

A vertical line runs down the center of the page. A circle is positioned to the right of this line, overlapping it. The text is contained within the circle.

*Chapitre II*

Géométrie  
symplectique

## § 8 2-FORMES

### ORTHOGONALITÉ

(8.0) — Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ ; soit  $\sigma$  une 2-forme de  $E$  (voir 4.26).

(8.1) Deux vecteurs  $X$  et  $Y$  de  $E$  sont dits *orthogonaux* (pour la forme  $\sigma$ ) si le nombre  $\sigma(X)(Y)$  est nul. Cette relation d'orthogonalité est *symétrique*, parce que la forme  $\sigma$  est antisymétrique ( $\sigma(Y)(X) \equiv -\sigma(X)(Y)$ ).

— Nous désignerons par  $\text{orth}(H)$  l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  :

$$(8.2) \quad [X \in \text{orth}(H)] \Leftrightarrow [\sigma(X)(Y) = 0 \quad \forall Y \in H]$$

$\text{orth}(H)$  est aussi un *sous-espace vectoriel*; on vérifie immédiatement les formules suivantes <sup>(1)</sup> :

$$(8.3) \quad \left[ \begin{array}{l} a) [H \subset \text{orth}(H')] \Leftrightarrow [H' \subset \text{orth}(H)] \\ b) [H \subset H'] \Rightarrow [\text{orth}(H') \subset \text{orth}(H)] \\ c) \text{orth}(H + H') = \text{orth}(H) \cap \text{orth}(H') \\ d) \text{orth}(\text{orth}(H)) = H + \ker(\sigma) \\ e) \ker(\sigma) = \text{orth}(E) \\ f) \dim(\text{orth}(H)) = \dim(E) - \dim(H) + \dim(H \cap \ker(\sigma)). \end{array} \right.$$

$$(8.4) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{On dira qu'un sous-espace vectoriel } H \text{ de } E \text{ est } \textit{isotrope} \text{ [resp. } \textit{co-isotrope}] \text{ si} \\ H \subset \text{orth}(H) \quad [\text{resp. } \text{orth}(H) \subset H]. \end{array} \right.$$

(8.5) — Pour qu'un sous-espace vectoriel  $H$  soit *isotrope*, il faut et il suffit que  $\sigma(X)(Y) = 0 \quad \forall X, Y \in H$ ; on voit en particulier que *les sous-espaces vectoriels de dimension 1 sont tous isotropes* (puisque  $\sigma(X)(X) = 0 \quad \forall X \in E$ ).

<sup>(1)</sup> Où  $H$  et  $H'$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , et où le signe  $+$  désigne la *somme directe* de deux espaces vectoriels :

$$[X \in H + H'] \Leftrightarrow [\exists Y \in H, \exists Z \in H', X = Y + Z].$$

— Par application de (8.3), on vérifie que

- (8.6)  $\left[ \begin{array}{l} a) H \text{ isotrope, } H' \subset H \Rightarrow [H' \text{ isotrope}] \\ b) [H \text{ co-isotrope, } H \subset H'] \Rightarrow [H' \text{ co-isotrope}] \\ c) [H \text{ isotrope}] \Rightarrow [\text{orth}(H) \text{ co-isotrope, } H + \ker(\sigma) \text{ isotrope}]. \end{array} \right.$

#### DÉFINITION, THÉORÈME

— Nous dirons qu'un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  (notation (8.0)) est *self-orthogonal* si

(8.7) 
$$H = \text{orth}(H).$$

— Tout sous-espace isotrope de  $E$  est contenu dans un sous-espace self-orthogonal.

— Etant donné un sous-espace isotrope de  $E$ , on peut chercher s'il est contenu dans un sous-espace isotrope plus grand, donc de dimension plus grande : en recommençant ( $n$  fois au plus), on trouvera un *sous-espace isotrope maximal*  $H$  contenant l'espace donné.

Soit  $V$  un élément de  $\text{orth}(H)$ ; désignons par  $\{V\}$  l'espace vectoriel engendré par  $V$ ; on sait qu'il est isotrope (8.5), donc que  $\{V\} \subset \text{orth}(\{V\})$ , et puisque  $\{V\} \subset \text{orth}(H)$ , que  $H \subset \text{orth}(\{V\})$  (8.3a).

Il en résulte que  $H + \{V\} \subset \text{orth}(H) \cap \text{orth}(\{V\})$ ; or

$$\text{orth}(H) \cap \text{orth}(\{V\}) = \text{orth}(H + \{V\}) \quad (\text{voir 8.3c});$$

donc  $H + \{V\}$  est isotrope; puisque  $H$  est isotrope maximal,  $H + \{V\} = H$ ; on a donc  $V \in H$ . Comme  $V$  est un élément quelconque de  $\text{orth}(H)$ , on a montré que  $\text{orth}(H) \subset H$ ; par hypothèse  $H \subset \text{orth}(H)$ ;  $H$  est donc self-orthogonal.

C.Q.F.D.

### BASES CANONIQUES

#### THÉORÈME

- (8.8) Soit  $H$  un sous-espace self-orthogonal de  $E$  (notations (8.0), (8.7)). Alors  $\ker(\sigma) \subset H$ ; si  $T$  est une base <sup>(1)</sup> de  $\ker(\sigma)$ , et si on complète  $T$  pour former une base  $[T \ U]$  de  $H$ , il existe une base

$$S = [T \ U \ V]$$

<sup>(1)</sup> Notation (1.4).

- (8.8) de  $E$  telle que la matrice des composantes de  $\sigma$  dans  $S$  soit

$$J = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ \hline 0 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} q \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}} \right\} p \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} -1 \\ \ddots \\ -1 \end{matrix}} \right\} p \end{array}$$

( $q = \dim(\ker(\sigma))$ ;  $q + p = \dim(H)$ ;  $q + 2p = n$ ) : on dira que  $S$  est une base *canonique*.

Puisque  $H \subset E$ , on a  $\text{orth}(E) \subset \text{orth}(H)$  (8.3a), soit  $\ker(\sigma) \subset H$  (puisque  $H = \text{orth}(H)$ ).

On peut donc compléter une base  $T$  de  $\ker(\sigma)$  pour former une base  $[T \ U]$  de  $H$ , puis compléter cette dernière pour former une base  $S' = [T \ U \ V]$  de  $E$ ; on a alors :

$$H = \text{val}(T) + \text{val}(U); \quad \text{val}(T) \cap \text{val}(U) = \{0\};$$

$$E = H + \text{val}(V'); \quad H \cap \text{val}(V') = \{0\}.$$

Comme, par hypothèse,  $\text{val}(T) = \text{orth}(E)$  et  $H = \text{orth}(H)$ , on voit que

$$\begin{aligned} H &= \text{orth}(H) = \text{orth}(\text{val}(T) + \text{val}(U)) \\ &= \text{orth}(\text{val}(T)) \cap \text{orth}(\text{val}(U)) = \text{orth}(\text{val}(U)), \end{aligned}$$

d'où

$$\diamond \quad \text{orth}(\text{val}(U)) \cap \text{val}(V') = \{0\}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \text{val}(U) \cap \text{orth}(\text{val}(V')) &= \text{val}(U) \cap H \cap \text{orth}(\text{val}(V')) \\ &= \text{val}(U) \cap [\text{orth}(H) \cap \text{orth}(\text{val}(V'))] \\ &= \text{val}(U) \cap \text{orth}(H + \text{val}(V')) \\ &= \text{val}(U) \cap \text{orth}(E) = \text{val}(U) \cap \text{val}(T), \end{aligned}$$

soit

$$\heartsuit \quad \text{val}(U) \cap \text{orth}(\text{val}(V')) = \{0\}.$$

La formule  $\diamond$  indique que la matrice  $M$ , d'éléments  ${}^j M_k = \sigma(U_j)(V'_k)$  est régulière <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Car  $[M(x) = 0] \Rightarrow [\sigma(U_j) \left( \sum_k V'_k x_k \right) = 0 \ \forall j] \Rightarrow [V'(x) \in \text{orth}(\text{val}(U))] \Rightarrow$

$[V'(x) \in \text{orth}(\text{val}(U)) \cap \text{val}(V')] \Rightarrow [V'(x) = 0] \Rightarrow [x = 0].$

De même, la formule  $\heartsuit$  montre que la matrice  $M' [{}^k M'_j = \sigma(V'_k)(U_j)]$  est aussi régulière; or, on a  ${}^k M'_j = -{}^j M_k$ , c'est-à-dire  $M' = -\overline{M}$  (6.51m). La matrice  $M$ , qui est régulière en même temps que sa transposée  $\overline{M}$ , est nécessairement carrée, les espaces  $\text{val}(V)$  et  $\text{val}(U)$  ont la même dimension  $p$ .

En inversant la matrice  $M$ , on trouve encore une matrice carrée  $M^{-1}$ ; si l'on pose  $V'' = V' \cdot M^{-1}$ ,  $V''$  est une nouvelle base de  $\text{val}(V')$  et l'on a par construction

$$\sigma(U_j)(V''_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Posons :

$$\heartsuit \quad V_k = V''_k + \frac{1}{2} \sum_j U_j \sigma(V''_j)(V''_k) \quad [k = 1, 2, \dots, p].$$

On calcule immédiatement :

$$\begin{aligned} \sigma(T_m)(T_m) &= 0; & \sigma(T_m)(U_j) &= 0; & \sigma(T_m)(V_k) &= 0; \\ \sigma(U_j)(U_j) &= 0; & \sigma(U_j)(V_k) &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \\ \sigma(V_k)(V_k) &= 0. \end{aligned}$$

Ces résultats montrent que si l'on pose

$$S = [T_1 \dots T_q \quad U_1 \dots U_p \quad V_1 \dots V_p].$$

$S$  est une base de  $E$  <sup>(1)</sup>, et que les composantes de  $\sigma$  dans la base  $S$ , à savoir les nombres  $\sigma(S_i)(S_r)$  <sup>(2)</sup>, sont les éléments de la matrice  $J$  de l'énoncé.

C.Q.F.D. ■

#### COROLLAIRE

— Le rang d'une 2-forme est un nombre pair.

(8.9) — Si  $\sigma$  est une 2-forme de rang  $2p$  sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , tous les espaces self-orthogonaux pour la forme  $\sigma$  ont la même dimension  $n - p$ .

En effet, le rang de  $\sigma$  est égal à  $\dim(E) - \dim(\ker(\sigma))$ , soit avec les notations précédentes,  $n - q (= 2p)$ . On voit que la dimension de  $H$ , soit  $q + p (= n - p)$  ne dépend pas du choix de  $H$ , mais seulement de la forme  $\sigma$ .

C.Q.F.D. ■

— On appelle *espace vectoriel symplectique* un espace vectoriel réel  $E$  sur lequel on a défini une 2-forme régulière  $\sigma$ .

(8.10) Si  $E$  est symplectique, sa dimension est *paire* (soit  $2p$ );  $E$  possède une base  $S$ , dite base *canonique*, telle que <sup>(3)</sup>

$$\diamond \quad \sigma(S(x))(S(y)) = \overline{x} \cdot J \cdot y \quad \forall x, y \in R^{2p}$$

<sup>(1)</sup> Les formules  $\heartsuit$  montrent que  $S$  est le produit de  $S'$  par une matrice triangulaire régulière.

<sup>(2)</sup> Voir la définition (4.20).

<sup>(3)</sup> Notation (6.52), appliquée à l'espace euclidien  $R^{2p}$ .

(8.10) avec

$$\heartsuit \quad J = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\} p \\ \left. \begin{array}{l} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{array} \right\} p \end{array} \right\}$$

— Les espaces self-orthogonaux de  $E$  ont la dimension  $p$ ; toute base d'un espace self-orthogonal peut être complétée par une base canonique de  $E$ .

C'est un cas particulier de (8.8); il suffit de remarquer que  $\sigma$  est régulière à condition que la dimension  $q$  de son noyau soit nulle.

C.Q.F.D. ■

Dans le cas d'un espace *symplectique*  $E$ , on vérifie immédiatement que les règles (8.3, 4, 5, 6) se complètent par :

$$(8.11) \quad \left[ \begin{array}{l} a) \text{ orth}(H) = H, \\ b) \text{ orth}(H \cap H') = \text{orth}(H) + \text{orth}(H'), \\ c) [H \text{ isotrope}] \Leftrightarrow [\text{orth}(H) \text{ co-isotrope}], \\ d) \dim(H) + \dim(\text{orth}(H)) = \dim(E). \end{array} \right.$$

#### GRUPE SYMPLECTIQUE

##### DÉFINITION

(8.12) Soit  $E$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2p$ . On appelle *groupe symplectique* <sup>(1)</sup> de  $E$  le groupe  $\text{Sp}(E)$  des éléments  $A$  de  $\text{GL}(E)$  tels que

$$\diamond \quad \sigma(A(X))(A(Y)) = \sigma(X)(Y) \quad \forall X, Y \in E.$$

##### THÉORÈME

(8.13) Soit  $S$  une base canonique d'un espace symplectique  $E$ ;  $A$  un élément de  $\text{GL}(E)$ . Alors

$$[A \in \text{Sp}(E)] \Leftrightarrow [A \cdot S = \text{base canonique}].$$

Il suffit de comparer (8.10  $\diamond$ ) et (8.12  $\diamond$ ).

<sup>(1)</sup> On définit parfois aussi d'autres « groupes symplectiques », sous-groupes de celui-ci. Nous n'aurons pas l'occasion de les rencontrer.

## THÉORÈME

(8.14) Soient  $U$  et  $U'$  deux bases de sous-espaces isotropes de même dimension d'un espace symplectique. Alors il existe un élément  $A$  du groupe symplectique tel que

$$U' = A.U$$

En effet, on peut compléter  $U'$  et  $U$  par des bases de sous-espaces self-orthogonaux (Théorème 8.7), puis par des bases canoniques  $S'$  et  $S$  (8.10); il suffit de prendre  $A = S'.S^{-1}$  (8.13).

C.Q.F.D.

## COROLLAIRE

(8.15) Si  $U$  et  $U'$  sont des vecteurs non nuls d'un espace symplectique  $E$ , il existe un élément  $A$  de  $\text{Sp}(E)$  tel que  $U' = A.U$ .

En effet,  $U'$  et  $U$  peuvent être considérés comme bases de sous-espaces de dimension 1, donc isotropes (8.5).

C.Q.F.D.

Autrement dit,  $\text{Sp}(E)$ , opérant sur  $E$ , a deux orbites :  $\{0\}$  d'une part,  $E$  privé de 0 de l'autre.

— Représentons un élément  $A$  de  $\text{Sp}(E)$  dans une base canonique  $S$  :

$$(8.16) \quad A = S.M.S^{-1}$$

(8.12◇) montre que  $\sigma(S.M.x)(S.M.y) = \sigma(S.x)(S.y) \quad \forall x, y \in R^{2p}$ , soit en utilisant (8.10◇),  $\overline{M}.x.J.M.y = \overline{x}.J.y$ ; on en tire

$$(8.17) \quad \overline{M}.J.M = J.$$

Comme (8.10♡) montre que

$$(8.18) \quad \overline{J} = J^{-1} = -J$$

(8.17) s'écrit aussi

$$(8.19) \quad M^{-1} = J.\overline{M}.J^{-1} \quad (1).$$

Les matrices  $M$  vérifiant cette condition (indépendante, notons-le, du choix de  $S$ ) s'appellent *matrices symplectiques*; elles forment évidemment un groupe isomorphe du groupe  $\text{Sp}(E)$ .

(1) Comparer avec (6.74).

## THÉORÈME

(8.20) Les matrices symplectiques forment un *groupe de Lie*, ayant pour algèbre de Lie l'ensemble des matrices  $Z$  telles que

$$\diamond \quad -Z = J.\overline{Z}.J^{-1}.$$

En appelant  $\tilde{G}$  l'ensemble des matrices symplectiques,  $\tilde{\mathcal{G}}$  l'ensemble des matrices vérifiant (8.20◇), on vérifie immédiatement que le critère (6.33a) leur est applicable :  $\tilde{G}$  est donc un sous-groupe de Lie de  $\text{GL}(R^{2p})$ .

C.Q.F.D.

(8.21) — En développant l'équation (8.20◇) de l'algèbre de Lie, on voit qu'elle s'écrit :

$$Z = \begin{bmatrix} A & C \\ B & -\overline{A} \end{bmatrix} \quad B = \overline{B}, C = \overline{C}$$

$A, B, C$  étant des matrices réelles d'ordre  $p$ ; par conséquent, la dimension du groupe  $\tilde{G}$  est  $p^2 + \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = p(2p+1)$ . Il en résulte, bien entendu, que  $\text{Sp}(E)$  est un sous-groupe de Lie de  $\text{GL}(E)$ , de dimension  $p(2p+1)$ .

## THÉORÈME

(8.22) Si  $A \in \text{Sp}(E)$ , et si  $\text{Log}(A)$  existe,  $\text{Log}(A)$  appartient à l'algèbre de Lie de  $\text{Sp}(E)$ .

Il suffit évidemment de vérifier ce résultat pour les matrices symplectiques; il est évident en prenant le logarithme de (8.19), et en appliquant les formules (6.39) et (6.40).

— Grâce à (8.18), on constate que  $R^{2p}$  possède une structure d'espace euclidien complexe positif, de dimension complexe  $p$ , que l'on obtient, en joignant à sa structure euclidienne (6.52), la structure complexe définie par

$$(8.23) \quad [a + b i] x = ax + bJ(x) \quad \forall a, b \in R; \quad \forall x \in R^{2p}.$$

Les éléments du groupe unitaire associé (6.66) sont les matrices réelles  $A$ , d'ordre  $2p$ , qui sont orthogonales et qui commutent avec  $J$  (voir (6.43)) :

$$(8.24) \quad \overline{A} = A^{-1}, \quad A.J = J.A$$

ce qui s'écrit aussi

$$(8.25) \quad \overline{A} = A^{-1}, \quad A^{-1} = J.\overline{A}.J^{-1}.$$

On voit que  $U(R^{2p})$  est composé de *matrices symplectiques*; on vérifie facilement que  $U(R^{2p})$  est un *sous-groupe de Lie* du groupe des matrices symplectiques; donc :

(8.26) [ Le groupe  $Sp(E)$  (notations (8.12)) possède un sous-groupe de Lie isomorphe à  $U(p)$ .

Effectuons la *décomposition de Cartan* (6.70) d'une matrice symplectique  $M$  :

$$(8.27) \quad M = A \cdot \exp(B) \quad \bar{A} = A^{-1}, \quad \bar{B} = B.$$

On sait que  $B = \frac{1}{2} \text{Log}(\bar{M} \cdot M)$ ; comme on le voit facilement sur (8.19),  $\bar{M}$  est aussi une matrice symplectique, donc  $\bar{M} \cdot M$ ; par conséquent  $B \in \mathcal{Z}$  (Théorème (8.22)) et  $\exp(B)$  est une matrice symplectique (8.20); donc aussi  $A = M \cdot \exp(B)^{-1}$ . Comme  $A$  est orthogonale, on voit que  $A \in U(R^{2p})$ . D'autre part, en développant  $B \in \mathcal{Z}$ ,  $B = \bar{B}$  (cf. 8.21), on trouve

$$(8.28) \quad B = \begin{bmatrix} M_1 & N \\ N & -M \end{bmatrix} \quad M = \bar{M}, \quad N = \bar{N}.$$

Réciproquement, si  $A \in U(R^{2p})$ , et si  $B$  appartient à l'espace vectoriel réel de dimension  $p(p+1)$  défini par (8.28), il est immédiat que  $A \cdot \exp(B)$  est symplectique. Comme la correspondance  $M \mapsto \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  est un difféomorphisme (6.70), on voit que

(8.29) [ Le groupe symplectique  $Sp(E)$  d'un espace symplectique  $E$  de dimension  $2p$  est difféomorphe à  $U(p) \times R^{p(p+1)}$ , donc connexe.

#### THÉORÈME

(8.30) [ Le déterminant d'une matrice symplectique est égal à  $\pm 1$ .

En effet, dans la décomposition de Cartan  $M = A \cdot \exp(B)$ , on a

$$\det(\exp(B)) = \exp(\text{Tr}(B)) \quad (6.18)$$

$$= 1 \quad (8.28)$$

$$\text{et} \quad \det(A) = |\det_{\mathbb{C}}(A)|^2 \quad (6.47)$$

$$= 1 \quad (6.66)$$

C.Q.F.D. (1)

(1) On peut aussi prendre le déterminant de (8.19), ce qui fournit  $\det(M) = \pm 1$ ; comme  $\det(M)$  est continu sur la variété connexe des matrices symplectiques, il ne peut pas prendre les deux valeurs  $+1$  et  $-1$ ; il garde donc la même valeur que pour  $M = 1$ .

Il existe aussi une démonstration purement algébrique de ce fait, fondée sur la multiplication extérieure des formes.

## § 9 VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

### VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES ET PRÉSYMPLECTIQUES

#### DÉFINITION

On appelle *variété symplectique* une variété  $U$  sur laquelle on a défini un champ différentiable de 2-formes (1)

$$x \mapsto \sigma$$

(9.1) vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma \text{ est régulière (2);} \\ \nabla \sigma \equiv 0 \text{ (3).} \end{cases}$$

(9.2) — En chaque point  $x$  d'une variété symplectique, la forme  $\sigma_x$  donne à l'espace vectoriel tangent  $D_x$  une structure d'*espace vectoriel symplectique* (8.10); la *dimension d'une variété symplectique est donc paire*.

— Rappelons que la condition  $\nabla \sigma \equiv 0$  s'écrit, en utilisant une carte

$$(9.3) \quad \partial_j \sigma_{ki} + \partial_k \sigma_{ij} + \partial_i \sigma_{jk} \equiv 0$$

(formule (4.35)).

#### Exemples

(9.4) Soit  $E$  un *espace vectoriel symplectique* (8.10). On peut évidemment définir sur  $E$  l'application *constante*  $x \mapsto \sigma$ , et la considérer comme un champ de 2-formes régulières (puisque, en tout point  $x$  de  $E$ , l'espace vectoriel tangent est égal à  $E$ ). En prenant une base de  $E$  comme carte (1.9), les composantes  $\sigma_{jk}$  de  $\sigma$  sont constantes; la formule (9.3) montre donc que  $\nabla \sigma = 0$  :  $E$  est une *variété symplectique*. ■

(1) Nous le désignerons par  $x \mapsto \sigma_x$  si on a besoin de préciser sur quelle variété on travaille.  $\sigma_x$  s'appellera la *forme de Lagrange* de  $U$ .

(2) Noter l'analogie avec les variétés riemanniennes, sur lesquelles on a défini un champ  $x \mapsto g$ , où  $g$  est aussi un tenseur régulier de degré 2; mais  $g$  est *symétrique*, et  $\sigma$  *antisymétrique*.

(3) Nous verrons plus loin que cette équation entraîne l'existence de cartes dans lesquelles les composantes de  $\sigma$  sont des *constantes* (10.8); l'analogie en géométrie riemannienne consisterait à écrire que le tenseur de Riemann-Christoffel est nul.

(9.5) — Soit  $V = {}^1V \times {}^2V \times \dots \times {}^nV$  un produit direct de variétés symplectiques ; un point  $x$  de  $V$  est, par définition, un  $n$ -uple

$$x \equiv \begin{pmatrix} {}^1x \\ {}^2x \\ \dots \\ {}^nx \end{pmatrix}$$

tel que  ${}^jx \in {}^jV$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ ; on sait que  $V$  est une variété dont la dimension est la somme de celles des  ${}^jV$  (1.12), que l'espace vectoriel tangent à  $V$  en  $x$  est le produit direct des espaces vectoriels tangents aux  ${}^jV$  en les  ${}^jx$ , et que l'on a pour toute dérivation  $d$  :

$$dx \equiv \begin{pmatrix} d {}^1x \\ d {}^2x \\ \dots \\ d {}^nx \end{pmatrix}$$

(2.19).

Nous poserons, pour toutes dérivations  $d$  et  $\delta$

$$(9.6) \quad \sigma_V(dx) (\delta x) \equiv \sigma_{[{}^1V]}(d[{}^1x]) (\delta[{}^1x]) + \dots + \sigma_{[{}^nV]}(d[{}^nx]) (\delta[{}^nx]).$$

Il est immédiat de vérifier que cette forme  $\sigma_V$  est régulière, et que sa dérivée extérieure est nulle (il suffit d'appliquer la définition (4.32)); ainsi :

(9.7) Avec la convention (9.6), tout produit direct de variétés symplectiques est une variété symplectique. ■

#### DÉFINITION, THÉORÈME

On appellera *variété pré-symplectique* une variété  $V$  sur laquelle on a défini un champ différentiable de 2-formes <sup>(1)</sup>

$$y \mapsto \sigma$$

(9.8) tel que

$$\begin{cases} \ker(\sigma) \text{ a une dimension constante } > 0 \text{ }^{(2)} \\ \nabla\sigma \equiv 0. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Comme en (9.1),  $\sigma$  s'appellera *forme de Lagrange*, et sera notée  $\sigma_V$  s'il en est besoin.

<sup>(2)</sup> Si cette dimension était nulle,  $V$  serait symplectique.

(9.8) Alors le champ  $y \mapsto \ker(\sigma)$  est le *feuilletage caractéristique* de la forme  $\sigma$ ; ses feuilles seront simplement appelées *feuilles de  $V$* ; on dira que  $V$  est *sécable* si ce feuilletage est sécable <sup>(1)</sup>.

Il suffit d'appliquer la définition (5.25) d'un feuilletage caractéristique : c'est le champ  $x \mapsto \ker(\sigma) \cap \ker(\nabla\sigma)$ , qui s'écrit ici  $x \mapsto \ker(\sigma)$ , puisque  $\nabla\sigma \equiv 0$ .  
C.Q.F.D.

(9.9) — Considérons une variété pré-symplectique  $V$ ; désignons par  $x$  la feuille qui passe par un point  $y$  de  $V$  (Fig. 9.I); si  $V$  est sécable (5.15), on sait que l'ensemble  $U$  des feuilles possède une structure de variété ( $U$  s'appelle *variété quotient* de  $V$  par le feuilletage), que l'application  $[y \mapsto x]$  (appelée *projection* de  $V$  sur  $U$ ) est différentiable, que  $\ker\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \ker(\sigma)$ , et que  $\text{val}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$  est l'espace vectoriel tangent à  $U$  en  $x$ . Il en résulte immédiatement que la dimension de  $U$  est celle de  $V$  diminuée de la dimension de  $\ker(\sigma)$ , c'est-à-dire le *rang* de  $\sigma$  (qu'on appelle aussi *rang* de  $V$ ).

— Comme il s'agit du feuilletage de  $\sigma$ , on sait d'autre part que  $\sigma$  est un *invariant intégral* du feuilletage, donc que  $\sigma_U$  est l'image réciproque, par la projection, d'une 2-forme  $\sigma_U$  de  $U$ ; ce qui s'écrit,  $d$  et  $\delta$  désignant des dérivations :

$$\sigma_V(dy) (\delta y) \equiv \sigma_U(dx) (\delta x).$$

— Cherchons le noyau de  $\sigma_U$ ; on trouve immédiatement

$$\begin{aligned} [dx \in \ker(\sigma_U)] &\Leftrightarrow [\sigma_V(dy) (\delta y) = 0 \quad \forall \delta y] \Leftrightarrow [dy \in \ker(\sigma_V)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[ dy \in \ker\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \right] \Leftrightarrow [dx = 0]; \end{aligned}$$

ainsi,  $\sigma_U$  est *régulière*.

— On sait d'autre part que l'image réciproque de  $\nabla\sigma_U$  par la projection est égale à  $\nabla\sigma_V$  (Théorème (4.36)), donc *nulle*; il en résulte immédiatement que  $\nabla\sigma_U = 0$ .

D'où le théorème :

Soit  $V$  une variété pré-symplectique sécable; désignons par  $U$  l'ensemble des feuilles de  $V$  (Fig. 9.I).

Alors  $U$  est une *variété symplectique*; l'application  $y \mapsto x$  qui fait correspondre à un point  $y$  de  $V$  sa feuille  $x$  est une application différentiable de  $V$  sur  $U$ , telle que

$$(9.10) \quad \diamond \quad \ker\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \ker(\sigma_V), \quad \text{val}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = D_x;$$

<sup>(1)</sup> Rappelons que cette condition est toujours vérifiée *localement* (5.17).

l'image réciproque de la forme de Lagrange de  $U$  par cette application est la forme de Lagrange de  $V$  :

$$\heartsuit \quad \sigma_V(dy) (\delta y) = \sigma_U(dx) (\delta x) \quad \forall dy, \delta y.$$

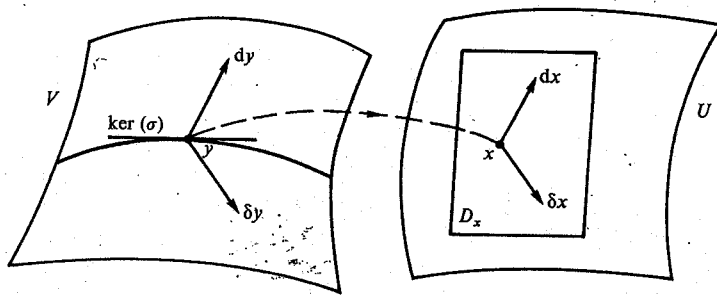


Fig. 9.1.

### STRUCTURES SYMPLECTIQUES DÉFINIES PAR UNE 1-FORME

- (9.11) Soit  $y \mapsto \omega$  un champ différentiable de 1-formes défini sur une variété  $V$ ; posons  $\sigma \equiv \nabla \omega$ . On sait que  $\nabla \sigma \equiv 0$  (Théorème de Poincaré (4.37)); si  $\ker(\sigma)$  a une dimension constante,  $V$  sera symplectique ou présymplectique; si  $V$  est présymplectique sécable, la variété des feuilles sera symplectique.

#### Exemples

- (9.12) — Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $p$ ; posons  $V = E^* \times E$ ; un point variable de  $V$  sera noté

$$y \equiv \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad P \in E^*, \quad Q \in E.$$

Si l'on pose

$$\omega(dy) \equiv P(dQ)$$

la forme  $\sigma$  est donnée par

$$\sigma(dy) (\delta y) = [dP] (\delta Q) - [\delta P] (dQ).$$

On vérifie immédiatement qu'elle est régulière, donc que  $V$  est une variété symplectique de dimension  $2p$ ; on dit parfois que  $V$  est l'espace de phases de  $E$ . Notons que  $V$  est un espace vectoriel symplectique (9.4). ■

- (9.13) Si  $\omega$  est la forme de Cartan d'un problème variationnel (7.27), la forme  $\sigma \equiv \nabla \omega$  n'est jamais régulière; si son noyau a une dimension constante, on sait que les feuilles sont les solutions du problème variationnel (7.30); si le feuilletage est sécable, l'ensemble  $U$  des solutions a donc une structure de variété symplectique. ■

- (9.14) — Réciproquement, si  $V$  est une variété pré-symplectique ou symplectique, il peut arriver qu'il existe une 1-forme  $\omega$  telle que  $\sigma = \nabla \omega$  (1); nous dirons dans ce cas que  $V$  est potentielle, et que  $\omega$  est un potentiel de  $\sigma$ . On rencontre effectivement des variétés qui sont potentielles (9.12), et d'autres qui ne le sont pas (18.36).

### CROCHETS DE POISSON

#### DÉFINITION

- (9.15) Soit  $V$  une variété symplectique. Si un champ scalaire  $x \mapsto u$  de  $V$  est différentiable, nous dirons que la variable réelle  $u$  est une variable dynamique (2).

En tout point  $x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , noté aussi  $\nabla u$  (3) est une 1-forme, c'est-à-dire un élément du dual de l'espace vectoriel tangent  $D_x$ .

La forme de Lagrange  $\sigma$  de  $V$  peut être considérée comme une application linéaire de  $D_x$  dans son dual  $D_x^*$ ; comme elle est régulière, et comme  $D_x$  et  $D_x^*$  ont la même dimension,  $\sigma$  applique  $D_x$  sur  $D_x^*$ ; il existe donc un vecteur, que nous appellerons gradient symplectique de  $u$ , et que nous noterons  $\text{grad } u$  (4), tel que

$$(9.16) \quad \boxed{-\nabla u \equiv \sigma(\text{grad } u)}$$

Cette formule peut s'écrire aussi

$$(9.17) \quad \boxed{\text{grad } u \equiv -\sigma^{-1}(\nabla u)}$$

(1) La réciproque du théorème de Poincaré montre que c'est toujours le cas si  $V$  est un morceau (4.37).

(2) On généralise ainsi un terme usuel en mécanique analytique.

(3) Voir (4.33).

(4) Par analogie avec le cas euclidien ou riemannien; le signe  $-$  est là pour des raisons pratiques.



ou

$$(9.18) \quad \delta u \equiv \sigma(\delta x) (\text{grad } u) \quad \text{pour tout champ de vecteur } x \mapsto \delta x.$$

(9.19) — Il est facile de vérifier <sup>(1)</sup> que le champ de vecteurs  $x \mapsto \text{grad } u$  est différentiable (sur l'ouvert de définition de  $x \mapsto u$ ).

— Nous définirons la *dérivation  $\delta_u$  associée à la variable  $u$*  en posant

$$(9.20) \quad \delta_u x \equiv \text{grad } u$$

## THÉORÈME

(9.21) [ Pour toute variable dynamique  $u$ , la dérivée de Lie  $[\delta_u]_L \sigma$  est nulle.

— Il suffit d'appliquer la formule de Cartan et le théorème de Poincaré (4.39), (4.37) :

$$[\delta_u]_L \sigma \equiv [\nabla \sigma] (\delta_u x) + \nabla [\sigma(\delta_u x)] \equiv 0 + \nabla [-\nabla u] \equiv 0.$$

C.Q.F.D.

## DÉFINITION

$u$  et  $v$  étant deux variables dynamiques, on appellera *crochet de Poisson* de  $u$  et  $v$  la variable dynamique

$$[u, v]_P \equiv \sigma(\text{grad } u) (\text{grad } v)$$

Les règles connues du lecteur lui permettront d'établir le formulaire suivant (où  $u, v, w$  sont des variables dynamiques quelconques) :

$$(9.23) \quad \begin{aligned} a) & [u, v]_P \equiv -[\nabla u] (\text{grad } v) \equiv [\nabla v] (\text{grad } u) \equiv \delta_u v \equiv -\delta_v u \\ b) & [u, v]_P + [v, u]_P \equiv 0 \\ c) & [u, v + w]_P \equiv [u, v]_P + [u, w]_P \\ d) & [u, vw]_P \equiv [u, v]_P \times w + v \times [u, w]_P \\ e) & [u, f(v)]_P \equiv f'(v) [u, v]_P \quad (f = \text{fonction différentiable}) \\ f) & v = \text{Cte} \Rightarrow [u, v]_P \equiv 0. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> En prenant une carte de  $V$ , et en cherchant les composantes de  $\text{grad } u$  dans cette carte (voir (2.41)).

— En appliquant la dérivée de Lie  $[\delta_u]_L$  à l'identité  $\nabla v \equiv -\sigma(\delta_v x)$ , compte tenu de (4.40), (4.18), (9.23a), (4.24), (9.21) et (4.17), on trouve

$$(9.24) \quad \text{grad } [u, v]_P \equiv [\delta_u, \delta_v]_L x$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$(9.25) \quad \delta_{[u, v]_P} = [\delta_u, \delta_v]_L;$$

nous avons mis des indices  $P$  et  $L$  pour bien distinguer les crochets de Poisson et les crochets de Lie.

— Appliquons cette dérivée (9.25) à une troisième variable dynamique  $w$ ; on trouve immédiatement (cf. (2.45))

$$\delta_{[u, v]_P} w = \delta_u [\delta_v w] - \delta_v [\delta_u w]$$

ce qui s'écrit, grâce à (9.19)

$$[[u, v], w] = [u, [v, w]] - [v, [u, w]]$$

ou, grâce à l'antisymétrie (9.23b)

$$(9.26) \quad [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] \equiv 0$$

nous avons sous-entendu l'indice  $P$  dans ces deux dernières formules.

(9.27) — Cette identité (9.26), découverte par Jacobi, et les formules (9.23) montrent que l'ensemble  $\mathcal{G}$  des variables dynamiques définies sur un ouvert de  $V$  vérifie les axiomes des *algèbres de Lie* (6.14), à l'exception toutefois de l'un d'entre eux : la dimension de  $\mathcal{G}$  est infinie.

## STRUCTURES SYMPLECTIQUES INDUITES

(9.28) Soit  $V$  une variété symplectique ou présymplectique; soit  $V'$  une variété plongée dans  $V$  (Fig. 9. II).

Désignons par  $y$  un point variable de  $V'$ , et par  $H$  l'espace vectoriel tangent à  $V'$  en  $y$ .

On peut définir sur  $V'$  la forme  $\sigma_{V'}$  induite de la forme de Lagrange  $\sigma_V$  de  $V$  par

$$(9.29) \quad \sigma_{V'}(dy) (\delta y) = \sigma_V(dy) (\delta y) \quad \text{si} \quad dy, \delta y \in H$$

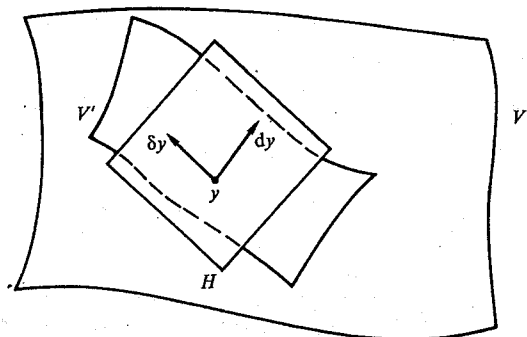


Fig. 9. II.

on vérifie immédiatement que  $\nabla \sigma_{V'} \equiv 0$  <sup>(1)</sup>;  $V'$  sera donc présymplectique ou symplectique si  $\ker(\sigma_{V'})$  a une dimension constante; remarquons d'ailleurs que l'on a

$$(9.30) \quad \ker(\sigma_{V'}) \equiv H \cap \text{orth}(H).$$

(9.31) — En particulier, si  $V$  est (pré)symplectique et si  $V'$  est un ouvert de  $V$  (cf. 1.39),  $V'$  sera une variété (pré)symplectique de même dimension. ■

(9.32) — Si  $V$  est présymplectique, et si  $V'$  est transversale au feuilletage de  $V$  (5.14),  $V'$  sera symplectique. ■

DÉFINITION

(9.33) — On dira que  $V'$  est isotrope (resp. co-isotrope) si  $H$  est isotrope (resp. co-isotrope) en tout point  $y$  de  $H$ .

(9.34) — Pour que  $V'$  soit isotrope, il faut et il suffit que  $\sigma_{V'} \equiv 0$ .

(9.35) — Si  $V'$  est co-isotrope, on a  $\ker(\sigma_{V'}) \equiv H \cap \text{orth}(H) \equiv \text{orth}(H)$  (puisque par hypothèses  $\text{orth}(H) \subset H$ ). Comme  $\ker(\sigma_V) \subset \text{orth}(H)$ , la formule (8.3f) montre que

$$\dim(\ker(\sigma_{V'})) = \dim(V) - \dim(V') + \dim(\ker(\sigma_V))$$

cette dimension est donc constante,  $V'$  est présymplectique ou, éventuellement, symplectique.

Puisque  $\ker(\sigma_{V'})$  est contenu dans  $H$ , sa dimension est au plus celle de  $V'$ ; d'où l'inégalité

$$(9.36) \quad \diamond \quad \dim(V') \geq \frac{1}{2} [\dim(V) + \dim(\ker(\sigma_V))]$$

valable si  $V'$  est co-isotrope; notons que le second membre est égal à  $\dim(V) - \frac{1}{2} \text{rang}(\sigma_V)$ , donc entier (Théorème (8.9)).

<sup>(1)</sup> On peut le démontrer sans calcul en remarquant que  $\sigma_{V'}$  est l'image réciproque de  $\sigma_V$  par l'application  $1_{V'}$  (considérée comme application différentiable de  $V'$  dans  $V$ ); il suffit d'appliquer le théorème (4.36).

THÉORÈME, DÉFINITION

Soit  $V$  une variété symplectique de dimension  $2p$ ; soit

$$x \mapsto u \equiv \begin{bmatrix} 1^u \\ \vdots \\ q^u \end{bmatrix}$$

une application différentiable de  $V$  à  $R^q$ ; supposons qu'une équation

$$(9.37) \quad u = \text{Cte}$$

définisse une variété plongée  $V'$  de dimension  $2p - q$  (Théorème (1.40)). Pour que  $V'$  soit co-isotrope, il faut et il suffit que les  ${}^j u$  aient (sur  $V'$ ) des crochets de Poisson mutuels nuls :

$$[{}^j u, {}^k u]_P \equiv 0 \quad \forall j, k;$$

on dit dans ce cas que les variables dynamiques  ${}^j u$  sont en involution (sur  $V'$ ).

— En un point  $x$  de  $V$ , l'espace vectoriel tangent à  $V'$  est  $H = \ker \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  (Théorème 1.40); un vecteur  $\delta x$  appartiendra à  $\text{orth}(H)$  si  $[dx \in H] \Rightarrow [\sigma(\delta x)(dx) = 0]$ , c'est-à-dire si  $\ker \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \subset \ker(\sigma(\delta x))$ ; un théorème bien connu d'algèbre linéaire montre l'équivalence de cette relation avec l'existence d'un « multiplicateur de Lagrange »  $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_q]$  tel que  $\sigma(\delta x) = \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ , ce qui s'écrit grâce à la notation (9.16),  $x = - \{ \lambda_1 \text{grad} [{}^1 u] + \dots + \lambda_q \text{grad} [{}^q u] \}$ ; ceci exprime que les  $q$  vecteurs  $\text{grad} {}^j u$  engendrent l'espace vectoriel  $\text{orth}(H)$ , dont la dimension est  $2p - (2p - q) = q$  (Théorème 8.11d); donc qu'ils constituent une base de  $\text{orth}(H)$ . On aura donc  $\text{orth}(H) \subset H$  si les  $\text{grad} {}^j u$  appartiennent à  $H = \ker \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ , c'est-à-dire si  $\frac{\partial {}^k u}{\partial x} (\text{grad} {}^j u) = 0$ , ce qui s'écrit aussi  $[{}^j u, {}^k u]_P = 0$  (9.23a)

C.Q.F.D

(9.38) — Dans ce cas, l'inégalité (9.36) montre que  $q \leq p$ ; si  $q = p$ , la formule (9.35◇) montre que  $V'$  est à la fois isotrope et co-isotrope, c'est-à-dire self-orthogonale (Définition (8.7)).

Exemple

(9.39) Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $p$ ; soit  $Q \mapsto \alpha$  un champ scalaire différentiable de  $E$ ; posons  $P \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial Q}$ ,  $y \equiv \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ; il est clair que  $Q \mapsto y$  est un plongement de  $E$  à  $V = E^* \times E$ ;  $y$  parcourt donc une

variété  $V'$  de dimension  $p$ , plongée dans  $V$  (1.38); or  $V$  possède une structure de variété symplectique de dimension  $2p$ , pour laquelle

$$\sigma_V(dy)(\delta y) \equiv dP(\delta Q) - \delta P(dQ). \quad (9.12)$$

On en déduit immédiatement  $\sigma_V(dy)(\delta y) \equiv \nabla[\nabla\alpha](dQ)(\delta Q) \equiv 0$ , ce qui montre que  $V'$  est *isotrope*, c'est-à-dire que  $H \subset \text{orth}(H)$ ; en raison de (8.11d), on voit que  $H$  et  $\text{orth}(H)$  ont la même dimension  $p$ , donc que  $H = \text{orth}(H)$ , c'est-à-dire que  $V'$  est self-orthogonale :

On sait donc associer une variété self-orthogonale de  $E^* \times E$  à chaque fonction différentiable  $\alpha$  de  $E$ . ■

Application : une équation à la dérivée partielle du premier ordre du type

$$(9.40) \quad \varphi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial Q}, Q\right) = 0 \quad (1)$$

sera résolue si nous savons trouver les variétés self-orthogonales plongées dans la variété  $V''$  d'équation

$$\varphi(P, Q) = 0$$

qui est *co-isotrope* (9.37); on les appelle *caractéristiques* de l'équation. ■

(1) C'est le cas de l'équation de Jacobi d'un problème variationnel (7.18); notons que les équations des extrémales écrites en (7.19) sont simplement les équations des feuilles de la variété présymplectique  $V''$  (appelée parfois *variété de Jacobi*, ou encore *figuratrice* du problème).

## § 10 TRANSFORMATIONS CANONIQUES

### CARTES CANONIQUES

#### DÉFINITION

Soit  $F[\xi \mapsto x]$  une carte d'une variété symplectique  $V$ . On dit que  $F$  est une *carte canonique* si, pour tout  $\xi$ , la base (1)

$$S = \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

est *canonique* (8.10).

(10.2) — Il revient au même (2) de dire que les composantes  $\sigma_{jk}$  du tenseur  $\sigma$  dans la carte  $F$  sont constantes, et égales aux éléments  $J_{jk}$  de la matrice (8.10♡) :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 & \dots & 1 \\ \hline -1 & \dots & -1 & & \\ \hline & & & 0 & \end{bmatrix}$$

#### Exemple

(10.3) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $T$  une base de  $E$ . Représentons un élément  $Q$  de  $E$  et un élément  $P$  de  $E^*$  sous la forme

$$Q \equiv T \cdot \begin{bmatrix} 1q \\ \dots \\ nq \end{bmatrix} \quad P \equiv [p_1 \dots p_n] \cdot T^{-1}.$$

(1) Voir (2.24).

(2) Voir (4.20).

Il est facile de vérifier que l'application

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \\ 1 \\ q \\ \dots \\ n \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

est une carte canonique de la variété symplectique  $E^* \times E$  (voir (9.12)). ■

— Par analogie avec ce cas, il est habituel de poser, pour toute carte canonique  $\xi \mapsto x$  d'une variété symplectique  $V$  :

$$(10.4) \quad \xi \equiv \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \\ 1 \\ q \\ \dots \\ n \\ q \end{pmatrix}$$

les variables  $p_j, q_j$  s'appellent alors des *coordonnées canoniques* de  $V$ . On vérifie facilement dans ce cas les formules

$$(10.5) \quad \sigma(dx)(\delta x) \equiv \sum_{j=1}^n d[p_j] \delta[q_j] - \delta[p_j] d[q_j]$$

$$(10.6) \quad \delta_u[q_j] \equiv \frac{\partial u}{\partial [p_j]} \quad \delta_u[p_j] \equiv - \frac{\partial u}{\partial [q_j]}$$

$\delta_u$  étant la dérivation associée à une variable dynamique  $u$  (9.20), et

$$(10.7) \quad [u, v]_P = \sum_j \frac{\partial u}{\partial [p_j]} \frac{\partial v}{\partial [q_j]} - \frac{\partial u}{\partial [q_j]} \frac{\partial v}{\partial [p_j]}$$

**THÉORÈME DE DARBOUX**

(10.8) [ Soit  $V$  une variété symplectique.  
Les cartes canoniques de  $V$  forment un atlas de  $V$ .

Soit  $x_0$  un point de  $V$ .

Le théorème de Poincaré nous montre qu'il existe un champ de 1-formes  $x \mapsto \omega$ , différentiable dans un ouvert contenant  $x_0$  (par exemple un *morceau* (1.47)), tel

que  $\sigma \equiv \nabla \omega$ ; choisissons une carte  $\Phi[\xi \mapsto x]$  de  $V$ , telle que  $\Phi(0) = x_0$ ; on a alors (4.35)

$$\diamond \quad \sigma_{jk} \equiv \partial_j \omega_k - \partial_k \omega_j.$$

Bien entendu, on peut remplacer  $\omega$  par  $\omega + \nabla u$  (c'est-à-dire  $\omega_j$  par  $\omega_j + \partial_j u$ ) sans changer cette formule, pour toute variable dynamique  $u$ . En prenant pour  $u$  un polynôme du second degré par rapport aux coordonnées  ${}^j \xi$ , on vérifie que l'on peut obtenir, à l'origine, la condition supplémentaire

$$\heartsuit \quad \omega_j = 0 \quad \partial_j \omega_k + \partial_k \omega_j = 0.$$

Posons  $\delta x \equiv 2 \sigma^{-1}(\omega)$ ;  $x \mapsto \delta x$  est un champ différentiable de vecteurs (voir les raisonnements conduisant à la définition (9.16) du gradient symplectique), et l'on a évidemment

$$\spadesuit \quad \nabla[\sigma(\delta x)] \equiv 2 \sigma.$$

En développant les relations  $\heartsuit$ , on constate qu'elles s'écrivent <sup>(1)</sup>

$$\begin{cases} \delta \xi = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [\delta \xi] = 1_{R^{2p}} \end{cases} \quad \text{pour} \quad \xi = 0.$$

On reconnaît les conditions d'application du théorème (2.44); il existe donc un difféomorphisme  $\xi \mapsto \xi^*$  de  $R^{2p}$  à  $R^{2p}$ , conservant 0, tel que  $\delta \xi^* \equiv \xi^*$  <sup>(2)</sup>. Choisissons une *base canonique*  $S_0$  de l'espace vectoriel tangent à  $V$  en  $x_0$  (8.10); soit  $M_0$  la matrice régulière telle que la base  $\frac{\partial x}{\partial \xi^*}$  (2.24) soit égale à  $S_0 \cdot M_0$  pour  $\xi = 0$ ; posons

$$\tilde{\xi} \equiv M_0^{-1} \cdot \xi^*.$$

On vérifie immédiatement que l'application  $\tilde{\Phi}[\tilde{\xi} \mapsto x]$  est une carte, que  $\tilde{\Phi}(0) = x_0$ , que  $D(\tilde{\Phi})(0) = S_0$ , et que l'on a  $\delta \tilde{\xi} \equiv \tilde{\xi}$ .

En développant  $\spadesuit$  dans la carte  $\tilde{\Phi}$ , on trouve

$${}^j \tilde{\xi} [\partial_k \sigma_{ji} + \partial_i \sigma_{kj}] \equiv 0$$

ce qui, compte tenu de l'identité (9.3), s'écrit

$${}^j \tilde{\xi} \partial_j [\sigma_{ki}] = 0.$$

Cette formule, valable dans une boule de centre 0, indique que les composantes  $\sigma_{ki}$  sont *constantes* sur les demi-droites  ${}^j \tilde{\xi} = {}^j A e^t$ , solutions de l'équation différentielle  $\frac{d \tilde{\xi}}{dt} \equiv \tilde{\xi}$ ; en faisant tendre  $t$  vers  $-\infty$ , on voit que, dans la boule en question, les  $\sigma_{ki}$  ont la même valeur qu'à l'origine, et sont donc égales aux éléments de la

<sup>(1)</sup> Nous notons  $2p$  la dimension de  $V$ .

<sup>(2)</sup> On peut démontrer que le problème admet la solution

$$\xi^* \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t [\exp(-t f)(\xi)] \quad (f(\xi) \equiv \delta \xi).$$

matrice  $J$  (10.2), puisque  $\frac{dx}{d\xi}$  est la base canonique  $S_0$  pour  $\xi=0$ . Ainsi nous avons construit une carte canonique dont l'ensemble de valeur contient un point arbitraire  $x_0$  de  $V$ ; les cartes canoniques forment donc un atlas (Définition (1.6)). C.Q.F.D.

(10.9) — Soit  $V$  une variété *présymplectique* (9.8); si  $y_0$  est un point de  $V$ , on sait construire une carte  $F \left[ \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \mapsto y \right]$  de  $V$ , telle que  $y_0 \in \text{val}(F)$ , et que  $dz = 0 \Leftrightarrow \sigma(dy) = 0$  (Théorème (5.8), appliqué au feuilletage caractéristique de  $\sigma$ ).

On sait que  $\text{val}(F)$  est une variété feuilletée sécable (5.17), que  $z \mapsto x$  est une carte de la variété quotient  $U$  ( $x \equiv$  feuille qui passe par  $y$ ), et que  $U$  est symplectique (Théorème 9.10). Le théorème précédent montre qu'il existe un atlas de cartes canoniques  $z_j \mapsto x$  de  $U$ ; il y en a une qui contient la feuille de  $y_0$  dans son ensemble de valeurs; notons-la  $\zeta \mapsto x$ . Alors l'application  $\Phi \left[ \begin{pmatrix} t \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto y \right]$  est une carte de  $V$ , telle que  $y_0 \in \text{val}(\Phi)$ , telle que

$D(\Phi) \begin{pmatrix} t \\ \zeta \end{pmatrix}$  soit une *base canonique*, au sens (8.8), en tout point; les composantes de  $\sigma$  dans la carte  $\Phi$  sont les éléments de la matrice  $J$  définie en (8.8); on dira encore que  $\Phi$  est une *carte canonique*; comme le point  $y_0$  est arbitraire, on voit que les variétés *présymplectiques*, elles aussi, possèdent un atlas de cartes canoniques.

## TRANSFORMATIONS CANONIQUES

### DÉFINITION

Soient  $V$  et  $V'$  deux variétés symplectiques (ou présymplectiques).

On appelle *transformation canonique* <sup>(1)</sup> de  $V$  à  $V'$  tout *difféomorphisme*  $A$  tel que

$$\begin{cases} \text{def}(A) \subset V; & \text{val}(A) \subset V'; \\ \text{l'image réciproque par } A \text{ de la forme de Lagrange de } V' \text{ est celle de } V^{(2)}. \end{cases}$$

— S'il existe une transformation canonique  $A$  telle que  $\text{def}(A) = V$ ,  $\text{val}(A) = V'$ , nous dirons que  $V$  et  $V'$  sont *symplectomorphes*; que  $A$  est un *symplectomorphisme* de  $V$  à  $V'$ .

<sup>(1)</sup> Synonyme : *symplectomorphisme local*.

<sup>(2)</sup> Abus de langage : il s'agit en fait de la forme de Lagrange induite de celle de  $V$  sur l'ouvert  $\text{val}(A)$ , au sens (9.28).

### Exemples

Soit  $E$  un *espace vectoriel symplectique*;  $A$  un difféomorphisme de  $E$  à  $E$ . Pour que  $A$  soit canonique, la formule (4.5) donne la condition

$$\sigma(D(A)(x)(dx)) \cdot (D(A)(x)(\delta x)) \equiv \sigma(dx)(\delta x)$$

qui s'écrit aussi, avec la notation (8.11)

$$(10.11) \quad D(A)(x) \in \text{Sp}(E) \quad \forall x \in \text{def}(A).$$

C'est le cas en particulier, si l'on pose

$$(10.12) \quad A(x) \equiv B(x) + C \quad [B \in \text{Sp}(E), C \in E]$$

$A$  est alors un *symplectomorphisme* de  $E$  à  $E$  <sup>(1)</sup>. ■

— Pour tout entier  $p$ ,  $R^{2p}$  peut être considéré comme un espace vectoriel symplectique, si l'on pose

$$(10.13) \quad \sigma(d\xi)(\delta\xi) \equiv \sum_{j,k} \sigma_{jk} d[\xi^j] \delta[\xi^k] \quad [\xi \in R^{2p}]$$

les  $\sigma_{jk}$  étant les éléments de la matrice  $J$  (8.10). ■

Si  $V$  est une variété symplectique de dimension  $2p$ , on constate alors que les *cartes canoniques* de  $V$  sont les *transformations canoniques* de  $R^{2p}$  à  $V$ . ■

— En se reportant à (4.10) et (4.11), on constate immédiatement que

(10.14) L'inverse d'une transformation canonique, le produit de deux transformations canoniques, sont encore des transformations canoniques.

(10.15) — Soit  $V$  une variété symplectique (resp. présymplectique). Il en résulte de (10.14) que les symplectomorphismes de  $V$  à  $V$  forment un *groupe*, que nous appellerons  $\text{Can}(V)$ .

### THÉORÈME

(10.16) Soient  $V$  et  $V'$  deux variétés symplectiques (ou présymplectiques) de même dimension  $n$  et de même rang (9.9); soit  $x_0, x'_0$  des points de  $V$  et  $V'$  respectivement. Il existe alors une transformation canonique  $A$ , de  $V$  à  $V'$ , telle que  $A(x_0) = x'_0$ .

<sup>(1)</sup> Nous allons voir qu'il y en a beaucoup d'autres (10.23, 10.34); c'est une différence importante avec le cas d'un espace euclidien  $E$ : les difféomorphismes de  $E$  sur  $E$  qui respectent le tenseur symétrique  $g$  sont seulement les « déplacements »  $x \mapsto B(x) + C$  ( $B \in \text{O}(E)$ ,  $C \in E$ ).

On sait qu'il existe une carte canonique  $\Phi$  de  $V$ , telle que  $x_0 \in \text{val}(\Phi)$  (10.8, 10.9); on a donc  $x_0 = \Phi(\xi_0)$ ,  $\xi_0 \in R^n$ .

On aura de même  $x'_0 \equiv \Phi'(\xi'_0)$  [ $\Phi'$  = carte canonique de  $V'$ ,  $\xi'_0 \in R^n$ ].

On sait que  $\Phi$  et  $\Phi'$  sont des transformations canoniques (10.13), ainsi que la translation  $T[\xi \mapsto \xi + \xi'_0 - \xi_0]$  (10.12). Il en est donc de même de  $A = \Phi' \cdot T \cdot \Phi^{-1}$  (12.14) et l'on a bien  $A(x_0) = x'_0$ .

C.Q.F.D.

(10.17) — Si  $V$  est une variété présymplectique, et  $A$  une transformation canonique de  $V$  à  $V$ , on vérifie immédiatement que  $A$  respecte le feuilletage de  $V$  (Définition (5.13)).

Supposons que  $A \in \text{Can}(V)$ , et que le feuilletage de  $V$  soit sécable.

Le théorème (5.19) montre donc qu'il existe un difféomorphisme  $\hat{A}$  du quotient  $U$  de  $V$  par son feuilletage, tel que

$$\hat{A}(P(x)) \equiv P(A(x))$$

$P(x)$  désignant la feuille qui passe par un point quelconque  $x$  de  $V$ .

On sait que  $U$  est une variété symplectique (9.10); il est facile de vérifier que

$$\hat{A} \in \text{Can}(U).$$

### SIMILITUDES CANONIQUES

#### DÉFINITION

(10.18) Soient  $V$  et  $V'$  deux variétés symplectiques (ou présymplectiques); soit  $A$  un difféomorphisme de  $V$  à  $V'$ .

Nous dirons que  $A$  est une *similitude canonique* si l'image réciproque par  $A$  de la forme de Lagrange de  $V'$  par  $A$  est le produit de celle de  $V$  par une constante  $a$ . Si  $a = -1$ ,  $A$  est dit *anti-canonique*.

En désignant par  $\varphi$  et  $\varphi'$  les champs définissant les formes de Lagrange de  $V$  et  $V'$ , cette condition s'écrit (voir (4.5)) :

$$(10.19) \quad \varphi'(A(x)) (D(A)(x)(dx)) (D(A)(x)(\delta x)) \equiv a \varphi(x) (dx) (\delta x). \quad (1)$$

(1) On peut se demander si cette condition pourrait être réalisée,  $a$  étant variable; c'est évidemment le cas, *quel que soit*  $A$ , si  $V$  et  $V'$  ont la dimension 2, puisque les 2-formes sont toutes proportionnelles.

Supposons maintenant  $V$  et  $V'$  symplectiques, de dimension  $> 2$ .

En tenant compte des conditions  $\nabla \sigma_V = 0$ ,  $\nabla \sigma_{V'} = 0$ , on peut montrer que  $\frac{\partial a}{\partial x} \equiv 0$ ;  $a$  est donc constante sur chaque composante connexe de l'ouvert  $\text{def}(A)$ ; localement,  $A$  coïncide donc avec une similitude canonique.

On peut rapprocher ces résultats de l'étude des transformations conformes des espaces euclidiens, pour lesquelles la dimension 2 joue aussi un rôle exceptionnel.

(10.20) — Il est bien clair que les produits et inverses de similitudes canoniques sont encore des similitudes canoniques; que le produit de deux transformations anti-canoniques est une transformation canonique.

(10.21) — Comme les transformations canoniques, les similitudes canoniques d'une variété présymplectique  $V$  respectent le feuilletage de  $V$ ; si  $V$  est sécable, les similitudes canoniques « globales » de  $V$  passent au quotient  $U$  de  $V$  par son feuilletage, et fournissent des similitudes canoniques globales de  $U$  (voir (10.17)).

#### THÉORÈME

(10.22) Soit  $V$  une variété symplectique,  $A$  un difféomorphisme de  $V$  à  $V$ . Pour que  $A$  soit *anti-canonique*, il faut et il suffit que le graphe de  $A$  soit une variété *self-orthogonale* de  $V \times V$ .

Le graphe, qui est l'ensemble de valeurs du plongement  $x \mapsto \begin{pmatrix} A(x) \\ x \end{pmatrix}$ , est donc une variété plongée dans la variété  $V \times V$ , qui est aussi symplectique (9.7), et de dimension double. Pour qu'elle soit self-orthogonale, il est donc suffisant (et nécessaire) qu'elle soit isotrope (voir (9.38)). La vérification est alors triviale.

C.Q.F.D.

— Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie; nous avons vu que l'espace de phases associé  $\mathcal{E} = E^* \times E$  est symplectique (9.12).

On peut remarquer que  $\mathcal{E}^2$  est symplectomorphe à l'espace de phase de  $E^2$ ; nous connaissons un algorithme qui fournit des variétés self-orthogonales de tout espace de phase (9.39); en l'appliquant à  $E^2$ , on pourra donc obtenir des transformations anti-canoniques de  $\mathcal{E}$ ; puis, en les composant avec la transformation anti-canonique standard

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -P \\ Q \end{pmatrix} \quad P \in E^*, \quad Q \in E$$

des transformations canoniques. On est ainsi conduit à l'énoncé classique, facile à vérifier directement :

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie; soit  $\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \mapsto \alpha$  une application différentiable de  $E^2$  à  $R$ .

(10.23) Si l'on pose

$$P \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial Q} \quad P' \equiv -\frac{\partial \alpha}{\partial Q'}$$

et si les applications

$\left( \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix} \right)$  sont des difféomorphismes, l'application  $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$  est une transformation canonique de l'espace de phases  $E^* \times E$ .

**Exemple :** Si l'on prend  $E = R$ ,  $\alpha \equiv q \operatorname{sh}(q')$ , on trouve un symplectomorphisme de  $R^2$  :

$$(10.24) \quad \begin{pmatrix} P' \\ q' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -q \sqrt{1+p^2} \\ \operatorname{Log}(p + \sqrt{1+p^2}) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P \\ q \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(q') \\ -p'/\operatorname{ch}(q') \end{pmatrix}$$

qui visiblement n'est pas de la forme (10.12). ■

### REVÊTEMENTS DE VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

En se reportant à la définition (1.42) d'un revêtement, le lecteur vérifiera immédiatement la proposition suivante :

(10.25) Soit  $V$  une variété symplectique; soit  $(W, G, P)$  un revêtement de  $V$ . Si l'on appelle  $\sigma_W$  l'image réciproque de  $\sigma_V$  par la projection  $P$ ,  $W$  est une variété symplectique; les éléments du groupe  $G$  sont des symplectomorphismes de  $W$ .

Réciproquement, en se reportant à (1.45), on montre :

(10.26) Soit  $W$  une variété symplectique; soit  $G$  un sous-groupe discret de  $\operatorname{Can}(W)$ . Alors la variété quotient  $V = W/G$  (qui a même dimension que  $W$ ) possède une seule structure symplectique, telle que  $\sigma_W$  soit l'image réciproque, par la projection  $P$ , de  $\sigma_V$ .

### Exemple

(10.27) Soit  $U$  une variété symplectique; soit  $n$  un entier positif. Désignons par  $W$  l'ensemble des  $n$ -uples

$$x \equiv \begin{pmatrix} 1x \\ \dots \\ nx \end{pmatrix}$$

de points de  $U$ , tels que  $1x, 2x, \dots, nx$  soient tous différents.

Il est facile de constater que  $W$  est un ouvert du produit direct  $U^n$ , qui est une variété symplectique (9.7).

Si  $\Gamma$  est un groupe de permutations des entiers  $1, 2, \dots, n$ , et si on pose, pour  $\gamma \in \Gamma$

$$\hat{\gamma} \begin{pmatrix} 1x \\ \dots \\ nx \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma(1)x \\ \dots \\ \gamma(n)x \end{pmatrix}$$

on constate facilement que l'ensemble  $\hat{\Gamma}$  des  $\hat{\gamma}$  est un sous-groupe discret de  $\operatorname{Can}(W)$ ; la variété quotient  $V = W/\hat{\Gamma}$  est donc une variété symplectique, dont la dimension est celle de  $W$ , c'est-à-dire  $n$  fois celle de  $U$ . ■

### TRANSFORMATIONS CANONIQUES INFINITÉSIMALES

#### DÉFINITION

Soit  $V$  une variété symplectique (ou présymplectique) séparée; soit  $f$  un champ de vecteurs différentiable de  $V$ .

(10.28) On dit que  $f$  est une transformation canonique infinitésimale si le difféomorphisme  $\exp(tf)$  est une transformation canonique (pour tout  $t$  tel que  $\exp(tf)$  existe).

Désignons par  $\varphi$  le champ  $x \mapsto \sigma$  définissant la forme de Lagrange de  $V$ ; pour que  $f$  soit une transformation canonique infinitésimale, il faut et il suffit que

$$\diamond \quad \exp(tf)_- (\varphi)(x) = \varphi(x)$$

pour tout  $t$  et tout  $x$  tels que le premier membre existe, c'est-à-dire que  $\exp(tf)_-(x)$  existe;  $x$  étant fixé, les  $t$  correspondants forment un intervalle contenant 0 (3.2); l'identité  $\diamond$  est donc équivalente à

$$\frac{\partial}{\partial t} [\exp(tf)_- (\varphi)(x)] \equiv 0$$

soit, compte tenu de la définition (4.15) d'une dérivée de Lie

$$\exp(tf)_- ([f, \varphi]) \equiv 0,$$

ce qui s'écrit aussi

$$[f, \varphi] \equiv 0.$$

D'où, en adoptant la notation (4.16), le théorème :

(10.29) Pour qu'un champ de vecteur  $x \mapsto \delta x$  d'une variété symplectique ou présymplectique  $V$  soit une transformation canonique infinitésimale, il faut et il suffit que

$$\delta_L \sigma \equiv 0.$$

(10.30) — Si  $V$  n'est pas séparée, on peut la recouvrir par des ouverts séparés (des morceaux, par exemple); la formule  $\delta_x \sigma \equiv 0$  exprimera que  $x \mapsto \delta x$  est une transformation canonique infinitésimale pour chacun de ces ouverts; nous dirons encore que  $x \mapsto \delta x$  est une transformation canonique infinitésimale de  $V$ . ■

En utilisant la formule de Cartan (4.39), on voit que cette condition s'écrit aussi (puisque  $\nabla \sigma \equiv 0$ ):

$$(10.31) \quad \nabla[\sigma(\delta x)] \equiv 0.$$

En appliquant le théorème de Poincaré (4.37), on en conclut immédiatement :

(10.32) Soit  $f[x \mapsto \delta x]$  un champ différentiable de vecteurs d'une variété symplectique ou présymplectique  $V$ . La condition

$$\diamond \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un champ différentiable scalaire } [x \mapsto u] \text{ tel que} \\ \sigma(\delta x) \equiv -\nabla u \end{array} \right.$$

est suffisante pour que  $f$  soit une transformation canonique infinitésimale; elle est nécessaire si  $\text{def}(f)$  est simplement connexe.

En utilisant la notion de gradient symplectique (9.16) on peut énoncer en particulier :

— Soit  $V$  une variété symplectique;  $f[x \mapsto \delta x]$  un champ de vecteurs différentiable de  $V$ .

La condition

$$(10.33) \quad \diamond \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une variable dynamique } u \text{ telle que} \\ f(x) \equiv \text{grad}(u) \quad (1) \end{array} \right.$$

est suffisante pour que  $f$  soit une transformation canonique infinitésimale; elle est nécessaire si  $\text{def}(f)$  est simplement connexe.

(10.34) Ces résultats nous montrent l'extrême richesse de l'ensemble des transformations canoniques :

Ainsi, pour toute fonction  $u$  différentiable sur  $R^{2p}$ , à dérivées partielles premières bornées (ces fonctions forment un espace vectoriel de dimension infinie), le champ  $f[x \mapsto \text{grad } u]$  (défini par la structure symplectique (10.13) de  $R^{2p}$ ) est une transformation canonique infinitésimale, et

$$\exp(tf) \in \text{Can}(R^{2p}) \quad \forall t \in R.$$

(1) On peut aussi écrire  $\delta x \equiv \mathfrak{D}x$  (notation (9.20)).

On peut d'ailleurs se limiter aux fonctions  $u$  qui sont nulles en dehors d'une boule donnée (on montre qu'elles forment encore un espace vectoriel de dimension infinie); les symplectomorphismes correspondants permutent les points de la boule, mais laissent fixes les autres points. ■

— Soit  $f[x \mapsto \delta x]$  un champ différentiable de vecteurs d'une variété symplectique ou présymplectique  $V$ .

En reprenant la démonstration de (10.29), on établit facilement l'équivalence des deux propositions

$$(10.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ Il existe une constante } \alpha \text{ telle que } \delta_t \sigma \equiv \alpha \sigma, \\ \heartsuit \text{ Pour tout } t, A = \exp(tf) \text{ est une similitude canonique } (1). \end{array} \right.$$

On dira dans ce cas que  $f$  est une similitude canonique infinitésimale.

— Supposons  $\alpha \neq 0$  (sinon  $f$  serait une transformation canonique infinitésimale); grâce à la formule de Cartan, la condition  $\diamond$  s'écrit

$$(10.36) \quad \sigma \equiv \nabla w$$

avec

$$(10.37) \quad w \equiv \frac{1}{\alpha} \sigma(\delta x);$$

si  $\text{def}(f) = V$ , la formule (10.37), nous donne donc un potentiel de la forme de Lagrange (Définition (9.14)).

(1) On constate que la constante  $\alpha$  (Définition (10.18)) est égale à  $e^{\alpha t}$ .



# § 11 GROUPES DYNAMIQUES

## DÉFINITION D'UN GROUPE DYNAMIQUE

(11.1) Soit  $V$  une variété symplectique (ou présymplectique).  
 Nous appellerons *groupe dynamique* de  $V$  tout groupe de Lie  $G$ , opérant sur  $V$ , tel que <sup>(1)</sup>

$$a_V \in \text{Can}(V) \quad \forall a \in G.$$

### Exemples

(11.2) — Si  $E$  est un espace vectoriel symplectique, le groupe de Lie  $\text{Sp}(E)$  (8.19) opère sur  $E$ , et ses éléments sont canoniques (10.12);  $\text{Sp}(E)$  est donc un groupe dynamique de  $E$ . ■

(11.3) — Si  $G$  est un groupe dynamique d'une variété présymplectique  $V$ , et si  $\tilde{G}$  est un sous-groupe de Lie de  $G$  (6.31),  $\tilde{G}$  est évidemment un groupe dynamique de  $V$ . Par exemple, (8.26) nous montre que le groupe unitaire  $U(p)$  — ou son sous-groupe de Lie  $SU(p)$  — est un groupe dynamique pour tout espace vectoriel symplectique de dimension  $2p$ . ■

(11.4) — Si  $A$  est un symplectomorphisme d'une variété  $V$  à une variété  $V'$ , si  $G$  est un groupe dynamique de  $V$ , et si l'on pose

$$a_{V'} = A \cdot a_V \cdot A^{-1} \quad \forall A \in G$$

on voit que  $G$  opère sur  $V'$ , et que les  $a_{V'}$  sont des symplectomorphismes de  $V'$ :  $G$  devient donc aussi un groupe dynamique de  $V'$ .

Dans le cas  $V = V'$ , on peut en déduire — en faisant varier  $A$  — qu'un groupe dynamique d'une variété  $V$  peut opérer d'une infinité de façons sur  $V$ . ■

(11.5) — Soit  $V$  une variété présymplectique sécable (Fig. 11.I); soit  $U$  la variété symplectique quotient de  $V$  par son feuilletage (9.10); soit  $G$  un groupe dynamique de  $V$ .

Pour tout  $a \in G$ , nous avons vu (10.17) que  $a_V$  respecte le feuilletage, et qu'il existe un symplectomorphisme de  $U$ , que nous noterons ici  $a_U$ , tel que

(11.6) 
$$a_U(P(x)) \equiv P(a_V(x))$$

$P(x)$  désignant la feuille qui passe par un point  $x$  de  $V$ .

<sup>(1)</sup> Notations :  $a_V$ ; (6.4);  $\text{Can}(V)$  : (10.15).

On vérifie facilement que cette définition de  $a_U$  fait opérer  $G$  sur  $U$  (6.4), et par conséquent que  $G$  devient ainsi un groupe dynamique de  $U$ . ■

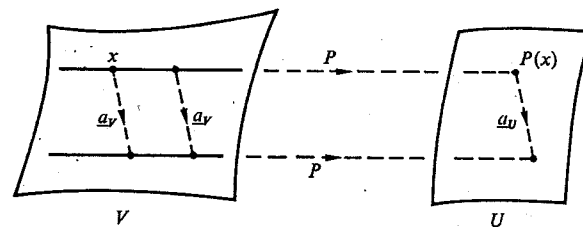


Fig. 11.I.

## DÉFINITIONS

Soit  $G$  un groupe de Lie; soit  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie (Fig. 11. II).

— Nous appellerons *torseurs* de  $G$  les éléments de l'espace vectoriel  $\mathcal{G}^*$  dual de  $\mathcal{G}$  <sup>(1)</sup>.

— Si  $G$  est un groupe dynamique d'une variété symplectique (ou présymplectique)  $V$ , nous dirons qu'un torseur variable  $\mu$  est un *moment* de  $G$  s'il existe une application différentiable

$$x \mapsto \mu$$

de  $V$  dans  $\mathcal{G}^*$  telle que

$$\diamond \left\{ \begin{array}{l} \sigma(Z_V(x)) \equiv -\nabla[\mu \cdot Z] \\ \text{pour tout } Z \text{ constant dans } \mathcal{G} \quad (2). \end{array} \right.$$

## THÉORÈME

a) Soit  $G$  un groupe dynamique d'une variété  $V$ , possédant un moment  $\mu$ . Si on ajoute un torseur constant à  $\mu$ , on obtient encore un moment de  $G$ ; tous les moments sont obtenus ainsi si  $V$  est connexe.

b) Si  $V$  est une variété simplement connexe et séparée <sup>(3)</sup>, tout groupe dynamique de  $V$  possède un moment.

c) Si  $G$  est un groupe dynamique d'une variété symplectique  $V$ , et si l'algèbre de Lie de  $G$  coïncide avec son algèbre dérivée,  $G$  possède un moment.

<sup>(1)</sup> A chaque torseur  $\mu$  correspond un champ de 1-formes  $[x \mapsto \omega]$  défini sur le groupe  $G$ , invariant par translation à droite, prenant la valeur  $\mu$  quand  $x$  est l'élément neutre; ces champs s'appellent *formes de Maurer-Cartan*. Les « systèmes de forces » de la mécanique élémentaire sont les torseurs du groupe des déplacements euclidiens (voir (12.21)).

<sup>(2)</sup>  $Z_V$  désigne le champ de vecteurs de  $V$  défini en (6.11).

<sup>(3)</sup> Ces hypothèses ne sont nullement nécessaires; il suffit par exemple que le groupe d'homotopie de chaque composante de  $V$  n'ait pas de quotient abélien.

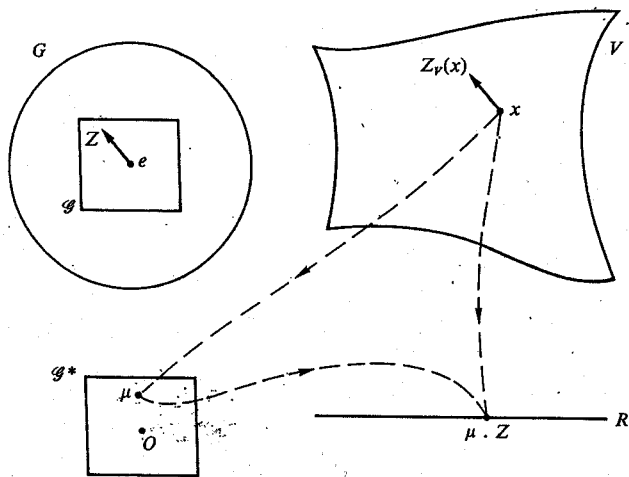


Fig. 11.II.

a) Il est clair que (11.7  $\diamond$ ) ne change pas si on ajoute une constante à  $\mu$ ; réciproquement, si  $\mu$  et  $\mu'$  vérifient  $\diamond$ , on voit que  $\nabla[[\mu' - \mu].Z] \equiv 0$ , donc que  $[\mu' - \mu].Z$  est constant si  $V$  est connexe (4.38); d'où  $\mu' - \mu = \text{Cte}$ , puisque la constante  $Z$  est arbitraire.

b) Supposons  $V$  simplement connexe et séparée; choisissons une base  $S = [S_1 \dots S_n]$  de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$ ; nous savons, pour  $j = 1, 2, \dots, n$  et pour  $t$  réel, que  $\exp(t[S_j]_V)$  est une opération du groupe (6.12), dont une transformation canonique;  $[S_j]_V$  est donc une transformation canonique infinitésimale (10.28); il existe donc un champ scalaire  $x \mapsto \mu_j$ , différentiable sur  $V$ , tel que  $\sigma([S_j]_V(x)) \equiv -\nabla\mu_j$  (10.32); il suffit de poser

$$\mu \equiv [\mu_1 \dots \mu_n] S^{-1}$$

pour vérifier (11.7  $\diamond$ ).

c) Soient  $Z$  et  $Z'$  deux éléments de l'algèbre de Lie d'un groupe dynamique; posons  $dx \equiv Z_V(x)$ ,  $d'x \equiv Z'_V(x)$ ; on sait que les dérivées de Lie  $d_L\sigma$ ,  $d'_L\sigma$  sont nulles.

Calculons la dérivée de Lie  $d_L[\sigma(d'x)]$ ; en utilisant (4.24) et (6.12), on trouve d'une part  $d_L[\sigma(d'x)] \equiv [d_L\sigma](d'x) + \sigma(d_L d'x) \equiv \sigma([Z, Z']_V(x))$ ; et grâce à (4.39) et (10.31) d'autre part :

$$d_L[\sigma(d'x)] \equiv \nabla[\sigma(d'x)](dx) + \nabla[\sigma(d'x)](d'x) \equiv \nabla[\sigma(d'x)](dx);$$

d'où l'identité valable pour tous les groupes dynamiques

$$\heartsuit \quad \sigma([Z, Z']_V(x)) \equiv -\nabla[\sigma(Z_V(x))](Z'_V(x))$$

Si l'algèbre de Lie de  $G$  est égale à son algèbre dérivée (6.14), on vérifie qu'elle possède une base  $S$  dont les éléments sont des crochets de Lie :  $S_j = [Z_j, Z'_j]$ ; si on pose alors  $\mu_j = \sigma(Z_j(x))(Z'_j(x))$ , l'identité  $\heartsuit$  montre que  $\mu \equiv [\mu_1 \dots \mu_n].S^{-1}$  est un moment.

C.Q.F.D

Si  $V$  est symplectique, la définition (11.7  $\diamond$ ) du moment peut aussi s'écrire

$$(11.9) \quad Z_V(x) \equiv \text{grad} [\mu.Z] \equiv \delta_{\mu.Z} x$$

en utilisant le gradient symplectique (9.16).

THÉORÈME

Soit  $V$  une variété symplectique ou présymplectique; soit  $x \mapsto \omega$  un champ de 1-formes tel que <sup>(1)</sup>

$$(11.10) \quad \sigma_V \equiv \nabla\omega$$

et  $G$  un groupe de Lie, opérant sur  $V$ , qui invarie  $\omega$  <sup>(2)</sup>.

Alors  $G$  est un groupe dynamique de  $V$ , et possède le moment  $\mu$  défini par

$$\diamond \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu.Z \equiv \omega(Z_V(x)) \\ \text{pour tout } Z \text{ dans l'algèbre de Lie de } G. \end{array} \right.$$

Le théorème (4.36) montre immédiatement que l'image réciproque de  $[x \mapsto \sigma_V]$  par les opérations  $\underline{a}_V$  du groupe est encore  $[x \mapsto \sigma_V]$ , puisque  $\sigma_V \equiv \nabla\omega$ ; donc que  $G$  est bien un groupe dynamique.

Choisissons un  $Z$  dans l'algèbre de Lie de  $G$ ; posons  $\delta x \equiv Z_V(x)$ . Comme l'image réciproque de  $x \mapsto \omega$  par  $\exp(tZ_V)$  est encore  $x \mapsto \omega$  (puisque  $\exp(tZ_V)$  est une opération du groupe), on montre comme en (10.29) que la dérivée de Lie  $\delta_L\omega$  est nulle.

En appliquant la formule de Cartan, il vient  $[\nabla\omega](\delta x) + \nabla[\omega(\delta x)] \equiv 0$ , c'est-à-dire  $\sigma(Z_V(x)) + \nabla[\omega(Z_V(x))] \equiv 0$ ; compte tenu de (11.7  $\diamond$ ), on trouve bien  $\diamond$ .  
C.Q.F.D.

(11.11) **Exemple :** Considérons un problème variationnel qui vérifie la condition (7.30), par exemple un problème variationnel régulier. Si un groupe  $G$  invarie le lagrangien (7.36), il invarie aussi la forme de Cartan  $\omega$  (7.29); on peut donc appliquer le théorème précédent. On remarquera que la grandeur (11.10  $\diamond$ ) est celle qui figure dans le théorème de Noether (7.36), et qui est souvent prise comme définition du moment. Voilà pourquoi la généralisation suivante s'appellera encore

THÉORÈME DE NOETHER

(11.12) Soit  $V$  une variété présymplectique,  $\mu$  un moment d'un groupe dynamique de  $V$ . Alors  $\mu$  est constant sur chaque feuille de  $V$ .

<sup>(1)</sup>  $\omega$  est un potentiel de  $\sigma_V$  (9.14).

<sup>(2)</sup> Cela signifie, bien entendu, que l'image réciproque du champ  $[x \mapsto \omega]$  par les opérations  $\underline{a}_V$  du groupe est encore  $[x \mapsto \omega]$ .

Il suffit de montrer, pour tout  $Z$  dans l'algèbre de Lie, que  $\mu \cdot Z$  est une intégrale première; c'est-à-dire, selon (5.22), que  $\ker(\sigma) \subset \ker(\nabla[\mu \cdot Z])$ ; ou, selon (11.7  $\diamond$ ), que  $\ker(\sigma) \subset \ker(\sigma(Z_V(x)))$ , c'est-à-dire que  $[\sigma(y)=0] \Rightarrow [\sigma(Z_V(x))(y)=0]$ ; cela résulte de l'antisymétrie de  $\sigma$ .

C.Q.F.D.

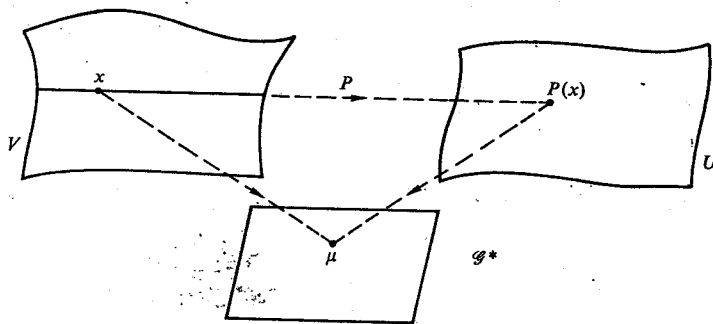


Fig. 11. III.

(11.13) — Désignons par  $P(x)$  la feuille qui passe par  $x$  (Fig. (11. III)); le théorème de Noether nous indique que  $\mu$  ne dépend que de  $P(x)$ ; si  $V$  est sécable, nous savons par ailleurs (11.6) que  $P(x)$  décrit la variété symplectique  $U$ , quotient de  $V$  par son feuilletage, et que  $G$  est encore un groupe dynamique de  $U$ . On vérifie facilement que  $\mu$  est aussi moment du groupe  $G$  opérant sur  $U$ .

COHOMOLOGIE D'UN GROUPE DYNAMIQUE

— Soit  $a \mapsto a_E$  une représentation linéaire d'un groupe de Lie  $G$  (6.9). Si  $\mu$  appartient à l'espace vectoriel  $E^*$  dual de  $E$ , et si l'on pose

(11.14) 
$$a_{E^*}(\mu) = \mu \cdot a^{-1}_E$$

on vérifie immédiatement que  $a \mapsto a_{E^*}$  est encore une représentation linéaire de  $G$ , appelée représentation duale de la précédente.

— En particulier, nous appellerons représentation co-adjointe de  $G$  la représentation duale de la représentation adjointe (6.24); elle fait donc opérer tout groupe de Lie  $G$  sur ses toiseurs (11.7), suivant la formule

(11.15) 
$$a_{\mathcal{G}^*}(\mu) = \mu \cdot a^{-b}_{\mathcal{G}} \quad \forall a \in G, \quad \forall \mu \in \mathcal{G}^*.$$

— Si  $Z$  appartient à l'algèbre de Lie de  $G$ , le champ de vecteurs  $Z_{\mathcal{G}^*}$  associé (Définition (6.11)) est donné par

(11.16) 
$$Z_{\mathcal{G}^*}(\mu) = \mu \cdot \text{Ad}(Z)$$

Ce résultat se déduit immédiatement de (6.26).

THÉORÈME (Fig. 11. IV)

— Soit  $V$  une variété symplectique (ou présymplectique) connexe; soit  $G$  un groupe dynamique de  $V$  possédant un moment  $\mu$  (11.7); désignons par  $\psi$  l'application  $x \mapsto \mu$  de  $V$  dans l'espace  $\mathcal{G}^*$  des toiseurs de  $G$ .

a) Il existe alors une application différentiable  $\theta$  de  $G$  dans  $\mathcal{G}^*$ , définie par <sup>(1)</sup>

$\diamond$  
$$\theta(a) \equiv \psi(a_V(x)) - a_{\mathcal{G}^*}(\psi(x))$$

(11.17) b)  $\theta$  vérifie

$\heartsuit$  
$$\theta(a \times b) \equiv \theta(a) + a_{\mathcal{G}^*}(\theta(b))$$

c) La dérivée

$$f = D(\theta)(e) \quad [e = \text{élément neutre de } G]$$

est une 2-forme de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $E$ , qui vérifie

$\clubsuit$  
$$f(Z) ([Z', Z''] + f(Z') ([Z'', Z]) + f(Z'') ([Z, Z']) \equiv 0$$

d) On a

$\spadesuit$  
$$D(\psi)(x)(Z_V(x)) \equiv \psi(x) \cdot \text{ad}(Z) + f(Z)$$
  
 $\#$  
$$\sigma(Z_V(x))(Z'_V(x)) \equiv \mu[Z, Z'] + f(Z)(Z')$$

(<sup>1</sup>) Variables :  $a, b \in G$ ;  $x \in V$ ;  $Z, Z', Z'' \in \mathcal{G}$ .

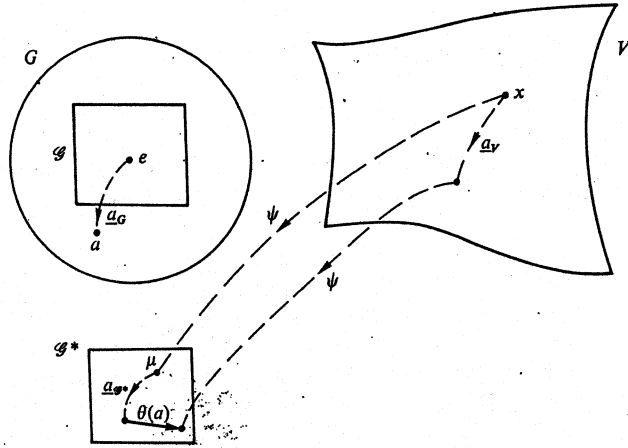


Fig. 11. IV.

— Soit  $\varphi$  le champ  $x \mapsto \sigma$  de  $V$ ; la définition (11.7  $\diamond$ ) du moment peut évidemment s'écrire

$$\flat \quad \varphi(x) (Z_V(x)) (f(x)) \equiv - D(\psi) (x) (f(x)) \cdot Z \quad \text{pour tout champ de vecteurs } f.$$

Par hypothèse, le champ  $\varphi$  est invariant pour toute opération  $\underline{a}_V$  du groupe (11.1); on a donc (4.5)

$$\flat \quad \varphi(x) (Z_V(x)) (f(x)) \equiv \varphi(\underline{a}_V(x)) (D(\underline{a}_V) (x) (Z_V(x))) (D(\underline{a}_V) (x) (f(x))).$$

Par définition de l'image d'un champ de vecteurs (2.38), on a

$$\flat \quad D(\underline{a}_V) (x) (f(x)) \equiv [\underline{a}_V]_+ (f) (\underline{a}_V(x)),$$

et de même

$$\begin{aligned} D(\underline{a}_V) (x) (Z_V(x)) &\equiv [\underline{a}_V]_+ (Z_V) (\underline{a}_V(x)) \\ &\equiv [\underline{a}_V \cdot Z]_V (\underline{a}_V(x)) \quad (\text{théorème (6.25)}). \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans  $\flat$ , il vient

$$\varphi(x) (Z_V(x)) (f(x)) \equiv \varphi(\underline{a}_V(x)) ([\underline{a}_V \cdot Z]_V (\underline{a}_V(x))) ([\underline{a}_V]_+ (f) (\underline{a}_V(x)))$$

cette dernière expression est le résultat de la substitution  $x \rightarrow \underline{a}_V(x)$ ,  $Z \rightarrow \underline{a}_V \cdot Z$ ,  $f \rightarrow [\underline{a}_V]_+ (f)$  dans le premier membre de l'identité  $\flat$ ; par conséquent, cette substitution ne change pas le second membre, et l'on a

$$\begin{aligned} D(\psi) (x) (f(x)) \cdot Z &\equiv D(\psi) (\underline{a}_V(x)) ([\underline{a}_V]_+ (f) (\underline{a}_V(x))) \cdot \underline{a}_V \cdot Z \\ &\equiv D(\psi) (\underline{a}_V(x)) (D(\underline{a}_V) (x) (f(x))) \cdot \underline{a}_V \cdot Z \quad (\text{grâce à } \flat) \\ &\equiv D(\psi \cdot \underline{a}_V) (x) (f(x)) \cdot \underline{a}_V \cdot Z \quad (1.23, 6) \end{aligned}$$

$f$  étant arbitraire, ce résultat peut s'écrire

$$\nabla[\psi(x) \cdot Z] \equiv \nabla[(\psi \cdot \underline{a}_V) (x) \cdot \underline{a}_V \cdot Z]$$

ou, puisque  $V$  est connexe (4.31) :

$$[\psi(x) - [\psi \cdot \underline{a}_V] (x) \cdot \underline{a}_V] \cdot Z = \text{Cte}$$

soit, puisque la constante  $Z$  est arbitraire

$$\psi(x) - \psi(\underline{a}_V(x)) \cdot \underline{a}_V = \text{Cte}.$$

En multipliant à droite par  $\underline{a}_V^{-1} = [\underline{a}_V]^{-1}$  (6.8), et en utilisant la définition (11.15) de la représentation co-adjointe, on voit donc que  $\psi(\underline{a}_V(x)) - \underline{a}_V \cdot \psi(x)$  ne dépend pas de  $x$ ; on peut donc l'appeler  $\theta(a)$ ; il suffit de choisir un point  $x$  fixe dans  $V$  pour vérifier que l'application  $\theta$  est différentiable : d'où (a).

— La formule  $\heartsuit$  s'obtient immédiatement en remplaçant successivement, dans  $\diamond$ ,  $a$  par  $a \times b$ ,  $x$  par  $\underline{b}_V(x)$ ,  $a$  par  $b$ , et en comparant les résultats obtenus; d'où (b).

— En utilisant la notation (6.10),  $\diamond$  s'écrit

$$\theta(a) \equiv \psi(\hat{x}(a)) - \widehat{\psi(x)} (a).$$

On peut alors calculer  $d[\theta(a)]$  pour  $a = e$ ,  $da = Z'$ , en appliquant (6.11); ce qui donne

$$f(Z') = D(\psi) (x) (Z'_V(x)) - Z_{\mathcal{G}^*}(\psi(x))$$

soit  $\heartsuit$  grâce à (11.16);  $\flat$  donne ensuite

$$f(Z') (Z) = - \varphi(x) (Z_V(x)) (Z'_V(x)) - \psi(x) \cdot \text{Ad} (Z') (Z)$$

d'où (d); on voit que  $f$  est une 2-forme; quant à l'identité  $\clubsuit$ , elle sera démontrée en (11.32).

C.Q.F.D.

(11.18)

— Nous savons que l'on passe d'un moment à un autre par addition d'un torseur constant (11.8); si donc nous changeons  $\mu$  en

$$\mu^* \equiv \mu - \mu_0 \quad \mu_0 \in \mathcal{G}^*$$

on constate que  $\theta$  et  $f$  sont changés respectivement en  $\theta^*$  et  $f^*$

$$\theta^*(a) \equiv \theta(a) + \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\mu_0) - \mu_0$$

et

$$f^*(Z) \equiv f(Z) + Z_{\mathcal{G}^*}(\mu_0)$$

bien entendu les résultats du théorème (11.17) restent applicables à  $\theta^*$  et  $f^*$ ; cela peut suggérer les notions qui vont suivre.

## COHOMOLOGIE D'UN GROUPE DE LIE

## DÉFINITION, THÉORÈME

Soit  $G$  un groupe de Lie;  $a \mapsto \underline{a}_E$  une représentation linéaire de  $G$ .

— On appelle  $E$ -cocycle de  $G$  toute application différentiable  $\theta$  de  $G$  dans  $E$  telle que

$$\heartsuit \quad \theta(a \times b) \equiv \theta(a) + \underline{a}_E(\theta(b)) \quad \forall a, b \in G.$$

— Si l'on pose, pour  $\mu \in E$

$$\diamond \quad \Delta(\mu)(a) = \underline{a}_E(\mu) - \mu \quad \forall a \in G$$

$\Delta(\mu)$  est un  $E$ -cocycle de  $G$ , appelé *cobord* de  $\mu$ .

— Deux cocycles sont dits *cohomologues* si leur différence est un cobord <sup>(1)</sup>; la cohomologie est une *relation d'équivalence* dans l'espace vectoriel des  $E$ -cocycles <sup>(2)</sup>.

— La vérification est immédiate.

(11.20) — Avec ce vocabulaire, l'application  $\theta$  (11.17  $\diamond$ ) est un  $\mathcal{G}^*$ -cocycle de  $G$ ; sa classe de cohomologie ne dépend pas du choix du moment : la classe de cohomologie de  $\theta$  est donc une *propriété caractéristique du groupe dynamique*  $G$  <sup>(3)</sup>.

## Exemple

(11.21) Dans les hypothèses (11.11), on vérifie que le moment  $\mu$  défini par la formule (11.10  $\diamond$ ) conduit à un  $\theta$  nul; la classe de cohomologie associée est donc *nulle*. Par conséquent, si la classe de cohomologie d'un *groupe dynamique*  $G$  n'est pas nulle, les hypothèses (11.11) ne sont pas vérifiées, il n'existe pas de potentiel invariant par  $G$  <sup>(4)</sup>.

## COHOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE DE LIE

## THÉORÈME

(11.22) Soit  $G$  un groupe de Lie;  $e$  son élément neutre;  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie;  $a \mapsto \underline{a}_E$  une représentation linéaire de  $G$ .

<sup>(1)</sup> Un cocycle est donc cohomologue à 0 s'il est un cobord.

<sup>(2)</sup> Le quotient (ensemble des classes) possède une structure d'espace vectoriel évidente; on l'appelle *espace de cohomologie* de la représentation; il est réduit à 0 si tout  $E$ -cocycle est un cobord.

<sup>(3)</sup> Abus de langage : du groupe  $G$  et de l'application  $a \rightarrow \underline{a}_E$  qui fait opérer  $G$  sur  $V$ .

<sup>(4)</sup> Il est donc *impossible* que la structure symplectique soit déduite d'un *lagrangien invariant* par  $G$ , selon la procédure (11.12).

a)  $Z \mapsto Z_E$  (notation (6.11)) est une application linéaire de  $\mathcal{G}$  dans  $L(E)$ , vérifiant

$$\diamond \quad [Z, Z']_E = Z'_E \cdot Z_E - Z_E \cdot Z'_E \quad \forall Z, Z' \in \mathcal{G}.$$

b) Si  $\theta$  est un  $E$ -cocycle de  $G$ , et si l'on pose

$$(11.22) \quad f = D(\theta)(e)$$

$f$  est une application linéaire de  $\mathcal{G}$  dans  $E$ , qui vérifie

$$\clubsuit \quad D(\theta)(a)(Z_G(a)) = Z_E(\theta(a)) + f(Z) \quad \forall a \in G, \quad \forall Z \in \mathcal{G}$$

$$\spadesuit \quad \theta(\exp(Z_G)(e)) = \left[ \int_0^1 \exp(tZ_E) dt \right] (f(Z)) \quad \forall Z \in \mathcal{G}$$

$$\heartsuit \quad f([Z, Z']) = Z'_E(f(Z)) - Z_E(f(Z')) \quad \forall Z, Z' \in \mathcal{G}.$$

c) Si  $G$  est connexe et si  $f$  est nul,  $\theta$  est nul.

— Ecrivons la définition des cocycles (11.19  $\heartsuit$ ) sous la forme

$$\theta(\widehat{b}(a)) - \theta(a) \equiv \widehat{\theta(b)}(a) \quad (\text{notation (6.10)}).$$

En appliquant la dérivation  $d$  ( $a = e$ ,  $da = Z$ ,  $db = 0$ ) on trouve, grâce à (6.11) :

$$D(\theta)(b)(Z_G(b)) - D(\theta)(e)(Z) = Z_E(\theta(b))$$

c'est-à-dire  $\clubsuit$ , en changeant  $b$  en  $a$ .

— On déduit immédiatement de  $\clubsuit$  :

$$\frac{d}{dt} [\exp(-tZ_E)(\theta(\exp(tZ_G)(e)))] = \exp(-tZ_E)(f(Z));$$

en remarquant que  $\theta(e) = 0$  (il suffit de faire  $a = b = e$  dans (11.19  $\heartsuit$ )), on en tire  $\spadesuit$ .

— Posons  $da \equiv Z_G(a)$ ,  $d'a \equiv Z'_G(a)$ ,  $\delta a \equiv [Z, Z']_G(a)$ ; la dérivation  $\delta$  est le crochet de  $d$  et  $d'$  (6.12); comme  $\theta(a)$  prend ses valeurs dans l'espace vectoriel fixe  $E$ , on a  $\delta[\theta(a)] \equiv dd'[\theta(a)] - d'd[\theta(a)]$  (2.45); cette formule peut se développer, en utilisant plusieurs fois  $\clubsuit$ , et conduit à  $\heartsuit$  en faisant  $a = e$ .

— Dans le cas particulier  $\theta = \text{cobord}(\mu)$ , on a  $f(Z) \equiv Z_E(\mu)$ ; la formule  $\heartsuit$  se réduit à  $\diamond$ .

— Si  $G$  est connexe, tout élément de  $G$  s'écrit

$$a = \exp({}^1 Z_G) \dots \exp({}^p Z_G)(e). \quad (6.32)$$

Si  $f = 0$ ,  $\spadesuit$  montre que  $\theta(\exp(Z_G)(e)) = 0$ ; on voit que  $\theta(a) = 0$  si  $p = 1$ ; on passe au cas général par récurrence sur  $p$ , en appliquant (11.19  $\heartsuit$ ).

(11.23) — Dans le cas (11.17),  $f$  est antisymétrique; compte tenu de (11.16), la formule  $\heartsuit$  ci-dessus prend la forme plus symétrique (11.17 $\heartsuit$ ).

Ces résultats motivent l'énoncé suivant :

Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie.

— On dit que  $E$  est un  $\mathcal{G}$ -module si  $E$  est un espace vectoriel, et si on a défini une application linéaire  $Z \mapsto Z_E$  de  $\mathcal{G}$  dans  $L(E)$ , telle que  $(1)$

$$(11.24) \quad \clubsuit \quad [Z, Z']_E \equiv Z'_E \cdot Z_E - Z_E \cdot Z'_E.$$

— Si  $E$  est un  $\mathcal{G}$ -module, on appelle  $E$ -cocycle de  $\mathcal{G}$  toute application linéaire  $f$  de  $\mathcal{G}$  dans  $E$  vérifiant

$$\heartsuit \quad f([Z, Z']) \equiv Z'_E(f(Z)) - Z_E(f(Z')).$$

— Si l'on pose, pour  $\mu \in E$

$$\diamond \quad \delta(\mu)(Z) \equiv Z_E(\mu)$$

$\delta(\mu)$  est un  $E$ -cocycle de  $\mathcal{G}$ , appelé cobord de  $\mu$   $(2)$ .

— Deux  $E$ -cocycles de  $\mathcal{G}$  sont dits *cohomologues* si leur différence est un cobord; la cohomologie est une relation d'équivalence dans l'espace vectoriel des  $E$ -cocycles de  $\mathcal{G}$   $(3)$ .

La vérification est triviale.

#### DÉFINITION

On dit qu'une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  est *semi-simple* si le tenseur  $k$  défini par

$$k(Z)(Z') = \text{Tr}(\text{Ad}(Z) \cdot \text{Ad}(Z')) \quad \forall Z, Z' \in \mathcal{G} \quad (\text{cf. 6.13})$$

(11.25) est régulier ( $k$  s'appelle tenseur de Killing); on dit qu'un groupe de Lie  $G$  est semi-simple s'il est *connexe* et si son algèbre de Lie est *semi-simple*.

Ces définitions permettent de formuler le

#### LEMME DE WHITEHEAD

(11.26) Si  $\mathcal{G}$  est une algèbre de Lie semi-simple, et si  $E$  est un  $\mathcal{G}$ -module de dimension finie, tout  $E$ -cocycle de  $\mathcal{G}$  est un cobord

$(1)$   $Z \mapsto Z_E$  s'appelle une *représentation* de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ .

$(2)$  Ne pas confondre avec le cobord défini en (11.19  $\diamond$ ).

$(3)$  Mêmes remarques que dans le cas (11.19).

que nous admettrons  $(1)$ , et le corollaire :

(11.27) Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple; soit  $a \mapsto \underline{a}_E$  une représentation linéaire de  $G$ .  
Alors tout  $E$ -cocycle de  $G$  est un cobord.

Soit  $\theta$  un  $E$ -cocycle; posons  $f = D(\theta)(e)$ ; d'après le lemme de Whitehead, il existe  $\mu \in E$  tel que  $f = \delta(\mu)$ ; en posant  $\theta^* = \theta - \Delta(\mu)$ , on constate que  $\theta^*$  est un  $E$ -cocycle vérifiant  $D(\theta^*)(e) = 0$ ; (11.22c) montre que  $\theta^*$  est nul; d'où  $\theta = \Delta(\mu)$ .  
C.Q.F.D.

## VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES DÉFINIES PAR UN GROUPE DE LIE

— Soit  $\theta$  un  $E$ -cocycle d'un groupe de Lie  $G$  (hypothèses (11.19)). On constate immédiatement, si l'on pose

$$(11.28) \quad \underline{a}_{E_0}(\mu) = \underline{a}_E(\mu) + \theta(a) \quad \forall a \in G, \quad \forall \mu \in E$$

que l'application  $a \mapsto \underline{a}_{E_0}$  fait opérer  $G$  sur  $E$ ; la notation  $E_0$  désigne donc la même variété que  $E$ , mais sur laquelle  $G$  opère différemment (si  $\theta$  n'est pas nul).

— Soit  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ; si  $Z \in \mathcal{G}$ , le champ de vecteurs  $Z_{E_0}$  associé (Définition (6.11)) se calcule immédiatement :

$$(11.29) \quad Z_{E_0}(\mu) = Z_E(\mu) + f(Z) \quad \forall \mu \in E$$

$f = D(\theta)(e)$  étant le cocycle de l'algèbre de Lie associé à  $\theta$  (11.22).

#### DÉFINITION

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $\mathcal{G}^*$  le dual de  $\mathcal{G}$ .

Nous appellerons *cocycle symplectique* de  $G$  toute application différentiable  $\theta$  de  $G$  dans  $\mathcal{G}^*$  telle que

$$(11.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \diamond \quad \theta(a \times b) \equiv \theta(a) + \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\theta(b)) \quad [\theta \text{ est un } \mathcal{G}^*\text{-cocycle}] \\ \heartsuit \quad f = D(\theta)(e) \quad \text{est antisymétrique.} \end{array} \right.$$

(11.31) — Si  $\theta$  est un cocycle symplectique, tout cocycle cohomologue est encore symplectique (parce que le cobord d'un torseur est symplectique); les classes de cohomologie des cocycles symplectiques forment donc un sous-espace vectoriel (que nous appellerons *espace de cohomologie symplectique* de  $G$ ) de l'espace de cohomologie de la représentation co-adjointe (11.19) (Fig. 11.V).

$(1)$  Voir N. Jacobson, *Lie Algebras* (Interscience publ.).

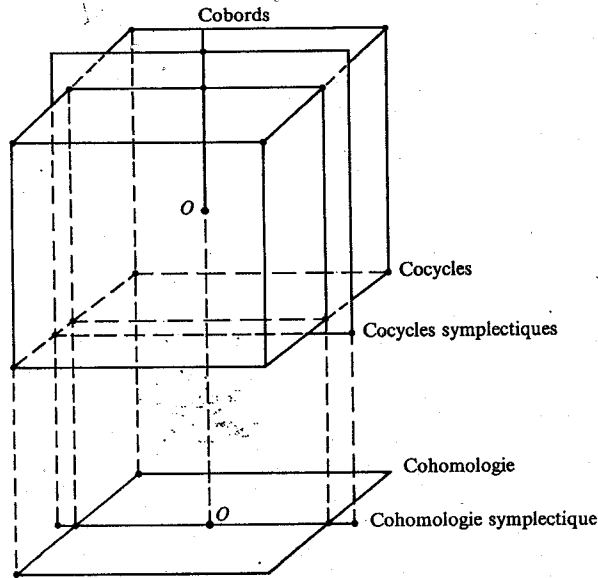


Fig. 11. V.

(11.32) Si  $\theta$  est un cocycle symplectique de  $G$ ,  $f = D(\theta)(e)$  vérifie l'identité (11.22 $\heartsuit$ ); compte tenu de l'antisymétrie de  $f$  et de (11.16), cette identité prend la forme plus symétrique :

$$(11.33) \quad f(Z) ([Z', Z'']) + f(Z') ([Z'', Z]) + f(Z'') ([Z, Z']) = 0 \quad (1).$$

THÉORÈME

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $\theta$  un cocycle symplectique de  $G$ ,  $U$  une orbite de l'opération  $a \mapsto a_{\mathcal{G}}$  (notation (11.28));  $\mu$  un point variable de  $U$ .

—  $U$  est une variété plongée dans l'espace  $\mathcal{G}^*$  des toseurs de  $G$ ; un vecteur  $\delta\mu$  est tangent à  $U$  en  $\mu$  s'il existe  $Z \in \mathcal{G}$  tel que

$$(11.34) \quad \heartsuit \quad \delta\mu = \mu \cdot \text{Ad}(Z) + f(Z) \quad (f = D(\theta)(e)).$$

— La dimension de  $U$  (supposée non nulle) est *paire*;  $U$  possède une structure de *variété symplectique*, dont la forme de Lagrange  $\sigma_U$  est donnée par

$$\diamond \quad \sigma_U(d\mu)(\delta\mu) = d\mu(Z) \quad \text{si} \quad \delta\mu = \mu \cdot \text{Ad}(Z) + f(Z).$$

—  $G$ , opérant sur  $U$ , est un *groupe dynamique*; tout point  $\mu$  de  $U$  est son *propre moment* pour  $G$ .

(1) Dans le cas d'un cobord  $\theta = \Delta(\mu)$ ,  $f(Z)(Z') \equiv \mu[Z, Z']$ , on retrouve l'identité de Jacobi.

— Nous savons que  $U$  est une variété plongée dans  $\mathcal{G}^*$ , sur laquelle  $\mathcal{G}$  opère (6.20), et qu'un vecteur  $\delta\mu$  tangent à  $U$  en  $\mu$  est de la forme  $Z_{\mathcal{G}}$ ; compte tenu de (11.29) et de (11.16), on trouve bien  $\heartsuit$ .

— Si  $d\mu$  est tangent à  $U$  en  $\mu$ , il existe  $Z'$  tel que  $d\mu = \mu \cdot \text{ad}(Z') + f(Z')$ ; on a donc  $d\mu(Z) = \mu[Z', Z] + f(Z')(Z) = -\mu[Z, Z'] - f(Z')(Z) = -\delta\mu(Z')$ ; on voit donc que  $d\mu(Z)$  ne dépend de  $Z$  que par l'intermédiaire de  $\delta\mu$ ; nous pouvons donc le noter  $\sigma(d\mu)(\delta\mu)$ ; il est clair que  $\sigma_U$  est une 2-forme de l'espace tangent à  $U$  en  $\mu$ ;  $\sigma_U$  est régulière, car

$$[\sigma_U(d\mu) = 0] \Leftrightarrow [d\mu(Z) = 0 \quad \forall Z \in \mathcal{G}] \Leftrightarrow [d\mu = 0];$$

la dimension de  $U$  est donc *paire* (9.2).

— Soit  $\varphi$  le champ  $\mu \mapsto \sigma_U$ ; en remarquant que  $\mu \cdot \text{ad}(Z) + f(Z)$  est égal à  $Z_U(\mu)$  (1) la définition  $\diamond$  de  $\sigma$  peut s'écrire

$$\heartsuit \quad \varphi(\mu)(Z'_U(\mu))(Z_U(\mu)) = Z'_U(\mu) \cdot Z.$$

Calculons l'image réciproque de  $\varphi$  par  $a_U$ ,  $a$  étant un élément de  $G$ . La définition (4.5) donne

$$\heartsuit [a_U]_-(\varphi)(\mu)(Z_U(\mu))(Z'_U(\mu)) = \varphi(a_U(\mu))(D(a_U)(\mu)(Z'_U(\mu)))(D(a_U)(\mu)(Z_U(\mu))).$$

En remarquant que  $a_U$  est induite par  $a_{\mathcal{G}}$ , en appliquant la définition (11.28) de  $a_{\mathcal{G}}$  et la définition (11.15) de la représentation co-adjointe, on trouve

$$\# \quad D(a_U)(\mu)(Z'_U(\mu)) = Z'_U(\mu) \cdot \underline{a}^{-1}_{\mathcal{G}};$$

on a d'autre part, grâce à (2.38) et (6.25) :

$$\flat \quad D(a_U)(\mu)(Z_U(\mu)) = [a_U]_+(Z_U)(a_U(\mu)) = [a_{\mathcal{G}}(Z)]_U(a_U(\mu)).$$

Grâce à  $\#$  et  $\flat$ ,  $\heartsuit$  devient  $\varphi(a_U(\mu))(Z'_U(\mu) \cdot \underline{a}^{-1}_{\mathcal{G}})([a_{\mathcal{G}} \cdot Z]_U(a_U(\mu)))$ , qui vaut (grâce à  $\heartsuit$ )  $Z'_U(\mu) \cdot \underline{a}^{-1}_{\mathcal{G}} \cdot \underline{a}_{\mathcal{G}} \cdot Z = \varphi(\mu)(Z'_U(\mu))(Z_U(\mu))$ .

Ainsi  $[a_U]_-(\varphi) = \varphi$  : le champ  $\mu \mapsto \sigma$  est *invariant par les opérations du groupe*. Faisons en particulier  $a = \exp(tZ_U)$ ; la formule (4.15) donne

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \{ [\exp(tZ_U)]_-(\varphi)(\mu) \} = [\exp(tZ_U)]_-([Z_U, \varphi](\mu))$$

ce qui montre que la dérivée de Lie  $[Z_U, \varphi]$  est *nulle*; en posant  $\delta\mu \equiv Z_U(\mu)$ , on a donc  $\delta_L \sigma = 0$ .

Remarquons d'autre part que la définition  $\diamond$  peut aussi s'écrire

$$\sigma_U(\delta\mu)(d\mu) \equiv -[d\mu](Z) \equiv -d[\mu(Z)] \equiv -\nabla[\mu(Z)](d\mu),$$

c'est-à-dire,

$$\flat \quad \sigma_U(Z_U(\mu)) \equiv -\nabla[\mu(Z)].$$

(1) Puisque  $a_U$  est induit sur  $U$  par  $a_{\mathcal{G}}$ , et  $Z_U$  par  $Z_{\mathcal{G}}$ , lui-même donné par (11.29).

La formule de Cartan donne alors

$$0 \equiv \delta_L \sigma \equiv [\nabla \sigma] (\delta \mu) + \nabla [\sigma (\delta \mu)] \equiv [\nabla \sigma] (Z_U(\mu)) - \nabla [\nabla [\mu (Z)]] ,$$

soit, d'après le théorème de Poincaré,  $[\nabla \sigma] (Z_U(\mu)) \equiv 0$ . Comme  $Z_U(\mu)$  est un vecteur tangent à  $U$  arbitraire, on a  $\nabla \sigma \equiv 0$ ; la forme régulière  $\sigma$  donne bien une structure symplectique à  $U$ . Puisque les opérations du groupe invariant  $\sigma$ ,  $G$  est un groupe dynamique; la formule  $\natural$  montre que  $\mu$  est un moment (voir (11.7)).

C.Q.F.D.

(11.35) — Nous disposons donc d'un algorithme qui associe, à tout groupe de Lie  $G$  et à tout cocycle symplectique  $\theta$  de  $G$  (en particulier à  $\theta \equiv 0$ ) une famille de variétés symplectiques sur chacune desquelles  $G$  opère canoniquement et transitivement.

(11.36) — Si on ajoute un cobord à  $\theta$ , on constate que les nouvelles orbites se déduisent des anciennes par une translation, qui induit sur chacune d'elles un symplectomorphisme : la structure symplectique des orbites ne dépend donc que de la classe de cohomologie de  $\theta$ .

(11.37) — Si la cohomologie symplectique de  $G$  est nulle, il suffira donc d'étudier les orbites correspondant au cas  $\theta = 0$  (c'est-à-dire les orbites de la représentation co-adjointe) pour avoir un modèle symplectique de tous les cas possibles; c'est le cas si  $G$  est semi-simple, puisque sa cohomologie est nulle (Théorème de Whitehead (11.27)), donc a fortiori sa cohomologie symplectique (11.31).

— Du point de vue symplectique local, la construction (11.34) est universelle; c'est ce qu'exprime le théorème suivant :

— Soit  $V$  une variété symplectique, sur laquelle opère transitivement un groupe dynamique connexe  $G$ , possédant un moment  $\mu$ ; soit  $\psi$  l'application  $x \mapsto \mu$ ,  $\theta$  le cocycle associé (11.17  $\diamond$ ).

1)  $\psi$  applique  $V$  sur une variété  $U$  de même dimension, construite à partir du groupe  $G$  par l'algorithme (11.34), et vérifie

$$(11.38) \quad \heartsuit \quad \psi(\underline{a}_V(x)) \equiv \underline{a}_U(\psi(x)) .$$

2) Si  $\psi$  est régulier, il constitue un symplectomorphisme de  $V$  à  $U$ ; sinon on peut recouvrir  $V$  par des ouverts où  $\psi$  est une transformation canonique de  $V$  à  $U$ .

3) Pour que  $\psi$  soit un symplectomorphisme, il suffit que le stabilisateur  $G_\mu$  d'un élément  $\mu$  de  $U$  (où  $G$  opère selon (11.28)) soit connexe.

— Soit  $x_0$  un point de  $V$ ; puisque  $G$  opère transitivement, tout  $x \in V$  est de la forme  $\underline{a}_V(x_0)$ , ou encore  $\hat{x}_0(a)$ ; il en résulte que  $V$  est connexe, puisque  $\hat{x}_0$  est continue (Théorème (1.51)).

(11.17  $\diamond$ ) définit alors une application  $\theta$  de  $V$  dans  $\mathcal{G}^*$ , qui est un cocycle symplectique et permet donc d'appliquer (11.34). La formule (11.17  $\diamond$ ) peut alors s'écrire

$$\diamond \quad \psi(\underline{a}_V(x)) = \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(x)$$

en faisant  $x = x_0$ , on voit que  $\psi$  applique  $V$  sur l'orbite  $U$  passant par  $\mu_0 = \psi(x_0)$ ; et que l'on peut écrire  $\diamond$  sous la forme (11.38  $\heartsuit$ ). De même la formule (11.17  $\heartsuit$ ) s'écrit

$$\heartsuit \quad D(\psi)(x)(Z_V(x)) \equiv Z_U(\mu)$$

et (11.17  $\clubsuit$ )

$$\clubsuit \quad \sigma(Z_V(x))(Z'_V(x)) \equiv \sigma(Z_U(\mu))(Z'_U(\mu))$$

ce qui montre que  $\sigma_V$  est l'image réciproque de  $\sigma_U$  par  $\psi$ .

Comme  $V$  et  $U$  sont symplectiques,  $\heartsuit$  montre que  $[Z_V(x)=0] \Leftrightarrow [Z_U(\mu)=0]$ , donc que les applications linéaires  $Z \mapsto Z_V(x)$ ,  $Z \mapsto Z_U(\mu)$  ont même noyau; elles ont donc même rang,  $V$  et  $U$  ont même dimension.

Comme  $D(\psi)(x)$  est partout régulier, le théorème (1.35) montre que l'on peut recouvrir  $V$  par des ouverts où  $\psi$  est un difféomorphisme, donc une transformation canonique (10.10).

— Supposons de plus que le stabilisateur d'un élément de  $U$  soit connexe; soit  $x$  un point de  $V$ ,  $\mu = \psi(x)$ .

$\heartsuit$  montre que le stabilisateur  $G_x$  est un sous-groupe de  $G_\mu$ , donc un sous-groupe de Lie de  $G$  (6.36), (6.34); comme il a même dimension (6.36), c'est un sous-groupe ouvert; or  $G_\mu$  est connexe (puisque, selon (6.36,  $\heartsuit$ ), tous les stabilisateurs sont conjugués); (6.32, III) montre que  $G_x = G_\mu$ . Supposons alors que  $\psi(x) = \psi(y)$ ; soit  $b$  un élément de  $G$  tel que  $y = \underline{b}_V(x)$ ; on a alors  $\psi(x) = \psi(y) = \psi(\underline{b}_V(x)) = \underline{b}_U(\psi(x))$ ; d'où  $b \in G_\mu$ ; d'où  $b \in G_x$ ; d'où  $y = \underline{b}_U(x) = x$ ;  $\psi$  est injectif.

C.Q.F.D.

### Exemples

(11.39) — Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ; prenons  $G =$  composante connexe de  $e$  dans  $O(E)$ .

$G$  est un groupe de Lie connexe que nous avons étudié au § 6; son algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  est l'ensemble des éléments  $Z \in L(E)$  tels que  $\bar{Z} = -Z$ ; nous poserons

$$\diamond \quad g(Z)(Z') = -\frac{1}{2} \text{Tr}(Z \cdot Z')$$

ce qui donne à  $\mathcal{G}$  une structure d'espace euclidien de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Un calcul élémentaire montre que le tenseur de Killing (11.25) est égal à  $[4 - 2n]g$ ; si donc  $n \geq 3$ ,  $G$  est semi-simple, il suffira d'étudier les orbites de la représentation co-adjointe (11.37). ■

— Traitons le cas  $E = R^3$ ,  $G = \text{SO}(3)$ .

A cet effet, remarquons que la sphère  $S_2$ , d'équation

$$\langle x, x \rangle \equiv 1 \quad x \in R^3$$



possède une structure symplectique, si l'on pose

$$(11.40) \quad \sigma(dx)(\delta x) \equiv \lambda \langle x, dx \times \delta x \rangle$$

$\lambda$  étant une constante non nulle ; en effet,  $\sigma$  est régulière, et sa dérivée extérieure est certainement nulle, comme 3-forme d'une variété de dimension 2. On montre facilement, si  $a \in \text{SO}(3)$ , que  $a$  invarie  $\sigma$  :  $\text{SO}(3)$  est donc un groupe dynamique ; on sait qu'il opère transitivement sur la sphère.

Un élément quelconque  $Z$  de l'algèbre de Lie de  $\text{SO}(3)$  se met sous la forme  $j(z)$  :

$$(11.41) \quad j(z)(y) = z \times y \quad \forall y \in R^3$$

on en déduit aisément le moment

$$(11.42) \quad \mu \equiv g(-\lambda x)j^{-1} \quad (1^1).$$

Comme  $x \mapsto \mu$  est régulier, la sphère  $S_2$  munie de la structure (11.40) est donc *symplectomorphe à une orbite de la représentation co-adjointe* (11.38). On vérifie que l'on obtient toutes les orbites en donnant à  $\lambda$  toutes les valeurs positives. ■

(11.43) — Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , considéré comme groupe abélien additif.

Un cocycle symplectique  $\theta$  de  $E$  est simplement une 2-forme de  $E$  ; les orbites associées à  $\theta$  sont l'ensemble de valeurs de  $\theta$  (qui est un sous-espace vectoriel de dimension paire du dual  $E^*$  de  $E$ ) et ses translatés. ■

(<sup>1</sup>). Notation (6.49).