Chapitre I

Géométrie différentielle

§ 1 VARIÉTÉS

DÉFINITION DES VARIÉTÉS

Soit V un ensemble ; désignons par n un entier positif.

On appelle *système de coordonnées* de V un procédé F qui fait correspondre à n nombres réels ${}^1x, {}^2x, \ldots, {}^nx$ un point X de V ; les ${}^jx$ s'appellent alors *coordonnées* de X dans le système F (1).

Il sera commode de poser

$$x = \begin{pmatrix} {}^1x \\ {}^2x \\ \cdots \\ {}^nx \end{pmatrix}, \qquad X \equiv F(x) ; \tag{1.1}$$

(1.2) Alors un système de coordonnées F sera considéré comme une application de R^n à V (2) ; nous supposerons essentiellement que F est *régulier* (3) et que def (F) est *ouvert* (4).

Exemple : Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, et si des vecteurs $S_1, S_2, \ldots, S_n$ constituent une base de E, on peut définir un système de coordonnées S de E en posant

$$S(x) = S_1\,{}^1x + S_2\,{}^2x + \cdots + S_n\,{}^nx \tag{1.3}$$

(1) Suivant l'usage tensoriel, nous mettons les numéros des coordonnées en haut ; nous les plaçons à gauche pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement.

(2) E et E' étant deux ensembles, nous appellerons application de *E à E'* toute application A d'une partie de E (notée def (A)) sur une partie de E' (notée val (A)).

(3) Nous dirons qu'une application A est *régulière* si $[A(x) = A(x')] \Rightarrow [x = x']$; synonyme : *biunivoque, injectif.* Dans ce cas A possède une application *inverse*, notée A^{-1}, caractérisée par def (A^{-1}) = val (A) ; val (A^{-1}) = def (A),

$$[A^{-1}(x) = y] \Leftrightarrow [x = A(y)] .$$

— A^{-1} est régulière ; $[A^{-1}]^{-1} = A$.

(4) On définit la *norme euclidienne* d'un élément x de R^n comme le nombre

$$\| x \| = \sqrt{[{}^1x]^2 + \cdots + [{}^nx]^2} ;$$

on appelle *boule* (resp. *sphère*) de *centre* y, de *rayon* r l'ensemble des x de R^n tels que $\| x - y \| < r$ (resp. $\| x - y \| = r$) ; on appelle *ouvert* de R^n toute *réunion de boules*.

ou, en utilisant la notation matricielle :

(1.4) $$S = [S_1 \quad S_2 \ \dots \ S_n]$$

nous dirons simplement que l'application S, définie par (1.3) ou (1.4) est une *base* de E. ■

(1.5) Si F et G sont deux systèmes de coordonnées (Fig. 1.I), il est clair que $F^{-1}.G$ est une application de R^n à R^n (¹) ; nous dirons que F et G sont *cohérents* si $F^{-1}.G$ et son inverse $G^{-1}.F$ sont *différentiables* (²).

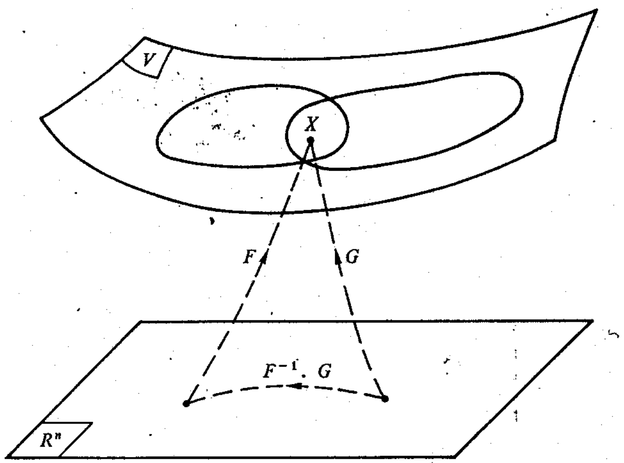


Fig. 1.I.

(¹) Nous désignons par $A.B$ ou $A \circ B$ le produit de composition de deux applications A et B ; il est défini par

$$\{ x \in \text{def}(A.B) \} \Leftrightarrow \{ x \in \text{def}(B), \quad B(x) \in \text{def}(A) \} \Rightarrow \{ [A.B](x) = A(B(x)) \}.$$

Bien entendu, si val (B) et def (A) ne se rencontrent pas, def $(A.B)$ est vide ; nous dirons que l'application $A.B$ est *impuissante* ; ce cas particulier ne constitue par une exception, notamment pour la règle d'associativité

$$[A.B].C = A.[B.C]$$

et pour la règle d'inversion

$$[A.B]^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

valable si A et B sont des applications régulières.

(²) Une application A de R^n à $R^{n'}$ sera dite *différentiable* si def (A) est un *ouvert* et si, pour tout $x \in$ def (A), les coordonnées $^k y$ de $y \equiv A(x)$ ont des *dérivées partielles continues de tous les ordres* par rapport aux coordonnées $^j x$ de x (nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser les fonctions *p fois différentiables* qui peuvent n'avoir pas de dérivées partielles d'ordre plus élevé que p). On conviendra qu'une application impuissante est différentiable.

(1.6) On appelle *atlas* de V un ensemble $\mathscr{A}$ de systèmes de coordonnées tel que

a) Les éléments de $\mathscr{A}$ sont deux à deux cohérents

b) Leurs ensembles de valeurs recouvrent V.

(1.7) — Une fois choisi un atlas $\mathscr{A}$, on appellera *système de coordonnées admissible*, ou plus brièvement *carte* de V, tout système de coordonnées qui est cohérent avec ceux de $\mathscr{A}$; on peut montrer que *deux cartes sont cohérentes* ; il en résulte que *l'ensemble de toutes les cartes* est encore un atlas, et que c'est le plus grand atlas contenant $\mathscr{A}$.

(1.8) Quand nous aurons ainsi défini *l'ensemble des cartes* de V, nous dirons que V est une *variété* ; ou de façon plus précise, que nous avons défini sur V une *structure de variété* (¹) ; le nombre n s'appellera *dimension* de V.

Exemple de variétés

(1.9) — Si E est un espace vectoriel de dimension n, on vérifie que l'ensemble des bases de E (1.4) est un *atlas* ; il donne donc à E une structure de variété (de dimension n, comme il se doit).

(1.10) — En particulier, R^n lui-même est une variété de dimension n ; on voit immédiatement que ses cartes sont les applications de R^n à R^n *qui sont différentiables ainsi que leur inverse*. ■

(1.11) — On désigne par S_n la sphère de centre 0, de rayon 1, dans l'espace R^{n+1}. On forme un atlas de S_n, composé de deux cartes F_+, F_-, en posant, pour $x \in R^n$:

$$\begin{cases} {}^j[F_\pm(x)] = 2\dfrac{{}^j x}{1 + \| x \|^2} & [j = 1, 2, \dots, n] \\ {}^{n+1}[F_\pm(x)] = \pm\dfrac{1 - \| x \|^2}{1 + \| x \|^2} & \end{cases}$$

cet atlas donne donc à S_n une structure de variété de dimension n. ■

(1.12) — Soient V et V' deux variétés, de dimensions n et n', possédant des cartes respectives F et F' ; si l'on pose

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) \\ F'(x') \end{pmatrix}.$$

on définit ainsi un système de coordonnées Φ pour l'ensemble produit $V \times V'$; en faisant varier F et F', on obtient un atlas de $V \times V'$; ainsi

(¹) On peut donner des exemples d'ensembles V possédant deux atlas *non cohérents* ; dans ce cas, ils définissent sur V *deux structures de variété distinctes* (voir ci-dessous (5.7)).

$V \times V'$ est muni d'une structure de *variété* de dimension $n + n'$; nous dirons que c'est la *variété produit direct*.

Ceci s'étend immédiatement au produit de p variétés V_j ; c'est une variété dont la dimension est la somme de celles des V_j [1].

OUVERTS

DÉFINITION

(1.13) Une partie E d'une variété V est un *ouvert* si E est réunion d'ensembles de valeurs de cartes [2].

On vérifie que :

(1.14) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
L'intersection de deux ouverts est un ouvert.
La partie vide de V est un ouvert.
V est un ouvert de V [3].

— Soit F une application d'une variété V à une variété V'.

(1.15) On dit que F est *continue* si, pour tout ouvert $E' \subset V'$, il existe un ouvert E de V tel que [4]

$$F^{-}(E') = E \cap \operatorname{def}(F).$$

— Dans le cas particulier $V = R^n$, $V' = R^{n'}$, on retrouve la définition usuelle des fonctions continues de variables réelles.

— (1.14) montre que :

$$\begin{bmatrix} F \text{ continue} \\ \operatorname{def}(F) \text{ ouvert} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} E' \text{ ouvert} \Rightarrow F^{-}(E') \text{ ouvert} \end{bmatrix}. \qquad (1.16)$$

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Soient V et V' deux variétés (de dimensions n et n') ; soit A une application de V à V'.

(1) On peut remarquer que la variété R^n (voir (1.10)) est le produit direct de n variétés égales à R.
(2) Cette définition est compatible avec (1.2(2)) dans le cas $E = R^n$.
(3) Ceci montre que *toute variété est un espace topologique* : voir par exemple N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chapitre I.
(4) Nous désignons par $F^{-}(E')$ l'*image réciproque* de E' par F, c'est-à-dire l'ensemble des x de $\operatorname{def}(F)$ tels que $F(x) \in E'$.

(1.17) Nous dirons que A est *différentiable* [1] si, pour toute carte F de V et toute carte F' de V'

$$F'^{-1}.A.F$$

(qui est une application de R^n à $R^{n'}$) est différentiable, au sens (1.5(2)).

Exemples

(1.18) — Les cartes d'une variété, leurs inverses, sont différentiables. ∎

(1.19) — Si E est un ouvert d'une variété, 1_E est différentiable [2]. ∎

— Soient $V_1, V_2, \ldots, V_p$ des variétés ; désignons par V leur produit direct (1.12). La projection n° j, que nous noterons ${}^j|$, et qui est définie par

$$ {}^j|\begin{pmatrix} {}^1x \\ {}^2x \\ \vdots \\ {}^nx \end{pmatrix} = {}^jx \qquad (1.20)$$

est une *application différentiable* de V sur V_j. ∎

On démontre que :

(1.21) — Toute application différentiable est *continue* ; son ensemble de définition est *ouvert*.

(1.22) — Si A et B sont différentiables, $A.B$ est différentiable [3].

ESPACE VECTORIEL TANGENT

On démontre le théorème fondamental suivant :

1) Si V est une variété de dimension n, et x un point de V, on peut définir un *espace vectoriel de dimension n*, appelé espace vectoriel *tangent à V en x* ; nous le noterons D_x ; ses éléments s'appellent *vecteurs tangents* à V en x.
2) Si A est une application différentiable de V à V' et si $x \in \operatorname{def}(A)$, on peut définir une *application linéaire*, appelée application linéaire *tan-*

(1) Cette définition est compatible avec (1.5(2)), dans le cas $V = R^n$, $V' = R^{n'}$.
(2) Nous notons 1_E l'application identique de E sur E :

$$\operatorname{def}(1_E) = E ; \quad [x \in E] \Rightarrow [1_E(x) = x].$$

(3) On suppose bien entendu que B prend ses valeurs dans la variété où est définie A.

gente à A en x; nous la noterons $D(A)(x)$; $D(A)(x)$ applique l'espace vectoriel D_x dans l'espace vectoriel $D_{A(x)}$.

3) Si E est un ouvert de V, si $x \in E$ et si $y \in D_x$, on a

$$D(1_E)(x)(y) = y\,.$$

(1.23) 4) Soient ${}^1V, \ldots, {}^pV$ des variétés ; choisissons un point ${}^jx$ dans chaque ${}^jV$, un vecteur tangent ${}^jy$ dans chaque $D_{{}^jx}$; si on pose

$$x = \begin{pmatrix} {}^1x \\ \cdots \\ {}^px \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} {}^1y \\ \cdots \\ {}^py \end{pmatrix}$$

on a

$$D({}^j|)(x)(y) = {}^jy \qquad (^1)\,.$$

5) Soient E et E' des espaces vectoriels de dimension finie, et A une application différentiable de E à E' ; si $x \in \operatorname{def}(A)$ et si $y \in E$, on a

$$D(A)(x)(y) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\,[A(x+sy) - A(x)]\,.$$

6) Si A et B sont différentiables (²), et si $x \in \operatorname{def}(A.B)$, on a

$$D(A.B)(x) = [D(A)(B(x))].[D(B)(x)]\,.$$

Le lecteur en déduira facilement les résultats suivants :

(1.24) — Si une application F est *constante* :

$$F(x) = F(y) \qquad [\forall x, y \in V]$$

elle est différentiable, et l'on a

$$D(F)(x) = 0\,.$$

(1.25) — Si E est un espace vectoriel de dimension finie, l'espace vectoriel tangent D_x *coïncide avec E pour tout x de E* ; c'est le cas notamment pour $E = R^n$.

(1.26) — On appelle *difféomorphisme* de V à V' toute application régulière A de V à V' telle que A et A^{-1} soient différentiables (³).

(¹) Voir la définition (1.20) de la projection ${}^j|$.
(²) On suppose que B prend ses valeurs dans la variété où A est définie.
(³) Exemple : les cartes d'une variété V de dimension n sont les difféomorphismes de R^n à V.

Alors, pour $x \in \operatorname{def}(A)$, $D(A)(x)$ est une application linéaire *régulière* de D_x *sur* $D_{A(x)}$, et l'on a

(1.27)
$$[D(A)(x)]^{-1} = D(A^{-1})(A(x))\,,$$

ce qui montre que V et V' ont *même dimension.*

— Soit X un point d'une variété V de dimension n ; il existe une carte F et un point x de R^n tels que $F(x) = X$.

L'opérateur

(1.28)
$$S = D(F)(x)$$

est une application linéaire régulière de R^n sur D_X, donc une *base* de l'espace vectoriel tangent D_X, au sens (1.4).

En posant

(1.29)
$$|_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ |_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on obtient immédiatement l'expression des *vecteurs de base* :

(1.30)
$$S_j = S(|_j) = D(F)(x)(|_j)\,.$$

DÉFINITION.

(1.31) — V étant une variété, nous désignerons par V^D l'ensemble des couples

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad (x \in V,\ y \in D_x)\,;$$

V^D s'appelle *espace fibré des vecteurs tangents* à V ; la correspondance qui fait correspondre à $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ le point x s'appelle *projection* de V^D sur V.

— Soit A une application différentiable d'une variété V à une variété V' (Fig. 1.II). On désignera par A^D l'application définie par

(1.32)
$$A^D \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(A)(x)(y) \\ A(x) \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in V^D\,.$$

Il est clair que A^D est une application de V^D à V'^D. On l'appelle parfois *relèvement* de A, à cause de la disposition de la figure 1.II.

Les formules (1.23) permettent de montrer immédiatement que

(1.33)

$[A.B]^D = A^D.B^D$	
$[A^{-1}]^D = [A^D]^{-1}$	si A est un difféomorphisme
$[1_E]^D = 1_{E'}$	si E est un ouvert de V, E' son image réciproque par la projection de V^D sur V.

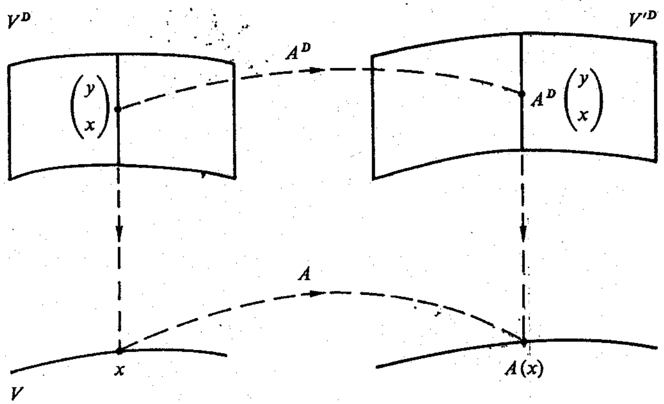


Fig. 1.II.

— Soit en particulier F une *carte* d'une variété V. Dans la formule

$$F^D \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(F)(x)(y) \\ F(x) \end{pmatrix}$$

x et y sont des éléments de R^n ; le couple $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ est donc un élément de R^{2n} ; ainsi F^D est un *système de coordonnées* de V^D ; on vérifie aisément que l'ensemble des F^D est un atlas (Définition (1.6)) ; ainsi :

(1.34) Si V est une variété de dimension n, V^D est une *variété de dimension* $2n$; l'ensemble des F^D (F étant une carte de V) est un *atlas* de V^D. Avec cette structure, la projection et les applications A^D (1.32) sont différentiables.

V^D pourra donc s'appeler désormais *variété des vecteurs tangents* à V.

VARIÉTÉS PLONGÉES

On démontre le théorème :

(1.35) Soient V et V' deux variétés de dimensions respectives n et n' (Fig. 1.III) ; soit A une application différentiable de V à V' ; soit x un point de def (A) ; soit r le rang de $D(A)(x)$.

1) Si $r = n$, il existe un ouvert E de V, contenant x, tel que A soit *régulier dans* E, et que $r = n$ en tout point de E.

2) Si $r = n'$, il existe un ouvert E' de V', contenant $A(x)$, tel que $E' \subset \mathrm{val}(A)$ [1].

3) Si $r = n = n'$, il existe un ouvert E, contenant x, tel que la restriction A' de A à E soit un *difféomorphisme*.

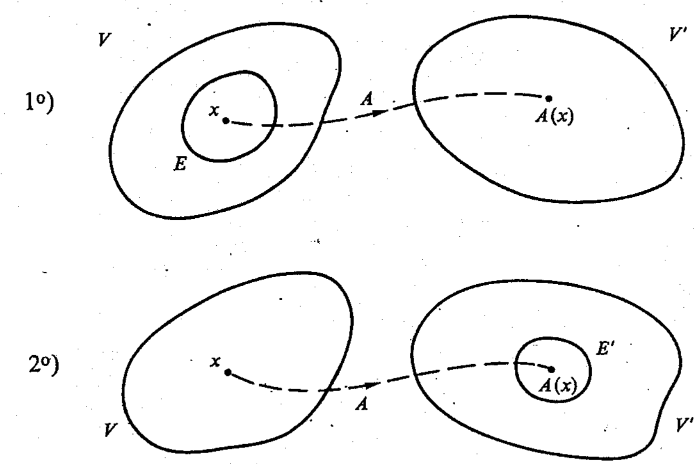


Fig. 1.III.

DÉFINITION

(1.36) Soient V et V' deux variétés. On appellera *plongement* de V *à* V' une application A de V à V', telle que

$$\begin{cases} A \text{ est différentiable} \\ A \text{ est régulière} \\ \text{pour tout } x \in \mathrm{def}(A),\ D(A)(x) \text{ est régulier.} \end{cases}$$

On établit immédiatement les résultats suivants :

[1] On dit que val (A) est un *voisinage* de $A(x)$; comme l'image par A d'un ouvert de V est un ouvert de V', on dit que A est une application *ouverte*.

(1.37) On dit qu'une variété V (de dimension n) est *plongée* dans une variété V' (de dimension n') si les cartes de V sont des plongements de R^n à V' (Fig. 1.IV) ; alors V est une *partie* de V' ; en tout point x de V, l'espace vectoriel tangent à V est un *sous-espace vectoriel*, de dimension n, de l'espace vectoriel tangent à V' ; on a donc $n \leqslant n'$.

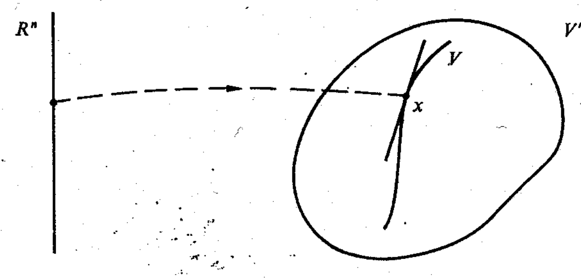


Fig. 1.IV.

(1.38) Soient V et V' deux variétés, de dimensions respectives n et n'. Si A est un plongement de V à V', l'ensemble $V'' = \text{val}\,(A)$ possède une structure de *variété plongée* dans V', caractérisée par le fait que A est un *difféomorphisme* de V à V'' ; les cartes de V'' sont les $A.F$, F étant une carte de V (Fig. 1.V).

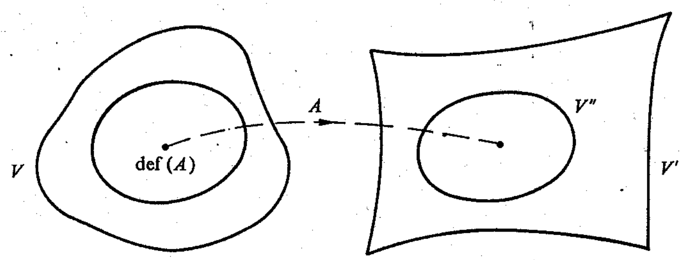


Fig. 1.V.

Exemples

(1.39) — Soit V' une variété. Il résulte de (1.35, 2) que toute variété V plongée dans V' et *de même dimension* que V' est un *ouvert* de V'.

Réciproquement, si V est un ouvert de V', 1_V est évidemment un plongement de V à V' ; par conséquent son ensemble de valeurs V est une *variété*, de dimension égale à celle de V'. On vérifie immédiatement que les cartes de V sont les cartes de V' dont l'ensemble de valeurs est contenu dans V. ■

Nous pourrons donc désormais considérer *tout ouvert non vide* d'une variété comme une *variété de même dimension*.

Variétés définies par une équation

On peut démontrer le théorème suivant :

Soient V et V' des variétés de dimension respectives n et n' ($n' < n$) ; soit A une application différentielle de V à V' ; soit y_0 un point de V' ; soit V_0 l'ensemble des points x de V vérifiant l'équation

(1.40) $$A(x) = y_0 \quad \text{(Fig. 1.VI)}.$$

— Si on a

$$\text{rang}\,(D(A)\,(x)) = n' \qquad \forall x \in V_0$$

V_0 possède une seule structure de *variété de dimension* $n - n'$, *plongée dans* V (1).

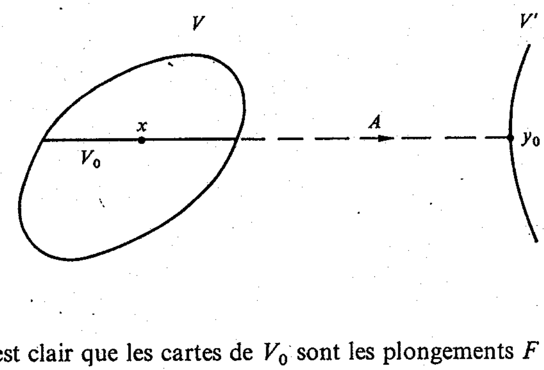


Fig. 1.VI.

— Il est clair que les cartes de V_0 sont les plongements F de $R^{n-n'}$ à V, vérifiant

$$A(F(\xi)) = y_0 \qquad \forall \xi \in \text{def}\,(F).$$

Le théorème (1.40) indique que ces cartes forment un atlas ; en dérivant l'équation précédente, le lecteur constatera que :

(1.40) (suite) L'espace vectoriel tangent à V_0 en x est le *noyau* de $D(A)\,(x)$.

(1.41) ***Exemple*** : Prenons $V = R^n$, $V' = R$, $A(x) \equiv \| x \|^2$, $y_0 = 1$. Alors V_0 est la *sphère* S_{n-1} ; nous avons déjà constaté que S_{n-1} possède une structure de dimension $n - 1$, et nous avons donné un atlas, composé de deux cartes (1.11) ; il est facile de vérifier que ces cartes sont des plongements, et de construire l'espace vectoriel tangent à la sphère en un point x. ■

(1) Voir aussi (5.12).

REVÊTEMENTS

Définition

(1.42) Soit V une variété ; on appelle *revêtement* de V un triplet (W, G, P) tel que :

a) W est une *variété* de même dimension que V ;
b) G est un *groupe* de permutations de W tel que

$$[g \in G,\ g(x) = x] \quad \Rightarrow \quad [g = 1_W] ;$$

c) P est une application différentiable de W sur V, telle que

$$D(P)(x) \text{ est régulier pour tout } x \in W ;$$
$$[P(x) = P(y)] \quad \Leftrightarrow \quad [\exists g \in G,\ y = g(x)] .$$

Dans ces conditions, le lecteur vérifiera facilement que

(1.43) *a*) Tout point x de W appartient à un ouvert E dont les images par les éléments de G sont deux à deux disjointes (Fig. VII et VIII) ;
b) Les éléments de G sont des difféomorphismes.

Variété quotient

— Soit réciproquement W un ensemble, G un groupe de permutations de W.

(1.44) — Rappelons qu'on appelle *orbite* suivant G d'un point x de W la partie $P(x)$ de W telle que

$$[y \in P(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\exists g \in G,\ y = g(x)]$$

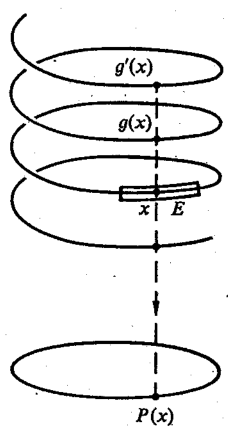


Fig. 1.VII.

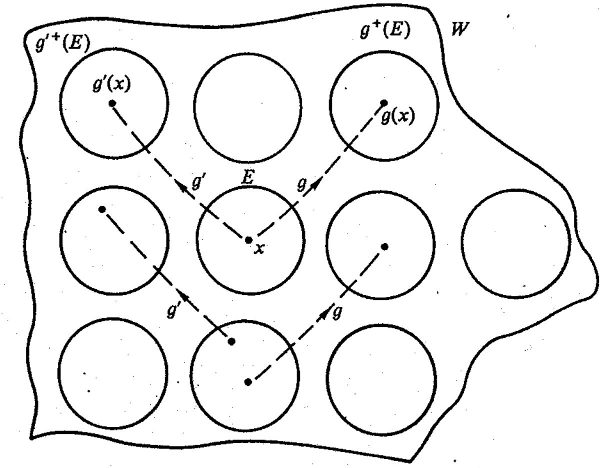


Fig. 1.VIII.

que

$$[y \in P(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [P(y) = P(x)]$$

et que l'ensemble val (P), noté W/G, s'appelle *quotient* de W par le groupe G.

(1.45) — Si W est une variété de dimension n, et si G vérifie les conditions (1.43) ci-dessus [1], on peut montrer que le quotient W/G peut être muni d'une structure de variété de dimension n, de façon que (W, G, P) soit un revêtement de W/G. Les applications régulières qui se mettent sous la forme $P.F$, F étant une carte de W, forment un *atlas de la variété quotient* W/G.

CONNEXITÉ

Définitions

(1.46) — Soit V une variété de dimension n ; une partie E de V s'appellera un *morceau* s'il existe une carte F telle que def $(F) = R^n$, val $(F) = E$.

Tout morceau est donc ouvert.

(1.47) — **Exemple :** On peut vérifier que les *boules* (non vides) de R^n sont des morceaux ; il en résulte que tout point d'une variété V est contenu dans un morceau de V.

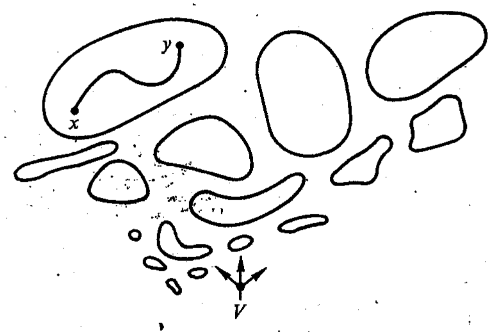
(1.48) Soit E un ouvert d'une variété V ; on dit que E est *connexe* si on ne peut pas décomposer E en somme de deux ouverts non vides [2].

[1] On dit alors que G est un *groupe discret de difféomorphismes*.
[2] On dit que E est *somme* de deux ensembles E_1 et E_2 si $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Exemple : On peut montrer que tout *morceau* est connexe.

(1.49) — On en déduit facilement que toute variété V se décompose en ouverts connexes, deux à deux sans point commun, appelés *composantes* de V ; cette décomposition est *unique* : la composante contenant un point x est la *réunion des ouverts connexes contenant x*. Une variété est donc connexe si elle n'a *qu'une composante*.

Fig. 1.IX.



(1.50) — On montre que tout *produit direct* de variétés connexes est connexe.

(1.51) — Si A est une application continue d'une variété connexe V dans une variété V', val (A) est contenu dans une seule composante de V'.

(1.52) — On montre aussi que deux points x et y appartiennent à une même composante s'il existe un *arc de courbe* de V joignant x et y, c'est-à-dire s'il existe une application continue F du segment $[0, 1]$ dans V, telle que $F(0) = x$, $F(1) = y$; l'arc val (F) est alors contenu tout entier dans cette composante.

HOMOTOPIE

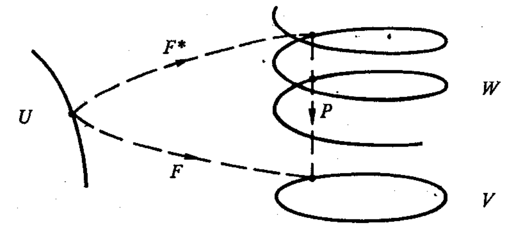
(1.53) On dit qu'une variété connexe U est *simplement connexe* si, pour toute application continue F de U dans une variété V, et pour tout revêtement (W, G, P) de V, F se factorise sous la forme

$$F = P.F^*,$$

F^* étant une application *continue* de U dans W (Fig. X).

(1.54) **Exemples :** On peut montrer que R est simplement connexe ; ■ qu'un produit direct de variétés simplement connexes est simplement connexe ; ■ que l'image val (A) d'une variété simplement connexe def (A) par un difféomorphisme A est simplement connexe ; il en résulte que tout morceau

Fig. 1.X.



est simplement connexe. ■ La sphère S_n aussi est simplement connexe pour $n \geqslant 2$, bien qu'elle ne soit pas un morceau. ■

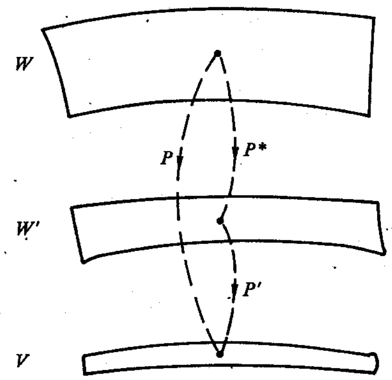
(1.55) Un revêtement (W, G, P) d'une variété V est dit *universel* si W est simplement connexe ; on peut montrer que *toute variété connexe possède un revêtement universel*.

(1.56) — Soit (W, G, P) un revêtement universel d'une variété V, et (W', G', P') un autre revêtement de V tel que W' soit connexe (Fig. XI).

On peut factoriser P sous la forme $P'.P^*$; on vérifie facilement que G possède un sous-groupe G^* tel que (W, G^*, P^*) soit un *revêtement* de W' ; que G^* est un sous-groupe invariant, et que le groupe G' est isomorphe au quotient G/G^*. On voit qu'un revêtement universel peut être considéré comme revêtement connexe *maximal*.

(1.57) — Si (W', G', P') est aussi un revêtement universel, on constate que P^* est régulier et que les groupes G et G' sont isomorphes ; le groupe G est donc défini, à un isomorphisme près, par la donnée de V : on l'appelle le *groupe d'homotopie* de la variété connexe V [1].

Fig. 1.XI.



[1] Ou encore *groupe fondamental*, ou *groupe de Poincaré*.

Exemples

(1.58) — Une variété simplement connexe est une variété *dont le groupe d'homotopie est réduit à l'élément neutre.* ■

(1.59) — Soit G le groupe (isomorphe au groupe additif Z des entiers) des g_k : $g_k(\varphi) = \varphi + 2\,k\pi \quad \forall \varphi \in R, \quad \forall k \in Z$; si on pose $P(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, (R, G, P) constitue un revêtement universel du cercle S_1 (notation 1.11) ; *le groupe d'homotopie de S_1 est donc Z.* ■

(1.60) — Si (W_j, G_j, P_j) sont des revêtements de variétés V_j $(j = 1, 2, ..., p)$, on en déduit immédiatement un « *revêtement produit* » $(W_1 \times \cdots \times W_p, G_1 \times \cdots \times G_p, P)$ du produit direct $V_1 \times \cdots \times V_p$; si les revêtements donnés sont universels, le produit l'est aussi ; *le groupe d'homotopie d'un produit direct est donc le produit direct des groupes d'homotopie.*

§ 2 DÉRIVATIONS

VARIABLES

Commençons par préciser la notion plus ou moins classique de variable, que nous allons utiliser tout au long de ce livre.

(2.1) Pour définir un système de variables, on commencera par choisir un ensemble E. On appelle ensuite *variable* un signe graphique quelconque — par exemple la lettre y — auquel on associe une application, application que nous désignerons en écrivant le mot valeur à gauche de ce signe (par exemple : valeur y) ; on suppose que cette application est définie sur une partie de E (soit E').

Si $a \in E'$, on aura donc défini l'objet

$$[\text{valeur } y]\,(a)$$

qui s'appelle *valeur de la variable y au point a.*

(2.2) — En particulier, on appelle *variable indépendante* une variable — mettons x — à laquelle est associée l'application identique de E :

$$[\text{valeur } x]\,(a) = a \qquad \forall a \in E \quad (^1)\,.$$

On emploie la notation

(2.3) $$y \equiv z$$

pour dire que les applications [valeur y] et [valeur z] sont égales, soit

$$[\text{valeur } y]\,(a) = [\text{valeur } z]\,(a)$$

pour tout a tel que l'un des membres de cette égalité existe.

— On convient qu'une expression algébrique F contenant des variables $y, z, \ldots$ est encore une variable, définie par la règle suivante :

(2.4) $$[\text{valeur } F(y, z, \ldots)]\,(a) = F(\text{valeur } y(a), \text{ valeur } z(a), \ldots) \quad \forall a \in E\,.$$

Comme cas particulier de cette règle, signalons le cas d'une expression algébrique *F ne contenant pas de variable* ; on a alors

(2.5) $$[\text{valeur } F]\,(a) = F \qquad \forall a\,;$$

on dit que la variable F ainsi définie est *constante*.

[1] L'objet [valeur y] (a) peut donc encore s'appeler : valeur de y lorsque la valeur de x est a.

(2.6) — Un autre cas particulier important est celui où l'expression algébrique F est susceptible de prendre les deux valeurs « vrai » ou « faux » ; si on remplace dans l'écriture de F certains objets par des variables, suivant la règle (2.4), on obtient une variable dite *booléenne* ; les variables booléennes s'appellent aussi *propositions*.

Exemple : Si x et y sont deux variables, l'écriture $x = y$ est une proposition ; il ne faut pas confondre cette écriture avec $x \equiv y$.

(2.7) On dit qu'une variable z est *fonction* d'une variable y s'il existe une application F telle que

$$z \equiv F(y) \qquad \text{(au sens (2.4))}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$[\text{valeur } z](a) = F(\text{valeur } y(a)) \qquad \forall a \in E$$

ou encore

$$[\text{valeur } z] = F \circ [\text{valeur } y] .$$

— Il est clair que cette application F est unique, si l'on précise que son ensemble de définition est compris dans l'ensemble de valeurs de y ; on la note souvent

(2.8)
$$y \mapsto z$$

si bien que l'application [valeur y] peut encore se noter

$$x \mapsto y ,$$

x étant la variable indépendante.

CHAMPS DE VECTEURS. DÉRIVATIONS

(2.9) — Soit V une variété ; on appelle *champ de vecteurs* de V une application f, définie sur une partie E de V telle que, pour tout $a \in E$, $f(a)$ soit un vecteur tangent à V en a :

$$[a \in \operatorname{def}(f)] \quad \Rightarrow \quad [f(a) \in D_a] .$$

Pour définir une *dérivation* d, on choisit une variété V, un champ de vecteurs f de V, et une variable x qui parcourt V (ce qui signifie que V est l'ensemble des valeurs de x [1]) ; à toute variable y telle que l'application $x \mapsto y$ existe et soit différentiable, on associe la nouvelle variable

(2.10)
$$\mathrm{d}y \equiv \mathrm{D}(x \mapsto y)(x)(f(x)) .$$

[1] $V = \operatorname{val}(\text{valeur } x)$.

Exemple : Si y est constante, on a

(2.11)
$$\mathrm{d}y \equiv 0 .$$

— En faisant $y \equiv x$ dans (2.10), on trouve

$$\mathrm{d}x = f(x) .$$

(2.12) On peut donc mettre *tout champ de vecteurs* sous la forme

$$x \mapsto \mathrm{d}x , \qquad \text{d étant une dérivation. } \blacksquare$$

— En appliquant la formule (1.23.6), on constate, si F est différentiable dans la variété où y prend ses valeurs, que

(2.13)
$$\boxed{\mathrm{d}[F(y)] \equiv \mathrm{D}(F)(y)(\mathrm{d}y)} .$$

Cette formule s'applique à *toute dérivation* d ; elle suppose que F est une fonction différentiable donnée — et non une variable.

Si $z \equiv F(y)$, on posera :

(2.14)
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} \equiv \mathrm{D}(F)(y)} \quad (^1)$$

si bien qu'on pourra écrire (2.13) sous la forme

(2.15)
$$\boxed{\mathrm{d}z \equiv \frac{\partial z}{\partial y}(\mathrm{d}y)} \qquad \text{si } y \mapsto z \text{ est différentiable .}$$

Notons que les formules (1.23.6) et (1.27) montrent que

(2.16)
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}} \qquad \text{si } x \mapsto y \text{ et } y \mapsto z \text{ sont différentiables}$$

et que

(2.17)
$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial z} \equiv \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{-1}} \qquad \text{si } y \mapsto z \text{ est un difféomorphisme.}$$

[1] Rappelons que $\mathrm{D}(F)(y)$ est un opérateur linéaire, appliquant l'espace vectoriel D_y dans l'espace vectoriel D_z.

— Soit x une variable dont les valeurs appartiennent à un *produit direct* de variétés ; en faisant apparaître les projections ${}^{j}|$ (voir (1.20)) :

(2.18) $$ {}^{j}x \equiv {}^{j}|\,(x) $$

on constate — grâce à (1.23, 4) que

(2.19) $$\boxed{\mathrm{d}\begin{pmatrix} {}^{1}x \\ \cdots \\ {}^{p}x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,{}^{1}x \\ \cdots \\ \mathrm{d}\,{}^{p}x \end{pmatrix}} \qquad \text{pour toute dérivation d ;}$$

l'espace vectoriel tangent à un produit direct est le produit direct des espaces vectoriels tangents.

Si $y \mapsto x$ est une application différentiable *à valeurs dans un produit direct*, la formule (2.19) pourra s'écrire matriciellement

(2.20) $$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} {}^{1}x \\ \cdots \\ {}^{p}x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\,{}^{1}x}{\partial y} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial\,{}^{p}x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

— Dans le cas d'une application différentiable $x \mapsto y$ *définie dans un produit direct*, $\mathrm{d}y$ (qui dépend linéairement de $\mathrm{d}x$) pourra se mettre sous la forme (appelée souvent « différentielle totale »)

(2.21) $$\boxed{\mathrm{d}y \equiv \frac{\partial y}{\partial\,{}^{1}x}(\mathrm{d}\,{}^{1}x) + \cdots \frac{\partial y}{\partial\,{}^{p}x}(\mathrm{d}\,{}^{p}x)}$$

les $\dfrac{\partial y}{\partial\,{}^{j}x}$, définis par cette formule, étant les *dérivées partielles* ; matriciellement, cette formule s'écrit

(2.22) $$\frac{\partial y}{\partial x} = \left[\frac{\partial y}{\partial[{}^{1}x]} \;\cdots\; \frac{\partial y}{\partial[{}^{p}x]}\right].$$

Ceci s'applique si $x \in R^{n}$. On retrouve alors la notion classique de dérivée partielle. Dans ce cas particulier, il est commode de définir les *dérivations* ∂_j en posant

(2.23) $$\partial_j x \equiv |_j \qquad \text{(notation (1.29)).}$$

On pourra écrire $\partial_j y$ au lieu de $\dfrac{\partial y}{\partial[{}^{j}x]}$; avec cette notation, on peut utiliser les propriétés des dérivations. Dans le cas où $x \mapsto X$ est une *carte* d'une variété, notons que la base S associée (1.28) est donnée par $S = \dfrac{\partial X}{\partial x}$, donc que *les vecteurs de base sont*

(2.24) $$S_j \equiv S(|_j) \equiv \frac{\partial X}{\partial x}(\partial_j x) \equiv \partial_j X.$$

— Si $x \mapsto y$ est une application différentiable d'un *produit direct à un produit direct*, les résultats précédents permettent d'écrire

(2.25) $$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\,{}^{1}y}{\partial\,{}^{1}x} & \cdots & \dfrac{\partial\,{}^{1}y}{\partial\,{}^{p}x} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\,{}^{p'}y}{\partial\,{}^{1}x} & \cdots & \dfrac{\partial\,{}^{p'}y}{\partial\,{}^{p}x} \end{bmatrix}.$$

— Si $x \in R^{p}$, $y \in R^{p'}$, les éléments de cette matrice (2.25) sont des nombres réels, qui peuvent s'écrire

$$ {}^{j}\!\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_k \equiv {}^{j}\Big|\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\Big|_k \equiv \frac{\partial\,{}^{j}y}{\partial\,{}^{k}x} \equiv \partial_k\,{}^{j}y.$$

Dérivation des opérateurs linéaires

Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie ; soit x une variable qui parcourt E, et A une variable qui parcourt l'espace vectoriel des applications *linéaires* de E dans E'. On vérifie immédiatement que l'application

$$\begin{pmatrix} A \\ x \end{pmatrix} \mapsto A(x)$$

est différentiable, et que l'on a

(2.26) $$\boxed{\mathrm{d}[A(x)] \equiv [\mathrm{d}A](x) + A(\mathrm{d}x)}$$

ce qui se réduit à $\mathrm{d}[A(x)] \equiv A(\mathrm{d}x)$ si A est constante.

— Supposons maintenant A bilinéaire (variable) ; on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[A(x)(y)] &\equiv \mathrm{d}[A(x)](y) + A(x)(\mathrm{d}y) \equiv [\mathrm{d}A(x) + A(\mathrm{d}x)](y) + A(x)(\mathrm{d}y) \\ &\equiv [\mathrm{d}A](x)(y) + A(\mathrm{d}x)(y) + A(x)(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

et plus généralement, pour un opérateur p fois linéaire A

(2.27)
$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}[A(x_1)(x_2)\ldots(x_p)] \equiv [\mathrm{d}A](x_1)\ldots(x_p) &+ A(\mathrm{d}x_1)(x_2)\ldots(x_p) \\ &+ \cdots \\ &+ A(x_1)\ldots(x_{p-1})(\mathrm{d}x_p) \end{aligned}}\,.$$

Cette formule a de très nombreuses applications :

(2.28)
$$\mathrm{d}[A.B] \equiv \mathrm{d}A.B + A.\mathrm{d}B$$

A et B étant des opérateurs linéaires variables ;
si A est une application linéaire variable, régulière, d'un espace dans un espace de même dimension, on déduit de (2.27) les formules

(2.29)
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}[\det(A)]}{\det(A)} \equiv \mathrm{Tr}\,(A^{-1}.\mathrm{d}A)}\,,$$

(2.30)
$$\boxed{\mathrm{d}[A^{-1}] \equiv -\,A^{-1}.\mathrm{d}A.A^{-1}}\,.$$

IMAGES D'UN CHAMP DE VECTEURS

(2.31) Soit f un champ de vecteurs d'une variété V ; le *graphe* Γ du champ est par définition l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} f(x) \\ x \end{pmatrix}$; c'est donc une partie de la variété des vecteurs tangents, que nous avons notée V^D (voir (1.31) et (1.34)) ;

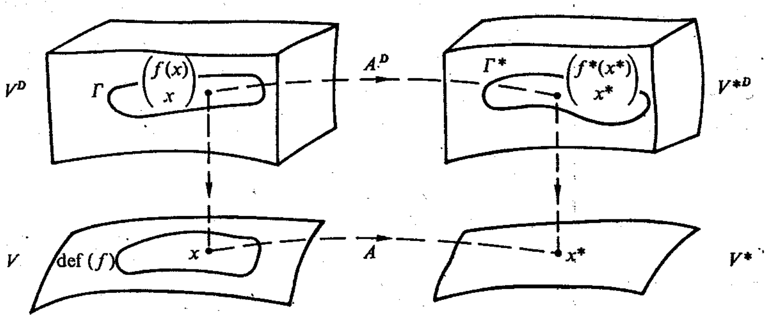


Fig. 2.I.

comme ce graphe comporte un point au plus au-dessus d'un point x de V, on dit que c'est une *section* de V^D.

Supposons que A soit une application différentiable de V à une variété V^* ; désignons par Γ^* l'image du graphe Γ par A^D ; si A est régulière, on constate immédiatement que Γ^* est aussi une section, donc le graphe d'un champ f^* de V^* ; nous dirons que f^* est l'*image par A du champ f*, et nous poserons

(2.32)
$$f^* = A_+(f)\,.$$

On vérifie immédiatement, en prenant l'image de f par une autre application régulière différentiable B, que

(2.33)
$$[A.B]_+(f) = A_+(B_+(f))\,.$$

En remplaçant A par l'inverse d'un difféomorphisme B (de V^* à V)
(2.34) on définira *l'image réciproque $B_-(f)$ d'un champ f par un difféomorphisme B* comme étant $[B^{-1}]_+(f)$; notons les formules

(2.35)
$$[A.B]_-(f) = B_-(A_-(f))$$

(2.36)
$$B_+(B_-(f)) = f \qquad \text{si } \operatorname{def}(f) \subset \operatorname{def}(B^{-1})\,.$$

(2.37) Notons, ce qui est important pour le calcul pratique de $A_+(f)$, que l'image d'un champ de vecteurs $x \mapsto \mathrm{d}x$ par une application régulière $x \mapsto x^*$, est le champ de vecteurs $x^* \mapsto \mathrm{d}x^*$.

C'est plus simple que la formulation directe en champs, qui s'écrit

(2.38)
$$\boxed{A_+(f)(x^*) \equiv D(A)(A^{-1}(x^*))\,f(A^{-1}(x^*))}\,.$$

— Si V est un espace vectoriel, tout champ de vecteurs f est une application de V à V ; on sait donc reconnaître si f est continu, ou différentiable ; mais ceci n'est plus possible dans le cas général d'une variété, parce que l'espace vectoriel tangent D_x, qui contient $f(x)$, *varie avec x* ; on se tire d'affaire en convenant que

(2.39) un champ de vecteurs f est dit continu (resp. différentiable) si l'application

$$x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ x \end{pmatrix}$$

est continue (resp. différentiable).

En effet, l'application considérée va de V à V^D, qui sont des variétés (voir (1.34)) et on peut lui appliquer les définitions (1.15), (1.17).

(2.40) — On vérifie immédiatement qu'un *champ de vecteurs différentiable* est défini sur un ouvert, et que ses images (ou ses images réciproques) par des difféomorphismes sont différentiables [1].

(2.41) — Pour vérifier qu'un champ de vecteurs est différentiable, (resp. continu) il suffit de vérifier que ses images réciproques par les cartes d'un atlas sont différentiables (resp. continues).

(2.42) — Donnons-nous deux champs de vecteurs f et f^*, définis sur deux variétés V et V^* de même dimension. On peut se demander si ces champs de vecteurs sont *équivalents* c'est-à-dire s'il existe un difféomorphisme A tel que $f^* = A_+(f)$. Un problème voisin est de savoir si f et f^* sont *localement équivalents* en un couple de points (x_0, x_0^*), c'est-à-dire s'il existe un difféomorphisme A, tel que

$$A(x_0) = x_0^*$$

et que f^* coïncide avec $A_+(f)$ *dans un ouvert contenant* x_0^*.

Des réponses partielles à ce problème sont données par les théorèmes suivants :

(2.43) Soit f un champ de vecteurs *constant*, non nul, de R^n ; pour que f soit localement équivalent à un champ différentiable f^* d'une variété de dimension n, en un couple de points (x_0, x_0^*), il faut et il suffit que $f^*(x_0^*) \neq 0$.

(2.44) Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; f est un champ de vecteurs différentiable de E. Pour que f soit localement équivalent au champ $x \mapsto x$ de E, en le couple de points (0, 0), il faut et il suffit que

$$\begin{cases} f(0) = 0\,, \\ D(f)\,(0) = 1_E\,. \end{cases}$$

CROCHET DE LIE

THÉORÈME

(2.45) Soient $x \mapsto \mathrm{d}x$ et $x \mapsto \delta x$ deux champs de vecteurs différentiables sur un ouvert E d'une variété V.

[1] Son image par une application différentiable qui n'est pas un difféomorphisme peut ne pas être différentiable, ni d'ailleurs définie sur un ouvert.

(2.45) Il existe alors une dérivation, appelée *crochet de Lie* de d et δ, notée [d, δ] [1] ; [d, δ] y est définie si l'application $x \mapsto y$ est différentiable ; si y parcourt un *espace vectoriel constant* [2], on a

$$\Diamond \qquad \boxed{[\mathrm{d}, \delta]\, y \equiv \mathrm{d}[\delta y] - \delta[\mathrm{d}y]}\,.$$

— Soit $F[\xi \mapsto x]$ une carte de V ; on déduit immédiatement de ◇ la formule

(2.46)
$$[\mathrm{d}, \delta]\, x = \frac{\partial x}{\partial \xi}(\mathrm{d}\delta\xi - \delta\mathrm{d}\xi) \qquad \text{si} \qquad x \in \mathrm{val}\,(F)$$

qui permet de *calculer* le crochet de Lie, et qui montre que $x \mapsto [\mathrm{d}, \delta]\, x$ est aussi un *champ de vecteurs différentiables sur E* ; nous le noterons $[f, g]$, f et g étant les champs $x \mapsto \mathrm{d}x$, $x \mapsto \delta x$.

— Les champs de vecteurs différentiables sur E constituent évidemment un espace vectoriel ; on constate que le crochet de Lie est bi-linéaire et antisymétrique ; on peut vérifier l'*identité de Jacobi*

(2.47)
$$\boxed{[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0}\,.$$

— Soit A un difféomorphisme de E sur un ouvert E^* d'une variété V^* ; posons $x^* \equiv A(x)$. Les champs de vecteurs $x^* \mapsto \mathrm{d}x^*$, $x^* \mapsto \delta x^*$, $x^* \mapsto [\mathrm{d}, \delta]\, x^*$ sont respectivement les *images* par A de f, g, et $[f, g]$; d'où la formule

(2.48)
$$\boxed{[A_+(f), A_+(g)] = A_+([f, g])}\,.$$

(2.49) — On dit que deux dérivations d et δ *commutent* si leur crochet de Lie est nul ; on a alors $\mathrm{d}[\delta y] \equiv \delta[\mathrm{d}y]$ pour toute variable y qui prend ses valeurs dans un espace vectoriel constant. C'est le cas notamment pour les dérivations ∂_j définies en (2.23), prises deux à deux, puisque

$$[\partial_j, \partial_k]\, x \equiv \partial_j|_k - \partial_k|_j \equiv 0\,.$$

[1] Nous écrirons parfois $[\mathrm{d}, \delta]_L$.
[2] Si y parcourt une variété, $\mathrm{d}\delta y$ et $\delta\mathrm{d}y$ *peuvent ne pas exister* ; mais le premier membre de ◇ existe néanmoins.

§ 3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EXPONENTIELLE D'UN CHAMP DE VECTEURS

On peut démontrer le théorème fondamental suivant :

Soit V une variété *séparée* (1).

(3.1) Il existe une application, notée exp, qui fait correspondre à tout champ de vecteurs différentiable f de V une application (2) $\exp(f)$ de V à V, telle que, $\forall f$:

a) $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \exp(tf)\,(x)$ est une application différentiable de $R \times V$ à V (3) ;

b) $[\mathrm{d}x = 0] \;\Rightarrow\; \mathrm{d}[\exp(tf)\,(x)] = f(\exp(tf)\,(x))\,\mathrm{d}t$ (4) ;

c) $\exp(0f) = 1_{\mathrm{def}(f)}$;

d) $\exp(-f) = [\exp(f)]^{-1}$;

e) $\exp(tf) \circ \exp(t'f) = \exp([t + t']f) \quad$ si $\quad tt' \geqslant 0$.

Il est facile d'en déduire le résultat suivant :

Soit f un champ de vecteurs différentiable sur une variété séparée ; soit x_0 un point de def (f), et t_0 un nombre réel.

(1) On dit qu'une variété V est *séparée* si, pour tout couple (x, y) de points distincts de V, il existe un ouvert contenant x et un ouvert contenant y dont l'intersection est vide. Exemples : R^n, une sphère. Nous rencontrerons plus loin des exemples de variétés non séparées (5.18).

(2) Eventuellement impuissante.

(3) On note tf *le produit du champ de vecteurs* f *par* le nombre t, défini par

$$[tf]\,(x) = t[f(x)]$$

En particulier $0f$ est le champ de vecteurs nul sur l'ensemble de définition de f.

(4) On peut écrire aussi bien

$$\frac{\partial}{\partial t}[\exp(tf)\,(x)] \equiv f(\exp(tf)\,(x))$$

le premier membre étant une dérivée *partielle*.

Si l'on pose

$$\diamondsuit \qquad \Phi(t) \equiv \exp([t - t_0]\,f)\,(x_0)$$

(3.2) l'application Φ vérifie les conditions suivantes :

$$\heartsuit \qquad \begin{cases} \Phi \text{ est définie sur un intervalle ouvert ;} \\ \Phi(t_0) = x_0 \\ x \equiv \Phi(t) \text{ vérifie l'}\textit{équation différentielle } \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv f(x) \end{cases}$$

réciproquement toute application Φ vérifiant $\heartsuit$ vérifie $\diamondsuit$ pour tout $t \in \mathrm{def}\,(\Phi)$.

— On voit que ce théorème permet de *calculer* l'application exp ; pour que $\exp(f)\,(x)$ existe, il faut et il suffit qu'il existe une solution Φ de l'équa-

(3.3) tion différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv f(x)$, définie sur un intervalle contenant $[0, 1]$, et telle que $\Phi(0) = x$; cette solution est alors *unique*, et l'on a

$$\exp(f)\,(x) = \Phi(1)\,;$$

par suite l'énoncé (3.1) est une *définition de* exp.

Exemples

(3.4) — Si E est un espace vectoriel de dimension finie, l'application identique 1_E peut être considérée comme champ de vecteurs différentiables de E ; en intégrant l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv x$, on trouve que

$$\exp(t\,1_E) = \mathrm{e}^t\,1_E$$

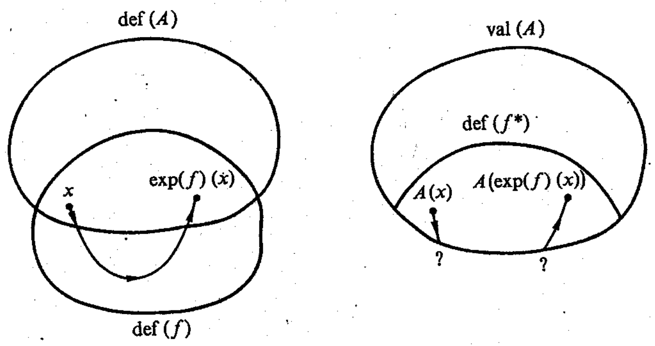
ce qui explique la notation exp. ∎

(3.5) — Plus généralement, si A est une application linéaire de E dans E, on vérifie que $\exp(A)$ est aussi une application linéaire (voir 6.17). ∎

IMAGE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Soit A un difféomorphisme de V à une variété V^* ; si x vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv f(x)$, on constate que $x^* \equiv A(x)$ vérifie $\dfrac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t} \equiv f^*(x^*)$, avec $f^* = A_+(f)$ (notation (2.32)) ; mais l'application $t \mapsto x^*$

Fig. 3.I.



n'est nécessairement définie sur un intervalle que si def $(f) \subset$ def (A) (Fig. I) ; on en déduit la formule

(3.6) $$\begin{cases} A.\exp(f).A^{-1} \text{ est un prolongement de } \exp(A_+(f)) ; \\ A.\exp(f).A^{-1} = \exp(A_+(f)) \quad \text{si} \quad \text{def}\,(f) \subset \text{def}\,(A) . \end{cases}$$

Dérivation de l'exponentielle

— Soient f et g deux champs de vecteurs différentiables ; supposons

$$\text{def}\,(f) \subset \text{def}\,(g) .$$

Soit $\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}$ une variable qui décrit $R \times V$. Posons $x \equiv \exp(-\,tf)\,(y)$; $\delta\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ g(y) \end{pmatrix}$; $d\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ f(y) \end{pmatrix}$.

La définition (2.32) de l'image d'un champ par un difféomorphisme montre que $\delta x \equiv [\exp(-\,tf)]_+\,(g)\,(x)$; en dérivant $y \equiv \exp(tf)\,(x)$ avec la dérivation d, on trouve $dx \equiv 0$.

On trouve d'autre part $[d, \delta]\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ [f, g]\,(y) \end{pmatrix}$, d'où

$$[d, \delta]\,x \equiv [\exp(-\,tf)]_+\,([f, g])\,(x) .$$

Dans le cas où V est un espace vectoriel, on a $[d, \delta]\,x \equiv d[\delta x] - \delta[dx] \equiv d\delta x$; en développant, on trouve la formule (1)

(3.7) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\,\{\,[\exp(-\,tf)]_+\,(g)\,(x)\,\} \equiv [\exp(-\,tf)]_+\,([f, g])\,(x)} .$$

(1) $\dfrac{\partial}{\partial t}$ désigne ici la dérivée par rapport à t, x étant constant.

Dans le cas d'une variété quelconque V, notons que $[\exp(-\,tf)]_+\,(g)\,(x)$ décrit l'espace vectoriel *constant* D_x lorsque t varie seul, x étant constant ; on peut donc calculer la dérivée écrite au premier membre de (3.7) ; on peut montrer que la formule *reste vraie* (1).

— Supposons maintenant le crochet de Lie $[f, g]$ *nul* ; on vérifie que

$$\exp(-\,tf)_+\,(g)\,(x)$$

est défini si $\exp(tf)\,(x)$ existe, donc lorsque t décrit un intervalle contenant 0 (voir (3.2)) ; sa dérivée étant nulle, il est égal à sa valeur pour $t = 0$; d'où la formule

(3.8) $$[\exp(-\,tf)]_+\,(g)\,(x) = g(x)$$

si le premier membre existe, si def $(f) \subset$ def (g), et si $[f, g] = 0$.

Notons que cette formule s'écrit aussi

(3.9) $$g(\exp(tf)\,(x)) = D(\exp(tf))\,(x)\,(g(x)) \qquad ([f, g] = 0)$$

ce qui permet le calcul de $D(\exp(tf))\,(x)$.

THÉORÈME (2)

(3.10) Soient $f_1, \ldots, f_p$ des champs de vecteurs différentiables dans un ouvert E d'une variété V, et *dont les crochets de Lie mutuels sont nuls* ; soit x un point de E. Il existe alors des nombres positifs $a_1, \ldots, a_p$, tels que

$$\exp({}^1t\,f_1 + \cdots + {}^pt\,f_p)\,(x)$$

existe si

◇ $$|\,{}^1t\,| < a_1, \ldots, |\,{}^pt\,| < a_p .$$

On a dans ce cas

♡ $$\exp({}^1tf_1 + \cdots + {}^ptf_p)\,(x) = [\exp({}^1tf_1) \circ \cdots \circ \exp({}^ptf_p)]\,(x) .$$

On vérifie immédiatement que l'on peut, au second membre, *permuter de façon arbitraire* les facteurs $\exp({}^1tf_1), \ldots, (\exp({}^ptf_p)$ sans changer le résultat (3).

(1) En choisissant une carte au voisinage de x, et en appliquant les formules (2.48), (3.6).
(2) On peut établir ce résultat en utilisant (3.8) et (3.6).
(3) Cependant il existe des cas où ces applications *ne commutent pas* ; il faut faire attention aux conditions de validité du théorème.

§ 4 FORMES DIFFÉRENTIELLES

CHAMPS COVARIANTS

Soit E un espace vectoriel ; nous appellerons *opérateur covariant de degré p* de E une application φ telle que (¹)

(4.1) $$\varphi(y_1)(y_2)\ldots(y_p) \in R \qquad [\forall y_1, y_2, \ldots, y_p \in E]$$

dans le cas $p = 1$, φ est simplement une application de E à R ; on convient d'appeler opérateurs covariants *de degré* 0 les *nombres réels*.

(4.2) — Si φ est un opérateur covariant de degré p ($p \geqslant 1$), et si $y \in E$, il est clair (grâce à la convention sur les crochets sous-entendus) que $\varphi(y)$ est un opérateur covariant de degré $p - 1$; on l'appelle *contracté* de φ par y.

— Soit x une variable qui parcourt une variété V ; nous dirons qu'une application

(4.3) $$x \mapsto \varphi$$

définie dans une partie de V est un *champ covariant* (de degré p) si φ est un *opérateur covariant* (de degré p) de *l'espace vectoriel tangent* D_x (²).

(4.4) — Il est clair qu'un champ covariant de degré 0 — encore appelé *champ scalaire* — est une application de V à R.

Image réciproque d'un champ covariant

Soit f^* un champ covariant de degré p d'une variété V^* ; soit A une application différentiable d'une variété V à V^* ; posons

(4.5) $$A_-(f^*)(x)(y_1)\ldots(y_p) = f^*(A(x))\,(D(A)(x)(y_1))\ldots(D(A)(x)(y_p)),$$
$$\forall x \in V, \forall y_1, \ldots, y_p \in D_x;$$

il est clair que $A_-(f^*)$ est un champ covariant de degré p de V ; $A_-(f^*)$ s'appelle *image réciproque* du champ f^* par A.

(¹) Avec cette notation, on sous-entend des crochets partant de la gauche :

$$[\ldots[[\varphi(y_1)](y_2)]\ldots](y_p).$$

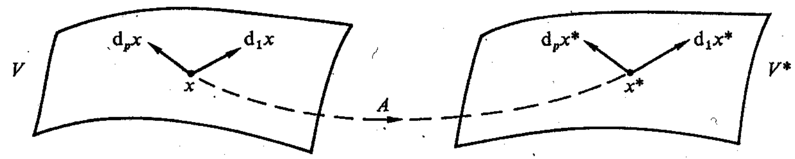
(²) On dit parfois que φ est une *forme différentielle* ; nous réserverons cette expression à un cas particulier (ci-dessous (4.26)).

— Introduisons des variables x^*, φ^*, φ et des dérivation d_j telles que $x^* \equiv A(x)$; $\varphi^* \equiv f^*(x^*)$; $\varphi \equiv A_-(f^*)(x)$; $\mathrm{d}_j x \equiv y_j$; on voit que l'image réciproque du champ covariant $x^* \mapsto \varphi^*$ par l'application $x \mapsto x^*$ est le champ covariant $x \mapsto \varphi$ défini par

(4.6) $$\varphi(\mathrm{d}_1 x)\ldots(\mathrm{d}_p x) \equiv \varphi^*(\mathrm{d}_1 x^*)\ldots(\mathrm{d}_p x^*)$$

cette formule (4.6), simple transcription de (4.5), est plus facile à retenir.

Fig. 4.I.



— Dans le cas $p = 0$, ces formules se réduisent évidemment à

(4.7) $$A_-(f) = f \circ A, \quad \varphi^* \equiv \varphi.$$

— En composant deux applications différentiables A et B, on trouve immédiatement la formule (analogue à (2.35))

(4.8) $$[A.B]_-(f) = B_-(A_-(f))$$

valable cette fois-ci dans le cas d'un champ covariant f.

— La définition (4.5), (4.6) de l'image réciproque de f par A *ne suppose pas* que A est un difféomorphisme, ni même que les variétés V et V^* ont la même dimension.

— *Si A est un difféomorphisme*, nous pouvons poser

(4.9) $$A_+(f) = [A^{-1}]_-(f)$$

$A_+(f)$ s'appelle *image directe* du champ covariant f par A. On a évidemment

(4.10) $$[A.B]_+(f) = A_+(B_+(f))$$

si A et B sont des difféomorphismes et

(4.11) $$B_+(B_-(f)) = f \qquad \text{si} \qquad \operatorname{def}(f) \subset \operatorname{def}(B^{-1})$$

(cf. (2.33) à (2.36)).

(4.12) — Si $x \mapsto \mathrm{d}x$ est un champ de vecteurs, son image directe par un difféomorphisme $x \mapsto x^*$ est le champ $x^* \mapsto \mathrm{d}x^*$ (2.37) ; si $x^* \mapsto \varphi^*$ est un champ covariant de degré p ($p \geqslant 1$), la formule (4.6) montre que *l'image réciproque du champ contracté $x^* \mapsto \varphi^*(\mathrm{d}x^*)$ est le champ contracté $x \mapsto \varphi(\mathrm{d}x)$.*

(4.13) — Un champ g d'opérateurs covariant de degré p, défini dans un espace vectoriel E, sera dit *différentiable* si l'application (de E^{p+1} à R)

$$\begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \mapsto g(x)\,(y_1)\,\ldots\,(y_p)$$

est différentiable ; si g est défini dans une variété V, g sera dit différentiable si ses images réciproques par les cartes de V sont différentiables ; dans ce cas, g est défini sur un ouvert de V.

(4.14) — On vérifie que l'image réciproque d'un champ différentiable par une application différentiable est encore un champ différentiable.

DÉRIVÉE DE LIE

THÉORÈME

(4.15) Soient f et g des champs différentiables (de vecteurs et d'opérateurs covariants de degré p respectivement) définis dans un ouvert E.
Il existe un champ d'opérateurs covariants de degré p, défini dans E, appelé *dérivée de Lie* du champ g par le champ f, que nous noterons $[f, g]$, tel que

$$\frac{\partial}{\partial t}\,[\exp(tf)_-\,(g)\,(x)\,(d_1 x)\,\ldots\,(d_p x)] \equiv \exp(tf)_-\,([f, g])\,(x)\,(d_1 x)\,\ldots\,(d_p x)\,.$$

— Comme dans la formule (3.7), la notation $\dfrac{\partial}{\partial t}$ au premier membre désigne la dérivation par rapport à t, les variables x, $d_1 x$, ..., $d_p x$ étant supposées constantes. La notation $[f, g]$, qui rappelle le crochet de Lie, est justifiée par l'analogie de (3.7) et (4.15). Nous employerons concurremment une seconde notation :

(4.16)
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si} \quad f(x) \equiv dx,\ g(x) \equiv \varphi, \quad \text{nous poserons} \\[4pt] d_L\varphi \equiv [f, g]\,(x) \end{array}}$$

pour un même champ $x \mapsto \varphi$, nous pourrons donc définir plusieurs dérivées de Lie $d_L\varphi$, $\delta_L\varphi$, ... si $x \mapsto dx$, $x \mapsto \delta x$, ... sont divers champs de vecteurs différentiables.

— En appliquant l'écriture (4.16) au cas d'un champ de vecteurs $x \mapsto \varphi$, on sera amené à écrire

(4.17)
$$\boxed{d_L\,\delta x \equiv [d, \delta]\,x}$$

le crochet de Lie (2.45) peut donc s'interpréter comme une dérivée de Lie.

— Dans le cas $p = 0$, c'est-à-dire si $x \mapsto \varphi$ est un champ *scalaire*, on trouve immédiatement

(4.18)
$$\delta_L\varphi \equiv \delta\varphi$$

pour toute dérivation δ telle que le premier membre existe.

CHAMPS DE TENSEURS COVARIANTS

(4.19) Un opérateur covariant de degré p, φ, défini sur un espace E, s'appelle un *tenseur* covariant si $\varphi(y_1)\ldots(y_p)$ dépend linéairement de chacun des vecteurs $y_1, \ldots, y_p$ (on dit aussi que φ est un opérateur *multilinéaire*).
Si S est une base de E on appelle *composantes du tenseur* φ *dans la base* S les nombres

(4.20)
$$\boxed{\varphi_{jk\ldots m} = \varphi(S_j)\,(S_k)\,\ldots\,(S_m)}\,.$$

Les composantes du tenseur le définissent complètement ; la multi-linéarité montre en effet que

(4.21)
$$\boxed{\varphi(y)\,(z)\,\ldots\,(u) = \varphi_{jk\ldots m}\,{}^j y\,{}^k z\,\ldots\,{}^m u}$$

où les nombres ${}^j y$, ${}^k z$, ..., ${}^m u$ sont les composantes des vecteurs $y, z, \ldots, u$ dans la base S $(y = \sum_j S_j\,{}^j y, \ldots, u = \sum_m S_m\,{}^m y)$; dans la formule (4.21) nous avons appliqué la *convention d'Einstein*, selon laquelle le signe $\sum_{jk\ldots m}$ est sous-entendu (au second membre) parce que les indices $j, k, \ldots, m$ sont écrits chacun deux fois (en position inférieure et en position supérieure).

— Si $x \mapsto X$ est une carte d'une variété V, et $X \mapsto \varphi$ un *champ de tenseurs covariants* (de degré p), on désigne habituellement par

$$\varphi_{jk\ldots m}$$

les composantes du tenseur φ dans la base $S \equiv \dfrac{\partial X}{\partial x}$; en posant comme en (2.23)

$$\partial_j x \equiv |_j ,$$

d'où $\partial_j X \equiv S_j$, on a donc

(4.22)
$$\boxed{\varphi_{jk\dots m} \equiv \varphi(\partial_j X)\,(\partial_k X)\,\dots\,(\partial_m X)}\,.$$

(4.23) — Soient $x \mapsto \varphi$ un champ de tenseurs d'ordre p ($p \geqslant 1$) ; $x \mapsto \mathrm{d}x$ un champ de vecteurs ; il est clair que l'on obtient par contraction un *champ de tenseurs d'ordre* $p - 1$,

$$x \mapsto \varphi(\mathrm{d}x)\,;$$

si $x \mapsto \varphi$ et $x \mapsto \mathrm{d}x$ sont différentiables, ce champ est aussi différentiable. On établit la formule importante

(4.24)
$$\boxed{\delta_L[\varphi(\mathrm{d}x)] \equiv [\delta_L \varphi]\,(\mathrm{d}x) + \varphi(\delta_L\,\mathrm{d}x)}$$

où $x \mapsto \delta x$ désigne aussi un champ différentiable de vecteurs. Par itération, on en déduit la formule

(4.25)
$$\boxed{\begin{aligned}\delta[\varphi(\mathrm{d}_1 x)\dots(\mathrm{d}_p x)] \equiv [\delta_L\varphi]\,(\mathrm{d}_1 x)\dots(\mathrm{d}_p x)&\\ + \varphi(\delta_L\,\mathrm{d}_1 x)\dots(\mathrm{d}_p x)&\\ + \cdots&\\ + \varphi(\mathrm{d}_1 x)\dots(\delta_L\,\mathrm{d}_p x)&\end{aligned}}$$

facile à se rappeler à cause de son analogie avec (2.27) ; au premier membre nous avons pu supprimer un indice L à cause de (4.18) ; cette formule peut être utilisée pour calculer la dérivée de Lie $\delta_L\varphi$ en la tirant du second membre.

p-FORMES

(4.26) — Supposons maintenant qu'un tenseur φ covariant d'ordre p soit *antisymétrique*, c'est-à-dire que

$$\varphi(\mathrm{d}_1 x)\,(\mathrm{d}_2 x)\,\dots\,(\mathrm{d}_p x)$$

change de signe chaque fois que l'on intervertit deux des vecteurs $\mathrm{d}_1 x$, $\mathrm{d}_2 x$, …, $\mathrm{d}_p x$ [1].

Nous dirons dans ce cas que φ est une *forme extérieure de degré p* — en abrégé une *p-forme*.

(4.27) — On peut reconnaître qu'un tenseur φ est antisymétrique à ce que ses composantes

$$\varphi_{jk\dots m}$$

changent de signe quand on échange les valeurs de deux des indices $j, k, \dots, m$; elles sont donc nulles si deux de ces indices sont égaux.

(4.28) — On considère comme 1-formes tous les tenseurs covariants de degré 1 (aussi appelés *covecteurs*), et comme 0-forme les *scalaires* (voir (4.4)) ; pour $p = 0$ ou 1, en effet, la condition d'antisymétrie perd sa signification.

(4.29) — Si φ est une p-forme ($p \geqslant 1$) et $\mathrm{d}x$ un vecteur, il est clair que le tenseur contracté $\varphi(\mathrm{d}x)$ est une $[p-1]$-forme ; on l'appelle parfois *produit intérieur* de φ par $\mathrm{d}x$.

(4.30) On peut démontrer que les p-formes d'un espace vectoriel E de dimension n forment un espace vectoriel dont la dimension est le coefficient du binôme $C_n^p = \dfrac{n\,!}{p\,!\,[n-p]\,!}$: il n'y a pas de p-forme non nulle si $p > n$; les formes de degré n — dites de degré maximum — forment un espace vectoriel de dimension 1 ; par suite, si l'on choisit l'une d'entre elle qui est non nulle — désignons-la par vol — toutes les autres lui sont proportionnelles.

(4.31) On peut montrer que vol est régulier, et fournit toutes les $[n-1]$-formes par contraction : si θ est une $[n-1]$-forme, il existe un vecteur $\mathrm{d}x$ tel que $\theta = \mathrm{vol}\,(\mathrm{d}x)$; on peut poser $\mathrm{d}x = \mathrm{vol}^{-1}\,(\theta)$.

DÉRIVÉE EXTÉRIEURE

THÉORÈME

(4.32) Soit $x \mapsto \varphi$ un champ de p-formes différentiable sur un ouvert E ; il existe un champ de $[p+1]$-formes, défini sur E, différentiable, noté

$$x \mapsto \nabla\varphi \qquad [2]$$

[1] Il revient au même — vu la multilinéarité — de supposer que $\varphi(\mathrm{d}_1 x)\dots(\mathrm{d}_p x)$ s'annule dès que deux de ces vecteurs sont égaux.

[2] Nous n'emploierons pas la notation $\mathrm{d}\varphi$, fréquemment utilisée, pour éviter toute confusion avec une dérivation d.

tel que

(4.32)
$$[\nabla\varphi](\mathrm{d}x)(\mathrm{d}_1x)\dots(\mathrm{d}_px) \equiv \mathrm{d}[\varphi(\mathrm{d}_1x)\dots(\mathrm{d}_px)] - \mathrm{d}_1[\varphi(\mathrm{d}x)(\mathrm{d}_2x)\dots(\mathrm{d}_px)] - \dots - \mathrm{d}_p[\varphi(\mathrm{d}_1x)\dots(\mathrm{d}_{p-1}x)(\mathrm{d}x)]$$

si les dérivations $\mathrm{d}, \mathrm{d}_1, \dots, \mathrm{d}_p$ commutent deux à deux (2.49).
La $[p+1]$-forme $\nabla\varphi$ s'appelle *dérivée extérieure* de φ.

— Dans le cas $p = 0$ (φ scalaire) cette définition s'écrit simplement

(4.33)
$$\boxed{[\nabla\varphi](\mathrm{d}x) \equiv \mathrm{d}\varphi}\,, \quad \text{soit} \quad \boxed{\nabla\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}}\,.$$

— En utilisant une carte, et les dérivations ∂_j associées qui commutent deux à deux (voir (4.22)), la formule (4.32) donne

(4.34)
$$\boxed{[\nabla\varphi]_{jkl\dots m} = \partial_j\,\varphi_{kl\dots m} - \partial_k\varphi_{jl\dots m} - \dots - \partial_m\varphi_{kl\dots j}}$$

ce qui fournit les *composantes* de $\nabla\varphi$; il en résulte que l'énoncé (4.32) est une *définition* de $\nabla\varphi$, puisqu'il permet de le calculer (voir (4.21)).

— Pour $p = 0, 1, 2$, la formule (4.34) prend respectivement les formes

(4.35)
$$\begin{cases} [\nabla\varphi]_j = \partial_j\varphi \\ [\nabla\varphi]_{jk} = \partial_j\varphi_k - \partial_k\varphi_j \\ [\nabla\varphi]_{jkl} = \partial_j\varphi_{kl} + \partial_k\varphi_{lj} + \partial_l\varphi_{jk}\,. \end{cases}$$

THÉORÈME

(4.36) Soit $x \mapsto \varphi$ l'*image réciproque* d'un champ différentiable de p-formes $x^* \mapsto \varphi^*$ par une application différentiable $A[x \mapsto x^*]$.
Alors $x \mapsto \varphi$ est un champ différentiable de p-formes, et le champ $x \mapsto \nabla\varphi$ est l'image réciproque par A de $x^* \mapsto \nabla\varphi^*$ (¹).

— En abrégé, on dit que les opérations de « dérivation extérieure » et d'« image réciproque » *commutent*.

(¹) Bien entendu $\nabla\varphi^*$ désigne la dérivée extérieure de φ^* par rapport à x^*, définie en mettant des * à toutes les lettres x et φ de la formule (4.32).

THÉORÈME DE POINCARÉ

(4.37) — Si $x \mapsto \varphi$ est un champ différentiable de p-formes, on a

$$\nabla[\nabla\varphi] = 0\,;$$

— réciproquement, si $x \mapsto \theta$ est un champ différentiable de $[p+1]$-formes défini dans un morceau (¹), et si

$$\nabla\theta \equiv 0$$

il existe un champ différentiable $x \mapsto \varphi$ de p-formes défini dans ce morceau tel que

$$\theta \equiv \nabla\varphi\,.$$

— On peut rattacher au théorème de Poincaré le théorème suivant, facile à vérifier :

(4.38) — Si un champ scalaire $x \mapsto \varphi$ est défini sur un ouvert *connexe*, et si $\nabla\varphi \equiv 0$, il existe une constante a telle que

$$\varphi \equiv a\,.$$

THÉORÈME DE CARTAN

(4.39) Si $x \mapsto \varphi$ est un champ différentiable de p-formes ($p \geqslant 1$), et si $x \mapsto \delta x$ est un champ différentiable de vecteurs, on a (²)

$$\delta_L\varphi \equiv [\nabla\varphi](\delta x) + \nabla[\varphi(\delta x)]\,.$$

— En combinant les théorèmes de Poincaré et de Cartan, on vérifie immédiatement la formule

(4.40)
$$\delta_L[\nabla\varphi] = \nabla[\delta_L\varphi] \qquad (\varphi = p\text{-forme}, p \geqslant 0)\,,$$

qui peut aussi se déduire du théorème (4.36) et de la définition de $\delta_L\varphi$.

(¹) Dans le cas $p = 0$, on peut remplacer cette condition par la condition def (θ) *simplement connexe* ; il suffit même que le *groupe d'homotopie* de def (θ) soit *égal à son groupe dérivé*, c'est-à-dire qu'il n'ait pas de quotient abélien.
(²) Dans le cas $p = 0$, les formules (4.18) et (4.33) montrent qu'il faut supprimer le dernier terme, qui n'a d'ailleurs pas de sens.

§ 5 VARIÉTÉS FEUILLETÉES

FEUILLETAGES

(5.1) Soit V une variété de dimension n, parcourue par une variable x. Supposons donnée une application $x \mapsto E$ telle que E soit un sous-espace vectoriel, de *dimension constante m*, de l'espace vectoriel tangent D_x (nous dirons en abrégé que $x \mapsto E$ est un *champ d'espaces vectoriels de dimension m*).

(5.2) Nous dirons que le champ est *différentiable* si on peut recouvrir son ensemble de définition par des ouverts où $E \equiv \mathrm{val}(T)$, $x \mapsto T$ étant un champ différentiable de bases de E (1).

On peut montrer les théorèmes suivants :

(5.3) Si $x \mapsto \varphi$ est un champ différentiable de tenseurs de degré p, et si le noyau $\ker(\varphi)$ (2) a une dimension constante, le champ $x \mapsto \ker(\varphi)$ est différentiable.

(5.4) Si $x \mapsto E_1$ et $x \mapsto E_2$ sont des champs différentiables d'espaces vectoriels, et si la dimension de $E_1 \cap E_2$ est constante, les champs $x \mapsto E_1 \cap E_2$, $x \mapsto E_1 + E_2$ sont différentiables (3).

DÉFINITION, THÉORÈME

Soit $x \mapsto E$ un champ différentiable d'espaces vectoriels défini sur une variété V.

— On appelle *variété intégrale* de ce champ une variété Φ telle que

(5.5) $\diamondsuit \begin{cases} a) \ \Phi \text{ est une variété plongée (4) dans } V ; \\ b) \ \text{En tout point } x \text{ de } \Phi, \text{ l'espace vectoriel tangent à } \Phi \text{ est } E. \end{cases}$

— On dit que le champ $x \mapsto E$ est un *feuilletage* (5) de V si tout point x de V appartient à une variété intégrale.

(1) On peut écrire $T \equiv [T_1 \ \ T_2 \dots T_m]$; le champ $x \mapsto T$ est dit différentiable si les champs de vecteurs $x \mapsto T_1, \dots, x \mapsto T_m$ le sont.

(2) Le *noyau* de φ est par définition l'espace vectoriel des $\mathrm{d}x$ tels que $\varphi(\mathrm{d}x) = 0$ (notation (4.29)).

(3) La *somme directe* $E_1 + E_2$ est un espace vectoriel de dimension

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2),$$

donc constante elle aussi.

(4) Définition (1.37).

(5) Ou encore qu'il donne à V une structure de *variété feuilletée*.

— Pour que le champ $x \mapsto E$ soit un feuilletage, la condition suivante (1) est nécessaire et suffisante :

$\heartsuit \begin{cases} \text{Si deux champs de vecteurs } x \mapsto \mathrm{d}x, \ x \mapsto \delta x \text{ vérifient dans un ouvert} \\ [\mathrm{d}x \in E, \ \delta x \in E], \text{ on a aussi dans cet ouvert } [\mathrm{d}, \delta]\, x \in E. \end{cases}$

Indiquons les grandes lignes d'une démonstration, qui est en même temps une méthode pratique d'intégration.

x_0 étant un point de V, on peut trouver une application différentiable $x \mapsto y$ de V à R^m (m étant la dimension de E) tel que $\ker\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)$ soit supplémentaire de E au point x_0 ; on constate que cette propriété est encore vraie dans un ouvert Ω contenant x_0 ; il en résulte que l'on peut écrire dans Ω

$$\mathrm{d}x \in E \ \Leftrightarrow \ \mathrm{d}x = S(\mathrm{d}y)$$

$S = [S_1 \dots S_m]$ étant une base de E ; le champ $x \mapsto S$ est différentiable dans Ω. Sur une variété intégrale, $x \mapsto y$ est, localement, un difféomorphisme, dont l'inverse est une carte $F[y \mapsto x]$, vérifiant $D(F)\,(y) \equiv S$; si $x \mapsto E$ est un feuilletage, on en déduit que les champs de vecteurs $f_j[x \mapsto S_j]$ ont des crochets de Lie nuls deux à deux. Il est facile de vérifier l'équivalence de cette condition avec $\heartsuit$ (dans Ω).

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, choisissons un point x_1 de Ω ; posons

(5.6) $$x \equiv F(t) \equiv \exp({}^1t f_1 + \cdots + {}^m t f_m)\,(x_1) \qquad [t \in R^m].$$

On a évidemment $F(0) = x_1$ et, grâce au théorème (3.10), $D(F)\,(t) \equiv S$; en réduisant éventuellement son ensemble de définition, on constate que F est alors une carte d'une variété intégrale passant par x_1 ; V est donc feuilletée.

La recherche des variétés intégrales est donc ramenée au calcul de l'exponentielle figurant en (5.6), donc à la résolution d'équations différentielles ordinaires (voir (3.3)).

— On peut, par ailleurs, chercher une carte $\varphi[z \mapsto x]$ de la variété d'équation $y = \mathrm{Cte}$, passant par x_0 ; variété dont la dimension est $n - m$ (Théorème (1.40)). En remplaçant x_1 par $\varphi(z)$ dans (5.6), on définit une application $\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \mapsto x$; en réduisant convenablement son ensemble de définition, on montre que cette application devient une carte de V ; on en déduit le théorème :

Soit V une variété de dimension n ;
$x \mapsto E$ un feuilletage de V ($\dim(E) \equiv m$). V possède un atlas de cartes

(5.7) $$\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \quad t \in R^m, \quad z \in R^{n-m}$$

(1) Dite *condition d'intégrabilité*.

telles que

(5.7) $\heartsuit$ $$dx \in E \iff dz = 0$$

et que, pour z constant, $t \mapsto x$ soit une carte d'une variété intégrale.

Il est facile d'en déduire que les plongement $y \mapsto x$ de R^m à V tels que $\operatorname{val}\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right) \equiv E$ sont cohérents (1.5) et qu'ils forment un atlas de V; V possède donc *une nouvelle structure de variété*, de dimension m, *plongée* dans l'ancienne structure.

Pour cette nouvelle structure, les ouverts connexes sont des variétés intégrales, les *composantes* (1.49) sont appelées feuilles ; il est facile d'en déduire le

THÉORÈME

Soit $x \mapsto E$ un feuilletage d'une variété V.

(5.8) — V possède une partition en variétés intégrales connexes appelées *feuilles*.

— Toute variété intégrale connexe est un *ouvert d'une feuille*.

— Si Φ est une variété connexe plongée dans V, et si, en tout point de Φ, l'espace vectoriel tangent à Φ est contenu dans E, Φ est *plongée dans une feuille*.

Exemples

(5.9) — Soit $x \mapsto E$ un champ différentiable d'espaces vectoriels *de dimension* 1 défini sur une variété V; il est facile de constater que la condition d'intégrabilité est toujours satisfaite ; V est donc feuilletée ; les variétés intégrales, de dimension 1, s'appellent *lignes de force*. ■

(5.10) — En particulier, soit f un champ différentiable de vecteurs d'une variété V; on définit sur la variété $V \times R$ un champ différentiable d'espaces vectoriels de dimension 1 en posant

$$d\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in E \iff dx - f(x)\,dt = 0 \qquad \text{(Fig. 5.I)}$$

il est clair que le *graphe* d'une solution de l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} \equiv f(x)$ est une ligne de force ; mais toute ligne de force n'est pas nécessairement un graphe ; on peut la considérer comme une solution généralisée de l'équation différentielle ; notons que les feuilles, qui sont des solutions généralisées maximales de l'équation, existent *même si V n'est pas séparée* (comparer avec 3.2). ■

(5.11) Soit $x \mapsto \mathbf{V}$ un champ de vecteurs non nuls de R^3. On appelle *surface orthogonale* du champ une surface dont, en tout point x, le plan tangent est orthogonal à $\mathbf{V}$. Pour qu'il passe une surface orthogonale par tout point de l'espace, il faut donc que le champ $x \mapsto \operatorname{orth}(\mathbf{V})$ soit un feuilletage : appliquons la condition (5.5$\heartsuit$), qui s'écrit ici

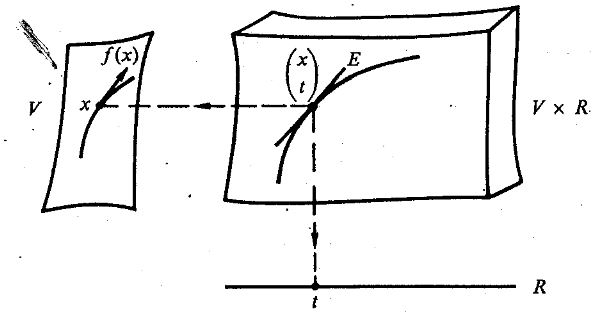
$$\diamondsuit \qquad \begin{cases} \langle \mathbf{V}, dx \rangle \equiv 0 \\ \langle \mathbf{V}, \delta x \rangle \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \langle \mathbf{V}, [d, \delta]\, x \rangle \equiv 0 .$$

Grâce à (2.45 $\diamondsuit$), on établit l'identité

$$\langle \mathbf{V}, [d, \delta]\, x \rangle \equiv \langle \operatorname{rot} \mathbf{V}, dx \times \delta x \rangle + d\langle \mathbf{V}, \delta x \rangle - \delta \langle \mathbf{V}, dx \rangle$$

le lecteur en déduira facilement que la condition $\diamondsuit$ d'existence de surfaces orthogonales peut s'écrire $\langle \mathbf{V}, \operatorname{rot} \mathbf{V} \rangle \equiv 0$. ■

Fig. 5.I.



(5.12) — Soit A une application différentiable d'une variété V dans une variété V' ; posons $E \equiv \ker (D(A)(x))$; si $m \equiv \dim (E)$ est constante, on peut vérifier que le champ $x \mapsto E$ est différentiable, et que la condition d'intégrabilité (5.5$\heartsuit$) est satisfaite ; V est donc feuilletée ; on constate immédiatement que les ensembles $A(x) = \text{Cte}$ ont *une seule structure* de variétés de dimension m plongées dans V, et que les composantes connexes de chacune de ces variétés sont des feuilles.

Ce résultat complète — avec des hypothèses différentes — le théorème (3.40) sur les variétés définies par une équation. ■

THÉORÈME

Soit V une variété feuilletée ; soit f son feuilletage ; soit A un difféomorphisme de V à V.

On dira que A *respecte* le feuilletage si

(5.13) $$[x \in \operatorname{def}(A),\ dx \in f(x)] \Rightarrow [d[A(x)] \in f(A(x))] .$$

(5.13) — Pour que A soit aussi un difféomorphisme de V *pour sa structure de variété de dimension* m (notations (5.8), (5.9)), il faut et il suffit qu'il respecte le feuilletage.

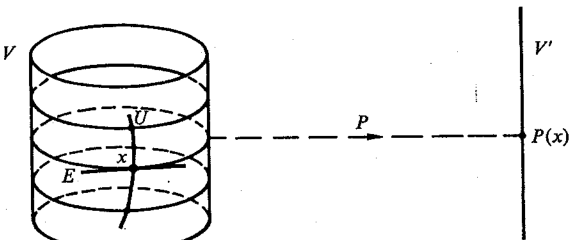
— Si def (A) = val (A) = V, et si A respecte le feuilletage, la restriction de A à une feuille quelconque Φ est un difféomorphisme de Φ sur une feuille Φ'.

QUOTIENT D'UNE VARIÉTÉ PAR UN FEUILLETAGE

(5.14) Soit $x \mapsto E$ un feuilletage d'une variété V de dimension n (dim $(E) \equiv m$).

— Nous dirons qu'une variété U, plongée dans V, est *transversale* au feuilletage si en tout point de U, son espace vectoriel tangent est supplémentaire de E (Fig. 5.II); sa dimension est nécessairement $n - m$; nous avons vu qu'on peut faire passer une variété transversale par tout point de V.

Fig. 5.II.



(5.15) — Nous dirons que le feuilletage est *sécable* si, par tout point de V, passe une variété transversale U qui est une *section* du feuilletage, c'est-à-dire qui ne rencontre chaque feuille qu'en un point au plus (nous dirons alors que U est une *section transversale*).

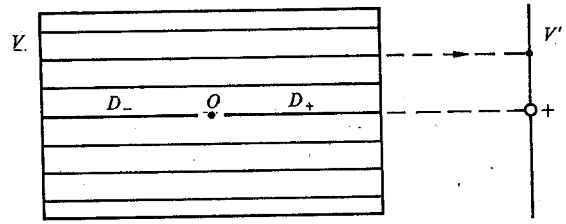
(5.16) — Supposons le feuilletage sécable; désignons par $P(x)$ la feuille qui passe par un point x de V; on peut montrer que les $P.F$, où F désigne une carte d'une section transversale, forment un atlas de l'*ensemble* V' des feuilles; ils lui donnent donc une structure de variété de dimension $n - m$; V' s'appellera *variété quotient de V par le feuilletage*; il est clair que P est une application différentiable ouverte de V sur V', et que $E \equiv \ker(D(P)(x))$; P s'appelle *projection* de V sur V'.

(5.17) — Remarquons que la condition de sécabilité est uniquement globale : pour tout feuilletage de V, on peut recouvrir V par des ouverts V_j dans chacun desquels le champ $x \mapsto E$ induit un feuilletage sécable (on peut par exemple prendre pour V_j les ensembles de valeurs des cartes (5.7)).

(5.18) — Même si la variété V est *séparée*, il peut arriver que la variété quotient V' *ne le soit pas*; ainsi

si $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ parcourt R^2 privé de 0 (Fig. 5.III), et si le feuilletage est défini par $dz = 0$, les feuilles sont les droites $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$), et les deux demi-droites $D_+ (z = 0,\ y > 0)$, $D_- (z = 0,\ y < 0)$; il est facile de voir, dans la variété quotient, que tout ouvert contenant D_+ et tout ouvert contenant D_- se rencontrent.

Fig. 5.III.



(5.19) — Soit V une variété feuilletée sécable; soit A un difféomorphisme de V sur V, qui respecte le feuilletage. Le théorème (5.13) montre qu'il existe une permutation $\hat{A}$ de V', définie par

$$\hat{A}(P(x)) = P(A(x)) \qquad \forall x \in V;$$

on peut montrer que $\hat{A}$ est un *difféomorphisme* de V'.

INVARIANTS INTÉGRAUX [1]

(5.20) Soit $x \mapsto E$ un feuilletage sécable d'une variété V.
Soit $x \mapsto \varphi$ un champ différentiable de p-formes de V.
On dit que φ est un *invariant intégral* du feuilletage si $x \mapsto \varphi$ est l'image réciproque, par la projection, d'un champ différentiable $x' \mapsto \varphi'$ de la variété quotient V'.

(5.21) — Si $x \mapsto \varphi$ est un invariant intégral, de degré p ($p \geqslant 1$), il est clair que $x \mapsto \nabla\varphi$ est aussi un invariant intégral (car c'est l'image réciproque de $x' \mapsto \nabla\varphi'$ (voir (4.36)); il est clair aussi que $E \subset \ker(\varphi)$ (voir la définition (4.6) d'une image réciproque); donc que

$$\diamondsuit \qquad \boxed{E \subset \ker(\varphi) \cap \ker(\nabla\varphi)}$$

On montre réciproquement que cette condition $\diamondsuit$ *est suffisante pour que* φ *soit un invariant intégral.*

[1] Il s'agit des invariants intégraux *au sens d'Elie Cartan.*

(5.22) — Un invariant intégral φ *de degré* 0 s'appelle une *intégrale première* ; c'est un champ scalaire *constant sur les feuilles* ; la condition ♢ (qui n'a plus de sens parce que $\ker(\varphi)$ n'est pas défini) est à remplacer par

♡ $$\boxed{E \subset \ker(\nabla\varphi)}.$$

(5.23) — Notons que les formules ♢ ou ♡ gardent leur signification si le feuilletage n'est pas sécable ; elles expriment alors que $x \mapsto \varphi$ est un invariant intégral pour tout ouvert V_j où le feuilletage est sécable (voir (5.16)).

FEUILLETAGE CARACTÉRISTIQUE D'UNE FORME

— Soit $x \mapsto \varphi$ un champ différentiable de p-formes défini sur une variété V ; posons

(5.24) $$\boxed{E' \equiv \ker(\varphi) \cap \ker(\nabla\varphi)}$$

et supposons la *dimension de E' constante* et $\geqslant 1$; les théorèmes (5.3) et (5.4) montrent que le champ $x \mapsto E'$ est différentiable.

Etudions la condition d'intégrabilité (5.5♡) :

Si deux champs différentiables de vecteurs $x \mapsto \mathrm{d}x$, $x \mapsto \delta x$ sont contenus dans E', soit

$$\begin{cases} \varphi(\mathrm{d}x) \equiv 0\,, & [\nabla\varphi](\mathrm{d}x) \equiv 0 \\ \varphi(\delta x) \equiv 0\,, & [\nabla\varphi](\delta x) \equiv 0 \end{cases}$$

on trouve, en utilisant la formule (4.24) et le théorème de Cartan (4.39)

$$\begin{aligned} \varphi([\delta, \mathrm{d}]\,x) &\equiv \varphi(\delta_L\,\mathrm{d}x) \equiv \delta_L[\varphi(\mathrm{d}x)] - [\delta_L\,\varphi](\mathrm{d}x) \equiv -[\delta_L\,\varphi](\mathrm{d}x) \\ &\equiv -[\nabla\varphi(\delta x) + \nabla[\varphi(\delta x)]](\mathrm{d}x) \equiv 0 \end{aligned}$$

et, grâce au théorème de Poincaré (4.37)

$$\begin{aligned} [\nabla\varphi]([\delta, \mathrm{d}]\,x) &\equiv \delta_L[\nabla\varphi(\mathrm{d}x)] - [\delta_L\,\nabla\varphi](\mathrm{d}x) \\ &\equiv -[\nabla[\nabla\varphi](\delta x) + \nabla[\nabla\varphi(\delta x)]](\mathrm{d}x) \equiv 0\,. \end{aligned}$$

d'où $[\delta, \mathrm{d}]\,x \in E'$; la condition d'intégrabilité est *satisfaite automatiquement*,

(5.25) $x \mapsto E'$ est un feuilletage : on l'appelle *feuilletage caractéristique* de la forme φ.

Il résulte de (5.21) que φ est un invariant intégral de ce feuilletage ; si le feuilletage est sécable, φ est l'image réciproque d'une forme $x' \mapsto \varphi'$ de V' ; on vérifie immédiatement que $\ker(\varphi') \cap \ker(\nabla\varphi')$ est réduit à 0.

§ 6 GROUPES DE LIE

DÉFINITION

— Soit G un groupe, c'est-à-dire un ensemble où l'on a défini une *loi de composition* $\times$, un *élément neutre* e, une *inversion* $a \mapsto a^{-1}$ tels que, $\forall a, b, c \in G$:

$$\begin{cases} a \times b \in G \\ [a \times b] \times c = a \times [b \times c] \\ a \times e = e \times a = a \\ a^{-1} \in G \\ a^{-1} \times a = a \times a^{-1} = e\,. \end{cases}$$

(6.1) On dit que G est un *groupe de Lie* si G est une *variété*, et si les applications

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a \times b$$

$$a \mapsto a^{-1}$$

sont *différentiables*.

Exemples

(6.2) — Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, il forme un groupe pour la loi de composition $+$ (avec l'élément neutre 0, l'inversion $a \mapsto -a$) ; nous avons défini sur E une structure de variété (1.9) ; les applications $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + b$, $a \mapsto -a$ sont différentiables ; *E est donc un groupe de Lie* [on l'appelle *groupe additif* E]. ∎

(6.3) — Désignons par $\mathrm{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E ; $\mathrm{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension n^2, donc aussi une variété. On appelle $\mathrm{GL}(E)$ [1] l'ensemble des éléments a de $\mathrm{L}(E)$ tels que $\det(a) \neq 0$;

[1] « Groupe linéaire de E ».

GL(E) est un groupe de permutations de E ; c'est un ouvert de L(E) [1], donc une variété [2] ; on sait que les applications $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a.b$, $a \mapsto a^{-1}$ sont différentiables [3] ; GL(E) *est donc un groupe de Lie de dimension* n^2. ∎

GROUPE DE LIE OPÉRANT SUR UNE VARIÉTÉ

(6.4) On dit qu'un groupe de Lie G *opère* sur une variété V si on a défini, pour tout $a \in G$, une permutation $\underline{a}_V$ de V, si l'on a

$$\diamondsuit \qquad \underline{a \times b}_V = \underline{a}_V . \underline{b}_V \qquad \forall a, b \in G$$

et si l'application de $G \times V$ sur V

$$\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \mapsto \underline{a}_V(x)$$

est différentiable.

Exemples

(6.5) — Pour tout $a \in$ GL(E), on posera $\underline{a}_E = a$; alors GL(E) *opère* sur E. ∎

— Soit G un groupe de Lie quelconque ; nous poserons, pour a et $b \in G$

$$\underline{a}_G(b) = a \times b \tag{6.6}$$

alors G *opère sur lui-même* ; les $\underline{a}_G$ s'appellent *translations* de G. ∎

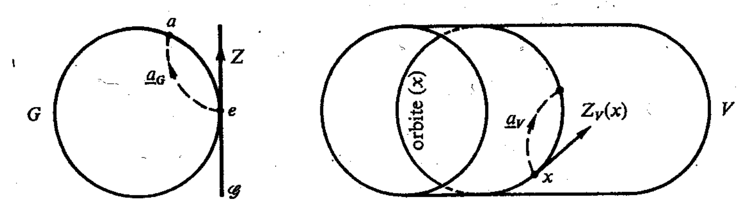
— Si G opère sur une variété V, on fait opérer G sur la variété V^D des vecteurs tangents à V (1.31) en posant

$$\underline{a}_{[V^D]} = [\underline{a}_V]^D \qquad \forall a \in G \tag{6.7}$$

(voir (1.32) à (1.34)).

[1] Comme image réciproque, par l'application continue dét, de R privé de 0, qui est un ouvert (voir (1.16)).
[2] Voir (1.39).
[3] Voir (2.28) et (2.30).

Fig. 6.I.



— Si G opère sur V, on vérifie immédiatement que

$$\begin{cases} \underline{e}_V = 1_V & (e = \text{élément neutre de } G) \\ [\underline{a^{-1}}]_V = [\underline{a}_V]^{-1} & (\forall a \in G) \end{cases} \tag{6.8}$$

donc que les $\underline{a}_V$ forment un *groupe de difféomorphismes* de V ; nous désignerons ce groupe par la notation $\underline{G}_V$.

(6.9) — Si G opère sur un espace vectoriel E, et si les éléments de $\underline{G}_E$ sont linéaires, la correspondance $a \mapsto \underline{a}_E$ s'appelle une *représentation linéaire* de G [1].

— Si G opère sur une variété V, nous poserons :

$$\hat{x}(a) = \underline{a}_V(x) \qquad [\forall x \in V, \forall a \in G]. \tag{6.10}$$

Il est immédiat que $\hat{x}$ est une application différentiable de G dans V, et que $\hat{x}(e) = x$.

— Soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel tangent à G en e (Fig. 6.I) ; soit Z un élément de $\mathcal{G}$.

Nous pouvons définir, *sur toute variété V où G opère, un champ de vecteurs* Z_V en posant

$$\diamondsuit \qquad \boxed{Z_V(x) \equiv D(\hat{x})(e)(Z)} \tag{6.11}$$

ou, si l'on préfère :

$$\heartsuit \qquad \boxed{Z_V(x) = \mathrm{d}[\underline{a}_V(x)] \qquad \text{pour} \qquad a = e,\ \mathrm{d}a = Z,\ \mathrm{d}x = 0}. \tag{6.11}$$

— Ces formules s'appliquent en particulier au cas $V = G$ (cf. (6.6)) ; Z_G est un champ de vecteurs défini sur le groupe G ; notons que $Z_G(e) = Z$.

[1] Nous ne considérons donc ici que les représentations de dimension finie.

— On peut montrer le théorème :

(6.12) *a*) Sur toute variété V où G opère, le champ de vecteurs Z_V est *différentiable*.

b) Si Z et $Z' \in \mathcal{G}$, il existe un élément de $\mathcal{G}$, noté $[Z, Z']$, tel que [1]

$$\boxed{[Z, Z']_V = [Z_V, Z'_V]}$$

quelle que soit la variété V sur laquelle G opère.

c) Si G opère sur une variété *séparée* V [2], $\exp(Z_V)$ existe pour tout $Z \in \mathcal{G}$ et on a

$$\exp(Z_V) = \underline{\exp(Z_G)(e)}_V \qquad [3];$$

réciproquement, si un champ de vecteurs f est tel que $\exp(tf) \in \underline{G}_V$ pour tout t réel, il existe un $Z \in \mathcal{G}$ tel que $f = Z_V$.

ALGÈBRE DE LIE D'UN GROUPE DE LIE

— L'ensemble $\mathcal{G}$ (espace vectoriel tangent à G en e) s'appelle *algèbre de Lie* du groupe de Lie G ; on vérifie que

(6.13) *a*) $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie ;

b) $\forall Z, Z' \in \mathcal{G}$, on a défini le crochet $[Z, Z']$, noté aussi

$$\mathrm{Ad}(Z)(Z'), \quad \text{qui est un élément de } \mathcal{G}.$$

c) Ad est un opérateur antisymétrique bi-linéaire :

$$[Z, Z'] + [Z', Z] \equiv 0,$$
$$[Z_1 + Z_2, Z'] \equiv [Z_1, Z'] + [Z_2, Z']$$
$$[sZ, Z'] \equiv s[Z, Z'] \qquad [\forall s \in R].$$

d) Le crochet de Lie vérifie l'identité de Jacobi [4]

$$[Z, [Z', Z'']] + [Z', [Z'', Z]] + [Z'', [Z, Z']] = 0$$

identité qui s'écrit aussi

$$\mathrm{Ad}([Z, Z']) = \mathrm{Ad}(Z).\mathrm{Ad}(Z') - \mathrm{Ad}(Z').\mathrm{Ad}(Z).$$

(1) Le second membre est le *crochet de Lie des champs de vecteurs* Z_V, Z'_V (2.45) ; le premier membre est le champ de vecteurs associé à $[Z, Z']$; bien entendu $[Z, Z']$ s'appellera aussi *crochet de Lie* de Z et Z'.
(2) Voir la définition (3.1) ; on peut montrer que *tout groupe de Lie est une variété séparée.*
(3) On voit en particulier que $\exp(Z_G)$ est une *translation* de G ($\forall Z \in G$).
(4) Voir (2.47).

(6.14) — Réciproquement, on appelle algèbre de Lie tout ensemble $\mathcal{G}$ vérifiant (6.13) ; ainsi l'ensemble $\mathcal{G}'$ des éléments de $\mathcal{G}$ qui sont une *somme de crochets* est visiblement une algèbre de Lie, appelée *algèbre dérivée* de $\mathcal{G}$.

Exemples d'algèbre de Lie

(6.15) — Dans le cas du groupe additif E (notations 6.2), l'algèbre de Lie coïncide avec l'espace vectoriel E, le crochet étant nul :

$$[Z, Z'] \equiv 0. \blacksquare$$

— Dans le cas du groupe $GL(E)$ (notations 6.3), il est évident que l'algèbre de Lie est $L(E)$; si $Z \in L(E)$, on a

$$Z_E = Z$$

et [1]

(6.16)
$$\boxed{[Z, Z'] = Z'.Z - Z.Z'}.$$

Notons le développement en série

(6.17)
$$\boxed{\exp(Z) = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \cdots + \frac{Z^n}{n!} + \cdots}$$

convergent ($\forall Z \in L(E)$) ; le théorème (6.12) nous indique que

$$\exp(Z) \in GL(E),$$

donc que $\det(\exp(Z)) \neq 0$; on peut d'ailleurs montrer [2] que

(6.18)
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{dét}(\exp(Z)) = e^{\mathrm{Tr}(Z)} \\ \hline \exp(B.Z.B^{-1}) = B.\exp(Z).B^{-1} \end{array}} \qquad \forall B \in GL(E).$$

ORBITES

(6.19) Soit G un groupe de Lie qui opère sur une variété V (Fig. 6.I).

On appelle *orbite* d'un point x (selon le groupe G) l'ensemble des $\underline{a}_V(x)$, lorsque a parcourt G ; l'orbite est donc l'ensemble de valeurs de l'application $\hat{x}$ (notation (6.10)).

(1) Pour obtenir cette formule avec l'autre signe (suivant la tradition) il faut faire opérer les groupes de Lie et les algèbres de Lie *à gauche.*
(2) Appliquer (2.29), (3.6).

On vérifie immédiatement que

$$[y \in \text{orbite}\,(x)] \Leftrightarrow [\text{orbite}\,(y) = \text{orbite}\,(x)]$$

donc que les orbites forment une *partition* de V.

On démontre le théorème :

(6.20) Soit x un point de V; désignons par H l'espace vectoriel des $Z_V(x)$ [lorsque Z parcourt l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G].

— Si la dimension p de H n'est pas nulle, l'orbite Ω qui passe par x est une *variété de dimension p, plongée dans V*; son espace vectoriel tangent en x est H [1].

— Pour tout $a \in G$, l'application $\underline{a}_\Omega$, restriction de $\underline{a}_V$ à l'orbite Ω, *fait opérer le groupe de Lie G sur la variété* Ω.

REPRÉSENTATION ADJOINTE

— Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G; soit $Z \in \mathcal{G}$, $a \in G$. On sait définir l'application $\hat{a}$ (notation (6.10)) qui est ici un difféomorphisme de G :

(6.21)
$$\hat{a}(b) \equiv b \times a$$

appelé *translation à droite* du groupe.

(6.22) On vérifie immédiatement que le champ de vecteurs Z_G (notation (6.11)) est *invariant à droite*, c'est-à-dire que l'*image* de Z_G par toute translation à droite est encore égale à Z_G (définition (2.32) de l'image) ; réciproquement tout champ invariant à droite est de la forme Z_G ($Z \in \mathcal{G}$).

Etudions l'image de Z_G par une translation (à gauche !) $\underline{a}_G$; on vérifie facilement que c'est un champ invariant à droite, donc de la forme Z'_G ; nous pourrons donc définir une application $\underline{a}_\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ en posant (notation (2.32))

(6.23)
$$[\underline{a}_G]_+ (Z_G) = [\underline{a}_\mathcal{G}(Z)]_G$$

ce qui s'écrit aussi directement :

(6.24)
$$\boxed{\underline{a}_\mathcal{G}(Z) = \delta[a \times b \times a^{-1}]} \quad \text{pour } b = e, \quad \delta b = Z, \quad \delta a = 0.$$

[1] Ω est une variété intégrale du champ $x \mapsto H$; notons que ce champ est un feuilletage si la dimension p est constante dans V.

Il est facile de vérifier que la correspondance $a \mapsto \underline{a}_\mathcal{G}$ *fait opérer le groupe G sur son algèbre de Lie, et que les* $\underline{a}_\mathcal{G}$ *sont linéaires* : $a \mapsto \underline{a}_\mathcal{G}$ est donc une représentation linéaire de G sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, appelée *représentation adjointe*.

— On notera que la formule (6.23) se généralise en

(6.25)
$$\boxed{[\underline{a}_V]_+ (Z_V) = [\underline{a}_\mathcal{G}(Z)]_V}$$

valable pour toute variété V sur laquelle opère G.

— La formule (3.7), appliquée au cas $f = Z'_G$, $g = Z_G$, $x = e$ s'écrit après quelques transformations,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\underline{\exp(-tZ'_G)\,(e)}_\mathcal{G}\right](Z) = \underline{\exp(-tZ'_G)\,(e)}_\mathcal{G}([Z', Z]) \qquad \forall Z, Z' \in \mathcal{G}$$

en faisant $t = 0$, elle peut s'écrire, avec les notations (6.11) et (6.13*b*)

(6.26)
$$\boxed{Z_\mathcal{G} = -\operatorname{Ad}(Z)}\,.$$

— En combinant (2.48), (6.12) et (6.23) on établit la formule

(6.27)
$$\underline{a}_\mathcal{G}([Z, Z']) \equiv [\underline{a}_\mathcal{G}(Z), \underline{a}_\mathcal{G}(Z')]\,.$$

Exemple

Dans le cas du groupe $GL(E)$, qui admet $L(E)$ comme algèbre de Lie (voir (6.16)) la représentation adjointe est donnée par

(6.28)
$$\underline{a}_{L(E)}(Z) = a.Z.a^{-1} \qquad [a \in GL(E), Z \in L(E)]\,.$$

SOUS-ALGÈBRES ET SOUS-GROUPES DE LIE

(6.29) Soit G un groupe de Lie : $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie.
Une partie $\tilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ s'appelle une *sous-algèbre de Lie* si

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{G}} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{G}\,; \\ Z, Z' \in \tilde{\mathcal{G}} \Rightarrow [Z, Z'] \in \tilde{\mathcal{G}}\,. \end{cases}$$

(6.30) — a étant un élément variable de G, désignons par E l'ensemble des $Z_G(a)$, lorsque Z parcourt $\tilde{\mathscr{G}}$; E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel tangent à G en a ; sa dimension p, égale à celle de $\tilde{\mathscr{G}}$, est constante ; on vérifie facilement que le champ $a \mapsto E$ est *différentiable* (5.2), et qu'il constitue un *feuilletage* de G (¹) ; nous l'appellerons *feuilletage associé à la sous-algèbre* $\tilde{\mathscr{G}}$.

DÉFINITION

Soit G un groupe de Lie ;

(6.31) Nous dirons qu'un groupe de Lie $\tilde{G}$ est un *sous-groupe de Lie* de G si :

a) Comme groupe, $\tilde{G}$ est un sous-groupe de G (²).

b) Comme variété, $\tilde{G}$ est une variété plongée dans G (³).

— En particulier, les sous-groupes de Lie de G qui ont même dimension que G sont les *sous-groupes ouverts* (voir (1.39)).

— On voit immédiatement que l'algèbre de Lie $\tilde{\mathscr{G}}$ d'un sous-groupe de Lie $\tilde{G}$ de G est une *sous-algèbre de Lie* de celle de G. Il est naturel de se demander si on peut caractériser réciproquement $\tilde{G}$ par son algèbre de Lie $\tilde{\mathscr{G}}$; c'est ce problème que traite le théorème suivant :

Soit G un groupe de Lie ; soit e son élément neutre ; soit $\mathscr{G}$ son algèbre de Lie.

Soit $\tilde{\mathscr{G}}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{G}$ (6.29).

I) Désignons par $\tilde{G}_{\mathrm{I}}$ la feuille, passant par e, du feuilletage associé à $\tilde{\mathscr{G}}$ (6.30). Alors

a) $\tilde{G}_{\mathrm{I}}$ est un *sous-groupe de Lie* de G, admettant $\tilde{\mathscr{G}}$ comme algèbre de Lie.

b) Il existe un ouvert Ω de $\tilde{\mathscr{G}}$, contenant 0, tel que l'application

(6.32)
$$Z \mapsto \exp(Z_G)\,(e)$$

soit un *difféomorphisme* de Ω dans $\tilde{G}_{\mathrm{I}}$ (⁴).

c) Si $a \in \tilde{G}_{\mathrm{I}}$, il existe des éléments ${}^1Z, {}^2Z, \ldots, {}^pZ$ de $\tilde{\mathscr{G}}$, en nombre fini, tels que

$$a = [\exp({}^1Z_G).\exp({}^2Z_G).\ \ldots\ .\exp({}^pZ_G)]\,(e)\,.$$

(¹) Parce que $\tilde{\mathscr{G}}$ est non seulement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{G}$, mais aussi une sous-algèbre de Lie.

(²) Comme ensemble, $\tilde{G}$ est donc une *partie* de G ; la loi de composition de $\tilde{G}$ est induite de celle de G ; les éléments neutres de G et $\tilde{G}$ coïncident.

(³) Définition (1.37).

(⁴) Si S est une base de $\tilde{\mathscr{G}}$, l'application $x \mapsto \exp(S(x)_G)\,(e)$ $[S(x) \in \Omega]$ est donc une *carte* de $\tilde{G}_I$; on l'appelle *carte canonique*.

II) Désignons par $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$ l'ensemble des éléments a de G tels que

$$[Z \in \tilde{\mathscr{G}}] \quad \Rightarrow \quad [\underline{a}_{\mathscr{G}}(Z) \in \tilde{\mathscr{G}}] \qquad (^1)\,.$$

Alors :

(6.32) *a*) $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$ est un *sous-groupe* de G ;

b) $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$ est une réunion de feuilles du feuilletage associé à $\tilde{\mathscr{G}}$, et par conséquent une *variété plongée* dans G.

c) Pour ces structures de groupe et de variété, $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$ est un *sous-groupe de Lie* de G, il admet $\tilde{\mathscr{G}}$ comme algèbre de Lie.

d) Si $a \in \tilde{G}_{\mathrm{II}}$, l'application

$$Z \mapsto \exp(Z_G)\,(a)$$

est un *difféomorphisme* de Ω dans $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$.

III) Soit $\tilde{G}$ un *sous-groupe* de G.

Alors les deux propriétés *a*) et *b*) suivantes sont équivalentes :

a) $\tilde{G}$ possède une structure de *sous-groupe de Lie* de G, et possède ainsi $\tilde{\mathscr{G}}$ comme algèbre de Lie.

b) $\tilde{G}_{\mathrm{I}} \subset \tilde{G} \subset \tilde{G}_{\mathrm{II}}$.

Si elles sont vérifiées, $\tilde{G}$ est un sous-groupe *ouvert* de $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$; $\tilde{G}_{\mathrm{I}}$ est la *composante connexe* (²) de e dans $\tilde{G}$, et constitue un *sous-groupe invariant* (³) de $\tilde{G}$.

On déduit facilement de ces résultats le critère suivant :

(6.33) Soit G un groupe de Lie, e son élément neutre, $\mathscr{G}$ son algèbre de Lie. Soient $\tilde{G}$ et $\tilde{\mathscr{G}}$ des parties de G et $\mathscr{G}$ respectivement.

Alors les conditions (*a*) et (*b*) suivantes sont équivalentes :

$$(a)\quad \begin{cases} \tilde{G} \text{ est un sous-groupe de } G\,; \\ \tilde{\mathscr{G}} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{G}\,; \\ \begin{bmatrix} Z \in \tilde{\mathscr{G}} \\ a \in \tilde{G} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \exp(Z_G)\,(e) \in \tilde{G} \\ \underline{a}_{\mathscr{G}}(Z) \in \tilde{\mathscr{G}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

(*b*) $\tilde{G}$ possède une structure de sous-groupe de Lie de G, avec $\tilde{\mathscr{G}}$ comme algèbre de Lie.

(¹) On dit que $\tilde{G}_{II}$ est le *normalisateur* de $\tilde{\mathscr{G}}$.

(²) Voir (1.49).

(³) C'est-à-dire :

$$[a \in \tilde{G},\ b \in \tilde{G}_I] \ \Rightarrow\ [a \times b \times a^{-1} \in \tilde{G}_I]\,.$$

(6.34) Il en résulte évidemment que *toute intersection de sous-groupes de Lie G_j* de G possède une structure de sous-groupe de Lie de G (et des G_j) admettant comme algèbre de Lie l'intersection des algèbres de Lie.

(6.35) — En faisant $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$, on voit que *la composante connexe de l'élément neutre d'un groupe de Lie est toujours un sous-groupe invariant.*

STABILISATEUR

THÉORÈME, DÉFINITION

(6.36) Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, opérant sur une variété V. Posons :

$$\diamondsuit \quad \begin{cases} [a \in G_x] \Leftrightarrow [a_V(x) = x] \\ [Z \in \mathcal{G}_x] \Leftrightarrow [Z_V(x) = 0] \end{cases} \qquad \forall a \in G, \forall x \in V, \forall Z \in \mathcal{G}.$$

Alors G_x est un sous-groupe de Lie de G (ayant $\mathcal{G}_x$ comme algèbre de Lie), appelé *stabilisateur* (ou *groupe d'isotropie*) de x.

— On a

$$\heartsuit \quad \begin{cases} [a \in G_{\underline{b}(x)}] \Leftrightarrow [b^{-1} \times a \times b \in G_x] \\ [Z \in \mathcal{G}_{\underline{b}(x)}] \Leftrightarrow [\underline{b^{-1}}_{\mathcal{G}}(Z) \in \mathcal{G}_x] \end{cases} \qquad \forall b \in G$$

les stabilisateurs des différents points d'une même orbite sont donc des groupes de Lie *conjugués*.

EXEMPLES CLASSIQUES DE GROUPES DE LIE

— Soit E un espace vectoriel réel de dimension n.

— Nous avons vu que $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe de Lie de dimension n^2, admettant $\mathrm{L}(E)$ comme algèbre de Lie.

(6.37) Si on appelle Ω l'ensemble des éléments $Z \in \mathrm{L}(E)$ dont le spectre est contenu dans la bande $|\bar{z} - z| < 2\pi$ (Fig. 6.II) les conditions du théorème (6.32.I.*b*) sont vérifiées ; l'application

$$Z \mapsto \exp(Z) \qquad [Z \in \Omega]$$

est un difféomorphisme de l'ouvert Ω sur un ouvert Ω' de $\mathrm{GL}(E)$; les éléments de Ω' sont les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ qui n'ont pas de valeur propre négative (ni nulle, puisqu'ils sont réguliers).

Le difféomorphisme inverse de (6.37) s'appelle le *logarithme*, et sera noté Log ; on peut montrer que

(6.38) $$\boxed{\mathrm{Log}\,(A) \equiv \int_{-\infty}^{0} \{ [s - A]^{-1} - [s - 1]^{-1} \}\, ds} \qquad A \in \Omega'.$$

On en déduit les formules

(6.39) $$\boxed{\mathrm{Log}\,(B.A.B^{-1}) \equiv B.\mathrm{Log}\,(A).B^{-1}} \qquad B \in \mathrm{GL}(E)$$

(6.40) $$\boxed{\mathrm{Log}\,(A^{-1}) \equiv -\,\mathrm{Log}\,(A)}$$

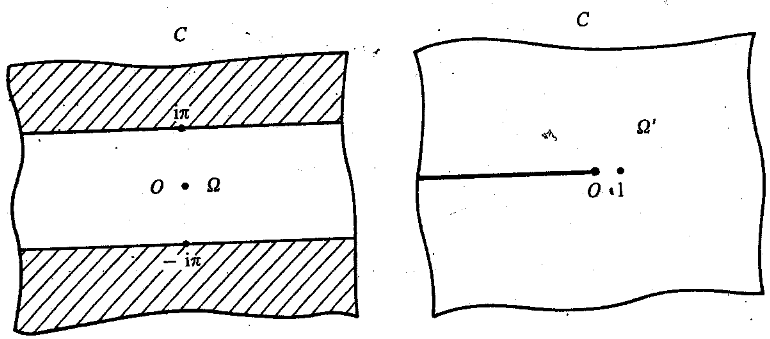


Fig. 6.II.

(6.41) — La composante connexe de e dans $\mathrm{GL}(E)$ (qui est donc un sous-groupe invariant, selon (6.35)), est l'ensemble des éléments de $\mathrm{L}(E)$ dont le déterminant est positif [1] ; il contient évidemment l'ouvert Ω'.

— On vérifie immédiatement que les éléments a de $\mathrm{L}(E)$ qui vérifient l'*équation*

(6.42) $$\mathrm{dét}\,(a) = 1$$

forment un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}(E)$; on le note $\mathrm{SL}(E)$ [2] ; sa dimension est $n^2 - 1$; son algèbre de Lie est composée des éléments de $\mathrm{L}(E)$ dont la *trace est nulle* [3] ; $\mathrm{SL}(E)$ est connexe. ■

[1] Ce fait peut se déduire de la décomposition de Cartan (6.70).
[2] « Groupe spécial linéaire » de E ; on l'appelle aussi groupe *unimodulaire*.
[3] Appliquer la formule (2.29).

— Soit E un espace vectoriel *complexe* de dimension n.

On sait que E peut être considéré comme *espace vectoriel réel de dimension* $2n$; nous désignerons par les indices C et R les notions se rapportant respectivement à la structure réelle et à la structure complexe de E. Ainsi $L(E)_C$ désigne l'ensemble des applications C-linéaires de E dans E ; on vérifie que $L(E)_C$ est l'ensemble des éléments de $L(E)_R$ qui *commutent* avec l'application $\underline{i}$:

(6.43) $$\underline{i}(x) = ix \qquad \forall x \in E.$$

(6.44) — On voit facilement que $GL(E)_C [= GL(E)_R \cap L(E)_C]$ est un *sous-groupe de Lie* de $GL(E)_R$, de dimension $2n^2$, d'algèbre de Lie $L(E)_C$.

(6.45) — Si $a \in GL(E)_C$, il existe un nombre φ tel que $a\,e^{i\varphi}$ n'ait pas de valeur propre négative ; on voit aisément, grâce à (6.38) que

$$b = \mathrm{Log}\,(a\,e^{i\varphi}) - i\varphi$$

est un élément de $L(E)_C$, et que $\exp(b) = a$; il en résulte que l'application continue F :

$$F(t) \equiv \exp(tb)$$

vérifie $F(0) = 1_E$, $F(1) = a$; par suite $GL(E)_C$ est connexe (1) ; en appliquant la formule

(6.46) $$\mathrm{Tr}_R\,(Z) = 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{Tr}_C\,Z) \qquad [\forall Z \in L(E)_C]$$

et en remarquant que la formule (6.18) est valable aussi bien pour la structure complexe que pour la structure réelle, on voit que

$$\begin{aligned} \mathrm{d\acute{e}t}_R\,(a) &= \exp(\mathrm{Tr}_R\,(b)) = \exp(2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{Tr}_C\,(b))) \\ &= |\exp(\mathrm{Tr}_C\,(b))|^2 = |\mathrm{d\acute{e}t}_C\,(a)|^2 \end{aligned}$$

la formule ainsi établie

(6.47) $$\boxed{\mathrm{d\acute{e}t}_R\,(a) = |\,\mathrm{d\acute{e}t}_C\,(a)\,|^2}$$

est en fait vraie pour tout $a \in L(E)_C$, car les deux membres sont nuls si $a \notin GL(E)_C$. ∎

(6.48) — L'ensemble $SL(E)_C$, défini comme l'ensemble des $a[a \in GL(E)_C\,;\ \mathrm{d\acute{e}t}_C\,(a) = 1]$, est un *groupe de Lie connexe*, de dimension $2[n^2 - 1]$, ayant comme algèbre de Lie les $Z[Z \in L(E)_C\,;\ \mathrm{Tr}_C\,(Z) = 0]$; $SL(E)_C$ est un sous-groupe de Lie de $GL(E)_C$ et de $SL(E)_R$ (cf. la formule (6.47)). ∎

(1) Voir (1.52).

Espaces euclidiens

Soit E un espace vectoriel *réel* de dimension finie.

On dit que E est un espace *euclidien* si on a défini sur E un tenseur g, de degré 2, symétrique et régulier :

(6.49) $$\begin{cases} g(X)\,(Y) = g(Y)\,(X) \in R\,; & [\forall X, Y \in E] \\ [g(X) = 0\ (^1)] \Leftrightarrow [X = 0]. \end{cases}$$

— Un espace *complexe* de dimension finie n sera dit *euclidien* si

a) Considéré comme espace vectoriel réel de dimension $2n$, E est euclidien ;

b) $g(iX)\,(iY) = g(X)\,(Y)$. $\quad \forall X, Y \in E$.

Exemples

(6.50) — R est un *espace euclidien réel*, si on pose

$$g(x)\,(y) = xy \qquad \forall x, y \in R. \ ∎$$

(6.51) — C est un *espace euclidien complexe*, si on pose

$$g(x + iy)\,(x' + iy') = xx' + yy' \qquad [\forall x, y, x', y' \in R]. \ ∎$$

— Un produit direct d'espaces euclidiens (2) est euclidien si l'on pose

(6.52) $$g\begin{pmatrix} {}^1x \\ \vdots \\ {}^nx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1y \\ \vdots \\ {}^ny \end{pmatrix} = g({}^1x)\,({}^1y) + \cdots + g({}^nx)\,({}^ny). \ ∎$$

On vérifie le théorème :

(6.53) Soient E et E' deux espaces euclidiens ; soit A une application linéaire de E dans E' ; il existe une application $\bar{A}$ de E' dans E, appelée *transposée* de A, définie par

$$g(A(X))\,(Y) = g(X)\,(\bar{A}(Y)) \qquad \forall X \in E, \forall Y \in E'.$$

(1) $[g(X) = 0]$ peut aussi s'écrire $[g(X)\,(Y) = 0 \quad \forall Y \in E]$.

(2) Tous réels ou tous complexes (il en sera de même du produit) ; en particulier R^n et C^n sont des espaces euclidiens, respectivement réel et complexe.

La transposition vérifie les règles suivantes :

a) A linéaire $\Rightarrow$ $\overline{A}$ linéaire [1] ;

b) $g(X)(Y) = \mathrm{Re}\,(\overline{X}.Y)$ $[\forall X, Y \in E]$ [2] ;

c) $\overline{s}$ = complexe conjugué de s si $s \in C$ [3] ;

d) $\overline{1_E} = 1_E$ si E est euclidien ;

e) $\overline{A + B} \equiv \overline{A} + \overline{B}$;

f) $\overline{sA} \equiv \overline{s}\overline{A}$ pour tout scalaire s ;

(6.53) *g*) $\overline{\overline{A}} \equiv A$;

h) $\overline{A.B} \equiv \overline{B}.\overline{A}$ [4] ;

i) rang $(\overline{A})$ = rang (A) [5] ;

j) $[\overline{A}]^{-1} = \overline{A^{-1}}$ si A applique un espace euclidien sur un espace euclidien de même dimension [6] ;

k) $\mathrm{Tr}\,(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Tr}\,(A)}$, $\mathrm{dét}\,(\overline{A}) = \overline{\mathrm{dét}\,(A)}$, $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$ $[\forall A \in \mathrm{L}(E)]$ [5] ;

l) $\mathrm{Log}\,(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Log}\,(A)}$ si $\mathrm{Log}\,(A)$ existe ;

m) ${}^{j}[\overline{M}]_k = \overline{{}^{k}M_j}$ si M est une matrice [7].

(6.54) — Si E est un espace euclidien, on appelle *produit scalaire* de deux éléments X, Y de E le nombre

$$\boxed{\langle X, Y \rangle = \overline{X}.Y}\,.$$

S'il est réel, le produit scalaire coïncide avec $g(X)(Y)$ (6.53*b*).
Les propriétés usuelles du produit scalaire, notamment la formule

(6.55) $$\langle Y, X \rangle \equiv \overline{\langle X, Y \rangle}$$

se déduisent immédiatement des règles de la transposition.

[1] Eventuellement sur le corps des complexes.
[2] Cette formule suppose qu'on a identifié tout élément X de E avec l'application linéaire définie par $X(s) = sX$ $\forall s \in R$ (ou $\forall s \in C$, si E est complexe).
[3] Donc $\overline{s} = s$ si s est réel.
[4] Cette formule suppose, bien entendu, que B prend ses valeurs dans l'espace euclidien def (A).
[5] Cette formule est valable aussi bien dans le cas complexe que dans le cas réel.
[6] En particulier si A est une *base* de E, ou si $A \in \mathrm{GL}(E)$.
[7] Autrement dit, on obtient la matrice $\overline{M}$ en transposant chacun des éléments de M, puis en changeant les lignes et les colonnes. Cette formule est d'ailleurs une conséquence immédiate de $\overline{1}_j = {}^{j}|$ (notations (1.20), (1.29)).

(6.56) — Les vecteurs « ordinaires » forment un *espace euclidien* au sens (6.49), le produit scalaire $\langle X, Y \rangle$ étant le produit scalaire « ordinaire » ; on l'identifie à R^3. ■

— Il est immédiat que le « carré scalaire » $\langle X, X \rangle$ d'un élément de E est toujours réel ; on dit que l'espace E est *positif* (resp. *négatif*) si

(6.57) $$[X \neq 0] \Rightarrow [\overline{X}.X > 0] \quad (\text{resp. } \overline{X}.X < 0)\,.$$

— L'espace ordinaire, les espaces R^n et C^n sont positifs. ■

— Soit E un espace euclidien ; supposons que $Z \in \mathrm{L}(E)$.

(6.58) On dit que Z est *hermitien* (resp. *antihermitien*) si $\overline{Z} = Z$ (resp. $\overline{Z} = -Z$).

Si Z et Z' sont antihermitiens, on constate que

$$\overline{Z'.Z - Z.Z'} = \overline{Z}.\overline{Z'} - \overline{Z'}.\overline{Z} = -[Z'.Z - Z.Z'] ;$$

(6.59) par suite *les antihermitiens forment une sous-algèbre de Lie* $\mathscr{G}$ de $\mathrm{L}(E)$ (voir (6.16)).

Formons le plus grand sous-groupe de Lie $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$ admettant $\mathscr{G}$ comme algèbre de Lie, par le procédé (6.32.II) ; on trouve immédiatement que $\tilde{G}_{\mathrm{II}}$ est l'ensemble des $A \in \mathrm{GL}(E)$ tels que $\overline{A}.A$ *commute avec les antihermitiens* ; on peut montrer que ceci entraîne l'existence d'un scalaire (d'ailleurs réel) s tel que

(6.60) $$\overline{A}.A = s1_E\,,$$

ce qui s'écrit aussi

(6.61) $$\overline{A} = sA^{-1}\,.$$

Notons que s est constant sur chaque composante connexe du groupe $\tilde{G}_{II}$ [1] ; il en résulte que l'ensemble des A :

(6.62) $$\boxed{\overline{A} = A^{-1}}$$

forme un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}_{II}$, donc un *sous-groupe de Lie de* $\mathrm{GL}(E)$ *admettant les anti-hermitiens comme algèbre de Lie.*

(6.63) *Si E est réel*, ce groupe s'appelle *groupe orthogonal* de E, et se note $\mathrm{O}(E)$; sa dimension est $n(n-1)/2$; la formule (6.53*k*) montre que tout élément de A de $\mathrm{O}(E)$ vérifie

$$\mathrm{dét}\,(A) = \pm 1\,;$$

Z

[1] *Le même sous-groupe* possède une *autre structure de sous-groupe de Lie*, ayant comme algèbre de Lie les éléments de la forme $s\,1_E + Z$ ($\overline{Z} = -Z$).

on en déduit que l'ensemble

(6.64) $$\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}(E) \cap \mathrm{SL}(E)$$

est un *sous-groupe ouvert* de $\mathrm{O}(E)$, donc encore un groupe de Lie admettant les anti-hermitiens comme algèbre de Lie (« groupe spécial orthogonal »).

(6.65) — Si E est *positif* (6.57), on montre que tout élément de $\mathrm{SO}(E)$ se met sous la forme

$$\exp(Z) \qquad [\overline{Z} = -Z]\,;$$

alors $\mathrm{SO}(E)$ est connexe ; $\mathrm{O}(E)$ a deux *composantes*, $\mathrm{SO}(E)$ d'une part, les éléments de déterminant -1 d'autre part [1]. ∎

(6.66) — Si E est *complexe*, le groupe défini par (6.62) s'appelle groupe *unitaire* de E, et se note $\mathrm{U}(E)$; sa dimension est n^2.

Tout élément A de $\mathrm{U}(E)$ vérifie $|\,\text{dét}\,(A)\,| = 1$; ceux dont le déterminant est égal à 1 forment un sous-groupe de Lie $\mathrm{SU}(E)$ (« groupe spécial unitaire »), dont l'algèbre de Lie est l'ensemble des Z tels que

(6.67) $$\overline{Z} = -Z\,, \qquad \mathrm{Tr}\,(Z) = 0$$

et dont la dimension est donc $n^2 - 1$.

(6.68) — Si de plus E est *positif*, tout élément de $\mathrm{U}(E)$ (resp. de $\mathrm{SU}(E)$) se met sous la forme $\exp(Z)$, Z appartenant à l'algèbre de Lie de $\mathrm{U}(E)$ (resp. de $\mathrm{SU}(E)$) ; il en résulte que $\mathrm{U}(E)$ (resp. $\mathrm{SU}(E)$) est *connexe* [2]. ∎

(6.69) — Supposons que $A \in \mathrm{O}(E)$ (resp. $\mathrm{U}(E)$) (E euclidien quelconque) et que $\mathrm{Log}\,(A)$ existe ; en prenant le logarithme de l'égalité $\overline{A} = A^{-1}$, et en appliquant (6.40) et (6.53*l*), on voit que $\mathrm{Log}\,(A)$ est anti-hermitien, donc appartient à l'algèbre de Lie du groupe ; comme ci-dessus en (6.45) il en résulte que A appartient au sous-groupe connexe.

En revenant à la définition (6.37) de Ω', on voit donc que *tout élément de* $\mathrm{O}(E)$ *qui n'appartient pas au sous-groupe connexe possède une valeur propre négative.*

Représentations matricielles

THÉORÈME (*décomposition de Cartan pour les matrices*)

(6.70) Soit M une matrice carrée, régulière, à éléments réels ou complexes.
— Posons

$$\heartsuit \qquad B = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(\overline{M}.M)\,, \qquad A = M.\exp(-B)\,.$$

[1] C'est le cas pour $\mathrm{O}(R^n)$ et $\mathrm{SO}(R^n)$, notés respectivement $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$.
[2] C'est le cas pour $\mathrm{U}(C^n)$ et $\mathrm{SU}(C^n)$, notés respectivement $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$.

(6.70) Les matrices A et B existent toujours ; elles sont réelles si M est réelle. On a

$$\diamondsuit \qquad M = A.\exp(B)\,, \qquad \overline{A}.A = 1\,, \qquad \overline{B} = B\,.$$

— Les matrices A et B sont les seules solutions du système $\diamondsuit$.

— L'application $M \mapsto \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ est un difféomorphisme [1].

— Ceci montre que $\mathrm{GL}(R^n)$, aussi noté $\mathrm{GL}(n)$, est difféomorphe à $\mathrm{O}(n) \times R^{n(n+1)/2}$, et que $\mathrm{GL}(C^n)_C$, aussi noté $\mathrm{GL}(n, C)$, est difféomorphe à $U(n) \times R^{n^2}$.

(6.71) — Soit $S = [S_1 \ldots S_n]$ une base d'un espace euclidien E. Il est facile de voir que

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \overline{S}_1 \\ \cdots \\ \overline{S}_n \end{bmatrix}$$

donc que $\overline{S}.S = G$ est une matrice régulière, appelée *matrice de Gram.*

On peut facilement construire une *base orthonormale* S, c'est-à-dire une base telle que

(6.72) $$G = \overline{S}.S = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Big\}\, p \\ \\ \Big\}\, q \end{matrix} \qquad p + q = n$$

le nombre p est la dimension maximum d'un sous-espace euclidien positif de E, et ne dépend donc pas du choix de S ; on l'appelle *indice d'inertie* de E.

Nous supposons maintenant que E est *hyperbolique*, c'est-à-dire que $1 \leqslant p \leqslant n-1$ [2]. Tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ se met évidemment sous la forme

(6.73) $$a = S.M.S^{-1}$$

[1] Du groupe linéaire sur la variété des $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ tels que $\overline{A}A = 1$, $\overline{B} = B$.

[2] Il revient au même de dire que E n'est ni positif (on aurait $\overline{S}.S = 1$), ni négatif (on aurait $\overline{S}.S = -1$) ; dans ces deux cas les opérateurs A et M de (6.70) sont simultanément orthogonaux ou unitaires.

M étant une matrice carrée de nombres; si $\bar{a}.a = 1$, on constate immédiatement que

(6.74) $$M^{-1} = G.\overline{M}.G^{-1} \qquad [G \text{ donné en } (6.72)] ;$$

les matrices M vérifiant cette équation forment un groupe de Lie appelé $\mathrm{O}(p, q)$ dans le cas réel, $\mathrm{U}(p, q)$ dans le cas complexe, et qui est évidemment isomorphe à $\mathrm{O}(E)$ (ou $\mathrm{U}(E)$) [1].

Soit M un élément de ce groupe; en inversant et transposant (6.74), on voit que $\overline{M}$ appartient au groupe, donc aussi $\overline{M}.M$; le raisonnement de (6.69) montre que $B = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(\overline{M}.M)$ appartient à l'algèbre de Lie du groupe; les deux facteurs de la décomposition de Cartan (6.70♢) de M appartiennent donc au groupe. On vérifie immédiatement que B anticommute avec G, que A commute avec G; en développant ces relations de commutation, on arrive au résultat suivant :

Si M vérifie (6.74), il en est de même des termes de sa décomposition de Cartan; celle-ci s'écrit

(6.75) ♡ $$M = \left[\begin{array}{c:c} C & \\ \hdashline & D \end{array}\right] . \exp\left(\left[\begin{array}{c:c} & \overline{E} \\ \hdashline E & \end{array}\right]\right)$$

C et D étant des matrices carrées, d'ordre respectif p et q, vérifiant

$$\overline{C}.C = 1 \qquad \overline{D}.D = 1$$

et E une matrice à p colonnes et q lignes.

(6.76) Réciproquement, si C, D, E sont des matrices vérifiant les conditions indiquées, on voit que M, définie par ♡, vérifie (6.74); le difféomorphisme $M \mapsto \begin{pmatrix} C \\ D \\ E \end{pmatrix}$ montre donc que $\mathrm{O}(p, q)$ est difféomorphe à $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times R^{pq}$, et que $\mathrm{U}(p, q)$ est difféomorphe à $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \times R^{2pq}$ [2]; compte tenu de (6.65) est de (1.50), on voit que $\mathrm{O}(p, q)$ possède *quatre composantes connexes*, dont deux constituent $\mathrm{SO}(p, q)$; de même, $\mathrm{U}(p, q)$ et $\mathrm{SU}(p, q)$ sont connexes. ■

[1] La correspondance $M \mapsto a$ est un isomorphisme de groupe, et un difféomorphisme de variété; c'est pourquoi on dit que c'est un isomorphisme de groupe de Lie.

[2] On a un contrôle de ces faits par le compte des dimensions :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + pq ; \qquad n^2 = p^2 + q^2 + 2pq .$$

§ 7 CALCUL DES VARIATIONS

PROBLÈMES VARIATIONNELS CLASSIQUES

Supposons donnés un *lagrangien*, c'est-à-dire une fonction réelle différentiable

(7.1) $$\lambda \equiv \Lambda(t, x, x') \qquad [t \in R,\ x \in R^n,\ x' \in R^n]$$

et deux nombres t_0 et t_1.

A une application différentiable $F(t \mapsto x)$, on associe le nombre

(7.2) $$a = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, x, x')\, \mathrm{d}t \qquad \left[x' \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]$$

appelé *action*.

(7.3) Supposons maintenant que F dépende d'un paramètre u, de sorte que l'application

$$\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \mapsto x$$

soit différentiable; désignons par δ la « dérivation par rapport à u », définie par $\delta u \equiv 1$, $\delta t \equiv 0$; δ s'appelle une *variation* de F, d'où le nom du « calcul des variations ».

On établit facilement, au moyen d'une intégration par parties, la formule

(7.4) $$\delta a = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x'}(\delta x)\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x'}\right]\right\} (\delta x)\, \mathrm{d}t .$$

— Les premiers problèmes variationnels étudiés étaient du type suivant : on se donne deux points x_0 et x_1 de R^n et on cherche, parmi les fonctions différentiables F telles que

(7.5) $$F(t_0) = x_0 , \qquad F(t_1) = x_1$$

s'il y en a une qui rende *minimum* l'action a.

En utilisant la formule (7.4), on peut montrer que cette fonction $t \mapsto x$, si elle existe, doit vérifier les conditions

(7.6)
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\partial \lambda}{\partial x'}\right] \equiv 0 \\ \text{avec} \\ x' \equiv \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \end{array}\right.$$

Dans certains cas, on peut résoudre les équations (7.5), (7.6), et déterminer parmi les solutions de ce système, s'il y en a une qui rend l'action minimum ([1]). Nous allons seulement étudier les équations (7.6), appelées *équations d'Euler* ([2]), sans nous occuper du problème de minimum ; ces équations ne font intervenir que le lagrangien (et non les données t_0, x_0, t_1, x_1) ; leurs solutions s'appellent les *extrémales* du lagrangien.

VARIABLES CANONIQUES

Il est commode de rechercher les extrémales sous forme *paramétrique* ; c'est-à-dire, en termes précis, de chercher une *carte* du *graphe* d'une extrémale ; il s'agit d'une application différentiable

(7.7)
$$s \mapsto \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \qquad s \in R$$

telle que $t \mapsto x$ soit une extrémale. Si cette application est définie sur un intervalle, si s_0 et s_1 sont des points de cet intervalle, auxquels correspondent respectivement $\begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$, l'action correspondante s'écrit — grâce à un changement de variables classiques —

(7.8)
$$a = \int_{s_0}^{s_1} \Lambda\left(t, x, \frac{\dot{x}}{\dot{t}}\right) \dot{t}\, \mathrm{d}s \qquad \left[\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s};\ \dot{t} \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right].$$

On voit, si l'on pose

(7.9)
$$\left\{\begin{array}{l} q \equiv \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \quad \dot{q} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} \\ l \equiv L(q, \dot{q}) \equiv \Lambda\left(t, x, \dfrac{\dot{x}}{\dot{t}}\right) \dot{t} \end{array}\right.$$

([1]) C'est aussi parmi les solutions de ce système qu'il faut chercher les maximums éventuels.
([2]) On dit aussi équations d'Euler-Lagrange ; elles ont été écrites par Euler en 1744.

que l'on peut écrire

(7.10)
$$a = \int_{s_0}^{s_1} L(q, \dot{q})\, \mathrm{d}s\,.$$

La formule (7.4) s'applique encore à cette intégrale, et donne

(7.11)
$$\delta a = \left[\frac{\partial l}{\partial \dot{q}}(\delta q)\right]_{s_0}^{s_1} + \int_{s_0}^{s_1} \left\{\frac{\partial l}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\partial l}{\partial \dot{q}}\right]\right\} (\delta q)\, \mathrm{d}s\,.$$

Nous allons transformer cette formule, en tenant compte du fait que le nouveau lagrangien L défini par (7.9) ne contient pas la variable s, et qu'il est visiblement *homogène du premier degré* en $\dot{q}$:

(7.12)
$$L(q, \lambda\dot{q}) \equiv \lambda L(q, \dot{q}) \qquad \forall \lambda \neq 0\,.$$

En dérivant (7.12) par rapport à λ, puis en faisant $\lambda = 1$, on établit *l'identité d'Euler* des fonctions homogènes, qui s'écrit

(7.13)
$$l = p(\dot{q})$$

en posant

(7.14)
$$p \equiv \frac{\partial l}{\partial \dot{q}}\,.$$

En différentiant (7.13), on trouve l'identité

(7.15)
$$\frac{\partial l}{\partial q}(\delta q) \equiv [\delta p]\,(\dot{q})$$

d'où, en portant dans (7.11)

(7.16)
$$\delta a = [p(\delta q)]_{s_0}^{s_1} + \int_{s_0}^{s_1} \left\{\delta p\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right) - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}(\delta q)\right\} \mathrm{d}s \qquad \left[\dot{q} \equiv \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right]$$

— Il est clair, sur la définition (7.14), que p est un élément du dual de R^{n+1}, c'est-à-dire une ligne de nombres

(7.17)
$$p \equiv [p_1 \quad p_2 \cdots p_{n+1}]\,.$$

On vérifie facilement que p est *homogène de degré* 0 en $\dot{q}$, c'est-à-dire qu'il ne dépend que de la direction de $\dot{q}$; dans de nombreux cas, il en résulte que l'on peut *éliminer* q dans l'équation (7.14), c'est-à-dire trouver une fonction réelle différentiable φ, à dérivée non nulle, telle que

$$[\varphi(p, q) = 0] \Leftrightarrow \left[\text{il existe } \dot{q} \text{ tel que } p = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}}\right] \quad (^1)\,. \tag{7.18}$$

Dans ce cas, l'équation $\varphi(p, q) = 0$ s'appelle *équation de Jacobi* du problème (²); on peut montrer que les extrémales sont les lignes de force du système

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,{}^1q}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{\mathrm{d}\,{}^{n+1}q}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{n+1}}} = \frac{-\,\mathrm{d}p_1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\,{}^1q}} = \cdots = \frac{-\,\mathrm{d}p_{n+1}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\,{}^{n+1}q}}} \tag{7.19}$$

pour lesquelles la variable $\varphi(p, q)$ (qui est une intégrale première de ce système) prend la valeur 0.

FORMALISME HAMILTONIEN

En revenant aux définitions (7.9), on trouve immédiatement les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} {}^jq \equiv {}^jx\,, & p_j \equiv \dfrac{\partial\lambda}{\partial\,{}^jx'} \quad [j = 1, 2, \ldots, n] \\ {}^{n+1}q \equiv t\,, & p_{n+1} \equiv \lambda - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x'}(x') \equiv \lambda - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j\,{}^jx'\,. \end{array}\right. \tag{7.20}$$

On dit que le problème variationnel est *hamiltonien* s'il existe une fonction différentiable H (« fonction hamiltonienne ») telle que

$$h \equiv \frac{\partial\lambda}{\partial x'}(x') - \lambda \equiv H(t, {}^1x \ldots {}^nx, p_1, \ldots, p_n)\,. \tag{7.21}$$

Dans ces conditions, l'équation de Jacobi s'écrit sous la forme

$$\varphi(p, q) \equiv p_{n+1} + H(t, {}^1q, \ldots, {}^nq, p_1, \ldots, p_n) = 0\,; \tag{7.22}$$

(¹) Ceci suppose que le problème est *régulier*, c'est-à-dire que le noyau de $\partial p/\partial\dot{q}$ [qui contient $\dot{q}$] est de dimension 1.

(²) L'*équation aux dérivées partielles de Jacobi* s'écrit $\varphi(\partial\mathcal{S}/\partial q, q) \equiv 0$, $\mathcal{S}$ étant une fonction inconnue de q.

en portant dans (7.19), on obtient immédiatement les équations

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,{}^jq}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial p_j}} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial h}{\partial[{}^jq]}} \qquad [j = 1, 2, \ldots, n] \tag{7.23}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial t}}\,. \tag{7.24}$$

Ces *équations canoniques* ont été écrites par Lagrange en 1808; on les appelle *équations de Hamilton*.

(7.25) Notons que l'équation (7.24) peut être supprimée, car elle se déduit de (7.21) et (7.23); son principal intérêt est de montrer que h est une intégrale première si la variable t n'intervient pas dans la fonction hamiltonienne H.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS CANONIQUES

Posons maintenant

$$\boxed{y \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}} \quad \boxed{\varpi(\delta y) \equiv p(\delta q)} \tag{7.26}$$

puisque p est défini en fonction de $\dot{q}$ et q (donc de y) par la formule (7.14), il est clair que (7.26) définit un champ de 1-formes $y \mapsto \varpi$ de l'espace

(7.27) R^{2n+2} parcouru par la variable y; ϖ s'appelle la *forme de Cartan* (¹).

On peut alors écrire la formule (7.16) sous la forme

$$\delta a = [\varpi(\delta y)]_{s_0}^{s_1} + \int_{s_0}^{s_1} [\nabla\varpi]\,(\delta y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \tag{7.28}$$

(¹) Avec les notations ci-dessus, la forme de Cartan est définie par

$$\varpi(\delta y) \equiv \left[\sum_{j=1}^{n} p_j\,\delta\,{}^jq\right] - h\,\delta t\,.$$

en introduisant la *dérivée extérieure* $\nabla\varpi$ de la forme de Cartan (1); ceci permet d'étendre les résultats précédents au cas d'un problème variationnel *défini sur une variété*, en établissant le théorème suivant (Fig. 7.I) :

Soit V une variété parcourue par la variable q ; soit $\dot{q}$ un vecteur tangent en q à V; soit $y \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}$ (2).

— On appellera *lagrangien* une application L :

$$L(q, \dot{q}) \equiv l$$

différentiable (3) et homogène du premier degré en $\dot{q}$:

(7.29) $$L(q, \lambda\dot{q}) = \lambda L(q, \dot{q}) \qquad \forall \lambda \neq 0\,.$$

— On appellera *forme de Cartan* du lagrangien la 1-forme ϖ de V^D définie par

$$\varpi(\delta y) \equiv \frac{\partial l}{\partial \dot{q}}(\delta q) \qquad (4)\,.$$

— Pour qu'une application $s \mapsto q \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} \neq 0\right)$ soit une *extrémale*, il faut et il suffit que l'application

$$s \mapsto y \equiv \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} \\ q \end{pmatrix}$$

vérifie identiquement

◇ $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \in \ker(\nabla\varpi)\,.$$

(7.30) — Supposons que l'espace vectoriel $\ker(\nabla\varpi)$ ait une dimension p constante; alors le champ $y \mapsto \ker(\nabla\varpi)$ est le *feuilletage caractéristique*

(1) Car la définition (4.32) donne immédiatement

$$[\nabla\varpi]\,(\delta y)\,(\mathrm{d}y) = [\delta p]\,(\mathrm{d}q) - [\mathrm{d}p]\,(\delta q)\,.$$

(2) La variable y parcourt dans la variété V^D des vecteurs tangents à V (voir (1.31, 1.34)).

(3) Sur un ouvert de V^D.

(4) Le lecteur remarquera que la notation $\frac{\partial l}{\partial \dot{q}}$ n'a *aucun sens*, en général, sur une variété V.

de la forme $\nabla\varpi$ (1); nous considérerons les feuilles comme les solutions (généralisées) du problème variationnel défini par le lagrangien.

(7.31) — En particulier, si le problème est *régulier* (ci-dessus (7.18)) p est égal à 2; toute extrémale de V est la projection d'une variété intégrale du feuilletage.

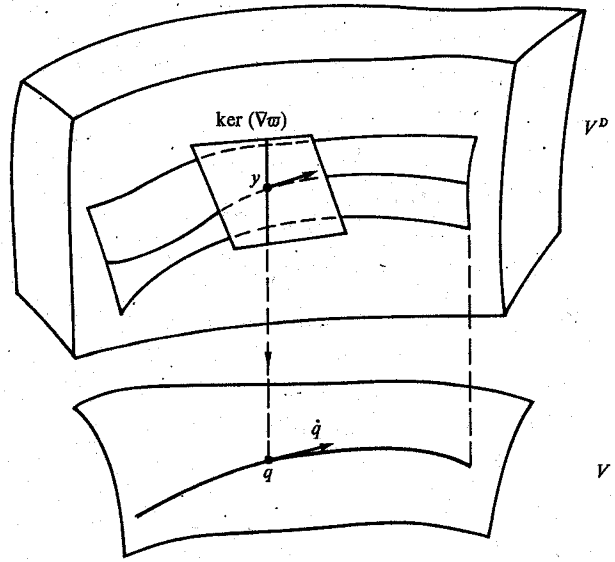


Fig. 7.I.

TRANSFORMATIONS D'UN PROBLÈME VARIATIONNEL

(7.32) Notons $L(q)\,(\dot{q})$ un lagrangien d'une variété V (voir (7.29)); il est clair que $L(q)$ est un opérateur covariant de degré 1, donc que le lagrangien L est un *champ covariant* de degré 1 (voir (4.3)).

Nous savons donc définir (Fig. 7.II) l'image réciproque L^* de L par une application différentiable A (4.5); en posant

(7.33) $$y^* \equiv \begin{pmatrix} \dot{q}^* \\ q^* \end{pmatrix}, \quad y \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix} \equiv A^D(y^*) \equiv \begin{pmatrix} D(A)\,(q^*)\,(\dot{q}^*) \\ A(q^*) \end{pmatrix}$$

on trouve

(7.34) $$L^*(q^*)\,(\dot{q}^*) \equiv L(q)\,(\dot{q})$$

(1) Parce que $\nabla[\nabla\varpi] = 0$, en raison du théorème de Poincaré (voir la définition (5.24, 5.25)).

ce qui montre que L^* est *aussi un lagrangien* ; on constate immédiatement que la forme de Cartan ϖ^* de L^* est l'image réciproque par A^D de la forme de Cartan ϖ de L :

(7.35) $$\varpi^*(\delta y^*) \equiv \varpi(\delta y)\,.$$

Le théorème (4.36) montre alors que l'image réciproque de $\nabla\varpi$ est égale à $\nabla\varpi^*$; la formulation (7.29 ◊) des équations d'Euler montre donc que l'image par A d'une extrémale de L^* est une extrémale de L (même si les variétés V^* et V n'ont pas la même dimension).

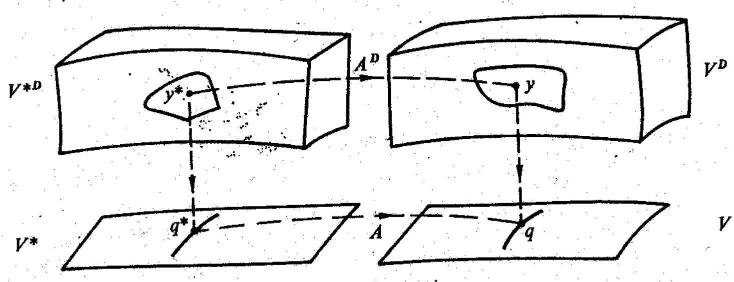


Fig. 7.II.

THÉORÈME DE NOETHER

(7.36) Soit L un lagrangien d'une variété V (notations (7.29)) ; soit G un groupe de Lie qui opère sur V (6.4) ; nous dirons que le groupe *invarie* le lagrangien si l'image réciproque de L par les opérations a_V du groupe est encore L. Dans ces conditions, pour tout Z dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, le nombre

$$u \equiv \frac{\partial l}{\partial \dot{q}}(Z_V(q))$$

est constant sur toute extrémale connexe [1].

— Nous étudierons ce théorème en détails, au chapitre suivant, dans un cadre plus général (11.11) ; indiquons seulement comment il s'applique à un lagrangien classique ; si l'on pose $\delta q \equiv Z_V(q)$, les formules (7.20, 7.21) donnent

(7.37) $$u \equiv p_1\,\delta^{\,1}q + \cdots + p_n\,\delta^{\,n}q - h\,\delta t$$

c'est cette grandeur qui est constante si le groupe invarie le lagrangien ; le lecteur pourra vérifier que le résultat (7.25) (constance de l'hamiltonien h si le lagrangien ne contient pas la variable t) est un cas particulier du théorème de Noether.

[1] On rappelle que Z_V est le champ de vecteurs de V associé à Z par la formule (6.11) ; on a d'ailleurs aussi $u \equiv \varpi(Z_{V^D}(y))$ (voir (6.7)).