J.-M. SOURIAU
Professeur à la Faculté des sciences de Marseille

Géométrie et relativité

HERMANN
115, Boulevard Saint-Germain - Paris VIe

nous étudions aussi les *glissements de jauge* et les *groupes de jauge*.

Comme application de la théorie des espaces fibrés, nous donnons au § 10 la théorie des *revêtements* d'un espace quelconque ; nous en déduisons de nombreux *théorèmes de relèvement*, et la définition du *groupe de Poincaré* (1).

— La *théorie de la variance* est exposée dans le cas d'un espace quelconque, à l'aide de l'axiomatique des *racines* (chapitre III) ; on arrive ainsi à des règles de calcul précises, qui s'appliquent notamment aux *champs* de la géométrie différentielle et de la physique.

— Nous caractérisons une *variété à n dimensions*, V, au moyen d'une structure d'espace définie sur la réunion $V \cup R^n$; la théorie des recueils et des racines fournit des algorithmes pratiques pour les problèmes relatifs aux *cartes* (systèmes de coordonnées) et aux changements de cartes (chapitre IV). L'étude des champs de vecteurs et des équations différentielles sur une variété permet de définir les *glissements infinitésimaux :* la théorie des racines donne alors une définition simple de la *dérivée de Lie* d'un champ, notion importante pour les applications, où se retrouvent les principaux aspects de la théorie de la variance.

— Le chapitre V est consacré à l'étude de diverses théories algébriques et de leurs applications géométriques (voir le détail dans la table des matières) ; on y trouvera les diverses parties de la *géométrie différentielle* classique, et notamment l'*intégration des formes.*

— Pour que cette première partie du livre puisse être utilisée comme un traité pratique de géométrie, nous avons apporté un soin particulier à la présentation des calculs ; nous avons dû renoncer à certaines notations, pourtant assez courantes, à cause des confusions qu'elles peuvent provoquer ; les formulaires sont aussi complets que possible ; on y trouvera de nombreuses formules inédites.

(1) Le lecteur pourra passer ce paragraphe en première lecture sans briser le fil conducteur de l'exposé.

D'autre part, tous les théorèmes d'analyse classique utilisés sont rappelés en détail quand ils ne sont pas démontrés ; les références bibliographiques renvoient à un petit nombre d'ouvrages de synthèse, d'accès facile.

Deuxième partie : Relativité.

Comme la plupart des théories physiques bien élaborées, la relativité peut être exposée de deux façons :

— En suivant l'ordre historique : la contradiction entre la Mécanique et l'Electrodynamique classiques a été résolue par une critique de la notion de simultanéité, la création de l'espace de Minkowski et de la théorie de la Relativité Restreinte, qui est un *recommencement inductif* de la physique. De même, la nécessité d'englober la gravitation dans la théorie a mené Einstein, par une nouvelle induction créatrice, à abandonner l'espace de Minkowski et à édifier la Relativité Générale (1).

— En suivant l'ordre logique, *inverse du précédent :* comme nous le faisons dans ce livre, on part alors d'*axiomes* caractérisant la Relativité Générale ; par une suite de *déductions* et d'*approximations*, on aboutit à l'*interprétation physique* de la théorie.

Ce deuxième mode d'exposition est évidemment nécessaire à l'achèvement de la théorie ; il s'accompagne d'une grande économie de pensée ; il évite au lecteur l'erreur, trop répandue, de croire que l'induction est un jeu sans règles, et que la contradiction interne est, en elle-même, un gage de fécondité pour une théorie physique...

Mais il présente aussi ses dangers ; il ne faudrait pas croire qu'une structure mathématique puisse constituer une théorie physique

(1) Certains physiciens estiment que la Relativité Générale n'est qu'une théorie de la gravitation ; tous savent bien, pourtant, que la Relativité Restreinte est plus qu'une électrodynamique. Cette attitude ambiguë nous paraît difficile à justifier.

INTRODUCTION

Première partie : Géométrie.

— Nous proposons de placer à la base de la géométrie la notion de *recueil* (§ 1) : si des opérateurs vérifient les axiomes des recueils, ils définissent une *géométrie* sur un certain ensemble E ; E prendra alors le nom d'*espace* ; les éléments du recueil s'appelleront *glissements de* E.

On peut ainsi définir aussi bien les géométries classiques (géométrie euclidienne, géométrie projective (¹), etc.,) que la topologie générale, la géométrie différentielle, la géométrie algébrique, etc.

— Tout espace est pourvu d'une *topologie naturelle*, pour laquelle les glissements sont continus (²) (³) ; la notion de recueil permet donc l'étude simultanée des propriétés *locales* et des propriétés *globales* (chapitre I).

— Dans certains cas, une équivalence définie sur un espace E définit une *structure d'espace* sur l'ensemble quotient E′ : nous dirons alors que E est un *espace fibré* de *base* E′ (chapitre II). On définit immédiatement les *fibres* de E, leur *groupe structural* ;

(¹) Dans ces cas classiques, le recueil se réduit à un groupe d'opérateurs ; tel le groupe des déplacements euclidiens.

(²) Exemple : le *recueil* des transformations birationnelles de l'espace projectif complexe admet la *topologie de Zariski* comme topologie naturelle.

(³) Inversement, toute topologie (au sens de Bourbaki) peut être définie par un recueil ; les recueils admettant un espace et une topologie donnés forment un pseudo-groupe (au sens d'Ehresmann).

sans posséder d'interprétation claire et détaillée ([1]) ; que les axiomes d'une théorie quelconque soient intangibles, et que la recherche scientifique puisse se passer du recours à l'induction.

— Ainsi, il est clair que les axiomes proposés pour la Relativité Générale (§ 33) sont de valeur inégale, et que certains doivent et peuvent être remis en cause ([2]) ; on en trouvera un exemple au chapitre VII.

Dans les diverses modifications de la relativité que l'on peut imaginer, il semble que la partie qui doit rester la plus stable est l'existence d'une *structure géométrique* pour l'univers physique ; parce que cette structure est l'énoncé mathématique du principe du *déterminisme*.

Ce principe ([3]), en effet, assure que la répétition d'une expérience est toujours possible, en d'autres temps ou d'autres lieux — si on établit les conditions nécessaires ; la notion même de *répétition* implique l'existence d'une *correspondance biunivoque* entre les instants-points de la première expérience et ceux de la seconde (telle qu'il se passe « la même chose » en deux instants-points homologues) ; si nous appelons *glissements* ces correspondances spatio-temporelles, il semble clair que l'inverse d'un glissement doit être un glissement, que la composition de deux glissements doit donner un glissement : par conséquent l'ensemble de tous les glissements vérifie les axiomes des *pré-recueils* (voir le § 1) ; il définit donc une *géométrie* de l'espace-temps ; géométrie dans laquelle la physique tout entière doit pouvoir se décrire, puisque les lois physiques, qui concernent l'ensemble des expériences pos-

---

([1]) C'est pourquoi nous avons longuement étudié le passage de la Relativité à la Mécanique Classique, afin de convaincre le lecteur que la Relativité n'est pas un simple additif, mais qu'elle *contient* toute la physique classique (voir le § 39). Il est très important de remarquer que la Relativité Restreinte est beaucoup moins adaptée à jouer ce rôle universel ; la notion d'énergie, par exemple, y reste purement phénoménologique (voir la fin du § 38).

([2]) Pour résoudre les problèmes fondamentaux posés par les interactions entre les particules élémentaires et par les contradictions qui subsistent encore entre la Relativité Générale et la Mécanique Quantique.

([3]) On l'énonce naïvement en disant que *les mêmes causes produisent les mêmes effets* ; mais rien, en physique, ne nous apprend à distinguer les effets des causes.

sibles, doivent nécessairement être *invariantes par les glissements* ([1]). Mais bien entendu, rien n'impose à priori de choisir telle ou telle géométrie ; c'est ainsi que nous étudions au chapitre VII une *théorie à 5 dimensions* ([2]), unitaire en ce sens qu'elle donne une origine purement géométrique aux interactions gravifiques *et aux interactions électromagnétiques*, aussi bien dans le cadre de la physique classique que dans celui des *fonctions d'onde* des particules élémentaires.

En particulier, la théorie permet d'interpréter les *transformations de jauge électro-magnétiques*, la *conjugaison de charge*, et de prévoir l'existence d'une *charge électrique élémentaire*, indépendante de la nature des particules ; faits qui sont constatés, mais non expliqués, par la physique actuelle.

L'origine de cette théorie remonte aux travaux de Kaluza ([3]), déjà perfectionnés par de nombreux auteurs, notamment Klein ([4]), Jordan ([5]), Thiry ([6]), Lichnerowicz ([7]) ; sa validité n'est pour l'instant qu'une hypothèse, qui serait confirmée si l'univers à 5 dimensions se révélait apte à décrire *l'électrodynamique quantique* ([8]).

([1]) Un problème différent posé par le principe du déterminisme est de savoir quelle *liberté* il laisse à la nature, quel est le *degré de détermination* des lois physiques ; ce problème sera évoqué ci-dessous (§ 32), et rapproché de l'existence possible d'un principe variationnel.

([2]) J.-M. Souriau, C.R.A.S., 247, p. 1559 (1958).

([3]) Sitz. preus. Akad. Wiss, p. 966 (1921).

([4]) Z. für Physik, 37, p. 895 (1926) ; Nature, 118, p. 516 (1927).

([5]) Ann. Phys., p. 219 (1947).

([6]) C.R.A.S., 226, pp. 216 et 1881 (1948).

([7]) " Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ", Masson, Paris, (1955).

([8]) On peut envisager l'existence de théories analogues, mais comportant plus de dimensions, pour expliquer les symétries qui semblent exister entre les différentes particules, dans les interactions fortes ; mais le fait qu'il s'agit de symétries *approximatives* est l'origine de grandes difficultés.