \equiv q_j \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j) + \sum_{k \neq j} q_j q_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|^3}, \\ \mathbf{B}_j \equiv q_j \mathbf{B}(t, \mathbf{r}_j) \end{cases}$$

q_j étant la charge électrique de la particule n° j , $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ respectivement le *champ électrique* extérieur et l'*induction magnétique* à la date t , au point \mathbf{r} , exprimés en unités électrostatiques; l'application des formules (12.80) conduit aux *équations de Maxwell*

$$(12.86) \quad \boxed{\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{div } \mathbf{B} \equiv 0}$$

effectivement vérifiées par les champs (elles expriment respectivement la *loi de l'induction* et l'*absence de charges* (ou « monopôles ») *magnétiques*).

(12.87) — On a tenu compte dans (12.85) des forces électrostatiques entre particules; mais le principe de Maxwell oblige à négliger de petits termes, tels que les interactions magnétiques; on notera que ce sont ceux que l'on ne peut écrire sans introduire la constante c (vitesse de la lumière) dans

les équations; c'est-à-dire sans mélanger la mécanique classique et la relativité : en mécanique classique, les particules chargées *subissent* le champ magnétique, *elles ne participent pas à sa création*.

— Les formules (12.85) sont valables dans un référentiel d'inertie. Si l'on change le référentiel, les formules (12.67) montrent qu'il faut remplacer les vecteurs \mathbf{B} et \mathbf{E} par

$$(12.88) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{B}^* &\equiv A(\mathbf{B}) \\ \mathbf{E}^* &\equiv A(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{U}) \end{aligned}}$$

\mathbf{U} étant la vitesse d'entraînement; par conséquent, un champ purement magnétique ($\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{E} \equiv 0$) dans un repère d'inertie apparaît comme *accompagné d'un champ électrique* dans un second repère d'inertie en mouvement de translation par rapport au précédent; ce fait est imposé par la mécanique rationnelle, et n'est donc pas un effet relativiste. ■

(12.89) — *Par contre*, le principe de Maxwell *ne s'applique pas* à des problèmes tels que celui du mouvement d'un projectile avec résistance de l'air fonction de la vitesse; *mais* on sait qu'il ne s'agit que d'une approximation empirique destinée à remplacer une étude détaillée de la mécanique de l'atmosphère elle-même. ■

(12.90) Par induction à partir de ces quelques exemples, nous admettrons désormais le principe de Maxwell comme une nouvelle *loi de la mécanique*.

POTENTIELS ET FORMALISME VARIATIONNEL

On peut vérifier que les conditions (12.80) équivalent, *localement*, à l'existence d'un scalaire $v(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ et de vecteurs $\mathbf{A}_j(t, \mathbf{r}_j)$, appelés respectivement *potentiel* et *potentiels-vecteurs*, tels que

$$(12.91) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_j &\equiv -\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_j} - \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} \\ \mathbf{B}_j &\equiv \text{rot } \mathbf{A}_j \end{aligned}}$$

Considérons alors le *lagrangien* (notations du § 7) :

$$(12.92) \quad \boxed{\lambda \equiv \sum_j \left\{ \frac{1}{2} m_j \|\mathbf{r}'_j\|^2 + \langle \mathbf{A}_j, \mathbf{r}'_j \rangle \right\} - v + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_j} \cdot \mathbf{r}'_j \quad \left(\mathbf{v}_j \equiv \mathbf{r}'_j \equiv \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} \right)}$$

φ étant une fonction différentiable arbitraire de $t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$, appelée *jauge*; la forme de Cartan ω correspondante (voir (7.29)) est donnée par les formules ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \omega(\delta y) &\equiv \sum_j \langle \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{r}_j \rangle - h \delta t \\ \mathbf{p}_j &\equiv m_j \mathbf{v}_j + \mathbf{A}_j + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_j} \\ h &\equiv \frac{1}{2} \sum_j m_j \|\mathbf{v}_j\|^2 + v - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que

$$\sigma \equiv \nabla \omega$$

c'est-à-dire que ω est un *potentiel* de σ (9.14) et, réciproquement, que l'expression la plus générale d'un lagrangien

$$\lambda = \Lambda(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)$$

dont la forme de Cartan soit un potentiel de σ , est celle que nous avons écrite en (12.92).

— Les équations du mouvement $dy \in \ker(\sigma)$ (voir (12.48)) coïncident donc avec les équations d'Euler-Lagrange du lagrangien λ (Théorème (7.29)); par conséquent les mouvements réels du système rendent *extrémale* l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda dt$$

appelée *action hamiltonienne*.

— Nous n'insisterons pas sur les applications pratiques de ce fait (le « principe de Hamilton »), qui sont longuement développées dans les traités de mécanique (usage des équations de Lagrange (7.6), des équations déduites de l'équation de Jacobi (ci-dessus (7.19)), ou des équations canoniques de Hamilton (7.23)).

— Il est tentant de placer le principe de Hamilton à la base de la mécanique ⁽²⁾, ce qui dispense notamment d'avoir à *formuler* le principe de Maxwell.

⁽¹⁾ h s'appelle le *hamiltonien* du système (Cf. 7.21).

⁽²⁾ Voir par exemple L. Landau et E. Lifchitz, « Mécanique ».

Mais il y a à cela deux inconvénients fondamentaux :

a) L'existence du potentiel et des potentiels-vecteurs qui figurent dans le lagrangien est assurée localement, mais pas globalement ⁽¹⁾.

b) Ces potentiels ne sont pas entièrement déterminés, puisque la *jauge* φ est arbitraire ⁽²⁾.

Nous verrons de plus que l'invariance du *lagrangien* λ est souvent moindre que celle de la *forme* de Lagrange σ (ci-dessous (12.136)).

C'est pourquoi nous n'utiliserons pas de principes variationnels dans la suite.

CONSÉQUENCES GÉOMÉTRIQUES DU PRINCIPE DE MAXWELL

— Nous avons vu que l'espace d'évolution V d'un système dynamique est une *variété feuilletée*, le feuilletage étant

$$y \mapsto \mathcal{E} \equiv \ker(\sigma).$$

Dans le cas où le principe de Maxwell

$$\nabla \sigma \equiv 0$$

est valable, on a évidemment

$$\mathcal{E} \equiv \ker(\sigma) \cap \ker(\nabla \sigma)$$

c'est-à-dire que $y \mapsto \mathcal{E}$ est le *feuilletage caractéristique* de σ (5.25); ce qui montre que la forme de Lagrange σ est un *invariant intégral* (5.21). Comme nous savons que le feuilletage est *sécable* (12.38) σ est donc l'image réciproque d'une 2-forme du quotient (c'est-à-dire de l'espace des mouvements).

Ceci s'applique encore au cas d'un système comportant des *liaisons parfaites holonomes* (voir (12.52)) puisque la forme de Lagrange σ' de l'espace d'évolution avec liaisons V' (12.53) est *induite* de celle du système sans liaisons (voir (9.29)); d'où le théorème suivant, qui emprunte le langage du § 9 (voir en particulier (9.10)) :

Soit V l'espace d'évolution d'un système dynamique vérifiant le principe de Maxwell, et pouvant comporter des liaisons parfaites holonomes.

⁽¹⁾ En particulier, dans le cas des *particules à spin*, nous montrerons qu'il n'existe pas de potentiel défini globalement, alors que le principe de Maxwell est toujours valable (ci-dessous, (18.56)).

⁽²⁾ On peut postuler que l'*impulsion* \mathbf{p}_j d'une particule ne dépend pas de la position des autres : ce qui amène φ à être de la forme $\sum_j \varphi_j(t, \mathbf{r}_j)$ (mais les φ_j restent arbitraires); dans

le cas où les \mathbf{B}_j sont nuls, on peut réduire \mathbf{p} à la forme $m_j \mathbf{v}_j$; mais il subsiste encore une fonction arbitraire du temps additive dans le potentiel v , le lagrangien λ et le hamiltonien h .

a) La forme de Lagrange σ donne à V une structure de variété présymplectique.

b) Soit x le mouvement du système défini par une condition initiale y (Fig. 12.II); l'application $y \mapsto x$ est différentiable; il existe une 2-forme de l'espace U des mouvements, que nous appellerons encore forme de Lagrange et désignerons encore par σ , définie par

(12.100)

$$\diamond \quad \sigma(dy)(\delta y) \equiv \sigma(dx)(\delta x);$$

cette 2-forme donne à l'espace des mouvements une structure de variété symplectique.

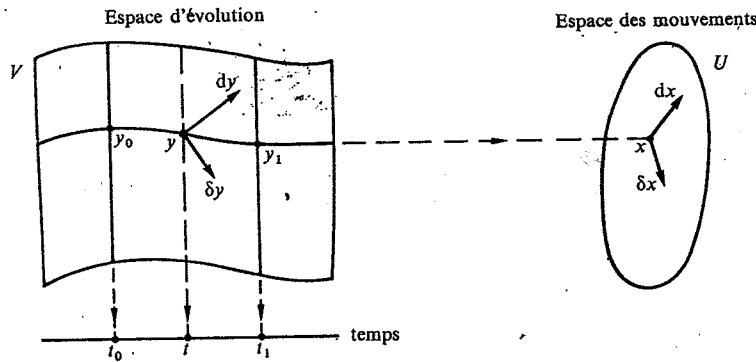


Fig. 12.II.

(12.101) — Soit t_0 une date; nous avons vu que l'espace de phases associé, défini dans V par l'équation $t = t_0$, est une section transversale (12.37); il en résulte que σ induit sur chaque espace de phase une structure symplectique (9.32); la forme de Lagrange correspondante s'obtient en faisant $dt = \delta t = 0$ dans l'expression (12.45); ce qui donne

$$(12.102) \quad \sigma(dy)(\delta y) = \sum \langle m_j dv_j, \delta r_j \rangle - \langle m_j \delta v_j, dr_j \rangle + \langle B_j, dr_j \times \delta r_j \rangle.$$

(12.103) — Dans le cas où les B_j sont nuls, et où il n'y a pas de liaisons, on voit que la carte de l'espace de phases définies en (12.32) est canonique [(10.1), (10.5)].

(12.104) — La correspondance $y_0 \mapsto x$, où y_0 parcourt l'espace de phases à l'instant t_0 et où x désigne le mouvement passant par y_0 est canonique (10.10); il en est donc de même pour la correspondance $y_0 \mapsto y_1$, y_0 et y_1 désignant respectivement les points d'intersection d'un même mouvement x avec les espaces de phases $t = t_0$, $t = t_1$: c'est le théorème de Poisson.

(12.105) — Si tous les mouvements du système ont la même durée, en particulier s'ils sont éternels (12.35), ces correspondances sont des symplectomorphismes (10.10); l'espace des mouvements et tous les espaces de phases sont donc symplectomorphes.

APPLICATION : VARIATION DES CONSTANTES

(12.106)

Soit à résoudre un problème de dynamique; supposons que nous sachions résoudre le problème auxiliaire qui s'en déduit en retranchant une variable Ω , fonction de y , au hamiltonien h (notations (12.93)).

En désignant par w' et σ' les formes de Cartan et Lagrange du problème auxiliaire, on tire immédiatement de (12.93)

(12.107)

$$w(\delta y) \equiv w'(\delta y) + \Omega \delta t$$

d'où, par dérivation extérieure

$$\sigma(dy)(\delta y) \equiv \sigma'(dy)(\delta y) + d\Omega \delta t - \delta\Omega dt,$$

soit, en introduisant le mouvement x du problème auxiliaire correspondant aux conditions initiales y :

(12.108)

$$\sigma(dy)(\delta y) \equiv \sigma'(dx)(\delta x) + d\Omega \delta t - \delta\Omega dt$$

σ' désignant au second membre la forme de Lagrange de la variété symplectique U des mouvements du problème auxiliaire (voir (12.100)).

Les équations du mouvement: $\sigma(dy) = 0$ se déduisent de (12.108); elles prennent la forme

(12.109)

$$\sigma'(dx)(\delta x) \equiv \delta\Omega dt \quad \text{si} \quad \delta t \equiv 0$$

ou, avec la notation (9.16):

(12.110)

$$\frac{dx}{dt} \equiv \text{grad } \Omega$$

Si l'on connaît une carte canonique de U , (10.6) montre que cette équation s'écrira

(12.111)

$$\frac{d}{dt} {}^j q \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial p_j} \quad \frac{d}{dt} p_j \equiv - \frac{\partial \Omega}{\partial {}^j q}$$

Exemples

(12.112) Soit à résoudre un problème avec potentiels-vecteurs A_j nuls (notations (12.93)); choisissons $\Omega \equiv h$. On constate que le problème auxiliaire se résout simplement par

$$r_j = \text{Cte}, \quad v_j = \text{Cte} \quad (1)$$

si bien que l'on peut identifier des coordonnées canoniques de l'espace de phase, à n'importe quel instant (notamment les coordonnées (12.32)), avec des coordonnées canoniques de U . On reconnaît alors dans (12.111) les *équations canoniques* de Hamilton (7.23). ■

(12.113) — Soit à étudier le mouvement d'une petite planète ou d'une comète perturbée par une ou plusieurs grosses planètes. On prend Ω égal au *potentiel de perturbation*, de sorte que le problème auxiliaire est celui du *mouvement képlérien* de l'astre étudié autour du soleil.

Les équations (12.111) définissent l'évolution de 6 paramètres caractérisant le mouvement képlérien (les « éléments de l'orbite »); comme ces éléments varient lentement, on peut résoudre ces équations avec précision par des méthodes d'approximation; connaissant x et t , les formules de Képler permettent de calculer y , donc d'obtenir le mouvement perturbé.

Cette méthode de *variation des constantes*, due à Lagrange, s'appelle aussi *calcul des perturbations*; elle est essentielle à la Mécanique Céleste. ■

MOMENTS GALILÉENS

(12.114) Soient V l'espace d'évolution et U l'espace des mouvements d'un système dynamique (Fig. 12. III).

Nous supposons que le système est *isolé*, et qu'il vérifie le principe de Maxwell.

Nous savons que V est une *variété présymplectique* (12.100), et que le groupe de Galilée G opère sur V en préservant la forme de Lagrange (12.76); G est donc un *groupe dynamique* de V (Définition (11.1)); nous pouvons appliquer les résultats du § 11.

Soit

$a = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A \in \text{SO}(3) \quad \mathbf{b} \in R^3, \quad \mathbf{c} \in R^3$ $e \in R$
-------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------

(12.115)

(1) Il n'y a pas de paradoxe du fait que $\frac{dr_j}{dt} \neq v_j$; le problème auxiliaire ne vérifie pas les équations de la dynamique.

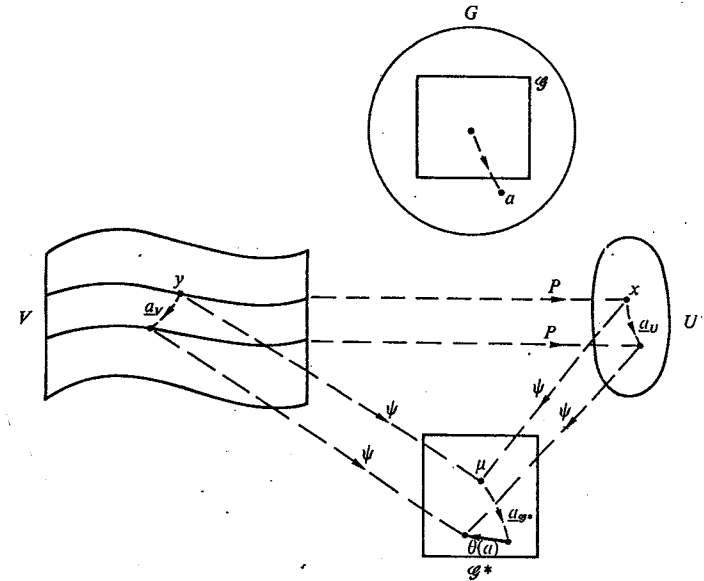


Fig. 12. III.

un élément du groupe de Galilée; il opère sur V suivant les formules (12.76◇) :

$t \rightarrow t + e$ $\mathbf{r}_j \rightarrow A(\mathbf{r}_j) + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$ $\mathbf{v}_j \rightarrow A(\mathbf{v}_j) + \mathbf{b}$

(12.116)

définissant ainsi une transformation canonique de V notée a_y .

Soit $y \equiv \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{r}_1 \\ \dots \\ \mathbf{r}_N \\ \mathbf{v}_1 \\ \dots \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix}$ un point variable de V ; désignons par $x \equiv P(y)$ le

mouvement défini par la condition initiale y ; on sait que le *groupe de Galilée* opère aussi sur l'espace des mouvements U , suivant la formule

(12.117)

$$a_U(P(y)) \equiv P(a_V(y))$$

et constitue ainsi un *groupe dynamique* de U (11.6).

Soit

(12.118)

$Z \equiv \begin{bmatrix} j(\omega) & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\omega \in \mathbb{R}^3; \quad \beta \in \mathbb{R}^3; \quad \gamma \in \mathbb{R}^3$ $\varepsilon \in \mathbb{R}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

un élément de l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G (notations (12.74)); on sait que Z définit un champ de vecteurs Z_V sur V , et aussi un champ de vecteurs Z_U de U ; la définition (6.11) montre qu'on peut le calculer par la formule

$$Z_V(y) \equiv \delta[\underline{a}_V(y)]$$

avec $a = 1$, $\delta a = Z$, ce qui conduit immédiatement à

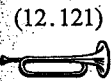
(12.119)

$\delta t \equiv \varepsilon$ $\delta \mathbf{r}_j \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\beta} t + \boldsymbol{\gamma}$ $\delta \mathbf{v}_j \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\beta}$

Nous pouvons appliquer le *théorème de Noether*, sous sa forme générale symplectique : il existe (au moins localement) une application $\psi[y \mapsto \mu]$ de V dans le dual \mathcal{G}^* de l'algèbre de Lie, définie par

(12.120)

$$\sigma(Z_V(y)) = -\nabla[\mu \cdot Z]$$



(12.121)

le *torseur* μ est le *moment* du groupe de Galilée opérant sur V , et il est *intégrale première des équations du mouvement*, c'est-à-dire que $\psi(y)$ ne dépend que du mouvement $x = P(y)$ (11.12); en d'autres termes, il existe une application $x \mapsto \mu$ (définissant d'ailleurs le moment de G opérant sur U (11.13)) [Fig. 12.III].

μ opérant linéairement sur \mathcal{G} , on peut poser

(12.122)

$\mu(Z) \equiv \langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\omega} \rangle - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\beta} \rangle + \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma} \rangle - E\varepsilon$
$\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3; \quad E \in \mathbb{R}$

nous désignerons le *torseur* μ ainsi défini par la notation

(12.123)

$\mu \equiv \{ \mathbf{l}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, E \}$

La définition (12.120) de μ peut s'écrire

(12.124)

$$\sigma(dy)(\delta y) \equiv d\mu(Z) \quad \forall dy$$

δy étant fourni par (12.119); en se reportant à l'expression (12.46) de σ , on trouve la valeur de $d\mu$; on sait *a priori* qu'il s'agit d'une « différentielle totale », que l'on peut intégrer; ce qui définit μ à une constante additive près.

Exemple

Considérons un point de masse unité, qui n'est soumis à aucune force. Le calcul donne immédiatement la solution suivante de (12.124)

(12.125)

$$\mu \equiv \left\{ \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}, \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right\}.$$

Il est bien clair que μ est constant pour tout mouvement (qui est rectiligne uniforme).

Appliquons à ce cas le théorème (11.17); si on désigne par ψ l'application $y \mapsto \mu$, on sait qu'il doit exister une application θ_0 de G dans \mathcal{G}^* , telle que

(12.126)

$$\theta_0(a) \equiv \psi(\underline{a}_V(y)) - \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\psi(y)) \quad a \in G, \quad y \in V$$

le calcul donne immédiatement

(12.127)

$$\theta_0(a) \equiv \left\{ \mathbf{c} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b}e, \mathbf{b}, \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|^2 \right\};$$

on sait que θ_0 vérifie l'identité (11.17♡)

(12.128)

$$\theta_0(a \cdot a') \equiv \theta_0(a) + \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\theta_0(a'))$$

c'est-à-dire que θ_0 est un \mathcal{G}^* -cocycle du groupe de Galilée G (11.19), et que sa dérivée à l'origine f_0 est une 2-forme vérifiant l'identité

(12.129)

$$f_0(Z)([Z', Z'']) + f_0(Z')([Z'', Z]) + f_0(Z'')([Z, Z']) \equiv 0$$

on le constate directement sur l'expression de f_0 déduite de (12.127) :

(12.130)

$$f_0(Z)(Z') = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle - \langle \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\gamma} \rangle.$$

On vérifie facilement que θ_0 n'est pas un *cobord* — en appliquant la définition (11.19) : θ_0 définit donc une *classe non nulle de cohomologie symplectique* (11.30, 31) du groupe de Galilée. ■

12.131) — Réciproquement, on peut chercher directement les cocycles symplectiques du groupe; en utilisant la proposition (11.22c) et l'identité (11.33), un calcul assez long, mais élémentaire ⁽¹⁾ montre que la dimension de l'espace de cohomologie symplectique du groupe de Galilée est égale à 1; c'est-à-dire que tout cocycle symplectique θ est donné à partir de cocycle θ_0 ci-dessus (12.127), par la formule

(12.132)
$$\theta(a) \equiv a_{g^*}(\mu_0) - \mu_0 + m\theta_0(a)$$

μ_0 étant un torseur, m un nombre repérant la classe de cohomologie de θ ; sa dérivée f pour $a = 1$ s'écrit donc :

(12.133)
$$f(Z)(Z') \equiv \mu_0[Z, Z'] + mf_0(Z)(Z')$$

— Revenons au cas général d'un système dynamique isolé vérifiant le principe de Maxwell, et appliquons-lui la formule (11.17 #), en y remplaçant f par sa valeur (12.133); si le système possède un moment μ , on peut choisir ce moment (en lui retranchant μ_0 , ce qui est loisible eu égard à (12.133)), de façon que

(12.134)
$$\sigma(Z_v(y))(Z'_v(y)) \equiv \mu[Z, Z'] + mf_0(Z)(Z')$$

En remplaçant dans le système (12.124), (12.134) σ, μ, f_0 par leurs expressions respectives (12.46), (12.123), (12.130), on obtient le système d'équations suivant :

(12.135)
$$\begin{array}{l} \spadesuit \quad m = \sum_j m_j \\ \heartsuit \quad B_j \equiv 0 \quad \forall j \\ \diamond \quad \sum_j E_j \equiv 0 \quad \sum_j r_j \times E_j \equiv 0 \\ \clubsuit \quad \mathbf{l} = \sum_j r_j \times m_j v_j \quad \mathbf{g} = \sum_j m_j [r_j - v_j t] \quad \mathbf{p} = \sum_j m_j v_j \\ \circ \quad dE = d \left\{ \frac{1}{2} \sum_j m_j \|v_j\|^2 \right\} - \sum_j \langle E_j, dr_j \rangle \quad \forall dy \end{array}$$

⁽¹⁾ Voir V. Bargmann, *Ann. Math.*, 59, 1 (1954) p. 1-41; le point de vue est différent, mais le calcul algébrique est le même.

Commentaires

(12.136) — \spadesuit montre que la masse totale du système $\sum_j m_j$ peut être interprétée comme caractérisant la classe de cohomologie correspondante du groupe de Galilée. Comme cette classe de cohomologie n'est jamais nulle, il en résulte que le lagrangien du principe de Hamilton n'est pas invariant par le groupe de Galilée, quels que soient le choix des potentiels et de la jauge (voir (11.21)). ■

(12.137) — \heartsuit montre que la forme de Lagrange d'un système isolé se réduit à l'expression « classique » (12.40), les E_j coïncidant alors avec les forces F_j . ■

(12.138) — On voit donc que la mécanique classique semble impuissante à décrire, par exemple, un système d'aimants libres dans l'espace, puisque le champ magnétique B créé par le système doit être nul.

En fait, ce paradoxe se résout en supposant les aimants constitués, non de points matériels, mais de particules à spin pourvues d'un moment magnétique; nous verrons plus loin (15.53) que l'on peut ainsi décrire les forces magnétostatiques qui s'exercent entre aimants, sans introduire la relativité. On sait d'ailleurs que le ferromagnétisme est effectivement dû au moment magnétique propre des électrons de l'aimant, et non à leur mouvement orbital. ■

(12.139) — Les équations \diamond expriment que la résultante générale $\sum_j F_j$ et le moment résultant $\sum_j r_j \times F_j$ des forces sont nuls (c'est-à-dire que le torseur euclidien de ces forces est nul (voir (12.20), (12.21))); on peut montrer l'équivalence de cette proposition avec l'existence d'une décomposition

$$F_j = \sum_{k \neq j} F_{jk}$$

telle que $F_{jk} + F_{kj} = 0$ et que F_{jk} soit parallèle à $r_j - r_k$: on reconnaît le principe d'égalité de l'action et de la réaction, tel qu'il a été formulé par Newton. Celui-ci apparaît donc comme une conséquence du principe de relativité galiléenne et du principe de Maxwell. ■

(12.140) — Les égalités \clubsuit permettent de reconnaître dans \mathbf{l} le moment cinétique et dans \mathbf{p} l'impulsion du système (dit aussi « moment linéaire »).

Quant à \mathbf{g} , on peut le mettre sous la forme

(12.141)
$$\mathbf{g} \equiv m\mathbf{R} - \mathbf{p}t$$

en introduisant le centre de gravité \mathbf{R} .

La constance de \mathbf{p} , \mathbf{l} et \mathbf{g} sont des théorèmes classiques; en particulier la constance de \mathbf{g} indique que le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme: c'est le principe de l'inertie de Galilée. ■

— La formule (peut s'écrire

$$(12.142) \quad E \equiv \frac{1}{2} \sum_j m_j \| \mathbf{v}_j \|^2 + v(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + \text{Cte}$$

v étant une fonction telle que $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_j} = -\mathbf{E}_j$, donc un *potentiel* (Définition (12.91)); on constate que *le temps ne figure pas dans l'expression de v* .

On reconnaît dans E la grandeur appelée *énergie*, somme de l'*énergie potentielle* v et de l'*énergie cinétique* $\frac{1}{2} \sum_j m_j \| \mathbf{v}_j \|^2$; le fait que E soit une intégrale première s'appelle *principe de conservation de l'énergie*, ou encore *théorème des forces vives*, selon la méthode d'exposition choisie.

(12.143) — On voit que la structure du groupe de Galilée ne permet pas de choisir la constante additive qui figure dans l'expression (12.142) de l'énergie ⁽¹⁾, ni d'ailleurs d'assurer l'existence *globale* de E : il pourrait arriver que l'énergie soit une fonction multiforme ⁽²⁾; le fait que ce cas ne se rencontre pas dans la nature peut être porté au crédit de la mécanique relativiste. ■

(12.144) — Indiquons, sans entrer dans les détails, que les résultats ci-dessus s'appliquent aussi à un *système isolé soumis à des liaisons holonomes parfaites*, à condition, bien entendu, que les liaisons vérifient aussi le principe de relativité galiléenne, sous la forme (12.78).

EXEMPLES DE GROUPES DYNAMIQUES

(12.145) Pour des systèmes dynamiques particuliers, il peut exister divers groupes de Lie opérant sur l'espace des mouvements, et invariant la forme de Lagrange; ce sont des *groupes dynamiques*, au sens (11.1) et aussi selon une terminologie qui a cours chez les physiciens. Citons quelques exemples, sans détailler les calculs.

(12.146) — Considérons deux systèmes dynamiques qui évoluent indépendamment l'un de l'autre; il est clair que les deux systèmes considérés ensemble forment encore un système; il est immédiat de vérifier que *l'espace des mouvements du système composé est le produit direct des espaces des mouvements des systèmes composants, au sens (9.7) du produit direct de deux variétés symplectiques*.

⁽¹⁾ Ceci résulte du fait que la formule (12.134) ne précise la valeur de μ que sur l'algèbre de Lie dérivée de \mathcal{G} , qui, est définie par l'équation $\varepsilon = 0$ (notation (12.118)).

⁽²⁾ Abus de langage signifiant que E est définie sur le revêtement universel de V (supposée connexe): ce revêtement est en effet une variété simplement connexe symplectique (voir (10.25)).

Par contre l'espace d'évolution *n'est pas* le produit direct des espaces d'évolution: cela résulte notamment du fait que la dimension d'un espace d'évolution est impaire.

(12.147) Si G est un groupe dynamique pour chaque système composant, $G \times G$ (produit direct de G par lui-même) est un groupe dynamique du système composé: il suffit de faire opérer un élément a_1 de G sur le mouvement du premier système, un élément a_2 sur le second.

Dans le cas d'un système composé de deux systèmes isolés, on voit que le moment galiléen du système composé est la *somme* des moments galiléens de chaque système composant; ceci vaut indépendamment pour le moment cinétique, l'impulsion, l'énergie et la grandeur g . ■

(12.148) — Considérons un point matériel soumis à une *force centrale* $\mathbf{F} \equiv \mathbf{r}f(r)$, f étant une fonction différentiable. On vérifie immédiatement que l'espace d'évolution admet $\text{SO}(3) \times R$ comme *groupe dynamique*: il suffit de faire $\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{c} = 0$ dans les équations (12.115), (12.116); ce groupe dynamique est un sous-groupe de Lie du groupe de Galilée. Bien entendu $\text{SO}(3) \times R$ est aussi un groupe dynamique pour l'espace des mouvements U . ■

(12.149) — Ceci s'applique en particulier au cas des mouvements képlériens ($f(r) \equiv -kmr^{-3}$) étudié ci-dessus en (12.3).

On peut remarquer dans ce cas que U *n'est pas une variété séparée*: à chaque mouvement rectiligne x se terminant par un choc sur le centre attractif à l'instant t_0 correspond un *autre* mouvement x' , débutant à l'instant t_0 , tel que tout ouvert contenant x et tout ouvert contenant x' se rencontrent. Mais si l'on convient d'*identifier* ces mouvements, on construit une variété des mouvements U_0 qui est séparée.

Considérons l'ensemble U_1 des mouvements bornés dans l'espace (trajectoires circulaires, elliptiques ou selon un segment de droite); on peut montrer que U_1 est un ouvert de U_0 , difféomorphe à $S_2 \times S_2 \times S_1 \times R$, qui admet $\text{SO}(4) \times R$ comme groupe dynamique ⁽¹⁾; à ce groupe correspond un moment μ , que l'on peut noter $\{ \mathbf{l}, \mathbf{a}, E \}$; μ vérifie les relations $\langle \mathbf{l}, \mathbf{a} \rangle \equiv 0$ et $E \equiv -\frac{1}{2[\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{l}\|^2]}$; E , qui est d'ailleurs la détermination choisie habituellement de l'énergie, est donc négative pour ces mouvements.

\mathbf{l} est le moment cinétique déjà considéré en (12.3) ⁽²⁾; quant au vecteur \mathbf{a} , il se rattache au « vecteur de Lenz » \mathbf{e} (12.3) par la formule $\mathbf{a} = \mathbf{e}/\sqrt{-2E}$; l'existence d'une intégrale première « accidentelle » \mathbf{e} peut donc se rattacher à l'existence d'un groupe dynamique particulier. ■

⁽¹⁾ Voir H. Bacry, H. Ruegg, J.-M. Souriau, *Commun. Math. Phys.*, 3, (1966), p. 323.

⁽²⁾ On suppose les unités choisies de sorte que $k = 1$, $m = 1$.

(12.150) — Lorsqu'on veut étudier les vibrations d'un système dynamique au voisinage d'une position d'équilibre, on utilise souvent la *linéarisation*, méthode bien connue ⁽¹⁾ qui consiste à remplacer le système par un système « peu différent » et plus facile à étudier, appelé « *oscillateur linéaire* », ou encore « *oscillateur harmonique* ». Le système donné étant supposé vérifier le principe de Maxwell, on constate que l'oscillateur harmonique associé le vérifie aussi, et que l'espace symplectique U de ses mouvements est un *espace vectoriel symplectique*, au sens (8.10). Nous connaissons donc un groupe dynamique G de U : c'est le groupe symplectique affine, ensemble des matrices $a = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($A \in \text{Sp}(U)$, $B \in U$) opérant sur U selon $a(x) = A(x) + B$ (voir (10.12)). Si on désigne par $2p$ la dimension de U , la dimension de ce groupe est $p(2p + 3)$ (voir (8.21)).

— Les sous-groupes de Lie de G sont donc aussi des groupes dynamiques de l'oscillateur harmonique (11.3); par exemple le groupe des translations de U ($A \equiv 1$); ou encore le groupe symplectique $\text{Sp}(U)$ ($B \equiv 0$); ou ses sous-groupes isomorphes à $U(p)$ (cf. (8.26)) ou à $\text{SU}(p)$, dont les dimensions sont respectivement p^2 et $p^2 - 1$ ((6.66), (6.67)). ■

(12.151) — Comme exemple d'oscillateur harmonique, considérons un point attiré par une force centrale proportionnelle à la distance, ce qui peut s'écrire :

$$\diamond \quad \mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}.$$

Les équations du mouvement s'intègrent à l'aide de deux vecteurs constants \mathbf{A} et \mathbf{B} :

$$\heartsuit \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{A} \cos \omega t + \mathbf{B} \sin \omega t.$$

On peut identifier un mouvement x avec le couple $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$, et on trouve immédiatement

$$\clubsuit \quad \sigma(dx)(\delta x) \equiv m\omega[\langle d\mathbf{B}, \delta\mathbf{A} \rangle - \langle \delta\mathbf{B}, d\mathbf{A} \rangle]$$

ce qui met en évidence la structure *vectorielle symplectique* de l'espace des mouvements.

Ici le groupe symplectique affine a la dimension 27; on peut prendre comme sous-groupe isomorphe à $U(3)$ le groupe

$$\spadesuit \quad A + iB \rightarrow a(A + iB) \quad [a \in U(3)]. \quad \blacksquare$$

⁽¹⁾ Voir par exemple la *Mécanique* de Landau et Lifchitz.

(12.152) — Soit G un groupe dynamique d'un système dynamique donné, possédant un moment μ . Si la classe de cohomologie correspondante est nulle, on peut choisir le moment de sorte que

$$\diamond \quad [\mu(Z), \mu(Z')]_{\text{Poisson}} \equiv \mu([Z, Z']_{\text{Lie}}) \quad \forall Z, Z' \text{ constants}$$

c'est une conséquence immédiate de la formule (11.17 #), où l'on fait $f = 0$, de la définition (9.22) du crochet de Poisson et de la définition (11.9) du moment d'un groupe dynamique ⁽¹⁾.

Supposons de plus que G soit un groupe connexe et abélien et que les orbites aient la même dimension n que G .

On voit alors que les orbites sont isotropes (9.33), et que l'espace vectoriel orthogonal à l'orbite passant par x est $\ker \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)$ (11.17 ♠), donc que les équations $\mu = \text{Cte}$ définissent des variétés co-isotropes de dimension $2p - n$ [(8.6c), (8.3f), (1.40)], donc présymplectiques (9.35). Chaque orbite est d'ailleurs *plongée* dans une variété $\mu = \text{Cte}$, et constitue plus précisément une *feuille* de celle-ci (Définition (9.8)). ■

(12.153) Ceci s'applique en particulier au cas des systèmes *conservatifs*, c'est-à-dire tels que le groupe des translations dans le temps ($\mathbf{r}_j \mapsto \mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_j \mapsto \mathbf{v}_j$, $t \mapsto t + \text{Cte}$) préserve la forme de Lagrange. Le moment de ce groupe est, au signe près, l'énergie E du système; si la variété U des mouvements ne comporte pas d'équilibres, les équations $E = \text{Cte}$ sont des variétés de dimension $2p - 1$, présymplectiques, admettant comme feuilles les orbites du groupe. Chaque feuille définit donc un mouvement *non daté* (on dit parfois un *état stationnaire* du système); si une variété $E = \text{Cte}$ est *sécable*, les orbites correspondant à cette valeur de l'énergie forment une variété symplectique de dimension $2p - 2$ (Théorème (9.10)). ■

(12.154) C'est le cas notamment pour le problème de Képler; l'ensemble des états stationnaires correspondant à une valeur négative de l'énergie est symplectomorphe au produit direct symplectique de deux sphères (munies chacune de la structure symplectique définie en (11.40), avec la même valeur de λ). Ces sphères sont décrites respectivement par les vecteurs $\mathbf{e} + \sqrt{-2E}$, $\mathbf{e} - \sqrt{-2E}$. Il s'ensuit que cette variété admet $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ comme groupe dynamique (voir (11.40) et (12.147)). ■

(12.155) De même, dans le cas de l'oscillateur harmonique considéré en (12.151), l'énergie est $E \equiv 1/2 m\omega^2[\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2]$; l'ensemble des états station-

⁽¹⁾ Par abus de langage, on dit parfois que G est un « groupe dynamique » s'il existe une application différentiable $x \mapsto \mu$ d'un ouvert de l'espace des mouvements U dans le dual \mathcal{G}^* de l'algèbre de Lie de G , vérifiant \diamond ; mais il ne s'agit là que d'une propriété de la dimension $2p$ de U (puisque deux variétés symplectiques de même dimension sont localement symplectomorphes) dont l'intérêt physique semble assez mince.

naires correspondant à une valeur positive de E constitue une variété symplectique de dimension 4, difféomorphe à l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de dimension 1 de C^3 (espace projectif complexe); cette variété admet $U(3)$ comme groupe dynamique; en fait c'est seulement le quotient $U(3)/U(1)$, noté aussi $SU(3)/Z_3$, qui opère effectivement. ■

(12.156) — On rencontre aussi, dans certains problèmes de dynamique, des groupes de similitudes canoniques.

Ainsi, les substitutions : $r_j \mapsto a^{-2} r_j$; $v_j \mapsto a v_j$; $t \mapsto a^{-3} t$ sont des similitudes canoniques de l'espace d'évolution du problème newtonien des N corps, donc aussi de son espace des mouvements (10.21); par dérivation, on obtient une similitude canonique infinitésimale :

$$\diamond \quad \delta r_j \equiv -2 r_j; \quad \delta v_j \equiv v_j; \quad \delta t \equiv -3 t$$

qui fournit un potentiel w de la forme de Lagrange (10.37); la 1-forme w est un invariant intégral des équations du mouvement.

§ 13 PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE SYMPLECTIQUE

MÉCANIQUE SYMPLECTIQUE NON RELATIVISTE

(13.0) Considérons un système dynamique classique.

Sa description élémentaire consiste à le décomposer en points matériels, et à formuler les lois donnant les forces auxquelles ces points sont soumis. Si ces lois vérifient le principe de Maxwell (12.90), les procédures que nous avons étudiées au paragraphe précédent (construction de l'espace d'évolution et de sa forme de Lagrange, intégration des équations du mouvement, passage au quotient) aboutissent à la construction d'une variété symplectique, l'espace des mouvements.

Nous allons maintenant renoncer à la notion de point matériel et de force, et prendre comme axiomes de la mécanique des propriétés essentielles de l'espace des mouvements ⁽¹⁾ :

- (13.1)
- I. — L'ensemble des mouvements d'un système dynamique est une variété symplectique connexe.

II. — Si plusieurs systèmes dynamiques évoluent indépendamment, la variété des mouvements du système composé est le produit direct symplectique des variétés des systèmes composants.

III. — Si un système dynamique est isolé, la variété de ses mouvements admet le groupe de Galilée comme groupe dynamique.

On renonce donc, non seulement à la notion de point matériel, mais aussi à celle d'espace d'évolution (et, à fortiori, d'espace de phases, d'« espace de configuration », etc.). L'espace euclidien et le temps eux-mêmes ne sont évoqués qu'indirectement à travers le groupe de Galilée ⁽²⁾.

Comme ces principes (13.1) sont valables en mécanique classique (voir respectivement (12.100), (12.146), (12.117)), il n'y a pour l'instant pas de rupture avec celle-ci, mais simplement un élargissement, qui permet de

⁽¹⁾ Définitions : variété symplectique : (9.1) — produit direct symplectique : (9.7) — groupe de Galilée : (12.73) — groupe dynamique : (11.1).

⁽²⁾ Ces renoncements sont familiers en mécanique quantique.

traiter de nouveaux systèmes dynamiques — nous verrons plus loin des exemples.

Bien entendu, c'est l'analogie avec les cas classiques qui nous guidera dans l'interprétation physique. ■

- (13.2) Considérons un système dynamique isolé; nous considérerons que sa structure est entièrement caractérisée par ses propriétés symplectiques et par la façon dont le groupe de Galilée G opère sur lui. De façon plus précise, deux systèmes dynamiques isolés, ayant pour espaces de mouvements U et U' , seront dit *isomorphes* s'il existe un *symplectomorphisme* Φ de U à U' , tel que

$$\Phi(\underline{a}_U(x)) = \underline{a}_{U'}(\Phi(x)) \quad \forall x \in U, \quad \forall a \in G;$$

on dira dans ce cas que les systèmes dynamiques ont *même modèle*, et que Φ est un *isomorphisme* du premier système au second.

MOMENTS, MASSE ET BARYCENTRE

L'étude des moments galiléens d'un système isolé, faite au paragraphe précédent, reste valable dans la mesure où elle ne met pas en jeu l'expression explicite (12.45) de la forme de Lagrange: le *groupe de Galilée* G des matrices

$$(13.3) \quad a \equiv \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} A \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{b} \in R^3, \quad \mathbf{c} \in R^3 \\ e \in R \end{array}$$

opère sur l'espace U des mouvements d'un système dynamique isolé en conservant la forme de Lagrange (13.1.III); à tout élément de l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G

$$(13.4) \quad Z \equiv \begin{bmatrix} j(\omega) & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \omega, \beta, \gamma \in R^3 \\ \varepsilon \in R \end{array}$$

correspond un champ de vecteurs Z_U de U , qui constitue une transformation canonique infinitésimale. Le *moment* correspondant (Définition (11.7)) a été noté

$$(13.5) \quad \mu \equiv \{ \mathbf{l}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, E \}$$

il opère sur l'algèbre de Lie selon la règle

$$(13.6) \quad \mu(Z) \equiv \langle \mathbf{l}, \omega \rangle - \langle \mathbf{g}, \beta \rangle + \langle \mathbf{p}, \gamma \rangle - E\varepsilon$$

- (13.7) Nous supposons essentiellement que ce moment existe ⁽¹⁾; nous savons alors que le groupe dynamique G possède une *classe de cohomologie symplectique* (§ 11), qui peut être repérée à l'aide d'un nombre m (12.132); à cause de (12.135) nous appellerons m la *masse* du système; nous pouvons donc a priori considérer des systèmes de *masse nulle* ou *negative*.

Comme en (12.134), on voit que l'on peut choisir la constante additive dans μ de façon que

$$(13.8) \quad \sigma(Z_U(x)) (Z'_U(x)) \equiv \mu([Z, Z']) + m \{ \langle \beta, \gamma' \rangle - \langle \beta', \gamma \rangle \}$$

- (13.9) — Les commentaires des formules (12.135) nous fournissent alors l'interprétation physique du moment μ : \mathbf{l} est le *moment cinétique* du système, \mathbf{p} son *impulsion*, E son *énergie*; quant à la grandeur \mathbf{g} , elle nous donne la définition du *centre de gravité* (ou *barycentre*): c'est le point \mathbf{R} possédant le mouvement rectiligne uniforme défini par l'équation

$$(13.10) \quad \mathbf{R} \equiv \frac{\mathbf{p}t + \mathbf{g}}{m}$$

à condition bien entendu que la masse m ne soit pas nulle; on peut vérifier que ce mouvement ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi.

- (13.11) Les grandeurs \mathbf{l} , \mathbf{g} , \mathbf{p} sont d'ailleurs complètement définies par la formule (13.8); quant à l'énergie E , elle contient une constante additive arbitraire.

- (13.12) — Pour un système composé de divers systèmes isolés, on vérifie — comme conséquence de (13.1.II) — que les quantités m , \mathbf{l} , \mathbf{g} , \mathbf{p} , E sont *additives*; il en résulte notamment que le centre de gravité du système composé est donné par la formule usuelle

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_j \mathbf{R}_j}{\sum m_j}$$

à chaque instant t . ■

⁽¹⁾ On peut considérer qu'il s'agit d'un nouveau principe (voir (12.143)); principe que la mécanique newtonienne peut emprunter, sans aliénation, à la mécanique relativiste (voir ci-dessous (13.81)).

— Si on effectue un changement d'unités pour les grandeurs r, t, σ , de la forme

$$r \rightarrow \frac{r}{L}, \quad t \rightarrow \frac{t}{T}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{A}$$

les formules précédentes nous donnent les règles de transformation des autres variables ; règles qui peuvent se résumer par les « équations aux dimensions » suivantes :

(13.13)

r	L
t	T
σ	A

ω	1
β	LT^{-1}
γ	L
ε	T

l	A
g	ATL^{-1}
p	AL^{-1}
E	AT^{-1}

m	ATL^{-2}
-----	------------

Si on désigne, selon la coutume, par M la dimension de la masse, on voit que A s'écrit $ML^2 T^{-1}$ (on appelle *action* toute grandeur ayant cette équation aux dimensions, parce que c'est le cas de l'action hamiltonienne (12.96)). En remplaçant A par cette valeur $ML^2 T^{-1}$, on retrouve les équations aux dimensions usuelles de la mécanique classique ; elles restent donc valables en mécanique symplectique.

DÉCOMPOSITION BARYCENTRIQUE

THÉORÈME

Soit G un groupe dynamique d'une variété symplectique connexe V , possédant le moment μ ; soit θ le cocycle correspondant (notations (11.17)).

1) Soit \tilde{G} un sous-groupe de Lie de G , d'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$. Alors \tilde{G} est un *groupe dynamique* de V , possédant le moment $\tilde{\mu}$ induit de μ

◇
$$\tilde{\mu}(Z) \equiv \mu(Z) \quad \forall Z \in \tilde{\mathcal{G}}$$

(13.14) 2) Supposons de plus que \tilde{G} soit un sous-groupe *invariant* de G ; désignons par $\tilde{\psi}$ l'application $x \mapsto \tilde{\mu}$, par $\underline{a}_{\tilde{\mathcal{G}}}$ la représentation duale de la

(13.14) représentation induite sur $\tilde{\mathcal{G}}$ par la représentation adjointe de G ⁽¹⁾, et par $\tilde{\theta}$ l'application

$$\tilde{\theta}(a)(Z) \equiv \theta(a)(Z) \quad \forall Z \in \tilde{\mathcal{G}}$$

On a alors

♡
$$\tilde{\psi}(\underline{a}_V(x)) - \underline{a}_{\tilde{\mathcal{G}}}(\tilde{\psi}(x)) \equiv \tilde{\theta}(a) \quad \forall a \in G$$
 ⁽²⁾.

La vérification est immédiate.

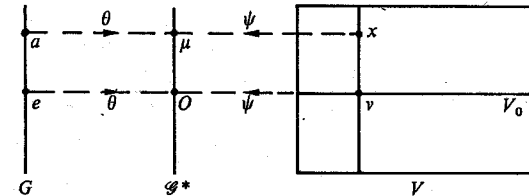
THÉORÈME

Soit G un groupe dynamique d'une variété symplectique connexe V , possédant un moment μ (notations (11.17)).

On suppose que G est *connexe* et *abélien*, et que la 2-forme f (notation 11.17c) est *régulière*. Alors :

- (13.15)
- a) θ est un *isomorphisme* entre le groupe de Lie G et le groupe additif \mathcal{G}^* ⁽³⁾ ;
 - b) Si l'on pose $\sigma(\mu)(\mu') \equiv \mu f^{-1}(\mu')$, \mathcal{G}^* devient un espace vectoriel symplectique ;
 - c) ψ induit, sur chaque *orbite*, un *symplectomorphisme* de celle-ci avec \mathcal{G}^* ;
 - d) V est *symplectomorphe*, soit à \mathcal{G}^* , soit au *produit direct* $\mathcal{G}^* \times V_0$, V_0 étant la variété plongée dans V , d'équation $\mu = 0$, munie de sa structure symplectique induite.

Fig. 13.1.



— G étant abélien, la représentation adjointe est triviale ($\underline{a}_G(Z) \equiv Z$), donc aussi la représentation co-adjointe ; le crochet de Lie est nul dans \mathcal{G} ; les formules (11.17, ♡, ◇, ♠, #) deviennent respectivement :

♡
$$\theta(a \times b) \equiv \theta(a) + \theta(b)$$

 ◇
$$\psi(\underline{a}_V(x)) \equiv \psi(x) + \theta(a)$$

 ♠
$$D(\psi)(x)(Z_V(x)) \equiv f(Z)$$

 #
$$\sigma(Z_V(x))(Z'_V(x)) \equiv f(Z)(Z')$$

⁽¹⁾ Comme \tilde{G} est invariant, $[Z \in \tilde{\mathcal{G}}, a \in G] \Rightarrow [\underline{a}_G(Z) \in \tilde{\mathcal{G}}]$ (voir (6.23)) ; si on pose

$$\underline{a}_{\tilde{\mathcal{G}}}(Z) \equiv \underline{a}_G(Z) \quad \forall Z \in \tilde{\mathcal{G}},$$

$\underline{a}_{\tilde{\mathcal{G}}}$ est donc bien une représentation de G sur $\tilde{\mathcal{G}}$.

⁽²⁾ Ceci montre que $\tilde{\theta}$ est un $\tilde{\mathcal{G}}^*$ -cocycle de G .

⁽³⁾ C'est simultanément un isomorphisme de groupes et un difféomorphisme de variétés.

Comme la dérivée de θ en l'élément neutre e , soit f , est régulière, il existe un ouvert E de G , contenant e , où la restriction de θ est un difféomorphisme (Théorème (1.35)); val (θ) contient donc une boule de centre 0 dans \mathcal{G}^* ; comme $\theta(a^2) \equiv 2\theta(a)$ selon \heartsuit , on voit que val (θ) est en fait \mathcal{G}^* tout entier.

Soit Γ le groupe des translations a_G telles que $\theta(a) = 0$; les éléments de Γ sont des difféomorphismes de G ; on vérifie immédiatement que les images de E par Γ sont deux à deux disjointes; les conditions (1.43) sont vérifiées, le théorème (1.45) montre que (G, Γ, θ) est un revêtement de \mathcal{G}^* (Théorèmes (1.56), (1.57)); comme \mathcal{G}^* est simplement connexe (1.54), Γ est réduit à son élément neutre (1.58). Il en résulte que θ est un difféomorphisme de G avec \mathcal{G}^* ; \heartsuit montre que c'est aussi un isomorphisme de groupes; d'où (a). La formule \diamond montre alors que ψ est une bijection de chaque orbite avec \mathcal{G}^* . Soient $dx \equiv Z_V(x)$, $d'x \equiv Z'_V(x)$ deux vecteurs tangents à l'orbite; \spadesuit montre que $d\mu = f(Z)$, $d'\mu = f(Z')$, et $\#$ que

$$\sigma(dx)(d'x) = f(Z)(Z') = d\mu(f^{-1}(d'\mu)) = \sigma(d\mu)(d'\mu);$$

d'où (b) et (c).

— Si la dimension de V est égale à celle de G , les orbites sont des variétés plongées dans V , de même dimension, donc ouvertes, et deux à deux disjointes. Comme V est connexe, il y a une seule orbite, ψ est un symplectomorphisme de V avec \mathcal{G}^* .

Supposons maintenant la dimension $2n$ de V différente de celle, $2p$, de G ; il est clair que le rang de $D(\psi)(x)$ est égal à $2p$, donc que chaque équation $\psi(x) = \mu_0$ définit une variété V_{μ_0} , de dimension $2(n-p)$, plongée dans V (Théorème (1.40)); \diamond montre que chaque orbite et chaque variété V_{μ_0} se coupent en un seul point; en particulier, l'intersection de l'orbite de x avec V_0 est

$$\spadesuit \quad v = \theta^{-1}(-\psi(x))_V(x);$$

l'application $x \mapsto v$ est donc différentiable.

L'application $x \mapsto \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix}$ est donc un difféomorphisme de V avec $\mathcal{G}^* \times V_0$, puisque l'application inverse est $\begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix} \mapsto \theta^{-1}(\mu)_V(v)$, donc aussi différentiable. On peut alors écrire

$$\sigma(dx)(\delta x) \equiv \sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \delta \mu + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v\right);$$

les vecteurs $\frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu$ sont tangents à une orbite, donc de la forme $Z_V(x)$; \heartsuit montre

que les vecteurs $\frac{\partial x}{\partial v} dv$ sont tangents à la variété V_{μ_0} passant par x , donc orthogonaux aux précédents [grâce à la définition même (11.7) du moment]; en utilisant (c) et le fait que les a_V sont des symplectomorphismes, il vient

$$\sigma(dx)(\delta x) \equiv \sigma(d\mu)(\delta \mu) + \sigma(dv)(\delta v)$$

ce qui montre que V_0 est symplectique et que $x \mapsto \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix}$ est un symplectomorphisme de V avec $\mathcal{G} \times V_0$. C.Q.F.D.



— Il se trouve que le groupe de Galilée G possède un sous-groupe de Lie invariant abélien \tilde{G} , ensemble des

$$(13.16) \quad a = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} \in R^3; \quad \mathbf{c} \in R^3$$

dont l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$ est l'ensemble des

$$(13.17) \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} \in R^3; \quad \boldsymbol{\gamma} \in R^3.$$

Considérons donc un système dynamique isolé (au sens général (13.1)); le théorème (13.14) nous donne les résultats suivants :

— \tilde{G} est groupe dynamique du système, et possède le moment $\tilde{\mu}$ défini à partir du moment galiléen $\mu \equiv \{\mathbf{l}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, E\}$ par la formule

$$(13.18) \quad \tilde{\mu}(Z) \equiv \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma} \rangle - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\beta} \rangle \quad \forall Z \in \tilde{\mathcal{G}};$$

nous noterons

$$(13.19) \quad \tilde{\mu} \equiv \{\mathbf{g}, \mathbf{p}\}.$$

— L'application $\tilde{\theta}$:

$$(13.20) \quad \tilde{\theta}(a) \equiv m \{ \mathbf{c}, \mathbf{b} \}$$

vérifie (13.14 \heartsuit); le cocycle symplectique correspondant \tilde{f} de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$ est donné par

$$(13.21) \quad \tilde{f}(Z)(Z') \equiv m[\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle - \langle \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\gamma} \rangle] \quad \forall Z, Z' \in \tilde{\mathcal{G}}.$$

Si m (qui est la masse généralisée du système au sens (13.7)) n'est pas nulle, \tilde{f} est régulier, on peut appliquer le théorème (13.15) : le groupe de Lie \tilde{G} est isomorphe au groupe additif R^6 (ce qui se vérifie d'ailleurs immédiatement); \mathcal{G}^* devient un espace vectoriel symplectique en posant

$$(13.22) \quad \sigma(\{d\mathbf{g}, d\mathbf{p}\})(\{\delta\mathbf{g}, \delta\mathbf{p}\}) \equiv \frac{1}{m} [\langle d\mathbf{p}, \delta\mathbf{g} \rangle - \langle \delta\mathbf{p}, d\mathbf{g} \rangle]$$

et l'application $\tilde{\psi}[x \mapsto \tilde{\mu}]$ est un symplectomorphisme de chaque orbite de \tilde{G} avec $\tilde{\mathcal{G}}^*$. Deux cas sont possibles a priori :

■ 1) La dimension de U est 6; alors U est symplectomorphe à $\tilde{\mathcal{G}}^*$; en utilisant comme variables le temps t , le centre de gravité R (13.10) et sa vitesse $V = p/m$, on trouve :

$$(13.23) \quad \sigma(dx) (\delta x) = \sigma(d\tilde{\mu}) (\delta \tilde{\mu}) = \langle m dV, \delta R - V \delta t \rangle - \langle m \delta V, dR - V dt \rangle$$

on voit que le système est *isomorphe* (au sens (13.2)) à un point matériel libre. ■

2) La dimension de U est ≥ 8 ; alors il existe un symplectomorphisme χ :

$$(13.24) \quad \chi(x) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ v \end{pmatrix}$$

de U avec un produit direct $\tilde{\mathcal{G}}^* \times U_0$.

(13.25) $\tilde{\mathcal{G}}^*$ peut s'interpréter, grâce à (13.23), comme la variété des *mouvements du centre de gravité*, supposé doué de la masse m .

(13.26) U_0 est la variété des mouvements dans lesquels $\tilde{\mu}$ est nul, c'est-à-dire dans lesquels le centre de gravité reste immobile à l'origine du repère d'inertie choisi (mouvements *autour* du centre de gravité); v s'appelle le *mouvement propre*. ■

— On peut vérifier que le groupe de Galilée *respecte cette décomposition*, c'est-à-dire qu'on peut faire opérer G sur $\tilde{\mathcal{G}}^*$ et sur U_0 de façon que

$$(13.27) \quad \chi(a_U(x)) \equiv \begin{pmatrix} a_{\tilde{\mathcal{G}}^*}(\tilde{\mu}) \\ a_{U_0}(v) \end{pmatrix}$$

avec

$$(13.28) \quad \begin{cases} a_{\tilde{\mathcal{G}}^*}(\tilde{\mu}) \equiv \tilde{\mu} \cdot a^{-1}_{\tilde{\mathcal{G}}} + \tilde{\theta}(a) & (1) \\ a_{U_0}(v) = F(a)_U(v) \end{cases}$$

F étant l'homomorphisme du groupe G dans lui-même défini par

$$(13.29) \quad [\tilde{\theta}(F(a)) = 0, \quad a \cdot F(a)^{-1} \in \tilde{G}] \quad \forall a \in G$$

(1) C'est la *représentation adjointe* de G qui figure au second membre.

ou, ce qui est équivalent, par

$$(13.30) \quad F \left(\begin{bmatrix} A & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \equiv \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(13.31) — On voit que G n'opère sur U_0 que par l'intermédiaire de $G_0 = \text{val}(F)$, qui est le sous-groupe de Lie des éléments de G qui conservent U_0 , et qui est isomorphe au groupe quotient G/\tilde{G} (à cause de (13.29)), et à $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}$ (à cause de (13.30)).

— De plus G opère par symplectomorphismes sur chaque variété composante; il en résulte que le produit direct $G \times G$ est aussi un groupe dynamique

de U : il suffit de définir $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_U(x)$ par la formule

$$(13.32) \quad \chi \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_U(x) \right) = \begin{pmatrix} a_{\tilde{\mathcal{G}}^*}(\tilde{\mu}) \\ b_{U_0}(v) \end{pmatrix} \quad \forall a, b \in G,$$

l'opération initiale (13.1.III) étant la *diagonale* de celle-ci ($a \equiv b$); à cause de (13.27), on voit plus précisément que $G \times G_0$ est groupe dynamique de U , en posant

$$(13.33) \quad X \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_U(x) \right) = \begin{pmatrix} a_{\tilde{\mathcal{G}}^*}(\tilde{\mu}) \\ b_{U_0}(v) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \forall a \in G \\ \forall b \in G_0 \end{matrix}$$

donc :

(13.34) Si la masse d'un système isolé n'est pas nulle, celui-ci admet comme groupe dynamique le produit direct du groupe de Galilée G par le groupe $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}$. ■

Il en résulte évidemment que le *moment galiléen* est la somme d'un *moment orbital* et d'un *moment propre*; le calcul donne :

$$\begin{cases} \mu \text{ orbital} = \left\{ \frac{1}{m} \mathbf{g} \times \mathbf{p}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} \right\} \\ \mu \text{ propre} = \{ \mathbf{l}_{\text{propre}}, 0, 0, E_{\text{propre}} \} \end{cases}$$

$\mathbf{l}_{\text{propre}}$ et E_{propre} ne dépendant que du mouvement propre v . Avec les variables (13.23), le moment orbital s'écrit (1)

$$(13.36) \quad m \{ \mathbf{R} \times \mathbf{V}, \mathbf{R} - \mathbf{V}t, \mathbf{V}, \frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 \}. \quad \blacksquare$$

(1) Comparer avec (12.125).

Exemples

— Ces résultats s'appliquent d'abord à la mécanique classique, où ils sont bien connus :

(13.37) — Dans le cas du problème des deux corps (étoile double, atome d'hydrogène), on peut caractériser un mouvement propre en étudiant un seul des deux corps, qui semble attiré par le centre de gravité fixe suivant la loi newtonienne; la variété U_0 , de dimension 6, a été envisagée ci-dessus (12.149). ■

(13.38) Ils s'appliquent aussi à la mécanique classique des *systèmes liés* (voir (12.144)). Dans le cas d'un *solide libre* (problème d'Euler-Poinsot), U_0 est difféomorphe à $SO(3) \times R^3$, sa dimension est 6. Il y a exception dans le cas où le solide est *rectiligne* (une molécule biatomique par exemple), où U_0 est l'espace S_2^D des vecteurs tangents à une sphère (notation (1.31)), donc de dimension 4. ■

(13.39) Dans le cas non classique d'une *particule à spin* (ci-dessous (14.48)), U_0 est une *sphère* S_2 , munie de la structure symplectique définie en (11.40).

ESPACE DE MINKOWSKI ET GROUPE DE POINCARÉ

Revenons aux notations (12.57) : un événement X (c'est-à-dire un point de l'espace-temps E_4) peut se repérer, dans un référentiel \mathcal{R} , par sa position \mathbf{r} et sa date t ; ce qui s'écrit

$$(13.40) \quad X \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{r} \in R^3 \\ t \in R \end{array}$$

(13.41) — On appelle *référentiel de Lorentz* un référentiel d'inertie dans lequel on a choisi l'unité de temps de sorte que la vitesse de la lumière dans le vide soit égale à 1 (¹).

(13.42) Soit \mathcal{R} un référentiel de Lorentz; on peut évidemment donner à l'espace-temps E_4 une structure d'*espace vectoriel* en supposant que \mathcal{R} est linéaire (²), puis une structure d'*espace euclidien* (au sens (6.49)) telle que

$$(13.43) \quad g(dX)(dX) \equiv dt^2 - \|\mathbf{dr}\|^2$$

(¹) Exemple : on prend comme unité de temps 3,335 635 10^{-11} seconde, l'unité de longueur étant le centimètre.

(²) Les égalités $\mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} + \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}' \\ t' \end{pmatrix} \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} + \mathbf{r}' \\ t + t' \end{pmatrix}$, $\lambda \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{r} \\ \lambda t \end{pmatrix}$ sont prises comme définition des opérations $X + X'$, λX dans E_4 .

Le tenseur g est entièrement caractérisé par cette formule, sachant qu'il est bilinéaire et symétrique (6.49); on trouve immédiatement

$$(13.44) \quad g \left(\mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \right) \left(\mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}' \\ t' \end{pmatrix} \right) \equiv tt' - \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle$$

(13.45) L'espace-temps E_4 , muni de la structure ainsi définie, s'appelle *espace de Minkowski*.

En employant la *transposition* (Définition (6.53)), on constate que (13.44) s'écrit

$$(13.46) \quad \bar{\mathcal{R}} \cdot \mathcal{R} = \begin{pmatrix} -1_{R^3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en désignant par 1_{R^3} l'application identique de R^3 sur R^3 , c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(13.47) Ceci montre que E_4 est un espace hyperbolique, d'indice d'inertie 1 et de dimension 4 (Théorème (6.72)). ■

(13.48) On appelle *groupe de Lorentz* le groupe orthogonal $O(E_4)$ de l'espace de Minkowski (Définition (6.63)); le théorème (6.76) montre que $O(E_4)$ est un groupe de Lie de dimension 6, ayant 4 composantes connexes; on appelle *groupe de Lorentz restreint* la composante connexe de l'élément neutre; c'est un sous-groupe de Lie ouvert, connexe, invariant, ayant encore la dimension 6 (6.35).

On déduit facilement du théorème (6.75) que tout élément du groupe de Lorentz restreint se met sous la forme

$$(13.49) \quad L \equiv \mathcal{R} \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{b}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}^{-1} \quad \begin{array}{l} A \in SO(3) \\ \mathbf{b} \in R^3 \end{array};$$

de façon plus précise, l'application $\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \mapsto L$ définie par cette formule est un *difféomorphisme* de $SO(3) \times R^3$ sur le groupe de Lorentz restreint.

On voit également qu'un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz (cf. 6.62) peut s'écrire

$$(13.50) \quad A \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} j(\omega) & \beta \\ \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \quad \omega \in R^3; \quad \beta \in R^3 \quad \blacksquare$$

— On appelle *groupe de Poincaré* ⁽¹⁾ le groupe des matrices

$$(13.51) \quad a \equiv \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L \in O(E_4); \quad C \in E_4$$

opérant sur l'espace de Minkowski suivant la formule

$$(13.52) \quad g(X) \equiv L \cdot X + C$$

(13.53) Il est clair que le groupe de Poincaré est un groupe de Lie de dimension 10, difféomorphe à $O(E_4) \times E_4$; il a donc lui aussi 4 composantes connexes (1.50); la composante contenant l'élément neutre (*groupe de Poincaré restreint*) s'obtient en choisissant L dans le groupe de Lorentz restreint; ce groupe est donc difféomorphe à $SO(3) \times R^7$, et par conséquent au groupe de Galilée (voir (12.73)).

Un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré sera noté

$$(13.54) \quad Z \equiv \begin{pmatrix} A & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = -A; \quad \Gamma \in E_4$$

en utilisant (13.50) et en posant ⁽²⁾

$$(13.55) \quad \mathcal{R}' \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ Ou encore « groupe de Lorentz non homogène ».

⁽²⁾ \mathcal{R}' est une application linéaire de R^3 sur $E_4 \times R$.

nous pourrons aussi écrire

$$(13.56) \quad Z \equiv \mathcal{R}' \cdot \begin{pmatrix} j(\omega) & \beta & \gamma \\ \bar{\beta} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}'^{-1} \quad \begin{array}{l} \omega \in R^3; \quad \beta \in R^3; \quad \gamma \in R^3 \\ \varepsilon \in R \end{array}$$

Un *torseur* du groupe de Poincaré sera noté

$$(13.57) \quad \mu \equiv \{ M, P \} \quad \bar{M} = -M, \quad P \in E_4$$

et défini par l'identité ⁽¹⁾

$$(13.58) \quad \mu(Z) \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}(M \cdot A) - \bar{P} \cdot \Gamma$$

en représentant M et P dans le référentiel \mathcal{R} , sous la forme

$$(13.59) \quad M \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} j(l) & g \\ \bar{g} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \quad P \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} p \\ E \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} l, g, p \in R^3 \\ E \in R \end{array}$$

la formule (13.58) donne ⁽²⁾

$$(13.60) \quad \mu(Z) \equiv \langle l, \omega \rangle - \langle g, \beta \rangle + \langle p, \gamma \rangle - E\varepsilon \quad \blacksquare$$

— Une vérification directe permet d'établir les propositions suivantes :

(13.61) — L'algèbre de Lie \mathcal{G} du groupe de Poincaré est égale à son algèbre dérivée.

(13.62) — L'espace de cohomologie symplectique du groupe de Poincaré est nul ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Pour tout espace euclidien réel E , on peut définir une structure euclidienne sur l'espace E' des opérateurs *antihermitiens* de E en posant

$$g(M)(A) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(M \cdot A) \quad \forall M, A \in E'$$

⁽²⁾ Comparer avec (12.122).

⁽³⁾ Plus généralement, la \mathcal{G}^* -cohomologie du groupe est nulle; on peut remarquer que la \mathcal{G} -cohomologie n'est pas : il existe un \mathcal{G} -cocycle non nul θ défini par

$$\theta \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{qui n'est pas un } \mathcal{G}\text{-cobord.}$$

MÉCANIQUE RELATIVISTE



— On postule en relativité restreinte, que les formules de passage d'un référentiel de Lorentz \mathcal{R} à un autre \mathcal{R}^* s'écrivent

(13.63)
$$\mathcal{R} = a \cdot \mathcal{R}^*,$$

a étant un élément du groupe de Poincaré restreint ⁽¹⁾.

(13.64) On en déduit immédiatement que la formule (13.43)

$$g(dX)(dX) = dt^2 - \|dr\|^2$$

est vraie dans tous les référentiels de Lorentz : ainsi s'explique le fait que, dans un référentiel d'inertie quelconque, la vitesse de propagation de la lumière soit la même dans toutes les directions (expérience de Michelson).

Mais il faut renoncer aux formules classiques de changement de référentiel : si l'on pose

(13.65)
$$X \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \equiv \mathcal{R}^* \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \end{pmatrix}$$

l'application des formules ci-dessus montre que l'on a

(13.66)
$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec

(13.67)
$$\alpha = \mathcal{R}'^{-1} \cdot a \cdot \mathcal{R}' = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathbf{c} \\ 0 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \\ e \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\mathcal{L} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, A \in \text{SO}(3)$$

On voit en particulier, si $\mathbf{b} \neq 0$, que t^* dépend non seulement de t , mais aussi de \mathbf{r} : en théorie de la relativité, la notion de simultanéité dépend du référentiel choisi.

⁽¹⁾ Le cas du groupe de Poincaré complet sera envisagé plus loin (14.64).

Exemple : En prenant $A = 1, \mathbf{c} = 0, e = 0, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on trouve

(13.68)
$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \text{ch } \varphi & 0 & 0 & \text{sh } \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \varphi & 0 & 0 & \text{ch } \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix};$$

on peut interpréter cette formule comme décrivant un repère en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un autre (le « train d'Einstein »), avec une vitesse $v = \text{th } \varphi$ (donc inférieure à celle de la lumière); en remplaçant $\text{ch } \varphi$ et $\text{sh } \varphi$ par leurs valeurs $1/\sqrt{1-v^2}, v/\sqrt{1-v^2}$ on trouve les formules de Lorentz, dont l'interprétation détaillée conduit aux notions bien connues de « retard des horloges » et « contraction de Lorentz ».

(13.69) A fortiori, les formules (12.59) de passage à un référentiel accéléré ou tournant ne sont plus valables; il s'est passé fort longtemps avant que l'on comprenne que ces formules n'ont pas de substitut relativiste ⁽¹⁾.

— La relativité restreinte a une implication immédiate en mécanique : pour appliquer le principe de relativité (12.72), il faut remplacer par (13.63) les formules classiques (12.71) qui mettent en jeu le groupe de Galilée. Nous modifierons en conséquence les axiomes (13.1) de la mécanique symplectique (seul l'axiome III est changé) :

- (13.70)
- I L'ensemble des mouvements d'un système dynamique est une variété symplectique connexe.
 - II Si plusieurs systèmes dynamiques évoluent indépendamment, la variété des mouvements du système composé est le produit direct symplectique des variétés des systèmes composants.
 - III Si un système dynamique est isolé, la variété de ses mouvements admet le groupe de Poincaré restreint comme groupe dynamique.

Nous considérerons ces axiomes comme les principes de la mécanique relativiste.

⁽¹⁾ Quand on veut décrire en mécanique classique un corps élastique assez rigide, il est commode, comme première approximation, de le supposer solide; mais la définition d'un solide n'est pas compatible avec la relativité (parce que la définition de la distance de deux points en mouvement met en jeu la notion de simultanéité, qui dépend, on le sait, du référentiel choisi). Il n'y a pas là de paradoxe : la théorie de l'élasticité se formule de façon cohérente en relativité restreinte ou générale (voir J. M. Souriau, *Géométrie et relativité*, Hermann, 1965); il faut simplement renoncer à une approximation incompatible avec la structure de la théorie.

(13.71) — Bien entendu, on adapte aussi la définition (13.2) des *isomorphismes* de deux systèmes dynamiques isolés : ce seront les symplectomorphismes Φ vérifiant :

$$\Phi(a_V(x)) = a_V(\Phi(x)) \quad \forall a \in G$$

G désignant cette fois le groupe de Poincaré.

(13.72) — Soit U la variété symplectique des mouvements d'un système relativiste isolé.

Comme le groupe de Poincaré restreint G est un groupe dynamique de U , et comme l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G est égale à son algèbre dérivée (13.61), le théorème (11.8) nous montre que G possède un moment μ , qui est un torseur de G , et pour lequel nous adopterons les notations (13.57) à (13.60) ; puisque la cohomologie symplectique de G est nulle (13.62), nous pouvons choisir la constante additive qui figure dans μ , de sorte que le cocycle symplectique associé soit nul ; ce qui s'écrit (voir (11.17◇))

(13.73) $\psi(a_V(x)) \equiv a_{\mathcal{G}}(\psi(x))$ $\forall a \in G$

en désignant par ψ l'application $[x \mapsto \mu]$.
La formule (11.17#) montre alors que

(13.74) $\sigma(Z_V(x))(Z'_V(x)) \equiv \mu[Z, Z']$

on peut considérer cette formule comme une *définition* de μ .

(13.75) — Notons que le théorème (13.24) [qui donnait une décomposition de U en produit direct et permettait de définir un groupe dynamique de dimension 14 pour tout système *classique isolé* de masse non nulle] ne s'étend pas au cas relativiste : ceci résulte du fait que le groupe de Poincaré G ne possède pas de sous-groupe abélien vérifiant les hypothèses du théorème (13.15), donc à fortiori de tel sous-groupe invariant.

(13.76) — Le groupe de Galilée et le groupe de Poincaré sont deux sous-groupes de Lie du groupe des transformations affines de l'espace-temps ; leur intersection \tilde{G} est donc un sous-groupe de Lie de chacun d'eux, ayant comme algèbre de Lie l'intersection $\tilde{\mathcal{G}}$ des algèbres de Lie (Théorème (6.34)).

On trouve immédiatement (¹)

(13.77)

$a \in \tilde{G}$	$\Leftrightarrow a = \begin{bmatrix} A & 0 & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$Z \in \tilde{\mathcal{G}}$	$\Leftrightarrow Z = \begin{bmatrix} j(\omega) & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

la dimension de ce groupe est donc 7.

Le théorème (13.14) montre que \tilde{G} est groupe dynamique aussi bien pour un système classique que pour un système relativiste, et nous permet de calculer le moment $\tilde{\mu}$ correspondant ; on trouve :

(13.78)
$$\tilde{\mu}(Z) \equiv \langle \mathbf{l}, \omega \rangle + \langle \mathbf{p}, \gamma \rangle - E\varepsilon \quad \forall Z \in \tilde{\mathcal{G}}$$

aussi bien avec les notations classiques (13.6) qu'avec les notations relativistes (13.59).

(13.79) Par conséquent, les grandeurs *relativistes* $\mathbf{l}, \mathbf{p}, E$ pourront encore s'appeler respectivement *moment cinétique*, *impulsion* et *énergie* (comme en (13.9)) ; c'est pourquoi le vecteur de l'espace de Minkowski (cf. (13.59))

(13.80)
$$P \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ E \end{pmatrix}$$

s'appelle vecteur *impulsion-énergie* (on dit aussi *quadri-impulsion*, ou encore *impulsion de Lorentz*, etc.).

(13.81) — Notons que l'énergie E d'un système relativiste est définie *globalement et sans constante additive* — une fois adoptée la convention (13.73). ■

— Si G est le groupe de Poincaré restreint, X un point de l'espace-temps, le *stabilisateur* G_X de X (voir (6.36)) est donné par

(13.82)

$[a \in G_X]$	$\Leftrightarrow a = \begin{bmatrix} L & [1 - L]X \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(L \in \text{groupe de Lorentz restreint})$
---------------	---------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------

(¹) Avec l'abus usuel qui consiste à identifier les transformations d'espace-temps avec leurs matrices représentatives, il est recommandé de nommer \tilde{G} le « groupe d'Aristote ».

et son algèbre de Lie par

$$(13.83) \quad [Z \in \mathcal{G}_X] \Leftrightarrow Z = \begin{bmatrix} A & -AX \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\bar{A} = -A).$$

Revenons à notre système dynamique (13.72); pour tout point X , G_X est un groupe dynamique, dont le moment μ_X est donné par

$$(13.84) \quad \mu_X(Z) = \mu(Z) \quad \forall Z \in \mathcal{G}_X$$

(Théorème (13.14)); compte tenu de (13.82) et (13.58), on vérifie que

$$(13.85) \quad \mu_X(Z) \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr} (M_X \cdot A)$$

si l'on pose

$$(13.86) \quad M_X = M + P \cdot \bar{X} - X \cdot \bar{P}$$

L'opérateur antihermitien M_X , qui caractérise le moment μ_X , s'appelle *moment de Lorentz par rapport au point X*; la formule (13.86) nous donne son expression en fonction de M (qui est le moment par rapport à l'origine), de X ; et de la quadri-impulsion P ; en détaillant (notations (13.59)), il vient

$$(13.87) \quad \begin{cases} \mathbf{l}_X = \mathbf{l} + \mathbf{p} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{g}_X = \mathbf{g} + \mathbf{p}t - \mathbf{r}E \end{cases} \quad \blacksquare$$

Indiquons quelques formules utiles en géométrie de l'espace de Minkowski orienté ⁽¹⁾.

— Il existe une 4-forme non nulle de E_4 , que nous noterons vol (voir (4.30), (4.31)) que l'on peut définir par

$$(13.88) \quad \text{vol} (X_1) (X_2) (X_3) (X_4) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} \quad [X_j \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_j \\ t_j \end{pmatrix}$$

pour $j = 1, 2, 3, 4]$

quel que soit le référentiel de Lorentz \mathcal{R} .

⁽¹⁾ Voir J. M. Souriau, *Calcul linéaire* (Presses Universitaires de France); nous choisissons ici l'orientation opposée.

— Nous appellerons *produit vectoriel* de 3 vecteurs X_1, X_2, X_3 le vecteur

$$(13.89) \quad j(X_1) (X_2) (X_3) = \overline{\text{vol} (X_1) (X_2) (X_3)}$$

il est orthogonal à chacun de ces trois vecteurs, nul si deux d'entre eux sont égaux.

— Si X_1 et X_2 sont deux vecteurs, l'opérateur $j(X_1) (X_2)$ est *antihermitien*; on a ⁽¹⁾ :

$$(13.90) \quad j(X_1) (X_2) \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} j(\mathbf{r}_2 t_1 - \mathbf{r}_1 t_2) & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

$$(13.91) \quad j(LX_1) (LX_2) = \det(L) L j(X_1) (X_2) \bar{L} \quad \text{si } L \in \text{groupe de Lorentz}$$

$$(13.92) \quad j(A) (B) \cdot j(X) (Y) \equiv [X \cdot \bar{Y} - Y \cdot \bar{X}] \cdot [A \cdot \bar{B} - B \cdot \bar{A}] + [\bar{A} \cdot X \cdot \bar{B} \cdot Y - \bar{A} \cdot Y \cdot \bar{B} \cdot X] 1_{E_4}$$

— Il existe une application *linéaire* $*$, transformant tout opérateur antihermitien F en un opérateur antihermitien $*(F)$, telle que

$$(13.93) \quad \bar{X}_1 \cdot *(F) \cdot X_2 \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr} (j(X_1) (X_2) \cdot F)$$

$$(13.94) \quad *(X_1 \cdot \bar{X}_2 - X_2 \cdot \bar{X}_1) \equiv j(X_1) (X_2)$$

$$(13.95) \quad *(*(F)) \equiv -F$$

$$(13.96) \quad *(j(X_1) (X_2)) \equiv X_2 \cdot \bar{X}_1 - X_1 \cdot \bar{X}_2$$

$$(13.97) \quad [*(F)]^2 \equiv F^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} (F^2) 1_{E_4}$$

$$(13.98) \quad *(L \cdot F \cdot \bar{L}) \equiv L \cdot *(F) \cdot \bar{L} \det(L) \quad L \in \text{groupe de Lorentz}$$

$$(13.99) \quad * \left(\mathcal{R} \begin{bmatrix} j(\omega) & \beta \\ \bar{\beta} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{R}^{-1} \right) \equiv \mathcal{R} \begin{bmatrix} j(-\beta) & \omega \\ \bar{\omega} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{R}^{-1}$$

⁽¹⁾ Dans la matrice, j représente l'opérateur du produit vectoriel tridimensionnel.

— Il existe un nombre, appelé *pfaffien* de F , que nous noterons $\text{pf}(F)$, défini par

$$(13.100) \quad \boxed{*(F) \cdot F \equiv F \cdot [*(F)] \equiv \text{pf}(F)} \quad (\bar{F} \equiv -F)$$

on a

$$(13.101) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{pf}(X_1 \bar{X}_2 - X_2 \bar{X}_1 + X_3 \bar{X}_4 - X_4 \bar{X}_3) &\equiv \text{vol}(X_1)(X_2)(X_3)(X_4) \\ \text{pf}(A \cdot F \cdot \bar{A}) &\equiv \det(A) \cdot \text{pf}(F) \quad [\forall A \in L(E_4)] \\ \det(F) &= -[\text{pf}(F)]^2 \\ \text{pf}\left(\mathcal{Q} \cdot \begin{bmatrix} j(\omega) & \beta \\ \bar{\beta} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{Q}^{-1}\right) &= \langle \omega, \beta \rangle \end{aligned}}$$

— En joignant (13.86) et (13.94), on constate que le moment M_X par rapport à un point X vérifie

$$(13.102) \quad *(M_X) = *(M) + j(P)(X).$$

Par conséquent, si l'on pose

$$(13.103) \quad \boxed{W = *(M) \cdot P}$$

on aura

$$(13.104) \quad \boxed{*(M_X) \cdot P = W} \quad \forall X.$$

Le vecteur W ainsi défini s'appelle la *polarisation* du système dynamique. Sa définition (13.103) montre qu'il est *orthogonal* à P — puisque $*(M)$ est antihérmiteen. Notons les formules

$$(13.105) \quad \boxed{W = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \times \mathbf{g} + \mathbf{l}E \\ \langle \mathbf{l}, \mathbf{p} \rangle \end{pmatrix}}$$

$$(13.106) \quad \boxed{\text{pf}(M_X) \equiv \text{pf}(M) + \bar{W} \cdot X}$$

— Par hypothèse (13.73), le groupe de Poincaré opère sur les moments selon la représentation coadjointe; celle-ci se calcule au moyen de (11.15), (6.28); avec les notations déjà employées (13.51), (13.57)

$$a = \begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu = \{M, P\}$$

on trouve

$$a(\mu) = \{M', P'\}$$

avec

$$(13.107) \quad \boxed{\begin{aligned} M' &\equiv LM\bar{L} + C\bar{P}\bar{L} - LP\bar{C} \\ P' &\equiv LP \end{aligned}}$$

Notons les formules

$$(13.108) \quad \boxed{M_{X'} \equiv LM_X \bar{L}}$$

$$(13.109) \quad \boxed{W' \equiv L \cdot W}$$

où nous avons désigné par X' l'image de X par a ($X' = L \cdot X + C$), et par W' la nouvelle polarisation ($W' = *(M') \cdot P'$).

Il résulte de (13.107) et de (13.109) que les deux nombres

$$(13.110) \quad \boxed{\begin{aligned} C_2 &= \bar{P} \cdot P \\ C_4 &= \bar{W} \cdot W \end{aligned}}$$

sont *invariants* par le groupe de Poincaré; on les appelle les nombres de *Casimir*. Grâce à (13.97), on a

$$(13.111) \quad C_4 = \bar{P} \left[\frac{1}{2} \text{Tr}(M^2) - M^2 \right] P$$

on voit que C_2 et C_4 sont des polynômes en μ , de degrés respectifs 2 et 4. ■

— En relativité, les « équations aux dimensions » (notations (13.13)) L et T *coïncident*, à cause de la condition (13.41); voici celles des autres variables :

$$(13.112)$$

X	L	A	1	M	A	W	$A^2 L^{-1}$
σ	A	Γ	L	P	AL^{-1}	C_2	$A^2 L^{-2}$
						C_4	$A^4 L^{-2}$

§ 14 DESCRIPTION MÉCANISTE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES

(14.1) Soit U la variété symplectique des mouvements d'un système dynamique relativiste isolé.

Le groupe de Poincaré restreint G opère sur U : nous dirons que le système est « élémentaire » si G opère transitivement ⁽¹⁾.

Nous allons étudier ces systèmes dynamiques élémentaires ; nous verrons plus loin que les *particules élémentaires* que l'on observe dans la nature semblent, lorsqu'elles sont libres, être des « systèmes élémentaires » — au moins à titre d'approximation.

(14.2) — Désignons par x un mouvement du système (un point de U) ; soit ψ l'application qui fait correspondre à x son moment μ , normalisé par la condition (13.73)

(14.3)
$$\psi(\underline{a}_U(x)) \equiv \underline{a}_G(\psi(x)).$$

Lorsque x parcourt U , μ parcourt une orbite de la représentation co-adjointe ($a \mapsto \underline{a}_G$) du groupe de Poincaré ; le théorème (11.38) nous indique que ψ est, localement, un symplectomorphisme de U avec l'orbite, munie de la structure symplectique définie par l'algorithme (11.34) (avec $\theta = 0$) : U et l'orbite ont donc même dimension.

— Nous allons classer les systèmes suivant le genre ⁽²⁾ des vecteurs P (impulsion-énergie) et W (polarisation). ■

⁽¹⁾ C'est-à-dire si $[x, x' \in U] \Rightarrow [\exists a \in G, \underline{a}_U(x) = x']$; si x et x' sont deux mouvements du système, il existe deux référentiels de Lorentz \mathcal{R} et \mathcal{R}' tels que le mouvement x , observé dans le référentiel \mathcal{R} , soit identique au mouvement x' observé dans le référentiel \mathcal{R}' ; on peut dire qu'un système est élémentaire s'il n'a pas d'autre structure que sa situation spatiotemporelle.

⁽²⁾ Un vecteur $X = \mathcal{R} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ est du genre

temps si $\bar{X}.X > 0 \quad (|t| > |r|)$
 espace si $\bar{X}.X < 0 \quad (|t| < |r|)$
 isotrope si $\bar{X}.X = 0, X \neq 0 \quad (|t| = |r| \neq 0).$

Les vecteurs de temps (resp. isotropes) se partagent en deux classes : futur ($t > 0$), passé ($t < 0$).

Un élément L du groupe de Lorentz transforme un vecteur de temps en vecteur de temps, un vecteur isotrope en vecteur isotrope ; il peut être orthochrone (s'il conserve le futur d'une

CAS I : PARTICULE A SPIN

(14.4) — On appelle *particule à spin* (relativiste) un système dynamique élémentaire dont l'impulsion-énergie P et la polarisation W vérifient

$$\bar{P}.P > 0 \quad W \neq 0.$$

a) Alors $\bar{W}.W$ est négatif ; les nombres

◇

$m = \sqrt{\bar{P}.P} \text{ signe}(E) \quad (1)$	$s = \sqrt{\frac{-\bar{W}.W}{\bar{P}.P}}$
---------------------------------------------------	-------------------------------------------

ne dépendent pas du mouvement ; ils s'appellent respectivement *masse* ⁽²⁾ et *spin* de la particule ⁽³⁾.

b) m et s étant donnés ($m \neq 0, s > 0$), il existe un seul modèle ⁽⁴⁾ de particule à spin, de masse m , de spin s ; la dimension de l'espace U des mouvements est 8 ; si μ est le moment (pour le groupe de Poincaré restreint G) d'un mouvement x , l'application $x \mapsto \mu$ est un symplectomorphisme de U sur une orbite de la représentation coadjointe de G .

c) Soit V la variété (de dimension 9) décrite par le triplet

$$y = \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix}$$

part, le passé d'autre part) ou antichrone (s'il échange futur et passé). Les éléments orthochrones forment un sous-groupe ouvert de $O(E_4)$, réunion de deux composantes connexes ; le groupe de Lorentz restreint est l'intersection du groupe orthochrone et de $SO(E_4)$.

⁽¹⁾ E est l'énergie, mesurée dans un référentiel de Lorentz arbitraire (notation (13.59)).
⁽²⁾ L'emploi du terme « masse », qui n'a été défini jusqu'ici qu'en mécanique non relativiste (13.7), sera justifié plus loin (14.49).

⁽³⁾ Les équations aux dimensions de m et s sont respectivement AL^{-1} et A (cf. 13.112).

⁽⁴⁾ Au sens (13.2), (13.71) du mot « modèle ».

X étant un point de l'espace de Minkowski, I et J des quadrivecteurs liés par les relations

$$\heartsuit \quad \begin{cases} \bar{I}.I \equiv 1, & I \text{ de genre futur} \\ \bar{I}.J \equiv 0 \\ \bar{J}.J \equiv -1. \end{cases}$$

On peut caractériser un mouvement x par un point y de V , de sorte que l'application $\Phi[y \mapsto x]$ soit différentiable, et que le moment $\mu \equiv \{M, P\}$ soit donné par

$$\# \quad \begin{array}{|l|l|} \hline M \equiv s\Omega + m[\bar{X}.\bar{I} - I.\bar{X}] & P \equiv mI \\ \hline \end{array}$$

en posant

$$\spadesuit \quad \Omega \equiv j(I)(J') \quad (\text{notation (13.89)});$$

la polarisation est alors

$$\llcorner \quad W \equiv smJ$$

d) La forme de Lagrange de U est donnée par

$$\clubsuit \quad \sigma(dx)(\delta x) \equiv -s \text{Tr}(d\Omega.\Omega.\delta\Omega) + m[\bar{dX}\delta I - \bar{\delta X}dI] \quad (1)$$

le groupe G opère sur U selon

$$b \quad \underline{a}_v \left(\Phi \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} \right) \equiv \Phi \begin{pmatrix} LX + C \\ LI \\ LJ \end{pmatrix} \quad (\text{notations (13.51)}).$$

(1) On notera l'identité suivante, conséquence de (13.92) :

$$\text{Tr}(d\Omega.\Omega.\delta\Omega) \equiv \text{vol}(I)(J)(dI)(\delta J) - \text{vol}(I)(J)(\delta I)(dJ);$$

elle permet de vérifier, par un calcul direct, le « principe de Maxwell » $\nabla\sigma = 0$ (qui est ici une hypothèse).

(14.4) e) On a

$$\Phi \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} X' \\ I' \\ J' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, & X' = X + \lambda I \\ & I' = I \\ & J' = J \end{cases}$$

l'ensemble des X correspondant à un mouvement donné est donc une droite T de l'espace de Minkowski, parallèle à I , appelée *trajectoire* de la particule (1).

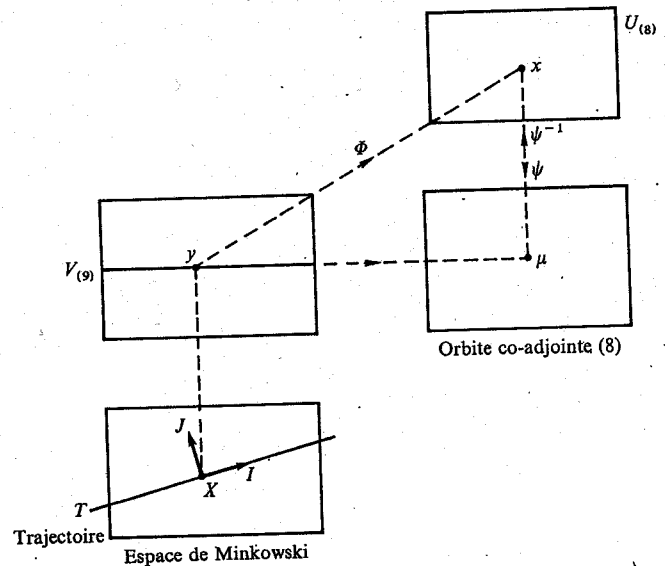


Fig. 14.1.

Tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur de temps est un vecteur d'espace ; par conséquent, les nombres m et s définis par \diamond ne sont pas nuls ($s > 0$) ; ils sont indépendants du mouvement du système, en raison de (13.107) et (13.109) (2). Les vecteurs I et J définis par

$$P \equiv mI \quad W \equiv smJ$$

vérifient donc \heartsuit .
Soit T l'ensemble

$$(14.5) \quad [X \in T] \Leftrightarrow [M_X.P = 0]$$

(1) Le mouvement est donc caractérisé par la trajectoire T et le vecteur J (orthogonal à T , et de carré scalaire -1).

(2) Le signe de l'énergie E ne dépend pas du mouvement, parce que le groupe de Lorentz restreint est contenu dans le groupe orthochrone.

en prenant l'expression (13.86) du moment M_X par rapport à X ,

$$(14.6) \quad M_X \equiv M + P \cdot \bar{X} - X \cdot \bar{P}$$

on vérifie facilement que

$$(14.7) \quad [X \in T] \Leftrightarrow \left[\exists \lambda \in R, \quad X = \frac{M \cdot P}{\bar{P} \cdot P} + \lambda P \right]$$

c'est-à-dire que T est une droite parallèle à P , donc à I .

Il résulte de (14.6) que le moment M_X ne dépend pas de X quand X parcourt T ; notons-le $s\Omega$; on a

$$(14.8) \quad \bar{\Omega} \equiv -\Omega; \quad \Omega \cdot I \equiv 0; \quad *(\Omega) \cdot I \equiv J$$

d'où l'on déduit facilement

$$(14.9) \quad \Omega \equiv J(I) (J)$$

d'où, en remplaçant M_X par sa valeur $s\Omega$ dans (14.6), $\#$ et \diamond .

Par suite, la donnée de X, I, J (ou de T et J) définit le moment $\mu \equiv \{M, P\}$; elle définit le mouvement x si l'application $x \mapsto \mu$ est injective: ceci va résulter du théorème (11.38), lorsque nous aurons vérifié que le stabilisateur d'un moment μ_0 , pour la représentation coadjointe, est connexe.

A cet effet, on vérifie d'abord que la formule

$$(14.10) \quad \underline{a}_V \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} LX + C \\ LI \\ LJ \end{pmatrix} \quad (\text{notations (13.51)})$$

fait opérer le groupe de Poincaré restreint G sur la variété V (Définition (c)), que G opère transitivement sur V (*), et que

$$(14.11) \quad \theta \cdot \underline{a}_V \equiv \underline{a}_g \cdot \theta,$$

θ étant l'application $y \mapsto \mu$.

On obtiendra donc un élément μ_0 de l'orbite coadjointe en choisissant arbitrairement X_0, I_0, J_0 dans V ; par exemple

$$X_0 = 0; \quad I_0 = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad J_0 = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*) Si $I_1, J_1; I_2, J_2$ sont deux couples de vecteurs vérifiant \heartsuit , on peut construire deux bases orthonormales $S_1 = [I_1, J_1, J_1', J_1'']$ et $S_2 = [I_2, J_2, J_2', J_2'']$ telles que

$$\text{vol}(I_1, J_1, J_1', J_1'') = \text{vol}(I_2, J_2, J_2', J_2'') = 1;$$

alors $L = S_2 \cdot S_1^{-1}$ est un élément du groupe de Lorentz restreint qui vérifie $LI_1 = I_2, LJ_1 = J_2$.

ce qui conduit à $\mu_0 = \{M_0, P_0\}$, avec

$$(14.12) \quad P_0 = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \quad M_0 = \mathcal{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -s & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}^{-1}$$

il est facile, en utilisant (13.107) et (13.67) d'en déduire le stabilisateur de μ_0 ; c'est l'ensemble des

$$(14.13) \quad a = \mathcal{R}' \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}^{-1} \quad \varphi \in R, \quad e \in R_+$$

c'est donc bien un groupe de Lie connexe; il en résulte que $x \mapsto \mu$ est un difféomorphisme; ceci montre que x ne dépend, comme μ que de T et J ; que l'application $y \mapsto x$ est différentiable (puisque $y \mapsto \mu$ et $\mu \mapsto x$ le sont); et que U a la dimension 8 (parce que la dimension du stabilisateur est 2 et celle de G , 10); qu'il n'y a qu'un seul modèle de particule à spin de masse m et de spin s donnés; enfin (14.13) et (14.3) donnent \mathfrak{h} .

— Notons que les formules (14.12) assurent l'existence d'un modèle de particule à spin de masse m et de spin s donnés ($m \neq 0, s > 0$); il suffit de prendre l'orbite de μ_0 (pour la représentation coadjointe de G) comme espace des mouvements; puisque cette orbite est une variété symplectique et possède G comme groupe dynamique (Théorème (11.34)), les axiomes (13.70) de la mécanique relativiste sont vérifiés; en portant dans \diamond , on constate que les nombres m et s figurant dans (14.12) sont bien la masse et le spin. Reste à calculer la forme de Lagrange σ ; puisque $x \mapsto \mu$ est un symplectomorphisme, on a

$$\sigma(dx) (\delta x) \equiv \sigma(d\mu) (\delta \mu).$$

soit, grâce à (11.34 \diamond)

$$(14.14) \quad \sigma(dx) (\delta x) = d\mu(Z) \quad \text{si} \quad \delta \mu = \mu \cdot \text{ad}(Z)$$

en prenant $Z = \begin{bmatrix} A & \Gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on trouve

$$(14.15) \quad \delta M = AM - MA + \Gamma \bar{P} - P \bar{\Gamma}, \quad \delta P = AP, \quad \delta \Omega = A \cdot \Omega - \Omega \cdot A$$

et

$$\sigma(dx) (\delta x) = d\mu(Z) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(dM \cdot A) - \bar{dP} \Gamma \quad (13.58)$$

soit, en utilisant les expressions $\#$ de M et P :

$$(14.16) \quad \sigma(dx) (\delta x) = -\frac{s}{2} \text{Tr}(d\Omega \cdot A) + m[\bar{dX} \delta I - \delta \bar{X} dI].$$

L'opérateur Ω s'interprète comme une projection sur le plan orthogonal à I et J , suivie d'une rotation de $\pi/2$ dans ce plan; on constate, à l'aide de (13.92), qu'il vérifie les identités

$$(14.17) \quad \boxed{\bar{\Omega} \equiv -\Omega \equiv \Omega^3}$$

et

$$(14.18) \quad \boxed{\Omega \cdot d\Omega \cdot \Omega \equiv \Omega^2 d\Omega + d\Omega \cdot \Omega^2 + d\Omega \equiv 0}$$

d'où ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(d\Omega \cdot A) &= -\text{Tr}(\Omega^2 \cdot d\Omega \cdot A) - \text{Tr}(d\Omega \cdot \Omega^2 \cdot A) \\ &= -2 \text{Tr}(\Omega^2 d\Omega A) = -2 \text{Tr}(A \cdot [\Omega^2 d\Omega - \Omega d\Omega \Omega]) \\ &= -2 \text{Tr}([A\Omega - \Omega A] \Omega d\Omega) = -2 \text{Tr}(\delta\Omega \Omega d\Omega) \end{aligned}$$

en portant dans (14.16), on trouve Φ .

C.Q.F.D.

Commentaires

(14.19) — Désignons encore par σ l'image réciproque de la forme de Lagrange σ de U par l'application $y \mapsto x$:

$$\sigma(dy) (\delta y) \equiv \sigma(dx) (\delta x),$$

V devient alors une variété présymplectique, ayant le groupe de Poincaré restreint G comme groupe dynamique (grâce à (14.10)); chaque feuille du feuilletage caractéristique de σ est l'image réciproque d'un mouvement par l'application $y \mapsto x$. Comme il existe une application différentiable $y \mapsto t$ de V sur le temps (par l'intermédiaire de $y \mapsto X$ et du référentiel de Lorentz choisi) on voit que V constitue un *espace d'évolution* de la particule (voir la Fig. (12.1) et (12.77)), sans qu'il ait été nécessaire de demander son existence dans les axiomes de la mécanique (13.70).

— Soit X un point de l'espace de Minkowski qui décrit la trajectoire T d'un mouvement x . En posant

$$(14.20) \quad X \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix}$$

on voit que le point \mathbf{r} possède un *mouvement rectiligne uniforme*, avec la vitesse

$$(14.21) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{E}$$

⁽¹⁾ On rappelle les identités $\text{Tr}(A \cdot B) \equiv \text{Tr}(B \cdot A)$, $\text{Tr}(\bar{A}) \equiv \text{Tr}(A)$.

(puisque T est parallèle à P). La définition \diamond de m montre que la vitesse de la particule est inférieure à celle de la lumière, et donne la *formule d'Einstein*

$$(14.22) \quad E = \frac{m}{\sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2}}$$

Notons que la polarisation reste constante au cours du mouvement. ■

(14.23) — Supposons la particule *au repos* ($\mathbf{r} \equiv \text{Cte}$, $\mathbf{v} = 0$); alors son énergie E est égale à m ; son impulsion est nulle; on vérifie que son moment cinétique \mathbf{l}_x par rapport à un point X de la trajectoire (notation (13.87)) est un *vecteur constant*, de longueur s , appelé *moment cinétique propre*, ou *spin* (vectoriel) de la particule; rappelons que la longueur s de ce vecteur s'appelle aussi *spin* (scalaire).

CAS II : PARTICULE SANS SPIN

(14.24) On appelle *particule sans spin* (ou *point matériel relativiste*) un système dynamique élémentaire tel que

$$\bar{P} \cdot P > 0 \quad W \equiv 0.$$

a) Le nombre

\diamond

$$m = \sqrt{\bar{P} \cdot P} \text{ signe}(E)$$

ne dépend pas du mouvement; on l'appelle *masse* de la particule.

b) m étant donné ($m \neq 0$), il existe un *seul modèle* de particule sans spin de masse m ; la dimension de l'espace des mouvements U est 6; l'application $x \mapsto \mu$ ($x \equiv$ mouvement, $\mu \equiv$ moment) est un difféomorphisme de U sur une orbite coadjointe de G .

c) Soit V la variété (de dimension 7) décrite par

$$y \equiv \begin{pmatrix} X \\ I \end{pmatrix}$$

(14.24) X étant un point de l'espace de Minkowski et I un quadrivecteur tel que

$$\heartsuit \quad \bar{I} \cdot I \equiv 1 \quad I \text{ de genre futur.}$$

On peut caractériser un mouvement x par un point y de V , de sorte que $\Phi[y \mapsto x]$ soit différentiable, et que

$$\# \quad \boxed{M \equiv m[X \cdot \bar{I} - I \cdot \bar{X}] \quad P \equiv mI}$$

d) La forme de Lagrange est donnée par

$$\clubsuit \quad \boxed{\sigma(dx) (\delta x) = m[\overline{dX} \cdot \delta I - \delta \bar{X} \cdot dI]} ;$$

le groupe G opère sur U selon

$$b \quad \boxed{a_U \left(\Phi \begin{pmatrix} X \\ I \end{pmatrix} \right) \equiv \Phi \begin{pmatrix} LX + C \\ LI \end{pmatrix}}$$

e) On a

$$\Phi \begin{pmatrix} X \\ I \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} X' \\ I' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad X' = X + \lambda I \\ I' = I \end{array} \right]$$

L'ensemble des X correspondant à un mouvement donné est donc une droite T de l'espace de Minkowski, parallèle à I , appelée trajectoire de la particule ⁽¹⁾.

La démonstration est très voisine de celle de (14.4); nous laissons au lecteur le soin de l'établir; signalons seulement qu'on peut choisir, comme moment d'un mouvement particulier

$$(14.25) \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \quad M_0 = 0$$

(au lieu de (14.12)), et que le stabilisateur de ce moment est l'ensemble des

$$(14.26) \quad a = \mathcal{R}' \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{R}'^{-1} \quad \begin{array}{l} A \in \text{SO}(3) \\ e \in \mathbb{R} \end{array}$$

ce stabilisateur est donc aussi connexe, et sa dimension est 4.

⁽¹⁾ Le mouvement est donc entièrement déterminé par la trajectoire.

(14.27) — Comme dans le cas d'une particule à spin, on voit que V joue le rôle d'espace d'évolution, que la trajectoire de la particule s'interprète, dans un référentiel de Lorentz, comme un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse $v = \frac{P}{E}$ inférieure à celle de la lumière; que l'énergie est donnée par la formule d'Einstein (14.22)

$$(14.28) \quad E = \frac{m}{\sqrt{1 - \|v\|^2}};$$

mais le moment cinétique propre I_x est nul.

CAS III : PARTICULE DE MASSE NULLE

(14.29) — On appelle *particule de masse nulle* ⁽¹⁾ un système dynamique élémentaire tel que

$$\bar{P} \cdot P = \bar{W} \cdot W = 0$$

P et W n'étant pas nuls.

a) Il existe alors trois nombres η, χ, s ($\eta = \pm 1$; $\chi = \pm 1$, $s > 0$) tels que, pour tout mouvement de la particule

$$\diamond \quad \begin{cases} \text{signe}(E) \equiv \eta \\ W \equiv \chi s P \end{cases}$$

η s'appelle le *signe de l'énergie*, χ l'*hélicité* ⁽²⁾, s le *spin* de la particule ⁽³⁾.

b) Il existe un *seul modèle* de particule de masse nulle pour lesquels η, χ, s ont des valeurs données; la dimension de la variété U des mouvements est 6; si μ est le moment d'un mouvement x , l'application $[x \mapsto \mu]$ est un symplectomorphisme de U sur une orbite de la représentation coadjointe de G .

⁽¹⁾ Si l'on considère que la masse est donnée par la formule (14.4 \diamond), on voit qu'une « particule de masse nulle » devrait être caractérisée par la seule condition $\bar{P} \cdot P = 0$, sans que W soit nécessairement isotrope non nul; mais les particules de masse nulle connues se comportent selon le modèle traité ici; il est donc traditionnel de *sous-entendre* les conditions

$$\bar{W} \cdot W = 0, \quad W \neq 0.$$

⁽²⁾ On dit que la particule est polarisée à gauche si $\chi = -1$, à droite si $\chi = +1$.

⁽³⁾ L'équation aux dimensions du spin est encore A , comme dans le cas I (cf. 13.112).

c) Soit V la variété (de dimension 9) décrite par le triplet

$$y \equiv \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix}$$

(14.29)

X étant un point de l'espace de Minkowski, I et J deux quadrivecteurs vérifiant

$$\heartsuit \quad \begin{cases} \bar{I}.I = 0 & I \text{ vecteur de genre futur} \\ \bar{I}.J = -1 \\ \bar{J}.J = 0 \end{cases}$$

On peut caractériser un mouvement x par un point y de V , de sorte que l'application $\Phi[y \mapsto x]$ soit différentiable, et que le moment $\mu \equiv \{M, P\}$ soit donné par

$$\# \quad \boxed{M \equiv \chi^s \Omega + \eta[X\bar{I} - I\bar{X}] \quad P \equiv \eta I}$$

avec

♠

$$\boxed{\Omega \equiv j(I)(J)}$$

la polarisation est alors

⊂

$$\boxed{W \equiv \eta \chi^s I}$$

d) La forme de Lagrange de U est donnée par

♣

$$\boxed{\sigma(dx)(\delta x) \equiv -\chi^s \text{Tr}(d\Omega \cdot \Omega \cdot \delta\Omega) + \eta[\overline{dX} \cdot \delta I - \overline{\delta X} \cdot dI]}$$

le groupe G opère sur U selon

$$b \quad a_U \left(\Phi \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} \right) \equiv \Phi \begin{pmatrix} LX + C \\ LI \\ LJ \end{pmatrix} \quad (\text{notations (13.51)})$$

(14.29)

e) On a :

$$\left[\Phi \begin{pmatrix} X' \\ I' \\ J' \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{I}.Z = 0 \\ X' = X + \eta \chi^s Z \\ \exists Z \quad I' = I \\ J' = J + j(I)(J)(Z) + \frac{\bar{Z}.Z}{2} I \end{array} \right]$$

Par suite l'ensemble des X correspondant à un même mouvement x est un 3-plan, orthogonal à I , que nous appellerons *plan d'onde* de la particule ⁽¹⁾.

Donnons quelques indications pour la démonstration : dans un espace euclidien d'indice d'inertie I , deux vecteurs isotropes et orthogonaux sont parallèles ; a) résulte des formules (13.107), (13.110).

On peut définir directement le *plan d'onde* de la particule par l'une des équations :

(14.30)

$$\boxed{M_X \cdot P = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{pf}(M_X) = 0}$$

Si X appartient à ce plan d'onde, M_X se met sous la forme $j(P)(Y)$, Y étant un vecteur ; l'identité $\ast(M_X)P = \chi^s P$ montre que l'on peut choisir Y isotrope (en lui ajoutant un multiple de P) ; en posant $I = \eta P$, $J = \frac{\chi^s}{s} Y$, on vérifie \heartsuit , \spadesuit , \clubsuit , puis e).

Si l'on pose

(14.31)

$$a_U \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} LX + C \\ LI \\ LJ \end{pmatrix}$$

on fait opérer transitivement G sur V ; $\Phi(a_U(y)) \equiv a_U(\Phi(y))$; ceci permet de choisir un moment particulier μ_0 :

(14.32)

$$M_0 = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & -\chi^s & 0 & 0 \\ \chi^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \quad P_0 = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \\ \eta \end{pmatrix}$$

et de montrer que le stabilisateur de μ_0 est difféomorphe à $SO(2) \times R^3$, donc connexe ; le théorème (11.38) donne (b) , puis (c) .

La formule \spadesuit s'établit comme (14.4♠), sachant que Ω vérifie aussi les identités (14.17), (14.18).

⁽¹⁾ Dans un référentiel de Lorentz, il s'interprète comme un 2-plan de l'espace ordinaire, qui se déplace parallèlement à lui-même, avec une vitesse normale égale à celle de la lumière.

Commentaires

(14.33) — Choisissons un référentiel de Lorentz \mathcal{R} ; on appelle alors *trajectoire* de la particule l'ensemble T des points X de l'espace de Minkowski tels que $g_X = 0$ (notation (13.87)); la trajectoire est une droite parallèle à I , contenue dans le plan d'onde; elle apparaît dans le référentiel comme un *mouvement rectiligne uniforme*, avec une vitesse v telle que $\|v\| = 1$ ⁽¹⁾.

On notera les relations

(14.34) $p = vE$ (Einstein)

et

(14.35) $l_X = \chi sv$ si $X \in T$

l_X s'appelle encore *moment cinétique propre*, ou *spin*; sa longueur est s ; on voit que l'hélicité χ indique si le spin est de même sens que la vitesse, ou opposé.

(14.36) Mais la trajectoire T dépend du référentiel choisi ⁽²⁾; en faisant varier ce dernier, T balaye tout le plan d'onde du mouvement. ■

(14.37) — Nous n'étudierons pas les autres types de systèmes élémentaires, qui ne correspondent pas à des particules connues; indiquons seulement que les cas où $\bar{P} \cdot P < 0$ (particules « de masse imaginaire ») correspondraient à des particules allant *plus vite que la lumière*, et pouvant, dans un référentiel de Lorentz particulier, avoir une vitesse *infinie* (« tachyons »).

PARTICULES NON RELATIVISTES

Considérons préalablement une particule *relativiste sans spin* (14.24); repérons un point y de l'espace d'évolution V par les variables r, t, v

(14.38)
$$\begin{cases} v = \text{vitesse de la particule (14.27)} \\ X \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \end{cases}$$

⁽¹⁾ On admet généralement que les *photons* sont des particules de masse nulle : ainsi la « vitesse des photons » est égale à la « vitesse de la lumière ».

⁽²⁾ Son équation $X \in T$ peut s'écrire $M_X \cdot U = 0$, U étant le vecteur unitaire $\mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie immédiatement que

(14.39)
$$\sigma(dy) (\delta y) = \left\langle d \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}, \delta r - v \delta t \right\rangle - \left\langle \delta \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}, dr - v dt \right\rangle$$

et que l'action d'un élément a du groupe de Poincaré opérant sur V peut s'écrire (avec les notations (13.67))

(14.40)
$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{L} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v \\ \sqrt{1-v^2} \\ 1 \\ \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{L} \begin{pmatrix} v \\ \sqrt{1-v^2} \\ 1 \\ \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix}$$

avec
$$\mathcal{L} = \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons un *changement d'unités de longueur et de temps sans changer l'unité d'action*. Ce qui peut s'écrire

(14.41)

$$\begin{aligned} m &\equiv \frac{m^*}{M} \\ r &\equiv \frac{r^*}{L}; \quad t \equiv \frac{t^*}{T}; \quad v \equiv \frac{T}{L} v^* \\ c &\equiv \frac{c^*}{L}; \quad e \equiv \frac{e^*}{T}; \quad b = \frac{T}{L} b^* \end{aligned}$$

M, L, T étant des nombres qui vérifient

(14.42)

$$ML^2 T^{-1} = 1$$

(voir (13.13).

Si l'on porte ces valeurs dans les formules (14.39) et (14.40), et si l'on fait tendre $\frac{L}{T}$ vers l'infini, elles deviennent respectivement :

(14.43)
$$\sigma(dy) (\delta y) = \langle m^* dv^*, \delta r^* - v^* \delta t^* \rangle - \langle m^* \delta v^*, dr^* - v^* dt^* \rangle$$

$$(14.44) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \\ \mathbf{v}^* \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A\mathbf{r}^* + \mathbf{b}^* t^* + \mathbf{c}^* \\ t^* + e^* \\ A\mathbf{v}^* + \mathbf{b}^* \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que l'on retrouve les équations du § 12, définissant le modèle non relativiste du point matériel libre de masse m .

(14.45) La méthode esquissée ci-dessus permet donc de considérer le point matériel newtonien comme une approximation de la particule relativiste sans spin — lorsque le nombre $c = \frac{L}{T}$ (qui est la vitesse de la lumière avec les nouvelles unités) est très grand.

(14.46) Rappelons que la condition (14.42) exprime que les valeurs de la forme σ ne changent pas d'unité (13.13).

(14.47) — Dans le cas d'une particule à spin (14.4), introduisons comme variable supplémentaire le vecteur unitaire \mathbf{u} dirigé dans le sens de \mathbf{l}_x (14.23); on trouve dans les mêmes conditions les équations limites suivantes :

$$(14.48) \quad \left[\begin{aligned} \sigma(dy)(\delta y) &= -s \langle \mathbf{u}, d\mathbf{u} \times \delta\mathbf{u} \rangle + \langle m^* d\mathbf{v}^*, \delta\mathbf{r}^* - \mathbf{v}^* \delta t^* \rangle \\ &\quad - \langle m^* \delta\mathbf{v}^*, d\mathbf{r}^* - \mathbf{v}^* dt^* \rangle \\ \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \\ \mathbf{v}^* \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} A\mathbf{r}^* + \mathbf{b}^* t^* + \mathbf{c}^* \\ t^* + e^* \\ A\mathbf{v}^* + \mathbf{b}^* \\ A\mathbf{u} \end{pmatrix} \end{aligned} \right]$$

ces équations définissent un modèle de système dynamique classique isolé : nous les prendrons comme *définition de la particule à spin non relativiste*.

(14.49) Ce système s'interprète facilement dans les termes du § 13; la *masse* de la particule est égale à m^* ; le *barycentre*, situé au point \mathbf{r}^* à l'instant t^* , a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse \mathbf{v}^* ; le *mouvement propre* est caractérisé par le vecteur unitaire \mathbf{u} , qui est *constant* au cours du mouvement; le *moment cinétique propre* (voir (13.35)) est :

$$(14.50) \quad \mathbf{l}_{\text{propre}} = s\mathbf{u}$$

(sa longueur est donc égale au *spin* s); l'*énergie propre* est nulle.

— Si l'on cherche à priori les systèmes dynamiques classiques (au sens (13.1)), sur lesquels le groupe de Galilée opère transitivement, on arrive aux résultats suivants :

(14.51) a) Si la masse du système n'est pas nulle, il n'existe que les modèles déjà trouvés ci-dessus (point matériel, particule à spin non relativiste).

b) Etudions le cas $m = 0$; la représentation coadjointe du groupe de Galilée est donnée, avec les notations (12.115), (12.123), par la formule

$$(14.52) \quad \underline{a}_{g^*} \{ \mathbf{l}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, E \} = \{ A\mathbf{l} + A\mathbf{g} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times A\mathbf{p}, A[\mathbf{g} - \mathbf{p}e], A\mathbf{p}, E + \langle \mathbf{b}, A\mathbf{p} \rangle \}$$

on en déduit que les nombres $\|\mathbf{p}\|^2$, $\|\mathbf{p} \times \mathbf{g}\|^2$ sont des caractéristiques du système.

Considérons le cas particulier $\mathbf{p} \neq 0$, $\mathbf{p} \times \mathbf{g} = 0$; on constate alors que le nombre $\langle \mathbf{l}, \mathbf{p} \rangle$ est aussi une caractéristique du système; supposons-le différent de 0; on obtient alors le modèle unique suivant :

(14.53) Soient χ , s , k trois nombres réels ($\chi = \pm 1$, $s > 0$, $k > 0$) que nous appellerons respectivement *hélicité*, *spin* et *couleur* ⁽¹⁾ de la particule. On peut repérer un mouvement par un *vecteur unitaire* \mathbf{u} , un *instant* t , une *droite* D parallèle à \mathbf{u} , et l'*énergie* E de la particule, sur lesquels le groupe de Galilée opère ainsi :

$$\mathbf{u} \rightarrow A\mathbf{u}; t \rightarrow t + e; \mathbf{r} \rightarrow A\mathbf{r} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}(r \in D); E \rightarrow E + k \langle \mathbf{b}, A\mathbf{u} \rangle;$$

les moments galiléens sont

$$\heartsuit \quad \mathbf{p} = k\mathbf{u}; \quad \mathbf{g} = -\mathbf{p}t; \quad \mathbf{l} = \chi s\mathbf{u} + \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (r \in D);$$

la forme de Lagrange est donnée par :

$$\clubsuit \quad \sigma(dx)(\delta x) = k[\langle d\mathbf{u}, \delta\mathbf{r} \rangle - \langle \delta\mathbf{u}, d\mathbf{r} \rangle] + dt \delta E - \delta t dE - \chi s \langle \mathbf{u}, d\mathbf{u} \times \delta\mathbf{u} \rangle.$$

(14.54) — Le modèle ainsi décrit peut être considéré comme une limite non relativiste de la particule de masse nulle décrite en (14.29); mais d'une façon différente de celle que nous avons rencontrée plus haut (14.43), (14.48) : une seule particule relativiste donne naissance à une *famille* de particules non relativistes *distinctes*, repérées chacune par une couleur k . La droite D et l'instant t peuvent être considérés comme caractérisant un *mouvement instantané* de la particule; en mécanique galiléenne, la vitesse de la lumière est donc *infinie* ⁽²⁾.

(14.55) — Quant aux tachyons (14.37), il ne semble pas que l'on puisse leur trouver de limite non relativiste.

⁽¹⁾ Dans le cas du photon, nous verrons que k repère bien la *couleur*, au sens usuel du terme : k est inversement proportionnel à la « longueur d'onde » (19.43).

⁽²⁾ C'est pourquoi l'effet Doppler n'a pas lieu, ce qui permet à la couleur d'être un invariant.

MASSE ET BARYCENTRE D'UN SYSTÈME RELATIVISTE

(14.56) Soit U la variété des mouvements d'un système dynamique relativiste isolé. Supposons que, pour un mouvement x du système, l'impulsion-énergie P du système soit un vecteur du genre temps; nous savons alors que le moment galiléen $\mu = \{M, P\}$ du système est celui d'une particule, décrite par (14.4) ou par (14.24): nous appellerons *masse* et *spin* du système la masse et le spin de cette particule, soit respectivement

$$(14.57) \quad m = \sqrt{P \cdot P} \text{ signe}(E) \quad s = \sqrt{\frac{-W \cdot W}{P \cdot P}}$$

s pouvant éventuellement être nul (si la polarisation W est nulle).

De même, on appelle *barycentre* (ou *centre de masse*) du système le point qui décrit la *trajectoire* de cette particule fictive, trajectoire dont l'équation est (voir (14.4)) :

$$(14.58) \quad M_x \cdot P = 0.$$

On emploie donc un langage voisin de celui de la mécanique classique; mais il y a une importante différence: la *masse* dépend, en général, du mouvement x choisi⁽¹⁾; nous allons en voir un exemple.

Considérons un système composé de particules de masses positives m_j , sans interactions. Il résulte immédiatement des axiomes (13.70) que le moment du système est la somme des moments partiels :

$$(14.59) \quad M = \sum_j M_j \quad P = \sum_j P_j.$$

On peut montrer que toute somme de vecteurs de genre futur est un vecteur de genre futur; il en résulte que le système a lui aussi une masse positive. Si l'on choisit un référentiel de Lorentz dans lequel le centre de masse a une vitesse nulle, ce qui s'écrit

$$(14.60) \quad \sum \frac{m_j v_j}{\sqrt{1 - \|v_j\|^2}} = 0 \quad (v_j = \text{vitesse de la particule n}^\circ j \text{ dans ce référentiel})$$

on trouve immédiatement

$$(14.61) \quad m = \sum_j \frac{m_j}{\sqrt{1 - \|v_j\|^2}};$$

on voit que la masse totale est supérieure à la somme des masses composantes, et dépend effectivement du mouvement du système.

(1) Plus précisément, de l'orbite de x .

INVERSIONS D'ESPACE ET DE TEMPS

Soit U la variété des mouvements d'un système dynamique relativiste isolé. Nous avons admis jusqu'ici que le groupe de Poincaré *restreint* opérant sur U , en respectant la forme de Lagrange (13.70).

Nous savons que le groupe de Poincaré *complet* se compose de 4 composantes connexes (13.53); il est engendré par le groupe *restreint* G , et les deux opérations d'*inversion spatiale* :

$$(14.62) \quad I_s \left(\mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \right) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\mathbf{r} \\ t \end{pmatrix}$$

et d'*inversion temporelle* :

$$(14.63) \quad I_t \left(\mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \right) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ -t \end{pmatrix}.$$

(14.64) On peut se demander si le groupe de Poincaré *complet* n'est pas, lui aussi, un groupe dynamique de U ; la relativité générale milite d'ailleurs en ce sens. Considérons donc une variété symplectique U (pas nécessairement connexe) admettant le groupe de Poincaré complet G' comme groupe dynamique.

Il est clair que le groupe *restreint* G est aussi groupe dynamique de U , et même de *chaque composante connexe* de U (Théorème (1.51)); nous savons qu'il possède un moment, défini à une constante additive près sur *chaque composante* de U , et que l'on peut choisir cette constante de sorte que

$$(14.65) \quad \psi(a_U(x)) = a_{G'}(\psi(x)) \quad \forall a \in G \quad \forall x \in U$$

ψ étant l'application qui fait correspondre à un point x de U son moment μ . Il est clair que μ est aussi moment du groupe G' , puisque la définition (11.7) du moment ne fait intervenir que l'algèbre de Lie du groupe.

Soit I un élément quelconque de G' ; posons

$$F(x) \equiv \psi(I_U(x)) - I_{G'}(\psi(x)).$$

La démonstration de (11.17) montre que $F(x)$ est constant sur chaque composante de U .

Soit a un élément quelconque de G ; la formule (14.65) montre que

$$a_{G'}(F(x)) = \psi(a \times I_U(x)) - a \times I_{G'}(\psi(x)),$$

soit, en posant $b = I^{-1} \times a \times I$

$$a_{g^*}(F(x)) = \psi(I \times b_U(x)) - I \times b_{g^*}(\psi(x)).$$

Le théorème (6.35) montre que $b \in G$; en appliquant à nouveau (14.65), on trouve

$$a_{g^*}(F(x)) = F(b_U(x))$$

le théorème (1.51) montre que $b_U(x)$ appartient à la même composante de U que x ; F y prend donc la même valeur; d'où

$$a_{g^*}(F(x)) = F(x) \quad \forall a \in G, \quad \forall x \in U;$$

ce qui exprime que le *cobord* du torseur $F(x)$ (pour le groupe G) est nul (Définition (11.19)). Il est élémentaire d'en déduire (par exemple en utilisant l'expression (13.107) de la représentation coadjointe) que $F(x)$ est nul.

D'où l'identité

$$(14.66) \quad \boxed{\psi(I_U(x)) = I_{g^*}(\psi(x))} \quad \forall x \in U \quad \forall I \in G'$$

qui étend (14.65) au groupe complet.

Cette formule s'applique aux cas $I = I_s$, $I = I_t$ (inversions spatiale et temporelle); le calcul de I_{s,g^*} et I_{t,g^*} donne (avec les notations (13.59))

$$(14.67) \quad \begin{cases} I_s : |1 \rightarrow 1; \quad g \rightarrow -g; \quad p \rightarrow -p; \quad E \rightarrow E \\ I_t : |1 \rightarrow 1; \quad g \rightarrow -g; \quad p \rightarrow p; \quad E \rightarrow -E \end{cases}$$

(14.68) Etendons maintenant la définition (14.1) d'un système élémentaire, en postulant que c'est le groupe complet G' qui opère transitivement et canoniquement sur U .

(14.69) Il résulte immédiatement de (14.66) que le moment $\mu \equiv \psi(x)$ décrit une orbite de la représentation coadjointe de G' lorsque x parcourt U ; si celle-ci n'est pas connexe, U n'est pas connexe non plus, puisque ψ est continu (Théorème (6.51)).

Nous savons d'autre part que les orbites de G opérant sur U sont contenues chacune dans une composante connexe U_0 de U ; comme G et G' ont même algèbre de Lie, ces orbites ont même dimension que U (Théorème (6.20)); ce sont donc des ouverts deux à deux disjoints composant U_0 ; ce qui est impossible (puisque U_0 est connexe), s'il y en a plus d'une. Chaque composante connexe de U est donc une

orbite du groupe restreint, et définit donc un système dynamique élémentaire, au sens restreint (14.1) :

(14.70) On obtient donc l'espace des mouvements du système élémentaire pour le groupe complet en prenant la somme ⁽¹⁾ des espaces de mouvements de divers systèmes élémentaires au sens restreint (14.1).

Traisons des exemples.

Particule de masse $m \neq 0$.

(14.71) Remarquons d'abord que les deux nombres de Casimir $\bar{P} \cdot P$ et $\bar{W} \cdot W$ sont constants sur toute orbite coadjointe de G' , donc sur U (14.69). Supposons $\bar{P} \cdot P > 0$. Alors chaque composante connexe de U correspond à une particule de masse $m = \pm \sqrt{\bar{P} \cdot P}$, de spin $s = \sqrt{\frac{-\bar{W} \cdot W}{\bar{P} \cdot P}}$; la

formule (14.67) montre que l'inversion temporelle I , change le signe de l'énergie, donc de la masse (14.4◇) : par conséquent, elle transforme tout mouvement d'une particule de masse m en mouvement d'une particule de masse $-m$.

Par contre l'inversion spatiale conserve la masse m et le spin s ; il en résulte que l'orbite de G' associée possède deux composantes.

(14.72) Si ψ est bijectif, U possède aussi deux composantes; mais il est possible que U possède quatre composantes : on construit un tel modèle de la façon suivante :

(14.73) $U =$ ensemble des couples $x \equiv (\mu, \varepsilon)$ [$\mu \in$ orbite coadjointe, $\varepsilon = \pm 1$];
 $\sigma(dx) (\delta x) \equiv \sigma(d\mu) (\delta \mu)$;
 $a_U(\mu, \varepsilon) \equiv (a_U(\mu), \chi_s(a) \varepsilon)$
 $\chi_s(a)$ étant le caractère spatial de a ⁽²⁾. ■

— Il existe un moyen de sauvegarder la connexité de U , et d'éviter ainsi les particules de masse négative : il consiste d'abord à postuler la régularité de ψ , puis à faire opérer le groupe complet G' sur la seule composante $m > 0$, en posant

$$(14.74) \quad a(\mu) = \chi_t(a) a_{g^*}(\mu)$$

$\chi_t(a)$ étant le caractère temporel de a ⁽³⁾.

(1) On appelle somme de plusieurs ensembles leur réunion, lorsque leurs intersections deux à deux sont vides.

(2) Par définition, $\chi_s(a)$ est égal à $+1$ sur les composantes du groupe G' contenant 1 et I_s , à -1 sur les composantes contenant I_t et I_s ; on dit que c'est un caractère parce qu'il vérifie $\chi_s(ab) \equiv \chi_s(a) \chi_s(b)$.

(3) $\chi_t(a)$ est égal à 1 sur les composantes contenant 1 et I_s , à -1 sur les composantes contenant I_t et I_s ; on a aussi $\chi_t(ab) \equiv \chi_t(a) \chi_t(b)$.

(14.75) Mais nous savons que ces transformations ne peuvent pas être canoniques (14.71); on vérifie d'ailleurs, si $\chi_t(a) = -1$ (on dit alors que a est *antichrone*) que la transformation \underline{a} définie par (14.74) est anticanonique (Définition (10.18)).

Il faut alors modifier complètement les axiomes de la mécanique symplectique, en autorisant les transformations anticanoniques à faire partie des groupes dynamiques.

(14.76) — Il existe un autre moyen d'arriver au même résultat : il consiste à *exclure* les transformations antichrones, en se limitant au sous-groupe G'' défini par $\chi_t(a) = +1$ (*groupe orthochrone*) : G'' est bien un groupe dynamique (sans éléments anticanoniques) d'une variété connexe.

— Il est clair que ces diverses conventions doivent être jugées suivant leurs aptitudes à rendre compte de l'expérience ⁽¹⁾. ■

Particules de masses nulle

(14.77) Supposons $\bar{P} \cdot P = 0$, $\bar{W} \cdot W = 0$, P et W non nuls.

Alors chaque composante de U correspond à une particule de masse nulle, au sens (14.29); on vérifie que ces particules ont *même spin s* ; mais les formules (14.67) montrent que l'inversion spatiale change l'hélicité, l'inversion temporelle le signe de l'énergie; il en résulte que l'orbite coadjointe a 4 composantes, donc aussi U ; ψ est nécessairement une bijection.

(14.78) L'expérience montre que les particules de masse nulle connues (photon, neutrinos) apparaissent avec les deux hélicités (c'est-à-dire polarisées à gauche ou à droite; voir (15.105)) : c'est un argument inductif pour faire admettre l'inversion spatiale dans le groupe d'invariance de la mécanique : sinon l'existence de deux particules ne différant que par l'hélicité serait une simple coïncidence.

(14.79) On renonce donc en général à décrire les particules de masse nulle par une variété connexe; cependant on peut supprimer les composantes à énergie négative par l'un des procédés ci-dessus : introduction de transformations anticanoniques par la formule (14.74), exclusion des transformations antichrones (14.76). Cependant, encore plus radicalement, on peut se restreindre au groupe connexe G , et revenir à la description antérieure (14.29).

⁽¹⁾ Des expériences récentes, justement, semblent montrer que l'artifice (14.74) ne s'applique pas universellement en physique. Si — comme le suggère la relativité générale — c'est le groupe de Poincaré complet qui est groupe dynamique des systèmes réels, il n'est pas possible de récuser les particules de masse négative. On peut donc espérer les rencontrer dans la nature, bien que la mécanique statistique nous montre qu'elles doivent être rares (cf. 17.149).

§ 15 DYNAMIQUE DES PARTICULES

POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Nous avons déjà rencontré, en mécanique classique (12.85), le système (*non isolé* !) constitué par un point matériel soumis à un champ électrique \mathbf{E} et un champ magnétique \mathbf{B} ; il est décrit convenablement par la forme de Lagrange σ :

$$(15.1) \quad \sigma(dy) (\delta y) \equiv \langle m dv - qE dt, \delta r - v \delta t \rangle - \langle m \delta v - qE \delta t, dr - v dt \rangle + q \langle \mathbf{B}, dr \times \delta r \rangle,$$

q étant un nombre appelé *charge électrique*.

Désignons par X le point d'espace-temps repéré par \mathbf{r} et t :

$$(15.2) \quad X \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \quad (\text{notation (12.56)});$$

posons ⁽¹⁾

$$(15.3) \quad \mathcal{F}(dX) (\delta X) = \langle \mathbf{E}, dr \delta t - \delta r dt \rangle + \langle \mathbf{B}, dr \times \delta r \rangle;$$

soit x_0 le mouvement que prendrait le point matériel, avec la condition

initiale $y = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$, s'il n'était pas soumis au champ; x_0 parcourt la variété symplectique U_0 des mouvements de la particule libre; on sait que

$$(15.4) \quad \sigma(dx_0) (\delta x_0) = \langle m dv, \delta r - v \delta t \rangle - \langle m \delta v, dr - v dt \rangle;$$

on constate donc que :

$$(15.5) \quad \sigma(dy) (\delta y) \equiv \sigma(dx_0) (\delta x_0) + q \mathcal{F}(dX) (\delta X)$$

⁽¹⁾ Il est clair que \mathcal{F} est une 2-forme de l'espace-temps; réciproquement, toute 2-forme \mathcal{F} de l'espace-temps est définie par une formule (15.3), \mathbf{E} et \mathbf{B} étant des vecteurs de R^3 .

cé qui s'interprète de la façon suivante (Fig. 15.1) : la forme de Lagrange de l'espace d'évolution V est la somme de :

1) L'image réciproque, par l'application $[y \mapsto x_0]$, de la forme de Lagrange de U_0 ;

2) L'image réciproque, par l'application $y \mapsto X$, de la forme $q\mathcal{F}$.

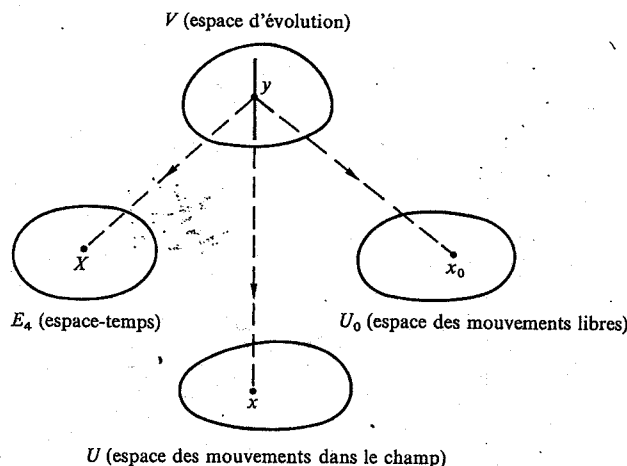


Fig. 15.1.

Nous savons que les champs électrique et magnétique vérifient les équations de Maxwell (voir (12.86))

$$(15.6) \quad \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

qui peuvent s'écrire

$$(15.7) \quad \nabla \mathcal{F} \equiv 0 ;$$

ce qui montre directement pourquoi la forme σ définie par (15.5) a une dérivée extérieure nulle ; nous savons que son noyau a la dimension 1, et que l'espace U des mouvements est une variété symplectique (de dimension 6) telle que

$$(15.8) \quad \sigma(dx) (\delta x) \equiv \sigma(dy) (\delta y)$$

x étant le mouvement sous l'action du champ défini par la condition initiale y . Rappelons que les équations du mouvement $dy \in \ker(\sigma)$ peuvent s'écrire

$$(15.9) \quad \frac{dr}{dt} \equiv v ; \quad \frac{d}{dt} [mv] \equiv q[E - \mathbf{B} \times v]. \quad \blacksquare$$

— Si nous voulons tenir compte de la relativité, une idée extrêmement simple consiste à conserver le même schéma, en remplaçant simplement l'espace des mouvements classiques par l'espace des mouvements relativistes défini en (14.24) ; ce qui consiste à poser, à la place de (15.5)

$$(15.10) \quad \sigma(dy) (\delta y) = m[\overline{dX} \cdot \delta I - \overline{\delta X} \cdot dI] + q\mathcal{F}(dX) (\delta X)$$

I étant le vecteur unitaire du genre futur tangent à la trajectoire du mouvement libre. Compte tenu de l'équation de liaison (14.24)

$$(15.11) \quad \overline{I} \cdot I = 1$$

on met immédiatement les équations du mouvement $dy \in \ker(\sigma)$ sous la forme suivante (1)

$$(15.12) \quad dX \text{ parallèle à } I ; \quad m dI + qF \cdot dX \equiv 0$$

F désignant l'opérateur linéaire défini par

$$(15.13) \quad F(dX) \equiv -\overline{\mathcal{F}(dX)}$$

ou encore

$$(15.14) \quad \mathcal{F}(dX) (\delta X) \equiv \overline{dX} \cdot F \cdot \delta X ;$$

notons que F est antihermitien

$$(15.15) \quad \overline{F} \equiv -F ;$$

suivant les circonstances, c'est soit la 2-forme \mathcal{F} , soit l'opérateur F que l'on appelle champ électromagnétique.

— On constate sur (15.12) que I est aussi tangent à la trajectoire dans le champ — ce qui n'était pas évident a priori. Il est souvent commode de paramétriser la trajectoire par le « temps propre » θ tel que

$$(15.16) \quad \boxed{\frac{dX}{d\theta} \equiv I}$$

alors la seconde équation (15.12) s'écrit

$$(15.17) \quad \boxed{\frac{dI}{d\theta} = -\frac{q}{m} F \cdot I}$$

(1) On doit écrire $\delta[\overline{I} \cdot I] = 0 \Rightarrow \sigma(dy) (\delta y) = 0$; en utilisant un multiplicateur de Lagrange λ , il suffit d'écrire $\sigma(dy) (\delta y) + \lambda \delta[\overline{I} \cdot I] = 0 \quad \forall \delta I$.

$\frac{dI}{d\theta}$ peut s'interpréter comme la *courbure* (quadridimensionnelle) de la trajectoire; on sait à priori que c'est un vecteur orthogonal à la trajectoire (donc du genre espace); cette condition d'orthogonalité est automatiquement réalisée au second membre de (15.17), parce que F est antihermitien ⁽¹⁾.

En utilisant les notations tridimensionnelles, on a :

$$(15.18) \quad I = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2}}$$


$$(15.19) \quad F = \mathcal{R} \begin{pmatrix} j(\mathbf{B}) & -\mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

d'où l'expression des équations du mouvement ⁽²⁾

$$(15.20) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2}} \right] = q[\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}]}$$

mnémotechniquement, on remarque qu'il suffit de remplacer dans (15.9) l'*impulsion classique* $m\mathbf{v}$ par l'*impulsion relativiste* $m\mathbf{v}/\sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2}$.

(15.21) — Comme dans le cas de la mécanique classique (voir (12.37)), le fait que dt ne s'annule pas sur les courbes intégrales permet de montrer que l'espace d'évolution est sécable, donc que l'espace des mouvements U possède une structure de variété; U est symplectique, la formule (15.8) est encore valable.

(15.22)  Il se trouve que ces équations sont bonnes : ce sont celles que l'on utilise, par exemple, dans le calcul des accélérateurs de particules, où les effets relativistes sont importants. Ceci justifie, à posteriori, l'expression (15.10) de la forme de Lagrange; on dit que cette formule est *phénoménologique*, puisqu'elle rend compte des phénomènes étudiés sans être entièrement imposée par des considérations théoriques.

⁽¹⁾ Le nombre $\gamma = \sqrt{-\frac{dI}{d\theta} \cdot \frac{dI}{d\theta}}$ peut s'interpréter comme l'*accélération propre* de la trajectoire — c'est-à-dire son accélération dans un référentiel de Lorentz par rapport auquel, à l'instant considéré, la vitesse est nulle.

⁽²⁾ En développant (15.12), on trouve aussi l'équation $\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} \right] = q \langle \mathbf{E}, \mathbf{v} \rangle$; mais cette équation est conséquence de (15.20).

PARTICULE A SPIN DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

A priori, on pourrait étendre encore ce formalisme au cas d'une particule à spin, en remplaçant simplement l'espace d'évolution d'un point matériel par celui qui a été défini en (14.4) (ou en (14.48) dans le cas non relativiste).

Mais l'expérience montre qu'il convient d'ajouter à la forme de Lagrange définie par (15.5) un nouveau terme, à savoir

$$\mu \nabla \varpi$$

μ étant une constante que nous interpréterons par la suite, et ϖ la 1-forme :

$$\varpi(dy) \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}(\Omega \cdot F) \bar{I} dX$$

le théorème de Poincaré assure automatiquement la condition $\nabla \sigma \equiv 0$.

— Dans le cas non relativiste, on remplace l'expression (15.24) par sa valeur pour $\mathbf{v} = 0$, c'est-à-dire

$$\varpi(dy) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{B} \rangle dt$$

\mathbf{u} étant le vecteur unitaire porté par le moment cinétique propre (notation (14.47)); on a donc (voir (14.48))

$$(15.26) \quad \left[\begin{aligned} \sigma(dy) (\delta y) &= \langle m d\mathbf{v} - q\mathbf{E} dt, \delta\mathbf{r} - \mathbf{v} \delta t \rangle - \langle m \delta\mathbf{v} - q\mathbf{E} \delta t, d\mathbf{r} - \mathbf{v} dt \rangle \\ &\quad + q \langle \mathbf{B}, d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r} \rangle - s \langle \mathbf{u}, d\mathbf{u} \times \delta\mathbf{u} \rangle \\ &\quad + \mu [d \langle \mathbf{B}, \mathbf{u} \rangle \delta t - \delta \langle \mathbf{B}, \mathbf{u} \rangle dt] \quad (1) \end{aligned} \right.$$

on en tire les équations du mouvement :

$$(15.27) \quad \left[\begin{aligned} \clubsuit & \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \\ \heartsuit & \frac{d}{dt} [m\mathbf{v}] = q[\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}] + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mu \mathbf{u} \\ \diamond & \frac{d}{dt} [s\mathbf{u}] = \mu \mathbf{u} \times \mathbf{B} \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Les termes nouveaux se déduisent donc du *hamiltonien magnétique*

$$h = -\langle \mu \mathbf{u}, \mathbf{B} \rangle \quad (\text{voir (12.93)}).$$

(15.28) Ces équations expriment que la particule est *aimantée*, possédant un *moment magnétique* μ parallèle à son moment cinétique s . Elles ont de nombreuses vérifications expérimentales : le terme $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mu$ de \heartsuit montre que la déviation d'une particule par un champ magnétique à variation spatiale rapide *dépend de l'orientation du spin* (expérience de Stern et Gerlach); \diamond montre que le spin d'une particule soumise à un champ magnétique constant \mathbf{B} tourne autour du champ avec la vitesse angulaire $\mu \parallel \mathbf{B} \parallel s$ (phénomène de la *précession de spin*); cette même équation montre aussi que la particule soumise à un champ $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \cos(\omega t)$, \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 étant orthogonaux, subit un effet de résonance si $\omega = \mu \parallel \mathbf{B}_1 \parallel s$: ce phénomène, appelé *résonance magnétique*, permet la mesure des moments magnétiques. ■

Dans le cas relativiste, on a (voir (14.4 \heartsuit), (15.14), (15.24)) :

$$(15.29) \left[\sigma(\delta y) (\delta y) \equiv -s \text{Tr} (d\Omega \Omega \delta \Omega) + m[\overline{dX} \cdot \delta I - \overline{\delta X} \cdot dI] + q \overline{dX} \cdot F \cdot \delta X \right. \\ \left. + \mu [d[\alpha \bar{I}] \delta X - \delta[\alpha \bar{I}] dX] \right]$$

en posant

$$(15.30) \left[\alpha \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr} (\Omega \cdot F) \right]$$

Pour former les équations du mouvement, il faut tenir compte des liaisons (14.4 \heartsuit) :

$$(15.31) \quad \Omega \equiv j(I) (J) ; \quad \bar{I} \cdot I \equiv 1 ; \quad \bar{I} \cdot J \equiv 0 ; \quad \bar{J} \cdot J \equiv -1$$

ce qui peut se faire au moyen de multiplicateurs de Lagrange. Les formules obtenues sont très compliquées; voici les équations linéarisées au voisinage du cas $F = 0$ ⁽¹⁾ :

$$(15.32) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= I + \left[\frac{\mu}{m} - \frac{sq}{m^2} \right] \Omega \cdot F \cdot I - \frac{\mu s}{m^2} \Omega \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial X} \\ \frac{dI}{d\theta} &= -\frac{q}{m} FI - \frac{\mu}{m} [1 - I \cdot \bar{I}] \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial X} \\ \frac{dJ}{d\theta} &= -\frac{\mu}{s} F \cdot J + \left[\frac{q}{m} - \frac{\mu}{s} \right] I [\bar{J} \cdot F \cdot I] + \frac{\mu}{m} \bar{I} \bar{J} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial X} \end{aligned}}$$

⁽¹⁾ Cette approximation revient à négliger les *carrés* des grandeurs sans dimensions μ/m , qs/m^2 , qui sont effectivement très petites dans les conditions expérimentales usuelles; ainsi, pour un champ magnétique de 10 000 gauss, elles sont de l'ordre de grandeur de 10^{-10} (cas d'un électron) ou de 10^{-13} (cas d'un nucléon).

(15.33) Notons que ces formules respectent exactement les liaisons (15.31); que I n'est plus tangent aux trajectoires (comme dans le cas des particules sans spin), et que par conséquent le paramètre θ n'est pas rigoureusement égal au temps propre (il est défini par $d\theta = \bar{I} dX$); il n'en diffère cependant que par un terme du second ordre en F .

Dans le cas d'une particule chargée, on introduit habituellement la quantité

$$(15.34) \quad g = \frac{2 \mu m}{qs}$$

appelé *coefficient gyromagnétique* ou *facteur de Landé*.

Avec cette notation, et en supposant le champ électromagnétique *constant*, ce qui entraîne $\frac{\partial \alpha}{\partial X} \equiv 0$ ⁽¹⁾, les équations (15.32) deviennent :

$$(15.35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= I + \frac{qs}{2m^2} [g - 2] \Omega FI \\ \frac{dI}{d\theta} &= -\frac{q}{m} FI \\ \diamond \frac{dJ}{d\theta} &= -\frac{q}{2m} [gFI + [g - 2] I[\bar{J}FI]] \end{aligned} \right.$$

(15.36) — On dit que le moment magnétique est *normal* si $\mu = qs/m$, c'est-à-dire si $g = 2$; c'est très sensiblement le cas pour l'électron et le muon; l'équation \diamond , établie par Bargmann, Michel et Telegdi ⁽²⁾, est utilisée pour la mesure de $g - 2$, c'est-à-dire du *moment magnétique anormal*. La cohérence de ces expériences donne une vérification à posteriori des équations (15.32), donc de l'expression phénoménologique (15.26) de σ .

SYSTÈMES DE PARTICULES SANS INTERACTIONS

L'espace U des mouvements d'un tel système est le *produit direct* des espaces U_1, \dots, U_n des mouvements des particules individuelles ((13.1),

⁽¹⁾ La notation $\frac{\partial \alpha}{\partial X}$ désigne une dérivée par rapport à X (I, J et par conséquent Ω étant constants) :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X} (\delta X) = -\frac{1}{2} \text{Tr} (\Omega \cdot \delta F).$$

⁽²⁾ V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 435 (1959); voir aussi L. H. Thomas : *Phil. Mag.*, **3**, 1 (1927).

(13. 12)); un mouvement x du système s'écrit donc

$$(15.37) \quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$$

et la forme de Lagrange de U est donnée par

$$(15.38) \quad \sigma(dx) (\delta x) = \sigma(dx_1) (\delta x_1) + \dots + \sigma(dx_n) (\delta x_n)$$

ceci s'applique aussi bien au cas de particules libres que de particules soumises chacune à un champ.

Nous appellerons *espace d'évolution synchrone* du système l'ensemble V des

$$(15.39) \quad y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

y_1, \dots, y_n étant des conditions initiales des diverses particules ayant toutes la même date t ⁽¹⁾; V possède une structure de variété telle que

$$\dim(V) = \dim(U) + 1;$$

V est présymplectique si l'on pose

$$(15.40) \quad \sigma(dy) (\delta y) = \sigma(dy_1) (\delta y_1) + \dots + \sigma(dy_n) (\delta y_n)$$

et possède alors U comme variété quotient; dans le cas des particules non relativistes sans spin, il est facile d'identifier V avec l'espace d'évolution classique (12.29).

(15.41) On définira de même l'*espace d'évolution asynchrone* V' en renonçant à cette condition de synchronisme des y_j ; V' est donc le *produit direct* des espaces d'évolution V_j des diverses particules; c'est encore une variété présymplectique de quotient U ; mais sa dimension est celle de U augmentée de n (on choisit une date t_j indépendante pour chacune des particules).

(15.42) — Considérons le cas de particules *identiques* (elles ont alors même masse, même spin, et sont soumises au même champ éventuel); alors les variétés U_1, \dots, U_n sont les mêmes; on devrait alors avoir

$$U = [U_1]^n.$$

⁽¹⁾ On rappelle qu'une condition initiale d'une particule comprend un événement, donc un point r et une date t .

Mais l'expérience montre ⁽¹⁾ que l'on ne peut pas distinguer deux mouvements qui ne diffèrent que par l'échange de deux particules: le véritable espace des mouvements n'est donc pas $[U_1]^n$, mais la *variété quotient* construite en (10.27); nous écrirons en abrégé

$$U = [U_1]^n / S_n,$$

S_n désignant le groupe des permutations des entiers 1, 2, ..., n (appelé *groupe symétrique*).

Rappelons cette construction (10.27): si l'on pose

$$(15.43) \quad \hat{\gamma} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\gamma^{-1}(1)} \\ \dots \\ x_{\gamma^{-1}(n)} \end{pmatrix} \quad \forall \gamma \in S_n; \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in [U_1]^n.$$

on fait opérer le groupe symétrique S_n sur $[U_1]^n$ en ce sens que $(\gamma \circ \gamma' = \hat{\gamma} \circ \hat{\gamma}')$; ce groupe définit une relation d'équivalence; nous désignerons par \hat{x} la *classe de x selon cette relation*:

$$(15.44) \quad [\hat{x} = \hat{x}'] \Leftrightarrow [\text{il existe une permutation } \gamma \text{ tel que } x' = \hat{\gamma}(x)],$$

alors:

(15.45) La variété U des mouvements d'un système de n particules identiques est l'ensemble des \hat{x} , x étant tel que x_1, x_2, \dots, x_n soient *tous différents*; la forme de Lagrange σ de U est telle que

$$\sigma(d\hat{x}) (\delta \hat{x}) \equiv \sigma(dx) (\delta x) \equiv \sigma(dx_1) (\delta x_1) + \dots + \sigma(dx_n) (\delta x_n).$$

(15.46) — Désignons par $\widetilde{[U_1]^n}$ l'ensemble des x tels que x_1, \dots, x_n soient tous différents (c'est un ouvert de U_1^n); par S_n le groupe des $\hat{\gamma}$ opérant sur U_1^n ; par P l'application $x \mapsto \hat{x}$; alors le triplet

$$\{ \widetilde{U}_1^n, S_n, P \}$$

constitue un *revêtement* de U , au sens (1.42) (voir (10.26), (10.27)). La dimension de U est donc *égale* à celle de U_1^n , c'est-à-dire à n fois celle de U .

(15.47) — Le fait que l'espace des mouvements soit $[U_1]^n / S_n$ et non $[U_1]^n$ permet d'exprimer, sous forme mathématique, le fait que les particules sont *indiscernables*; contrairement à une opinion courante, cette formulation ne met pas en jeu la mécanique quantique.

⁽¹⁾ Voir (17.169).

INTERACTIONS

L'un des problèmes majeurs de la physique consiste à trouver une description correcte des actions mutuelles d'un système de particules. Une méthode « classique » consiste à considérer l'espace d'évolution synchrone V du système (ci-dessus (15.39)) et à modifier sa forme de Lagrange par la substitution

$$(15.48) \quad \sigma(dy) (\delta y) \rightarrow \sigma(dy) (\delta y) + dt \delta v - \delta t dv$$

v étant une fonction différentiable de y , appelée *potentiel d'interaction*. Le terme ajouté étant une dérivée extérieure, la condition $\nabla \sigma \equiv 0$ restera vérifiée; avec un peu de chance, le rang de σ ne changera pas (il restera égal au maximum compatible avec le fait que la dimension de V est impaire); V sera alors présymplectique, et le quotient U définira l'espace des mouvements des particules interagissantes.

Cette méthode s'applique avec succès au cas de la mécanique céleste : elle conduit d'ailleurs aux formules de *variation des constantes* de Lagrange (voir ci-dessus (12.106)). ■

Appliquons-la à un système de particules à spin non relativistes, pour lesquelles nous emploierons les notations (14.48), chaque particule étant repérée par un indice j . Il vient :

$$(15.49) \quad \left[\begin{array}{l} \sigma(dy) (\delta y) = \sum_j m_j \langle dv_j, \delta r_j - v_j \delta t \rangle - m_j \langle \delta v_j, dr_j - v_j dt \rangle \\ \quad \quad \quad - s_j \langle u_j, du_j \times \delta u_j \rangle \\ \quad \quad \quad + dt \delta v - \delta v dt . \end{array} \right.$$

On suppose que v ne dépend pas des vitesses v_j ; les équations du mouvement $dy \in \ker(\sigma)$ s'écrivent alors

$$(15.50) \quad \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{dr_j}{dt} \equiv v_j & m_j \frac{dv_j}{dt} = - \frac{\partial v}{\partial r_j} & s_j \frac{du_j}{dt} = u_j \times \frac{\partial v}{\partial u_j} \\ \hline \end{array}}$$

Si le système est isolé, le *principe de relativité galiléenne* nous donne des conditions supplémentaires : en appliquant les équations (12.124), (12.134), on constate que v vérifie ⁽¹⁾ les conditions

$$(15.51) \quad \frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0; \quad \sum_j \frac{\partial v}{\partial r_j} \equiv 0; \quad \sum_j r_j \times \frac{\partial v}{\partial r_j} + u_j \times \frac{\partial v}{\partial u_j} \equiv 0$$

⁽¹⁾ Après l'addition éventuelle d'une fonction du temps, qui ne modifie pas la valeur (15.49) de σ .

et que les *moments galiléens* (notations (12.122)), sont donnés par

$$(15.52) \quad \begin{aligned} \mathbf{l} &\equiv \sum_j r_j \times m_j v_j + s_j u_j; & \mathbf{g} &\equiv \sum_j m_j [r_j - tv_j]; \\ \mathbf{p} &\equiv \sum_j m_j v_j; & E &\equiv v + \frac{1}{2} \sum_j m_j \|v_j\|^2; \end{aligned}$$

d'après le théorème de Noether généralisé (11.12), ce sont des constantes du mouvement.

Ces équations sont aptes à rendre compte des forces *électrostatiques* et *magnétostatiques* entre particules, en choisissant pour v l'expression classique de l'énergie d'un système de doublets magnétiques électriquement chargés, soit

$$(15.53) \quad v = \sum_{j,k} \frac{q_j q_k}{\|r_j - r_k\|} + \mu_j \mu_k \left[\frac{\langle u_j, u_k \rangle}{\|r_j - r_k\|^3} - 3 \frac{\langle u_j, r_j - r_k \rangle \langle u_k, r_j - r_k \rangle}{\|r_j - r_k\|^5} \right]$$

(q_j : charges, μ_j : moments magnétiques).

(15.54) — Notons que les termes d'interaction magnétique (ceux qui contiennent $\mu_j \mu_k$ en facteur) sont négligeables en première approximation ⁽¹⁾; alors les u_j sont constants; l'espace des mouvements est le produit direct de l'espace des mouvements des particules interagissantes supposées sans spin par des *sphères symplectiques* (autant de sphères qu'il y a de particules à spin dans le système). ■

(15.55) — Cette méthode s'applique sans difficulté au cas d'un système de particules identiques, à condition de travailler sur le revêtement (voir (15.46)); dans ce cas v est une fonction *symétrique* des particules (c'est bien le cas pour l'expression (15.53)).

— Les formules ci-dessus ne rendent pas compte des termes petits, mais mesurables, tels que la force de Laplace à laquelle est soumise une particule chargée en mouvement dans le champ magnétique créé par les autres particules; nous avons déjà noté que ces termes sont relativistes (voir ci-dessus (12.87)).

(15.56) — On est donc confronté avec le problème de trouver un *modèle relativiste pour un système de particules en interactions*.

Or il est certain qu'on ne peut pas construire un tel modèle par la méthode précédente : en effet, l'espace d'évolution synchrone dépend du repère de Lorentz choisi, puisque la relation de simultanéité en dépend.

⁽¹⁾ Dans le cas de l'atome d'hydrogène, ces termes sont responsables de la structure *hyperfine* du spectre, ainsi que de la raie d'émission de 21 cm de longueur d'onde utilisée en radio-astronomie.

Il est naturel d'essayer d'utiliser l'espace d'évolution *asynchrone* : traitons le cas plus simple d'un système de particules *non relativistes*, sans spin, soumises à des forces F_j .

La forme de Lagrange de cet espace est donnée par

$$(15.57) \quad \sigma(dy) (\delta y) = \sum_j \langle m_j dv_j - F_j dt_j, \delta r_j - v_j \delta t_j \rangle - \langle m_j \delta v_j - F_j \delta t_j, dr_j - v_j dt_j \rangle$$

les forces F_j pouvant être, à priori, fonctions des t_k , r_k et v_k . Mais la condition de Maxwell $\nabla\sigma \equiv 0$ donne, après développement, les relations

$\frac{\partial F_j}{\partial v_k} \equiv 0$	$\forall j, k$
$\frac{\partial F_j}{\partial t_k} \equiv 0$	$\frac{\partial F_j}{\partial r_k} \equiv 0$ si $j \neq k$
$\frac{\partial F_j}{\partial r_j} - \frac{\partial F_j}{\partial t_j} \equiv 0$	$\forall j$

(15.58)

(15.59) En comparant avec (12.80), on voit que le remplacement de l'espace d'évolution synchrone par l'espace asynchrone empêche l'existence d'interactions — puisque la loi de réciprocité de Maxwell $\frac{\partial F_k}{\partial r_j} - \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \equiv 0$ est remplacée par la condition $\frac{\partial F_k}{\partial r_j} \equiv 0$ ($\forall j \neq k$). Or l'invariance relativiste interdit l'usage de l'espace synchrone, comme nous l'avons déjà remarqué.

(15.60) Ces considérations expliquent pourquoi on ne connaît aucun modèle relativiste de particules en interaction, même dans un cas simple comme celui de l'atome d'hydrogène ⁽¹⁾.

A vrai dire, ces raisonnements *n'interdisent pas* l'existence d'un tel modèle ; ils suggèrent simplement qu'il faut renoncer à l'idée trop newtonienne — et surtout trop aristotélicienne — selon laquelle le comportement

⁽¹⁾ On peut trouver un modèle approché en supposant la masse de l'électron négligeable devant celle du proton, que l'on suppose alors fixe. Mais il n'y a pas d'interaction dans ce cas ; seulement action du proton sur l'électron.

Une autre méthode consiste à étudier l'interaction du proton et de l'électron avec le champ électromagnétique séparément ; mais le modèle ainsi construit n'est pas réaliste, car il conduit à une perte d'énergie par rayonnement, et il n'accorde à l'atome qu'une durée de vie très brève. On dit couramment que la stabilité observée de l'atome est un effet quantique ; mais le traitement quantique relativiste du problème fait lui aussi défaut.

réel d'un système (« energiea ») peut se décrire au moyen de particules permanentes (« hulè ») dont les mouvements sont simplement infléchis par une interaction (« morphè ») : le dualisme entre « forme » et « matière » ne peut donc être considéré que comme une *approximation non relativiste* ; d'où l'intérêt spéculatif des méthodes qui permettent d'y échapper — comme la théorie de la diffusion.

THÉORIE DE LA DIFFUSION

(15.61) Soit U l'espace des mouvements d'un système dynamique (Fig. 15.II) ; soit V un espace d'évolution du système, P la projection de V sur U . Supposons (ainsi que nous l'avons fait pour tenir compte de l'action d'un champ sur une particule, ou de l'interaction d'un système de particules)

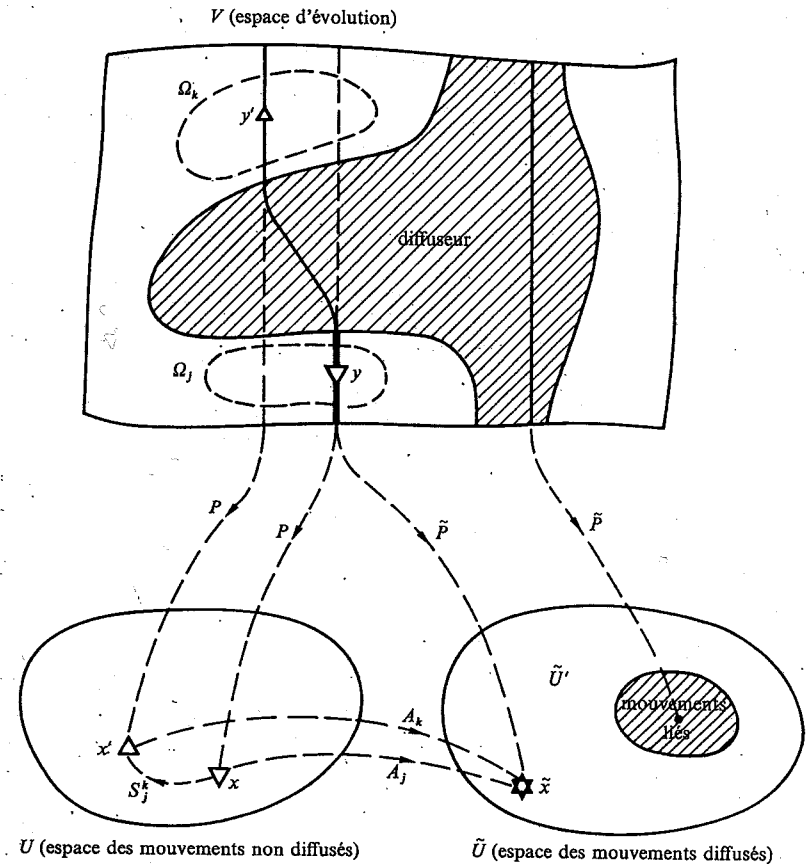


Fig. 15. II.

que nous définissons un nouveau système dynamique en *modifiant* la forme de Lagrange σ de V (par exemple par l'addition d'un terme supplémentaire), mais que σ_V ne soit pas modifiée dans un certain ouvert Ω de V . On dit dans ce cas que le nouveau système est un *système diffusé* par rapport à l'ancien ; nous appellerons *diffuseur* le complémentaire de Ω .

On peut, si l'on veut, supposer que Ω est le *plus grand ouvert* de V où les formes de Lagrange du système initial et du système diffusé coïncident ⁽¹⁾ ; son complémentaire s'appelle alors *support* du diffuseur.

Nous noterons \tilde{U} l'espace des *mouvements diffusés*, \tilde{P} la projection de \tilde{U} sur \tilde{U} .

Nous supposons essentiellement que l'espace d'évolution V est *sécable*, aussi bien pour le système diffusé que pour le système non diffusé ; donc que U et \tilde{U} sont des *variétés symplectiques*.

Soit $y \in \Omega$; la condition initiale y définit un mouvement non diffusé $x = P(y)$ et un mouvement diffusé $\tilde{x} = \tilde{P}(y)$; x et \tilde{x} peuvent être considérés comme des *feuilles* de V , pour ses deux structures feuilletées. Il est facile de vérifier que l'intersection de l'une de ces deux feuilles avec Ω est une *variété intégrale* de Ω (considérée comme variété feuilletée plongée dans V), donc une *somme de feuilles* de Ω ; en particulier la feuille qui contient y (en gras sur la figure) est contenue à la fois dans x et dans \tilde{x} .

A l'aide de ces remarques, on peut démontrer le théorème suivant :

$$(15.62) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Il existe une famille d'ouverts } \Omega_j, \text{ dont la réunion est égale à } \Omega, \text{ tels que} \\ [y \in \Omega_j, y' \in \Omega_j] \Rightarrow [\{P(y) = P(y')\} \Rightarrow \{\tilde{P}(y) = \tilde{P}(y')\}] \end{array} \right].$$

Il en résulte immédiatement l'existence d'une application injective A_j de U à \tilde{U} , définie par

$$(15.63) \quad [A_j(x) = \tilde{x}] \Rightarrow [\exists y \in \Omega_j, P(y) = x, \tilde{P}(y) = \tilde{x}] ;$$

on peut démontrer (en choisissant une section transversale du feuilletage passant par y) que A_j est un *difféomorphisme local*, la formule connue

$$(15.64) \quad \sigma(dx) (\delta x) = \sigma(dy) (\delta y) = \sigma(d\tilde{x}) (\delta \tilde{x})$$

montre de plus que A_j est un *symplectomorphisme local*.

On appellera *mouvement lié* un mouvement diffusé entièrement contenu dans le diffuseur ; comme les Ω_j recouvrent Ω , il est clair que la réunion des $\text{val}(A_j)$ est l'ensemble \tilde{U}' des *mouvements non liés* ; \tilde{U}' est donc un ouvert de \tilde{U} (il peut d'ailleurs coïncider avec \tilde{U}).

⁽¹⁾ C'est-à-dire la réunion des ouverts ayant cette propriété ; c'est bien un ouvert (Théorème (1.14)).

Posons

$$(15.65) \quad S_j^k = A_k^{-1} \cdot A_j \quad \forall j, k \in I \quad (1)$$

ou, ce qui revient au même (Fig. 15. II)

$$(15.66) \quad [S_j^k(x) = x'] \Leftrightarrow [\exists y \in \Omega_j, \exists y' \in \Omega_k, \tilde{P}(y) = \tilde{P}(y'), P(y) = x, P(y') = x'] ;$$

il en résulte immédiatement les relations suivantes :

	S_j^k est un symplectomorphisme local de U à U	$\forall j, k \in I$
(15.67)	$S_j^j = \mathbb{1}_{E_j}$, E_j étant un ouvert de U	$\forall j \in I$
	$[S_k^j]^{-1} = S_j^k$	$\forall j, k \in I$
	$S_j^k \cdot S_l^k < S_l^k$ ⁽²⁾	$\forall j, k, l \in I$

Réciproquement, la connaissance des S_j^k entraîne la connaissance de l'espace \tilde{U}' des *mouvements non liés* ; c'est une conséquence du théorème suivant :

$$(15.68) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Soit } U \text{ une variété symplectique ; } I \text{ un ensemble d'indices. Supposons} \\ \text{qu'il existe des } S_j^k \text{ vérifiant les relations (15.67).} \end{array} \right.$$

Alors :

1) Il existe une variété symplectique U' , et des symplectomorphismes locaux A_j de U à U' , tels que

	$A_k^{-1} \cdot A_j = S_j^k$	$\forall j, k \in I$
◇	$\bigcup_j \text{val}(A_j) = U'$	

⁽¹⁾ I désigne l'ensemble d'indices de la famille Ω_j ; S_j^k peut éventuellement être impuissant.
⁽²⁾ Nous employons la notation $A < B$, où A et B sont des applications, pour indiquer que B est un *prolongement* de A :

$$[x \in \text{def}(A)] \Rightarrow [B(x) = A(x)] .$$

- (15.68) 2) U' est unique, à un symplectomorphisme global près : si une variété U'^* et des symplectomorphismes locaux A_j^* de U à U'^* vérifient aussi les relations \diamond , il existe un symplectomorphisme global B de U' à U'^* tel que

$$\heartsuit \quad \boxed{A_j^* = B \cdot A_j} \quad \forall j \in I.$$

Considérons l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} j \\ x \end{pmatrix}$ ($j \in I, x \in E_j$); définissons sur cet ensemble une relation \sim par

$$\left[\begin{pmatrix} j \\ x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} j' \\ x' \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow [x' = S_j^j(x)]$$

il résulte trivialement des relations (15.67) que \sim est une relation d'équivalence.

Si l'on désigne par $A_j(x)$ la classe de $\begin{pmatrix} j \\ x \end{pmatrix}$ suivant \sim , et par U' la réunion des val (A_j) , les A_j sont des applications injectives de U à U' , vérifiant les relations \diamond (vérification immédiate); il en résulte que l'ensemble des A_j , $F(j \in I, F = \text{carte de } U)$ constitue un atlas de U' , et lui donne une structure de variété pour laquelle les A_j ont des difféomorphismes locaux; comme les S_j^k sont des symplectomorphismes locaux, les champs de 2-formes σ_j définis sur les ouverts val (A_j) par

$$\sigma_j(d[A_j(x)]) (\delta[A_j(x)]) \equiv \sigma(dx) (\delta x)$$

sont compatibles, et sont des restrictions d'un champ de 2-formes σ de U' ; σ donne à U' une structure symplectique telle que les A_j soient des symplectomorphismes locaux (vérification immédiate); d'où le 1).

Plaçons-nous dans l'hypothèse du 2); on constate que les $B_j = A_j^* \cdot A_j^{-1}$ sont des symplectomorphismes locaux de U' à U'^* ; si $x \in \text{def}(B_j) \cap \text{def}(B_k)$, en mettant x sous la forme $A_j(y)$, on déduit de \diamond que $B_j(x) = B_k(x)$; il en résulte que les B_j ont un prolongement commun B , défini sur U' ; de même les B_j^{-1} ont un prolongement commun B^* défini sur U'^* ; on constate que $B^* = B^{-1}$, et que B est un symplectomorphisme de U' sur U'^* vérifiant \heartsuit ; d'où le 2).

C.Q.F.D.

- (15.69) Nous appellerons *groupe de symétrie du diffuseur* un groupe de Lie G tel que :
- $$\left\{ \begin{array}{l} G \text{ opère sur } V; \\ G \text{ est groupe dynamique à la fois pour le système diffusé et pour le système non diffusé.} \end{array} \right.$$

On sait (11.6) que G est aussi un groupe dynamique de U et \tilde{U} ; il est facile de montrer que l'on peut agrandir Ω de façon à ce qu'il soit invariant par G ; alors G opère aussi sur Ω et sur l'espace \tilde{U}' des mouvements non liés.

Pour énoncer commodément les propriétés de G , nous allons introduire la définition suivante :

- (15.70) Soit F une application d'une variété à une variété. On dira que F est en escalier si
- $$[y \in \text{val}(F)] \Rightarrow [F^{-1}(y) \text{ ouvert}] \quad (1).$$

On vérifie que les définitions suivantes lui sont équivalentes :

- (15.71) [def (F) est ouvert, F est constante sur chaque composante connexe de def (F)]
ou
(15.72) [F est différentiable, $[x \in \text{def}(F)] \Rightarrow [D(F)(x) = 0]$].

THÉORÈME (hypothèses et notations (15.61) à (15.72)).

Soit G un groupe de symétrie d'un diffuseur.

1) Les applications

$$\begin{aligned} a &\mapsto [a_U \cdot A_j \cdot a^{-1}_U](x) \\ a &\mapsto [a_U \cdot S_j^k \cdot a^{-1}_U](x) \end{aligned} \quad a \in G$$

sont en escalier ($\forall j, k \in I, \forall x \in U$).

2) Si \mathcal{G} est l'algèbre de Lie de G , et si $Z \in \mathcal{G}$, on a

$$(15.73) \quad \begin{aligned} D(A_j)(x) (Z_U(x)) &= Z_U(A_j(x)) & \text{si } x \in \text{def}(A_j), \\ D(S_j^k)(x) (Z_U(x)) &= Z_U(S_j^k(x)) & \text{si } x \in \text{def}(S_j^k). \end{aligned}$$

3) Supposons que G possède des moments $\mu \equiv \psi(x)$, $\tilde{\mu} \equiv \tilde{\psi}(\tilde{x})$ pour le système non diffusé et le système diffusé. Alors les applications

$$\begin{aligned} x &\mapsto \tilde{\psi}(A_j(x)) - \psi(x) \\ x &\mapsto \psi(S_j^k(x)) - \psi(x) \end{aligned} \quad x \in U$$

sont en escalier ($\forall j, A \in I$).

4) Si Z appartient à l'algèbre dérivée de celle de G , on a

$$\psi(S_j^k(x)) Z = \psi(x) Z \quad \forall x \in \text{def}(S_j^k).$$

Nous laissons au lecteur le soin de la démonstration (2). Les exemples suivants montreront la signification physique de ce théorème.

(1) L'image réciproque $F^{-1}(y)$ est l'ensemble des x tels que $F(x) = y$.

(2) Pour la démonstration du (4), on peut utiliser (11.17#).

DIFFUSEURS BORNÉS

- (15.74) Considérons une particule soumise à un champ qui soit nul ou négligeable en dehors de la boule $\| \mathbf{r} \| < R$ (dans un référentiel d'inertie donné). Prenons comme espace des mouvements non diffusés l'ensemble U des mouvements rectilignes uniformes de la particule libre qui vérifient les deux conditions :

(15.75) La vitesse de la particule n'est pas nulle.
La plus courte distance de la particule à l'origine est $< R$.

U est un ouvert de la variété des mouvements libres (relativistes ou non relativistes), donc une variété symplectique.

Soit Ω l'ensemble des conditions initiales y de la particule (définies chacune, on le sait, par une date t , un point \mathbf{r} , une vitesse \mathbf{v} et, éventuellement, l'orientation \mathbf{u} du spin) qui sont compatibles avec (15.75) et vérifient de plus $\| \mathbf{r} \| > R$; Ω est un ouvert où la forme de Lagrange de la particule non diffusée coïncide avec celle de la particule diffusée.

Il résulte immédiatement de la définition (15.75) de U que

(15.76) $[y \in \Omega] \Rightarrow [\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \neq 0]$

nous pourrions donc partager Ω en deux ouverts disjoints Ω_{out} et Ω_{in} définis par

(15.77) $y \in \Omega_{\text{out}} \Leftrightarrow \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle > 0$
 $y \in \Omega_{\text{in}} \Leftrightarrow \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle < 0$

- (15.78) Les conditions (15.62) sont vérifiées (I étant l'ensemble à deux éléments $\{ \text{in}, \text{out} \}$); il est usuel de noter S le symplectomorphisme $S_{\text{in}}^{\text{out}}$; on a alors

(15.79)

$S_{\text{out}}^{\text{out}} = 1_V$	$S_{\text{in}}^{\text{out}} = S$
$S_{\text{out}}^{\text{in}} = S^{-1}$	$S_{\text{in}}^{\text{in}} = 1_V$

On voit (grâce au Théorème (15.68)) que la connaissance de S entraîne la connaissance complète de l'espace des mouvements diffusés.

Notons que $\text{def}(S)$ n'est pas nécessairement égal à U , ni même connexe ⁽¹⁾. ■

- (15.80) — Supposons que le diffuseur soit *statique*, c'est-à-dire que le champ soit invariant par translation dans le temps. Alors le groupe G des translations dans le temps ⁽²⁾ est un *groupe de symétrie du diffuseur*, au sens (15.69). Selon le théorème (15.73), l'application $a \mapsto a_V \cdot S \cdot a_V^{-1}(x)$ est en escalier ($a \in R$); si $x \in \text{def}(S)$, on constate que cette application est définie sur R tout entier, qui est connexe; elle est donc constante (Théorème (15.71)); ce qui montre que S commute avec les translations temporelles.

- (15.81) Soit $\psi(x)$ le moment du groupe G correspondant à un mouvement x ; $\psi(x)$ est, au signe près, l'énergie (voir (12.122)); le théorème (15.73.3°) montre que l'application

$$x \mapsto \psi(S(x)) - \psi(x)$$

est en escalier : la traversée du diffuseur ajoute à l'énergie une quantité qui ne dépend que de la composante connexe de $\text{def}(S)$ à laquelle appartient x ⁽³⁾.

- (15.82) Il arrive assez souvent que le diffuseur soit *conservatif*, c'est-à-dire que $\psi(S(x)) \equiv \psi(x)$; citons des cas où ceci a lieu nécessairement :

- a) Si $\text{def}(S)$ est connexe;
- b) Si on peut prolonger G par un groupe de symétries dont l'algèbre de Lie est égale à l'algèbre dérivée (cf. (15.73.4°)).

⁽¹⁾ Dans le cas d'un photon diffusé par une lunette astronomique (contenue dans la sphère $\| \mathbf{r} \| < R$), $\text{def}(S)$ a 3 composantes; ce sont les mouvements libres du photon dont la phase « in » est telle respectivement que :

- a) le photon pénètre par l'objectif et ressortira par l'oculaire,
- b) le photon pénètre par l'oculaire et ressortira par l'objectif,
- c) le photon évite la lunette.

De plus ces trois composantes se dédoublent si l'on fait pénétrer dans l'instrument des photons polarisés à droite et à gauche. Deux photons ayant la même trajectoire initiale, mais différant par l'hélicité, pourront avoir des trajectoires différentes après diffusion; c'est ce que montre l'expérience : une source lumineuse ordinaire, observée à travers un prisme de quartz, apparaît dédoublée, les deux images étant polarisées circulairement en sens contraire (*biréfringence rotatoire*).

⁽²⁾ G peut être considéré comme le groupe additif R , opérant sur V selon

$$a_V \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t + a \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

⁽³⁾ Ainsi un électron traversant un microscope électronique voit son énergie augmentée d'une constante, caractéristique de la différence de potentiel entre l'entrée et la sortie.

c) Enfin, dans certains cas où les explications précédentes tombent en défaut ⁽¹⁾, il peut arriver que le caractère conservatif du diffuseur soit dû à la possibilité de donner un *prolongement analytique complexe* à S , prolongement défini sur un ensemble connexe. ■

Citons des diffuseurs ayant d'autres symétries :

(15.83) — Un système optique centré possède la symétrie de révolution autour de son axe optique. ■

(15.84) — Le groupe $SO(3)$ est groupe de symétrie pour la diffusion d'une particule par un champ de forces centrales; le théorème (15.73.4^o) nous montre que S conserve le moment correspondant (qui est l , avec les notations (12.122)). ■

(15.85) — Le photon, dans l'approximation non relativiste, a une vitesse infinie (14.54); la date t de son mouvement est le moment du groupe des translations sur l'énergie E (notation (14.53)); le fait que les dates d'entrée et de sortie dans un instrument d'optique soient les mêmes peut donc se rattacher au fait que la diffusion est indépendante de la variable E . ■

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

(15.86) Ce dernier exemple (15.85) nous fournit l'occasion d'appliquer la procédure (12.152) au groupe dynamique ($E \rightarrow E + Cte$); ce qui nous montre qu'il existe, à chaque instant t , une variété symplectique dont les éléments sont les orbites de ce groupe opérant sur l'espace des mouvements non relativistes du photon; une telle orbite ξ peut se repérer au moyen d'un vecteur unitaire u (notations (14.53)), définissant la direction et le sens de propagation, et d'une droite parallèle à u (sur laquelle on choisira un point r): ξ est donc ce qu'on appelle un *rayon lumineux*.

(15.87) L'ensemble des rayons lumineux constitue donc une variété V , de dimension 4 ⁽²⁾, dont la forme de Lagrange se déduit de (14.53 C); au facteur constant k près, il vient ⁽³⁾

$$(15.88) \quad \sigma(d\xi)(\delta\xi) \equiv \langle du, \delta r \rangle - \langle \delta u, dr \rangle - \frac{\chi S}{k} \langle u, du \times \delta u \rangle.$$

⁽¹⁾ Par exemple dans le cas où la diffusion est décrite au moyen d'un potentiel additif v (comme en (15.48)); il pourrait a priori arriver que v soit multiforme — tout en définissant une structure symplectique uniforme; dans ce cas le diffuseur ne serait pas conservatif.

⁽²⁾ Cette variété est constituée par les droites orientées de l'espace; on peut montrer qu'elle est simplement connexe. On constate sur (15.88) que le changement d'orientation ($r \rightarrow r, u \rightarrow -u$) est anticanonique; il engendre un groupe discret à deux éléments; la variété quotient (voir (1.45)) est constituée par les droites non orientées, et admet donc V comme revêtement universel (3.55).

⁽³⁾ Rappelons que $\chi (= \pm 1)$ est l'hélicité, s la spin et k la couleur du photon (14.53).

— Considérons un rayon lumineux ξ qui pénètre dans un instrument d'optique; puisque S est un symplectomorphisme local (notation (15.78)) le rayon lumineux émergent $\xi' \equiv S(\xi)$ sera lié à ξ par :

$$(15.89) \quad \begin{aligned} \langle du, \delta r \rangle - \langle \delta u, dr \rangle - \frac{\chi S}{k} \langle u, du \times \delta u \rangle \\ \equiv \langle du', \delta r' \rangle - \langle \delta u', dr' \rangle - \frac{\chi S}{k} \langle u', du' \times \delta u' \rangle; \end{aligned}$$

cette formule montre l'impossibilité d'obtenir une photographie ponctuelle ($r' = Cte$) d'une étoile à l'infini ($u = Cte$) tant qu'on ne peut pas négliger la quantité $2\pi s/k$ (qui s'interprétera plus tard comme la longueur d'onde du photon (19.43)); si on le fait, remplaçant donc (15.88) par

$$(15.90) \quad \sigma(d\xi)(\delta\xi) \equiv \langle du, \delta r \rangle - \langle \delta u, dr \rangle$$

on tombe sur l'approximation de l'optique géométrique; la conservation de (15.90) à travers un instrument est une propriété connue sous le nom de *théorème de Lagrange* (on le déduit habituellement du principe de Fermat).

— Il existe, sur la variété V des rayons, une 1-forme potentielle ω , définie ⁽¹⁾ par

$$(15.91) \quad \omega(d\xi) \equiv - \langle r, du \rangle$$

il en résulte — localement — l'existence d'une variable dynamique W telle que

$$(15.92) \quad \langle r', du' \rangle - \langle r, du \rangle \equiv dW$$

à la traversée d'un instrument d'optique; W s'appelle *eikonal angulaire* ⁽²⁾, ou encore *caractéristique angulaire*; elle est utilisée dans les méthodes modernes de calcul des instruments d'optique.

⁽¹⁾ La forme potentielle ω' définie, sur la variété V' des couples $\eta \equiv (u, r)$ par

$$\omega'(d\eta) \equiv \langle u, dr \rangle$$

est plus classique (elle coïncide avec la forme de Cartan du principe variationnel de Fermat); mais elle n'est pas, comme ω , un invariant intégral: en d'autres termes, on ne peut pas la définir sur la variété V des rayons.

⁽²⁾ La fonction *eikonal* classique, déduite de la forme ω' (note précédente) n'est pas définie sur l'espace des rayons.

MIROIR PLAN

Soit N un vecteur d'espace-temps vérifiant

$$(15.93) \quad \bar{N}.N = -1.$$

Il est facile de vérifier que le groupe de Poincaré G possède un sous-groupe de Lie G' composé des matrices (notation (13.51))

$$(15.94) \quad \begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\bar{L}.L = 1)$$

qui vérifient les conditions

$$(15.95) \quad \bar{N}.L = \bar{N} \quad \bar{N}.C = 0$$

et dont l'algèbre de Lie est constituée des matrices

$$(15.96) \quad \begin{bmatrix} A & \Gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\bar{A} + A = 0)$$

telles que

$$(15.97) \quad \bar{N}.A = 0 \quad \bar{N}.\Gamma = 0;$$

G' est l'ensemble des éléments de G qui conservent le demi-espace-temps

$$(15.98) \quad \bar{N}.X > 0$$

qui s'interprète tri-dimensionnellement comme un côté d'un plan immobile ou en mouvement de translation uniforme.

Supposons qu'un diffuseur admette G' comme groupe de symétrie; on vérifie facilement que l'algèbre de Lie de G' est égale à sa dérivée; le théorème (15.73.4°) montre que les symplectomorphismes de diffusion S_j^k conservent les moments de G' ; ceux-ci se déduisent de ceux de G par la règle (13.14◇); on déduit de (15.97) que le seul changement permis pour le moment de Poincaré $\{M, P\}$ (notation (13.57)) est de la forme

$$(15.99) \quad M \rightarrow M + V.\bar{N} - N.\bar{V} \quad P \rightarrow P + N\alpha$$

V étant un vecteur et α un nombre.

Connaissant le type de la particule diffusée, on connaît des relations vérifiées par M et P (voir la classification des particules (14.4, 24, 29); celles-ci devant être vérifiées avant et après diffusion, fournissent des

relations vérifiées par V et α ; on possède aussi des relations différentielles exprimant que les S_j^k sont des symplectomorphismes. Dans deux cas intéressants (particule sans spin, particule de masse nulle) on en déduit que la substitution (15.99) prend l'une des deux formes

$$(15.100) \quad \begin{cases} a) & P \rightarrow P; \quad M \rightarrow M + [N.\bar{P} - P.\bar{N}] f(\bar{N}.P) \\ b) & P \rightarrow AP; \quad M \rightarrow A.[M + [N.\bar{P} - P.\bar{N}] f(\bar{N}.P)].\bar{A}; \end{cases}$$

f désigne une fonction réelle; on a posé

$$(15.101) \quad A = \mathbb{1} + 2N.\bar{N}.$$

Le cas a) correspond à une *transmission*, le cas b) à une *réflexion*. ■

Traisons le cas d'un *miroir plan*, occupant la région

$$\bar{N}.X \geq 0$$

et sur lequel tombent des photons (particules de masse nulle).

Choisissons un référentiel de Lorentz par rapport auquel le miroir est immobile; on pourra alors écrire

$$(15.102) \quad N = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

\mathbf{n} étant le vecteur unitaire normal au miroir, dirigé vers l'extérieur (Fig. 15.III).

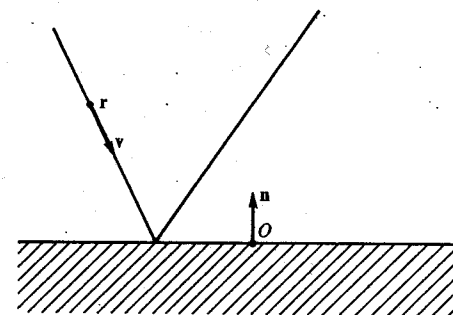


Fig. 15.III.

(15.103) — On peut repérer un mouvement du photon libre par une date t , un point \mathbf{r} , sa vitesse \mathbf{v} (de longueur 1), son énergie E et son hélicité $\chi = \pm 1$, le point $\mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix}$ appartenant à la trajectoire relative au référentiel \mathcal{R} (Définition (14.33)).

Le calcul donne alors

$$(15.104) \quad P = \mathcal{R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}E \\ E \end{bmatrix} \quad M = \mathcal{R} \begin{bmatrix} j(\mathbf{v}\chi s + \mathbf{r} \times \mathbf{v}E) & [\mathbf{r} - \mathbf{v}t] E \\ E[\mathbf{r} - \mathbf{v}t] & 0 \end{bmatrix} \mathcal{R}^{-1}.$$

Les lois expérimentales de la réflexion montrent que celle-ci est donnée par la substitution

$$(15.105) \quad t \rightarrow t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v} \rightarrow \Phi(\mathbf{v}), \quad E \rightarrow E, \quad \chi \rightarrow -\chi \quad (1)$$

Φ étant la symétrie par rapport au plan du miroir :

$$(15.106) \quad \Phi = 1 - 2 \mathbf{n}\bar{\mathbf{n}}.$$

En remarquant que l'opérateur A (15.101) peut s'écrire

$$(15.107) \quad A = \mathcal{R} \begin{bmatrix} \Phi & \\ & 1 \end{bmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

on vérifie à l'aide de (15.104) que les formules de réflexion s'écrivent simplement

$$(15.108) \quad \dot{P} \mapsto A.P \quad M \mapsto A.M.\bar{A}$$

ce qui constitue un cas particulier de (15.100) : cas b), avec $f \equiv 0$. On peut donc traiter le miroir par la théorie de la diffusion : l'ensemble Ω des conditions initiales du photon situées *en avant* du miroir se partage en ouverts Ω_0 définis à l'aide d'une date θ par les relations

$$(15.109) \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle > 0 \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} + \mathbf{v}[\theta - t] \rangle > 0$$

qui expriment que le photon ne heurte pas le miroir pendant l'intervalle de temps t, θ . Les relations (15.62) sont vérifiées (l'ensemble d'indices coïncidant ici avec le temps); (15.66) nous donne :

$$(15.110) \quad \begin{cases} S_0^{\theta'}(x) = x & \text{si } \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} + \mathbf{v}[\theta - t] \rangle > 0, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} + \mathbf{v}[\theta' - t] \rangle > 0 \\ S_0^{\theta'}(x) = S(x) & \text{si } \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} + \mathbf{v}[\theta - t] \rangle > 0, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} + \mathbf{v}[\theta' - t] \rangle < 0 \end{cases}$$

S désignant l'application involutive définie sur l'espace des mouvements libres par (15.108).

Nous savons (15.68) que ces relations définissent complètement l'espace des mouvements (non liés) du photon en présence du miroir ; on peut vérifier directement sur ces formules (15.110) les résultats (15.67) et (15.73). ■

(1) Un photon polarisé à gauche avant réflexion est polarisé à droite après ; c'est pourquoi nous avons dû adopter le point de vue (14.78), selon lequel le photon est décrit par un espace de mouvements *non connexe*.

— Les formules ci-dessus sont *relativistes* ; elles permettent par exemple d'étudier la réflexion sur un miroir en mouvement de translation uniforme de vitesse normale $\mathbf{n}\beta$: il suffit de remplacer (15.102) par

$$(15.111) \quad N = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \operatorname{ch} \varphi \\ \operatorname{sh} \varphi \end{pmatrix} \quad \text{th } \varphi = \beta$$

on trouve ainsi que l'angle d'incidence α et l'angle de réflexion α' ne sont plus égaux, mais reliés par la relation

$$(15.112) \quad \cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \frac{2\beta}{1+\beta^2}}{1 + \frac{2\beta}{1+\beta^2} \cos \alpha},$$

que les énergies E et E' des photons incident et réfléchi sont liées par

$$(15.113) \quad \frac{E'}{E} = 1 + \frac{2\beta}{1-\beta^2} [\beta + \cos \alpha]$$

(effet Doppler par réflexion),

enfin que le point d'impact \mathbf{r} et le point d'émission \mathbf{r}' ont un *décalage* donné par

$$(15.114) \quad \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \frac{2\chi s\beta}{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \alpha} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{E}$$

dont le sens dépend de l'hélicité χ ; sa grandeur est inférieure à $\beta\lambda/\pi$ (λ étant la « longueur d'onde » $2\pi s/E$). Cet effet est une conséquence du caractère relatif de la trajectoire (voir (14.36)).

(15.115) — Notons qu'un mouvement de glissement du miroir sur lui-même ne modifie pas la réflexion (puisqu'il ne change pas le quadrivecteur N), alors qu'il modifie la substance du miroir : nous sommes dans un cas où la diffusion est plus symétrique que le diffuseur.

Dans d'autres cas où les formules (15.100) ne s'appliquent pas (exemples : le phénomène de *mirage*, qui ne change pas le sens de polarisation ; la traversée par une particule chargée d'un condensateur plan, qui modifie l'énergie), la symétrie est donc certainement moindre.

COLLISIONS DE PARTICULES LIBRES

(15.116) On considère un système de particules libres de masses *non nulles*, sans interactions ; soit U l'espace des mouvements tels que les vitesses des particules soient toutes différentes ; soit V la partie correspondante de

l'espace d'évolution synchrone (Définition (15.39)); si $y_0 \in V$, y_0 définit une date t_0 et un mouvement du système $x_0 = P(y_0)$ dans U .

Choisissons un nombre positif ρ , et définissons les ensembles Ω_{in} , Ω_{out} par

$$5.117) \left\{ \begin{array}{l} [y_0 \in \Omega_{in}] \Leftrightarrow [\text{dans le mouvement } P(y_0), [t \leq t_0] \Rightarrow [\|r_j - r_k\| > \rho \\ \forall j, k]] \\ [y_0 \in \Omega_{out}] \Leftrightarrow [\text{dans le mouvement } P(y_0), [t \geq t_0] \Rightarrow [\|r_j - r_k\| > \rho \\ \forall j, k]]. \end{array} \right.$$

On peut vérifier que Ω_{in} et Ω_{out} sont des ouverts de V .

Supposons maintenant que les particules interagissent, l'interaction pouvant être décrite au moyen d'un potentiel v (voir (15.48)), et que ce potentiel soit nul si les distances mutuelles des particules sont toutes supérieures à ρ . On peut alors appliquer la théorie de la diffusion à l'ouvert $\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{out}$; Ω_{in} et Ω_{out} vérifient les relations (15.62); il vient (notations (15.65)) :

$$5.118) \left\{ \begin{array}{ll} S_{out}^{out} = 1_U & S_{in}^{out} = S \\ S_{out}^{in} = S^{-1} & S_{in}^{in} = 1_U \end{array} \right.$$

S étant un symplectomorphisme local de U à U qui caractérise la diffusion des particules — ou, si l'on préfère parler ainsi, leurs collisions; S fait correspondre à un mouvement x avant collision (éventuelle) le mouvement x' après collision suivant la règle (cf. (15.66)) :

$$5.119) [S(x) = x'] \Leftrightarrow [\exists y \in \Omega_{in}, \exists y' \in \Omega_{out}, P(y) = x, P(y') = x', \tilde{P}(y) = \tilde{P}(y')]$$

\tilde{P} désignant la correspondance entre une condition initiale et le mouvement avec interactions correspondant.

5.120) — On vérifie sur cette formule que S ne change pas si on augmente ρ ; S est donc caractéristique des interactions.

5.121) — Même si l'on ne connaît pas de formulation relativiste des interactions (voir ci-dessus (15.60)), on peut risquer l'hypothèse suivante : il existe un symplectomorphisme local S , vérifiant (15.119), opérant sur l'espace \tilde{U} des mouvements relativistes libres sans parallélisme des trajectoires d'espace-temps ⁽¹⁾; on vérifie alors que S ne dépend pas du repère de Lorentz choisi (bien que ce repère figure implicitement dans la définition de Ω_{in} et de Ω_{out}); dans ce cas, les applications (15.118) définissent la variété symplectique des mouvements non liés (grâce au Théorème (15.68)). Puisque le système est supposé isolé, le principe de relativité

(13.70) doit s'appliquer : on en déduit que S commute avec les éléments du groupe de Poincaré connexe G (opérant sur \tilde{U}); comme l'algèbre de Lie de G est égale à son algèbre dérivée, le théorème (15.73) montre que S conserve le moment $\mu = \{M, P\}$ du système — moment qui est égal, on le sait (14.59), à la somme des moments correspondants de chacune des particules. En particulier l'énergie totale est conservée, on dit que les collisions sont élastiques. ■

Même si nous ne savons pas déterminer S par le calcul, nous savons donc, à priori, que

$$5.122) \left\{ \begin{array}{l} S \text{ est un symplectomorphisme local de } \tilde{U}, \\ S \text{ commute avec le groupe de Poincaré connexe opérant sur } \tilde{U}, \\ S \text{ conserve les quantités } P = \sum_j P_j \text{ et } M = \sum_j M_j, \end{array} \right.$$

ce qui limite son arbitraire; les vérifications expérimentales de (15.122) sont nombreuses; elles permettent de tester les principes que nous avons proposés pour la mécanique relativiste, et sont d'autant plus précieuses que l'étude de S est actuellement le seul accès à l'étude relativiste de systèmes non élémentaires. ■

5.123) Il n'est pas impossible que la connaissance du symplectomorphisme S permette d'étudier aussi les mouvements liés, par la technique du prolongement analytique; il faudrait pour cela que la variété des mouvements et S soient analytiques; certains indices suggèrent qu'il en est bien ainsi dans certains types d'interactions.

⁽¹⁾ Les particules peuvent être lentes (15.42) ou non.