

DEUXIÈME PARTIE

Relativité

Relativité générale

§ 32 A propos des principes de la physique

Les multiples théories qui constituent la physique se sont élaborées au long de l'histoire ; à travers leur diversité, on peut cependant reconnaître quelques principes communs ; ce que les philosophes appellent parfois *déterminisme* ou *causalité* ; le *principe de relativité* ; etc.

Il nous semble que ces principes impliquent une *structure géométrique* de la nature ⁽¹⁾ ; nous proposons l'énoncé suivant, qui utilise le langage des chapitres précédents :

- (32.1) I. L'univers physique U est un univers géométrique, au sens (2.1) ⁽²⁾.
 II. Il existe une racine Φ de U (12.1), et un Φ -champ f (15.1), qui caractérise la *matière* et son évolution.
 III. Les lois physiques déterminent une famille invariante \mathcal{F} de Φ -champs (15.9), à laquelle f appartient ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Voir à ce sujet l'introduction.

⁽²⁾ Rappelons cette définition ; il existe un recueil \mathfrak{R} (1.19), dont les éléments, appelés *glissements* de U , opèrent transitivement sur U .

⁽³⁾ Cette famille invariante \mathcal{F} caractérise en quelque sorte le « possible », et f le « réel » : la physique laisse arbitraire le choix de f dans \mathcal{F} ; et c'est cette indétermination qui caractérise l'aspect contingent de la nature.

Relativité générale

§ 32 A propos des principes de la physique

Les multiples théories qui constituent la physique se sont élaborées au long de l'histoire ; à travers leur diversité, on peut cependant reconnaître quelques principes communs ; ce que les philosophes appellent parfois *déterminisme* ou *causalité* ; le *principe de relativité* ; etc.

Il nous semble que ces principes impliquent une *structure géométrique* de la nature ⁽¹⁾ ; nous proposons l'énoncé suivant, qui utilise le langage des chapitres précédents :

- (32.1) I. L'univers physique U est un univers géométrique, au sens (2.1) ⁽²⁾.
 II. Il existe une racine Φ de U (12.1), et un Φ -champ f (15.1), qui caractérise la *matière* et son évolution.
 III. Les lois physiques déterminent une famille invariante \mathcal{F} de Φ -champs (15.9), à laquelle f appartient ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Voir à ce sujet l'introduction.

⁽²⁾ Rappelons cette définition ; il existe un recueil \mathcal{R} (1.19), dont les éléments, appelés *glissements* de U , opèrent transitivement sur U .

⁽³⁾ Cette famille invariante \mathcal{F} caractérise en quelque sorte le « possible », et f le « réel » : la physique laisse arbitraire le choix de f dans \mathcal{F} : et c'est cette indétermination qui caractérise l'aspect contingent de la nature.

Cet énoncé, bien entendu, ne constitue pas à lui seul « une physique », que nous demanderions au lecteur d'adopter : il ne s'agit pour l'instant que d'une indication sur les méthodes que nous nous proposons d'utiliser pour faire de la physique. Seuls les développements ultérieurs, où apparaîtront peu à peu les rapports entre cette structure géométrique et l'expérience, permettront d'en comprendre le sens et d'en juger la valeur.

Pour élaborer une théorie physique proprement dite, il faut notamment préciser la structure de U , Φ , \mathcal{F} .

Voici à ce sujet quelques remarques générales :

- (32.2) — On admet généralement que l'univers U possède une structure de *variété* (définition (19.6)) ⁽¹⁾ ; on sait que cette hypothèse se décompose en deux (19.7) :

- (a) L'univers U est *localement isomorphe* à R^n , muni d'un *recueil classique* ;
 (b) on a donné à $U \cup R^n$ une structure d'univers, admettant U et R^n comme sous-univers ouverts (méthode (5.3)).

Il semble naturel d'admettre que la structure de U est imposée par l'expérience ; par contre la structure de $U \cup R^n$ dépend d'un choix arbitraire ; les modifications de ce choix entraîneront des modifications de l'énoncé des lois de la physique — sans que ces lois même changent (c'est ce qui se passe, par exemple, lorsqu'on fait un *changement d'unités* en physique classique).

Il peut cependant arriver que cet arbitraire disparaisse : nous avons montré qu'il est nécessaire et suffisant, pour cela, que l'univers U soit *parfait* (19.7, 5.3) ; l'hypothèse de la *perfection de l'univers* est séduisante, mais conduit à des difficultés mathématiques.

- (32.3) Il semble présomptueux de croire à la possibilité de représenter tous les aspects de la matière par un seul champ f (« *champ uni-*

⁽¹⁾ C'est cette hypothèse qui permettra l'utilisation des *nombre réels* en physique : nous parlerons plus loin de la dimension n de U .

taire ») ainsi que nous le proposons en (32.1, II) ; mais la méthode apparemment plus prudente qui consiste à distinguer plusieurs champs distincts f_j , correspondant à des racines Φ_j , lui est *mathématiquement équivalente* : il suffit de désigner par Φ le *produit direct* des racines Φ_j (16.18) ; on sait que la donnée de chacun des Φ_j -champs est équivalente à la donnée d'un seul Φ -champ (16.18).

D'ailleurs, la décomposition géométrique du champ unique en champs partiels n'a d'intérêt pratique que si elle est accompagnée d'une *décomposition dynamique*, c'est-à-dire si l'on peut énoncer des lois physiques qui régissent séparément chacun des champs. Or l'expérience montre que, dans la plupart des cas, ceci n'est vrai qu'approximativement : pour serrer de plus près la nature, on est obligé de considérer des *interactions* entre les champs partiels ; il est clair d'ailleurs que ces interactions n'ont pas de sens en elles-mêmes, mais seulement par rapport à la décomposition, plus ou moins arbitraire, que l'on attribue au champ unitaire.

- (32.4) Il est clair que l'axiome (32.1.III), qui caractérise les lois physiques par une famille invariante \mathcal{F} de Φ -champs, est fort imprécis quant à la *détermination* de ces lois : \mathcal{F} pourrait être la famille de tous les Φ -champs, ou, à l'opposé, la famille engendrée par un seul champ invariant (cf. (15.14)) ; dans un cas, *tout serait possible* ; dans l'autre, *tout serait déterminé*.

Bien entendu, la réalité est intermédiaire : chacun a même le sentiment, renforcé par l'étude de la physique, que la nature se tient à un « juste milieu » entre ces deux extrêmes.

Ce juste milieu dont on a l'intuition, peut-on le décrire mathématiquement ? Une des voies pour y parvenir consiste à admettre que *toutes les lois de la physique peuvent se réduire à un seul principe variationnel* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nous précisons un tel principe au paragraphe suivant : nous verrons notamment que l'invariance du *lagrangien* entraîne l'invariance de la famille \mathcal{F} des solutions des équations aux variations.

Il y a longtemps, en effet, que l'on a remarqué que l'ensemble des lois régissant telle ou telle théorie physique pouvait se réduire à un seul principe variationnel (lois de Descartes et principe de Fermat (1662); lois de la mécanique et principe d'Hamilton (1834); etc...), ce qui montre bien que le calcul des variations est apte à rendre compte de la *détermination* des lois naturelles, au moins dans des théories partielles.

Mais, pour beaucoup de physiciens, il ne s'agit là que de réussites accidentelles; de ce point de vue, les principes variationnels ont surtout une valeur mnémotechnique, et la recherche d'un principe unique ressortit à un mysticisme mal placé.

Ce point de vue est raisonnable; mais le point de vue adverse est tout aussi raisonnable, et il nous semble qu'il existe quelques arguments importants en faveur des « variationnistes ».

(32.5) — S'il existe un principe variationnel unique, il est facile d'en déduire mathématiquement des principes variationnels *partiels*; ce ne sera donc plus une coïncidence si de tels principes réussissent à décrire des théories physiques très nombreuses.

(32.6) — Nous verrons d'ailleurs plus loin (§§ 35 à 39) que l'on peut effectivement englober des théories très diverses (mécanique, gravitation, électromagnétisme, etc...) dans un seul principe, et que celui-ci permet de retrouver les principes classiques correspondants.

(32.7) — *Supposons qu'un système partiel soit régi par un principe variationnel, et qu'il existe une transformation infinitésimale qui laisse le système invariant.*

Les méthodes d'Emmy Noether ⁽¹⁾ permettent alors de définir une certaine quantité, appelée *grandeur conjuguée* de la transformation infinitésimale ⁽²⁾, et de démontrer que la valeur numérique de cette grandeur est constante (on dit que la grandeur est *conservative*).

⁽¹⁾ E. NOETHER, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 1918, p. 235.

⁽²⁾ Ce point de vue est plus correct que celui qui consiste à parler de grandeur conjuguée d'une variable, ou, à fortiori, de « variables conjuguées ».

C'est ainsi, notamment, que l'on peut définir, à partir d'un principe variationnel, l'énergie, l'impulsion, le moment cinétique, et démontrer leur conservation.

Ce sont là des grandeurs qui se mesurent facilement, à cause justement de leur caractère conservatif (on peut les transférer de l'objet étudié à l'instrument de mesure); cette facilité de mesure amène bien des physiciens à penser que ce sont en quelque sorte des grandeurs « primitives », et que leur conservation est une loi fondamentale de la nature; le recours au principe variationnel initial peut alors sembler inutile.

Il paraît pourtant bien imprudent de méconnaître le caractère « noethérien » de ces quantités; comment expliquer alors qu'elles correspondent biunivoquement aux invariances du système ?

— que lorsque plusieurs particules interagissent, il soit impossible de répartir l'impulsion entre elles, et que cependant l'impulsion totale soit bien définie et conservative ?

— que la décomposition du moment cinétique en « moment cinétique orbital » et « moment cinétique de spin » soit purement formelle ?

Mais ces grandeurs possèdent un caractère sur lequel tout le monde est d'accord, parce que l'expérience ne l'a jamais contredit; c'est leur *universalité*, c'est-à-dire l'aptitude qu'elles ont à se laisser reconnaître et à se conserver à travers toutes les transformations physiques; universalité qui est d'ailleurs impliquée par la simple possibilité de les mesurer.

Or, si l'on admet que ces quantités sont définies et conservatives parce qu'elles sont conjuguées de certaines invariances géométriques, leur universalité reste inexplicable s'il n'y a pas *unicité du principe variationnel*.

(32.8) Nous n'abordons pas dans cet ouvrage la mécanique quantique; mais on peut remarquer que ses diverses formulations, à travers les obscurités qui y subsistent encore, laissent entrevoir plus ou

moins nettement un principe variationnel ; on peut noter, en particulier, le rôle qu'y joue la notion de variable conjuguée ; le fait que la constante de Planck a les dimensions d'une action hamiltonienne ; etc...

A supposer, comme beaucoup le font, qu'il existe un *principe de correspondance* qui permette de passer de la mécanique quantique à la physique classique, on voit que l'universalité supposée de la mécanique quantique est, elle aussi, corrélative de l'unicité du principe variationnel.

§ 33 Principes de la relativité générale

Nous partirons des principes suivants :

(33.1)	(a) L'univers physique U est une <i>variété de dimension 4</i> .	(19.6)
	(b) En chaque point X de U est défini un tenseur <i>g</i> , de façon à donner à U une <i>structure riemannienne hyperbolique normale</i> .	(30.1,3)
	(c) A chaque phénomène physique correspondent :	
	une <i>racine</i> Φ ;	(12.1)
	un Φ - <i>champ</i> f défini sur U ;	(15.1)
	un <i>homomorphisme de racine</i> φ_x , tel que pour tout X de U	(13.1)
	$p \equiv \varphi_x \left(\begin{matrix} g \\ \text{contact}_x(f) \end{matrix} \right)$	(20.41)
	soit un scalaire, que nous appellerons <i>présence</i> du phénomène au point X.	(24.8)

(33.1)	(d) Quel que soit le 4-pavé naturel C, l'intégrale	(31.63,68)
	$\int_C \left[\sum_j p_j \right] \rho$	
	[où les p_j désignent les présences des divers phénomènes concomitants et ρ la densité riemannienne] est stationnaire ⁽¹⁾ pour toute variation, nulle sur le support du bord de C, du champ $[X \rightarrow g]$ et des divers champs f_j .	(30.4)

Nous allons compléter cet énoncé par des hypothèses de différentiabilité (33.14) ; voici d'abord quelques notations et quelques remarques.

Soit (fig. p. 322) F une *carte* de U (19.8) ; X un point variable de U ; posons

$$(33.2) \quad F(x) \equiv X ;$$

la variable

$$(33.3) \quad x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

appartient à \mathbb{R}^4 ; ses composantes x^i (appelées parfois *coordonnées* de X) seront de préférence désignées au moyen d'indices *grecs*, (λ, μ, ν , etc...), prenant donc les valeurs 1, 2, 3, 4.

— Considérons un phénomène physique (notations (33.1.c)) ; puisque f est un Φ -champ, la variable

$$(33.4) \quad Z \equiv f(X)$$

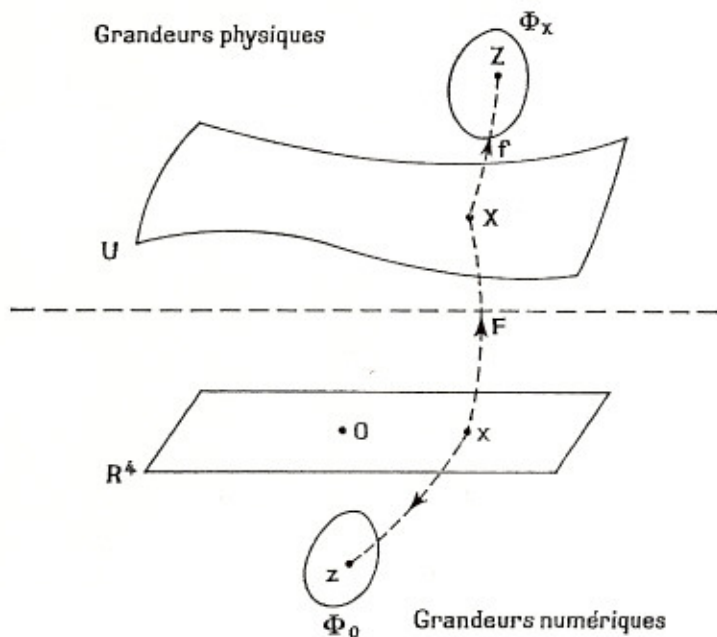
⁽¹⁾ Nous préciserons le sens de ce mot en (33.20).

est, pour tout X de U , un point de la fibre Φ_X (12.2); désignons par

$$(33.5) \quad x \rightarrow z$$

l'image du champ f par F^{-1} ((15.2); nous supposons la racine Φ canonique, ce qui est loisible en vertu du théorème (19.22)); on sait que la variable z prend ses valeurs dans la fibre-type Φ_0 (19.23), et que l'on a

$$(33.6) \quad Z \equiv \Phi(F)(x)(z)$$



— Désignons provisoirement par Φ_1 la racine des tenseurs covariants symétriques d'ordre 2 (25.38), par Φ_2 la racine des éléments de contact de Φ -champs (20.41), par Φ_3 le produit direct de ces

deux racines (16.17), par Φ_4 la racine triviale à fibre réelle (24.2,8); l'axiome (33.1.c) postule que φ_X est un homomorphisme de Φ_3 à Φ_4 ; en revenant à la définition (13.1) des homomorphismes de racines, on voit que ceci signifie, pour tout glissement A de $U \cup R^4$, que

$$\varphi_X \equiv \varphi_{A(X)} \cdot \Phi_3(A)(X)$$

soit (16.17) :

$$\varphi_X \left(\begin{matrix} g \\ \text{contact}_X(f) \end{matrix} \right) \equiv \varphi_{A(X)} \left(\begin{matrix} \Phi_1(A)(X)(g) \\ \Phi_2(A)(X)(\text{contact}_X(f)) \end{matrix} \right)$$

ou, grâce à (20.41) :

$$(33.7) \quad p \equiv \varphi_{A(X)} \left(\begin{matrix} \Phi_1(A)(X)(g) \\ \text{contact}_{A(X)}(A_\phi(f)) \end{matrix} \right)$$

En appliquant cette formule au cas où A est l'inverse d'une carte F (notations (33.2, 3, 4, 5)), en tenant compte de la définition (20.41) des éléments de contact et de la remarque (20.42), on obtient le théorème :

Il existe une fonction φ telle que

$$(33.8) \quad p \equiv \varphi(g_{\lambda\mu}, z, \partial_\nu z)$$

quelle que soit la carte F considérée ;

nous faisons, dans cet énoncé, un classique abus de notations, en écrivant des indices λ, μ, ν pour éviter d'écrire toutes leurs valeurs ; les $g_{\lambda\mu}$ désignent les composantes du tenseur g dans la base naturelle

$$(33.9) \quad S \equiv D(F)(x)$$

soit

$$(33.10) \quad g_{\lambda\mu} \equiv g(S_\lambda)(S_\mu) ;$$

les ∂_ν sont les dérivations définies (21.14) par

$$(33.11) \quad \partial_\nu x \equiv |_\nu$$

ou, si l'on préfère, par

$$(33.12) \quad \partial_\nu X \equiv S_\nu$$

Théorème :

Supposons que la fibre-type Φ_0 soit une variété C^2 ; soit N sa dimension.

(a) Soit $K [q \rightarrow z]$ une carte de Φ_0 ; il existe une fonction φ_K telle que

$$p \equiv \varphi_K(g_{\lambda\mu}, q, \partial_\nu q)$$

si $z \in \text{val}(K)$.

(b) Nous dirons que φ est *différentiable* si, pour toute carte K , la fonction φ_K est différentiable; il existe alors des nombres $A_{\lambda\mu}$, des lignes (d'ordre N) B et C^ν tels que, pour toute dérivation δ ,

$$(33.13) \quad \diamond \quad \begin{cases} \delta p \equiv A^{\lambda\mu} \delta g_{\lambda\mu} + B \delta q + C^\nu \delta [\partial_\nu q] \\ A^{\lambda\mu} \equiv A^{\mu\lambda}; \end{cases}$$

les $A_{\lambda\mu}$, B et C^ν sont complètement définis par ces identités.

(c) Nous dirons que φ est *deux fois différentiable* si, de plus, pour toute carte K , les nombres $A^{\lambda\mu}$ et les lignes C^ν sont fonctions différentiables des $g_{\lambda\mu}$, q , $\partial_\nu q$ (B étant seulement supposé continu).

(d) Pour que φ soit différentiable [resp. deux fois différentiable], il suffit que les conditions (b) [resp. (c)] soient vérifiées pour des cartes K formant un atlas de Φ_0 .

Démonstration :

1) (a) est évident (voir (33.8)).

2) Il est clair, si φ_K est différentiable, que l'on peut vérifier la première des identités \diamond ; en remplaçant $A^{\lambda\mu}$ par $\frac{1}{2} [A^{\lambda\mu} + A^{\mu\lambda}]$, δ les deux iden-

tités \diamond sont vérifiées (parce que $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$); l'unicité des $A_{\lambda\mu}$, B , C^ν est alors évidente.

3) Effectuons un changement de carte de la fibre-type : $q = H(q^*)$; comme H est, par hypothèse, deux fois différentiable, δ on trouve :

$$\delta p \equiv A^{\lambda\mu} \delta g_{\lambda\mu} + B^* \delta q^* + C^{\nu*} \delta [\partial_\nu q^*]$$

avec

$$\clubsuit \quad \begin{cases} A^{\lambda\mu*} \equiv A^{\lambda\mu} \\ B^* \equiv B \cdot D(H)(q^*) + C^\nu \cdot D^2(H)(q^*)(\partial_\nu q^*) \\ C^{\nu*} \equiv C^\nu \cdot D(H)(q^*) \end{cases}$$

on voit, si les $A_{\lambda\mu}$ et les C^ν sont différentiables, qu'il en est de même des $A^{\lambda\mu*}$ et des $C^{\nu*}$; δ (d) en résulte.

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les hypothèses de différentiabilité que nous proposons :

$$(a) \text{ U est une variété } C^2; \quad (19.16)$$

$$(b) \text{ Le champ riemannien } [X \rightarrow g] \text{ est différentiable}; \quad (20.35)$$

$$(c) \text{ pour tout phénomène physique, } \quad (19.27)$$

$$\begin{aligned} \Phi \text{ est une racine d'ordre fini}; \\ \Phi \text{ et } f \text{ sont deux fois différentiables}; \\ \text{la fonction } \varphi \text{ définie en (33.8) est deux fois différentiable } (1); \end{aligned} \quad (20.30,35)$$

$$(d) \text{ Les éléments du recueil } C^\infty(\mathbb{R}^4), \text{ dont le jacobien est partout positif, sont des changeurs de carte de U.} \quad (18.19)$$

(33.15) — On voit que ces axiomes ne définissent pas complètement le recueil \mathcal{R} des changeurs de cartes de l'univers U ; on le suppose

(1) Φ étant supposé deux fois différentiable, sa fibre-type est une variété C^2 (20.30); on peut donc appliquer la définition (33.13).

simplement compris entre le recueil $C^2(\mathbb{R}^4)$ (axiome (a)) et le recueil des éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ dont le jacobien est positif (axiome (d)). C'est l'étude de la physique qui peut permettre de préciser \mathfrak{R} ; nous verrons notamment, par l'étude de la gravitation (35.3), que les éléments de \mathfrak{R} doivent être 4 fois différentiables; mais nous savons que ce recueil conserve une part d'arbitraire, à moins que l'univers ne soit parfait (voir (32.2)).

- (33.16) — Nous verrons que les axiomes (a, b, c) sont encore applicables à la Relativité Restreinte; c'est l'axiome (d) qui caractérisera la Relativité Générale, en permettant d'exhiber suffisamment de glissements de l'univers.

Einstein a écrit à ce sujet: « We shall be true to the principle of relativity in its broadest sense if we give such a form to the laws that they are valid in every such four-dimensional system of co-ordinates, that is, if the equations expressing the laws are co-variant with respect to arbitrary transformations » (1); Mais il est clair que l'arbitraire que l'on peut accorder aux changeurs de carte doit être tempéré par quelques conditions de différentiabilité.

— On peut bien entendu augmenter le nombre des glissements de U, en supprimant par exemple la condition relative au jacobien dans l'énoncé (d), ou même en postulant que U est une variété de classe C^4 (19.6); mais cela constitue une hypothèse physique supplémentaire, d'ailleurs inutile pour arriver aux résultats essentiels.

- (33.17) — Pour terminer, précisons le principe variationnel (33.1.d).

Considérons le système de tous les champs définis sur U, à savoir le champ $[X \rightarrow g]$ et les champs f_j correspondant aux divers phénomènes physiques.

(1) EINSTEIN, « The meaning of relativity » (Methuen ed.), p. 60.

Nous appellerons *variation virtuelle* de ces champs la donnée de champs dépendant d'un paramètre réel t [nous les représenterons encore par les mêmes lettres g, f_j], définis sur U lorsque t appartient à un intervalle contenant l'origine, et tels que :

- (33.18) (a) g est une fonction différentiable de $\begin{bmatrix} X \\ t \end{bmatrix}$;
 (b) chaque $f_j(X)$ est fonction deux fois différentiable de $\begin{bmatrix} X \\ t \end{bmatrix}$;
 (c) pour $t = 0$, ces champs coïncident avec les champs donnés.

Posons

$$(33.19) \quad \delta \begin{bmatrix} X \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On dira que δ est une *variation*.

(δ peut donc être considéré comme une dérivation partielle par rapport à t).

Alors l'axiome (33.1.d) peut s'énoncer comme suit :

Considérons un pavé naturel C, et une variation virtuelle des champs (définition (33.18)) tels que :

$$(33.20) \quad \left. \begin{array}{l} X \in \text{support du bord de C} \\ t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta g = 0 \\ \delta[f_j(X)] = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{A} = \int_C \left[\sum_j P_j \right] \rho$$

vérifie

$$\delta \mathcal{A} = 0 \quad \text{pour } t = 0.$$

- (33.21) — Il est indispensable de donner un énoncé précis à ce principe variationnel; mais celui que nous venons de donner pourrait être remplacé par de nombreux autres sans rien changer à la valeur logique de l'ensemble des axiomes; nous rencontrerons l'une de ces variantes plus loin (34.14).

§ 34 Théorèmes généraux de la relativité.

Théorème :

Soit A un changeur de carte quelconque de U (notations du § 33) ; posons :

$$(34.1) \quad \diamond \quad \begin{cases} x & = A(x^*) \\ M & = D(A)(x^*) \\ g_{\lambda\mu}^* & = g_{\lambda'\mu'} \cdot {}^{\lambda'}M_{\lambda} \cdot {}^{\mu'}M_{\mu} \\ z & = \Phi(A)(x^*)(z^*) \\ \delta_v^* & = {}^vM_v \delta_v \end{cases}$$

alors la fonction φ définie en (33.8) vérifie l'identité

$$\varphi(g_{\lambda\mu}, z, \delta_v z) = \varphi(g_{\lambda\mu}^*, z^*, \delta_v^* z^*)$$

En effet, si nous considérons la carte $F^* = F.A$, et si nous posons $X = F(x) = F^*(x^*)$, δ on passe des valeurs de $g_{\lambda\mu}, z, \delta_v z$ dans la carte F à leurs valeurs dans la carte F^* (repérées par des astérisques) au moyen des formules \diamond ; et l'on sait (33.8) que φ ne dépend pas de F.

C.Q.F.D.

— Nous utiliserons fréquemment ce théorème, ainsi que l'axiome (33.14. c), pour rechercher la présence des divers phénomènes physiques.

Cartes spéciales.

Lemme :

Soit F une carte de U ; x_0 un point de $\text{def}(F)$; Γ_0 une connexion symétrique au point $X_0 = F(x_0)$ (définition (28.33)).

(34.2) Il existe alors une carte F^* , vérifiant les conditions suivantes :

- (a) $F^*(x_0) = F(x_0)$; $D(F^*)(x_0) = D(F)(x_0)$;
 (b) La connexion de la carte F^* au point X (28.52) est égale à Γ_0 .

Soit en effet γ_0 l'opérateur (bilinéaire et symétrique) qui représente la connexion Γ_0 dans la carte F (28.54) ; posons

$$B(x) = x - \frac{1}{2} \gamma_0(x - x_0)(x - x_0)$$

en dérivant, δ il vient :

$$\begin{aligned} D(B)(x) &= 1_{R^*} - \gamma_0(x - x_0) \\ D^2(B)(x) &= -\gamma_0 \end{aligned}$$

B est donc infiniment dérivable ; comme $\det(D(B)(x_0)) = 1$, les théorèmes (18.16) et (18.17) montrent qu'il existe un voisinage ouvert de x_0 , Θ , tel que la restriction de B à Θ , soit A, soit régulière, à jacobien positif, et que A et A^{-1} soient infiniment différentiables.

A est donc un changeur de cartes de U (axiome (33.14 d)) ; si l'on pose $F^* = F.A$, δ la carte F^* vérifie les conditions (a).

Désignons par Ω la racine des connexions (28.45) ; la formule (28.46) donne

$$\Omega(A)(x_0)(0) = -D^2(A)(x_0) - \gamma_0$$

d'où

$$\Omega(F^*)(x_0)(0) = \Omega(F)(x_0)(\gamma_0)$$

les deux membres de cette égalité sont respectivement la connexion de F^* en X_0 [définition (28.45 \diamond)] et la connexion Γ_0 [par définition de γ_0].

C.Q.F.D. (1)

En appliquant (28.52) et (28.54), δ on obtient les corollaires :

(34.3) La racine des connexions symétriques est irréductible sur U (cf. (16.5)).

(34.4) Dans la carte F^* (34.2), les symboles de Christoffel de la connexion Γ_0 , au point x_0 , sont nuls.

et enfin, par application de la formule (30.11 \clubsuit) :

(34.5) Si Γ_0 est la connexion riemannienne de U au point X_0 , les composantes $g_{\lambda\mu}$ du tenseur g dans la carte F^* définie en (34.2) vérifient

$$\delta_v[g_{\lambda\mu}] = 0 \text{ au point } x_0.$$

(1) Ce théorème sera complété plus loin (35.8).

Équations aux variations.

— Soit F une carte de U ; $S \equiv D(F)(x)$ la base naturelle correspondante au point $X \equiv F(x)$. Nous savons (29.12) que :

$$(34.6) \quad g_{\lambda\mu} = {}^\lambda[\bar{S}.S]_{\lambda\mu}$$

$$(34.7) \quad g^{\lambda\mu} = {}^\lambda[\bar{S}.S]^{-1}_{\lambda\mu}$$

(34.8) — Comme l'espace vectoriel tangent val (S) est *hyperbolique normal* (axiome (33.1. b)), le *multiplicateur* vaut $[-1]^{4-1} = -1$ (29.40, 34); le déterminant de la matrice de Gram $\bar{S}.S$ est donc négatif (29.25 a); le nombre qui représente la densité riemannienne (30.4) dans la base S est donc :

$$(34.9) \quad u \equiv \rho(S) = \sqrt{-\det(\bar{S}.S)}$$

u est donc fonction différentiable de x , comme les $g_{\lambda\mu}$ (33.14 b); Cela résulte de la formule (21.23) qui permet de dériver les déterminants, et qui donne aussi, grâce à (34.6, 7) et (21.24) :

$$(34.10) \quad \frac{\delta u}{u} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \delta g_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \delta g^{\lambda\mu}$$

dans une variation δ affectant le tenseur g .

On a donc aussi :

$$(34.11) \quad \delta \rho = \frac{1}{2} [g^{\lambda\mu} \delta g_{\lambda\mu}] \rho = -\frac{1}{2} [g_{\lambda\mu} \delta g^{\lambda\mu}] \rho$$

Théorème :

(34.12) Soient

$[x \rightarrow X]$ une carte de U ;

$[q \rightarrow z]$ une carte de la fibre type correspondant à un phénomène physique;

p la présence de ce phénomène.

(34.12) On considère les nombres $A^{\lambda\mu}$, les lignes B et C^{ν} (voir (33.13)) définis par :

$$\delta p = A^{\lambda\mu} \delta g_{\lambda\mu} + B \delta q + C^{\nu} \delta[\partial^{\nu} q] \quad (A^{\lambda\mu} = A^{\mu\lambda})$$

et l'on pose

◇	$T(\delta g) = [2A^{\lambda\mu} + p g^{\lambda\mu}] \delta g_{\lambda\mu}$	$\left(S \equiv \frac{\partial X}{\partial x} \right)$
♡	$V(\delta Z) \equiv S_{\nu} C^{\nu} \delta q$	
♣	$W(\delta Z) = \left[B - \frac{1}{u} \partial_{\nu} [u C^{\nu}] \right] \delta q$	

a) Les opérateurs linéaires T , V et W sont indépendants du choix des cartes $[x \rightarrow X]$ et $[q \rightarrow z]$;

b) Le tenseur symétrique T et le vecteur $V(\delta Z)$ sont fonctions différentiables de X ; le nombre $W(\delta Z)$ est fonction continue de X pour toute variation δ des champs (33.18, 19).

c) On a :

$$\delta [p\rho] = \left\{ \frac{1}{2} T(\delta g) + W(\delta Z) + \operatorname{div} [V(\delta Z)] \right\} \rho,$$

ρ étant la densité riemannienne.

1) Nous savons que $g^{\lambda\mu}$, u , p , $A^{\lambda\mu}$, C^{ν} , δq sont différentiables en x , et que B est continu (voir (33.13, c), (33.18, b)); δ (b) en résulte.

2) Grâce à (34.11), on a :

$$\clubsuit \quad \delta [p\rho] = \left\{ \left[A^{\lambda\mu} + \frac{p}{2} g^{\lambda\mu} \right] \delta g_{\lambda\mu} + B \delta q + C^{\nu} \delta[\partial^{\nu} q] \right\} \rho;$$

la formule (30.27) qui définit la *divergence d'un vecteur* donne :

$$\operatorname{div} [V(\delta Z)] = \frac{1}{u} \partial_{\nu} [u V(\delta Z)^{\nu}] = \frac{1}{u} \partial_{\nu} [u C^{\nu} \delta q], \quad \text{soit}$$

$$\flat \quad \operatorname{div} [V(\delta Z)] = \frac{1}{u} \partial_{\nu} [u C^{\nu}] \delta q + C^{\nu} \delta[\partial^{\nu} q]$$

puisque, selon (33.19), les dérivations δ et ∂ , commutent deux à deux (21.33).

(c) résulte de \clubsuit et \flat .

3) On vérifie directement que l'opérateur V est indépendant du choix des cartes $[q \rightarrow z]$ et $[x \rightarrow X]$ (en appliquant (34.1 \diamond) et (33.13 \clubsuit)); δ la formule (c), écrite

$$\delta[p_\rho] - \text{div}[V(\delta Z)]_\rho = \left[\frac{1}{2} T(\delta g) + W(\delta Z) \right]_\rho$$

montre alors, en prenant successivement $\delta g = 0$ et $\delta Z = 0$, que T et W sont, eux aussi, indépendants du choix de ces cartes,

C.Q.F.D.

Théorème :

(34.13)

Le principe variationnel (33.1 d), précisé en (33.20), est équivalent aux équations suivantes (dites « équations aux variations ») :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_j = 0 \text{ sur } U \text{ (pour chaque phénomène } N^{\circ} j) \\ \sum_j T_j = 0 \text{ sur } U \text{ (la somme étant étendue à tous les phénomènes).} \end{array} \right.$$

1) Par définition de l'intégrale d'une densité (31.70), l'action

$$\mathcal{A} = \int_C \sum_j p_j \rho$$

peut aussi s'écrire

$$\mathcal{A} = \int_C \sum_j p_j \text{vol}$$

vol étant la *jauge euclidienne* (30.6) définie par une orientation convenable d'un voisinage du support de C .

2) δ La formule (31.42) de dérivation sous le signe \int lui est applicable; on a donc, grâce à (34.12, c)

$$\delta \mathcal{A} = \int_C \sum_j \left\{ \frac{1}{2} T_j(\delta g) + W_j(\delta z_j) + \text{div}[V_j(\delta z_j)] \right\} \text{vol}$$

soit

$$\diamond \quad \delta \mathcal{A} = \int_C \sum_j \left\{ \frac{1}{2} T_j(\delta g) + W_j(\delta z_j) \right\} \text{vol} + \int_{C \nabla} \text{vol} \left(\sum_j V_j(\delta z_j) \right)$$

grâce à (30.35) et à la formule de Stokes (31.41).

3) Soit X_0 un point de U ; supposons que l'opérateur $\sum_j T_j$ ne soit pas nul en X_0 .

δ on peut alors construire :

— Un pavé naturel C tel que

$$X_0 \in \text{support}(C), \quad X_0 \notin \text{support}(C \nabla);$$

— une variation virtuelle de g seul, telle que

$$\left[\sum_j T_j \right] (\delta g) > 0 \text{ pour } X = X_0;$$

$$\left[\sum_j T_j \right] (\delta g) \geq 0 \text{ sur } U;$$

$$\delta g = 0 \text{ sur le support de } C.$$

Il résulte de \diamond et de (31.73) que l'on a alors

$$\delta \mathcal{A} > 0$$

ce qui est contraire au principe (33.20); par suite

$$\sum_j T_j = 0$$

4) De même, si l'un des W_j n'était pas nul en X_0 , δ on pourrait construire une variation du seul champ $[X \rightarrow z_j]$ telle que

$$W_j(\delta z_j) > 0 \text{ pour } X = X_0$$

$$W_j(\delta z_j) \geq 0 \text{ sur } U$$

$$\delta z_j = 0 \text{ sur le support de } C \nabla,$$

et l'on aurait $\delta\mathcal{A} > 0$; le principe (33.20) entraîne donc

$$W_j = 0$$

5) Si les conditions nécessaires $W_j = 0$, $\sum_j T_j = 0$ sont vérifiées, \diamond donne

$$\delta\mathcal{A} = \int_{C \nabla} \text{vol} \left(\sum_j V_j(\delta z_j) \right)$$

on a donc $\delta\mathcal{A} = 0$ pour toute variation des champs nulle sur le support du bord du pavé arbitraire C ; le principe (33.20) est vérifié.

C.Q.F.D.

Remarques :

(34.14) — Cette démonstration montre immédiatement que l'on pourrait énoncer le principe variationnel en écrivant l'action

$$\mathcal{A} = \int_C \sum_j \rho_j \text{vol}$$

et en permettant à C d'être n'importe quelle 4-chaîne, pourvu que son support soit contenu dans un ouvert orientable (pour que l'on puisse y définir la jauge euclidienne vol).

— En prenant une carte de la fibre-type, l'équation aux variations correspondant à un phénomène s'écrit

$$(34.15) \quad B - \frac{1}{u} \partial_\nu [u C^\nu] = 0$$

(formule (34.12 ♣)),

ou encore, grâce à (34.10) :

$$(34.16) \quad B - \partial_\nu C^\nu - \frac{1}{2} C^\nu g^{\lambda\mu} \partial_\nu g_{\lambda\mu} = 0$$

ou enfin

$$(34.17) \quad B - \partial_\nu C^\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\nu C^\mu = 0$$

les $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ étant les symboles de Christoffel de la connexion riemannienne de U (voir (30.22)).

Théorèmes de conservation.

Considérons l'opérateur T associé à un phénomène par la formule (34.12 \diamond); on peut écrire

$$(34.18) \quad T(\delta g) \equiv T^{\lambda\mu} \delta g_{\lambda\mu}$$

avec

$$(34.19) \quad T^{\lambda\mu} = T^{\mu\lambda} = 2 A^{\lambda\mu} + p g^{\lambda\mu};$$

on sait que cet opérateur T peut être identifié avec le *tenseur contravariant d'ordre 2* ayant les $T^{\lambda\mu}$ comme composantes (voir (25.79)); la structure riemannienne de U permet aussi de « faire descendre les indices » de ce tenseur (29.13), c'est-à-dire d'identifier T avec un tenseur mixte et un tenseur covariant de composantes respectives :

$$(34.20) \quad T_{\mu}^{\lambda} \equiv g_{\mu\nu} T^{\lambda\nu}$$

et

$$(34.21) \quad T_{\lambda\mu} \equiv g_{\lambda\lambda'} g_{\mu\mu'} T^{\lambda'\mu'}$$

Théorème :

(34.22) \diamond Les tenseurs de composantes $T^{\lambda\mu}$ et $T_{\lambda\mu}$ sont tous les deux *symétriques*; les T_{μ}^{λ} sont les composantes d'un *affineur symétrique* (définition (29.30)).

Indiquons aussi les formules usuelles :

$$(34.23) \quad \delta p = \frac{1}{2} [T^{\lambda\mu} - p g^{\lambda\mu}] \delta g_{\lambda\mu} \equiv -\frac{1}{2} [T_{\lambda\mu} - p g_{\lambda\mu}] \delta g^{\lambda\mu}$$

où δ désigne une variation du tenseur g seul.

Théorème ⁽¹⁾ :

(34.24) L'équation aux variations $W \equiv 0$ d'un phénomène entraîne l'équation

$$\operatorname{div} T = 0$$

On sait que ce sont des *homomorphismes de racines* qui font passer du champ $[X \rightarrow [\text{contact}_X^g(f)]]$ au champ scalaire $[X \rightarrow p]$ (principe (33.1, c)) et au champ de densité riemannienne $[X \rightarrow \rho]$, donc aussi au champ de densité $[X \rightarrow p\rho]$; la formule (23.17) montre donc que l'on a

$$\delta_L[p\rho] = D(\psi_X)(\zeta)(\delta_L\zeta)$$

ψ_X désignant cet homomorphisme, ζ le couple $[\text{contact}_X^g(f)]$, δ_L la *dérivée de Lie* associée à un glissement infinitésimal arbitraire $[X \rightarrow \delta X]$.

Le second membre de cette équation peut se développer par la formule (34.12, c), car δ_L est une *variation* (23.6 et 33.19); donc :

$$\diamond \quad \delta_L[p\rho] = \left\{ \frac{1}{2} T(\delta_L g) + W(\delta_L Z) + \operatorname{div} [V(\delta_L Z)] \right\} \rho$$

D'autre part, on peut vérifier identités :

$$\clubsuit \quad \delta_L[p\rho] = \operatorname{div} [p\delta X] \rho$$

et

$$\spadesuit \quad \frac{1}{2} T(\delta_L g) = \operatorname{div} [T(\delta X)] - [\operatorname{div} T](\delta X)$$

En collationnant \diamond , \clubsuit , \spadesuit , et en supposant vérifiée l'équation aux variations $W = 0$, il vient :

$$\heartsuit \quad [\operatorname{div} T](\delta X) = \operatorname{div} [T(\delta X) - p\delta X + V(\delta_L Z)]$$

pour tout glissement infinitésimal $X \rightarrow \delta X$.

⁽¹⁾ Voir :

- PAULI, « Theory of relativity » (Pergamon ed.);
 FOCK, « The theory of space time and gravitation » (Pergamon ed.);
 SOURIAU, Comptes-Rendus, 245 (1957) p. 958;
 SOURIAU, Alger-Mathématiques, V. 2 (1958) p. 103;
 TRAUTMAN, in « Gravitation » (John Wiley ed.).

— Soit C un pavé naturel défini à l'aide d'une carte F (31.63); soit α un scalaire, infiniment différentiable dans la carte F , nul dans un voisinage du support du bord de C ; alors le champ

$$[X \rightarrow \delta X = \alpha \delta_\nu X]$$

est un glissement infinitésimal (axiome (33.14, d), théorème (22.25)); la formule \heartsuit , intégrée sur C , donne grâce à la formule de Stokes :

$$\int_C \alpha [\operatorname{div} T]_\nu \operatorname{vol} = 0.$$

L'arbitraire de C et de α permet d'en déduire (voir Schwartz, réf. p. 239) l'équation

$$[\operatorname{div} T]_\nu = 0$$

d'où

$$\operatorname{div} T = 0.$$

C.Q.F.D. ⁽¹⁾

Corollaire :

Quel que soit le glissement infinitésimal $[X \rightarrow \delta X]$, le vecteur

$$(34.25) \quad T(\delta X) - p\delta X + V(\delta_L Z) \quad [\text{notations (34.12)}]$$

a une divergence nulle.

Il suffit de porter $\operatorname{div} T = 0$ dans (34.24 \heartsuit).

C.Q.F.D.

Corollaire :

Si δX est un vecteur de Killing du champ $[X \rightarrow g]$, le vecteur

$$(34.26) \quad T(\delta X)$$

a une divergence nulle.

Il suffit de porter $\delta_L g = 0$, $\operatorname{div} T = 0$ dans (34.24 \spadesuit).

C.Q.F.D.

⁽¹⁾ Nous avons admis l'existence de toutes les dérivées utilisées; le lecteur trouvera une autre démonstration, plus détaillée, dans la quatrième référence de la page précédente.

- (34.27) — En étudiant le concept d'énergie en Relativité (1), Einstein a été conduit à supposer que chaque phénomène est associé à un tenseur T , qu'il a appelé *tenseur d'énergie*, et qui doit vérifier les deux équations

$$\begin{cases} T^{\lambda\mu} = T^{\mu\lambda} \\ \text{div } T = 0 \end{cases}$$

Le théorème (34.24) suggère donc d'identifier le tenseur d'énergie avec le tenseur T défini variationnellement en (34.12), et qui apparaît comme la *grandeur conjuguée* du champ $[X - g]$.

Cette identification sera confirmée par la suite (2); elle va jouer un rôle essentiel dans l'interprétation physique de la théorie.

§ 35 La gravitation.

Nous partirons de l'hypothèse géométrique suivante :

- (35.1) Le phénomène de *gravitation* est décrit par un champ de *connexions symétriques*.

Nous allons tirer les conséquences, dans ce cas particulier, des principes et théorèmes généraux des paragraphes précédents.

Présence de la gravitation.

- (35.2) Soit Ω la *racine des connexions symétriques*; on sait que Ω est une racine canonique d'ordre 2 (28.45), irréductible (34.3); sa fibre-type Ω_0 possède une *structure invariante d'espace affine*

(1) Einstein [réf. p. 326], pp. 48 et 80.

(2) L'équation variationnelle $\sum T_i = 0$ (34.13) qui pourrait sembler paradoxale, va être interprétée au paragraphe suivant.

(28.47), d'où l'on déduit immédiatement une structure invariante de variété de classe C^2 (th. (19.17)); on peut vérifier que la dimension de cette variété est 40.

Hypothèse, théorème :

- (35.3) Nous supposons désormais que l'univers U est une variété C^4 ; dans ces conditions, la racine Ω des connexions symétriques est deux fois différentiable, ainsi que l'exige le principe (33.14 c).

En effet, si U est C^4 , il suffit de se reporter à la formule (28.46) pour vérifier les conditions (20.30).

C.Q.F.D.

- (35.4) Z Il importe de ne pas confondre, à priori, le champ de gravitation avec le champ de connexion riemannienne.

— Choisissons une carte F de U , et désignons par $\Gamma_{\rho\sigma}^r$ les symboles de Christoffel de la gravitation au point $X \equiv F(x)$.

La connexion étant symétrique, on a (28.57) :

- (35.5) $\Gamma_{\rho\sigma}^r = \Gamma_{\sigma\rho}^r$

D'autre part

- (35.6) L'axiome (33.14 c) exige que les $\Gamma_{\rho\sigma}^r$ soient des fonctions deux fois différentiables de x .

— D'après le théorème (33.8), il existe une fonction φ , *indépendante du choix de F* , telle que la présence de la gravitation s'écrive :

- (35.7) $p \equiv \varphi (g_{\lambda\mu}, \Gamma_{\rho\sigma}^r, \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^r)$

Afin de préciser cette fonction φ , établissons un lemme :

Soit F une carte ; $X_0 = F(x_0)$ un point de U .

Il existe une carte F^* telle que, au point X_0 , on ait

$$(35.8) \quad \begin{aligned} \spadesuit & \quad g_{\lambda\mu}^* = g_{\lambda\mu} \\ \diamond & \quad \Gamma_{\rho\sigma}^{*\tau} = 0 \\ \heartsuit & \quad \partial_\nu[\Gamma_{\rho\sigma}^{*\tau}] = \frac{1}{3}[R_{\nu\rho,\sigma}^\tau + R_{\nu\sigma,\rho}^\tau] \end{aligned}$$

les $R_{\nu\rho,\sigma}^\tau$ désignant les composantes, dans la carte F , du tenseur de courbure de la gravitation (28.69).

Nous savons que l'on peut, par un changement de carte

$$x \rightarrow x + A(x)(x) \quad [A \text{ bilinéaire symétrique}]$$

annuler les $\Gamma_{\rho\sigma}^\tau$ en un point (nous choisissons l'origine pour simplifier) sans changer, en ce point, la base $\frac{\partial X}{\partial x}$ (th. (34.2)).

Par un nouveau changement

$$x \rightarrow x + B(x)(x)(x) \quad [B \text{ trilinéaire symétrique}]$$

on conserve les résultats précédents, et on peut obtenir de plus, en ce point

$$\spadesuit \quad \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\tau + \partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\tau + \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\tau = 0$$

Compte tenu de \diamond et \spadesuit , la formule (28.76) donne \heartsuit , car les composantes du tenseur R sont les mêmes, à l'origine, dans les cartes F et F^* .

C.Q.F.D.

(35.9) — Puisque la fonction φ (35.7) est indépendante de la carte, ce lemme montre que l'on a :

$$p = \varphi \left(g_{\lambda\mu}, 0, \frac{1}{3}[R_{\nu\rho,\sigma}^\tau + R_{\nu\sigma,\rho}^\tau] \right)$$

donc que p ne dépend que des tenseurs g et R au point considéré ; en exprimant les composantes de R par la formule (28.76), et écrivant les conditions (33.13 c), on voit plus précisément que :

(35.10) La présence de la gravitation est une fonction deux fois différentiable des tenseurs g et R .

Cette fonction admet donc un *développement limité* au voisinage de $R = 0$

$$p = a + B_\tau^{\rho\sigma}[R_{\nu\rho,\sigma}^\tau + R_{\nu\sigma,\rho}^\tau] + O(|R|^2)$$

où les coefficients a et $B_\tau^{\rho\sigma}$ dépendent du tenseur g , et où $|R|$ désigne une *norme* du tenseur R , dont le choix n'importe pas.

Les termes de degré 0 et 1 sont chacun indépendant du choix de la carte ; une vérification élémentaire, mais fastidieuse montre que l'on peut écrire

$$p = a + b g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} + O(|R|^2)$$

a et b étant des *constantes universelles*, les $R_{\lambda\mu}$ les composantes du tenseur de Ricci (28.85) :

$$(35.11) \quad R_{\lambda\mu} = R_{\alpha\lambda,\mu}^\alpha$$

Nous appellerons *approximation du premier ordre* l'approximation consistant à poser

$$(35.12) \quad p = a + b g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}$$

en négligeant les termes suivants.

Cette approximation semble justifiée, a priori, pour les faibles champs de gravitation ; a posteriori, nous allons constater qu'elle fournit des conclusions conformes à l'expérience (1).

Équations de la gravitation.

Adoptons donc l'expression (35.12) de la présence, qui est conforme aux axiomes du § 33. En exprimant les $R_{\lambda\mu}$ en fonction des sym-

(1) Mais l'observation de champs de gravitation très intenses conduira peut-être un jour à modifier ce point de vue.

boles de Christoffel et de leurs dérivées premières (28.85), et en dérivant, δ il vient :

$$(35.13) \quad \delta p = A^{\lambda\mu} \delta g_{\lambda\mu} + B_{\tau}^{\rho\sigma} \delta \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + C_{\tau}^{\rho\sigma\nu} \delta [\partial_{\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}]$$

avec

$$(35.14) \quad A^{\lambda\mu} = A^{\mu\lambda} = -\frac{b}{2} R_{\lambda'\mu'} [g^{\lambda\lambda'} g^{\mu\mu'} + g^{\lambda\mu'} g^{\mu\lambda'}];$$

$$(35.15) \quad C_{\tau}^{\rho\sigma\nu} = b [\nu]_{\tau} g^{\rho\sigma} - \rho]_{\tau} g^{\nu\sigma};$$

(35.16) — Quant aux $B_{\tau}^{\rho\sigma}$, ce sont des fonctions des $g_{\lambda\mu}$ et des $\Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}$, linéaires par rapport aux $\Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}$, qu'il n'est pas nécessaire d'expliquer.

— L'équation aux variations de la gravitation s'écrit alors (34.15) :

$$\left\{ B_{\tau}^{\rho\sigma} - \frac{1}{u} \partial_{\nu} [u C_{\tau}^{\rho\sigma\nu}] \right\} \delta \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} = 0$$

Choisissons une carte vérifiant, en un point donné, les conditions (34.2); on a en ce point $\Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} = 0$, d'où $B_{\tau}^{\rho\sigma} = 0$ (34.4), (35.16); comme les $\delta \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}$ sont astreints à la seule condition de symétrie en ρ et σ (28.55, 57), l'équation aux variations s'écrit, en ce point :

$$\partial_{\nu} [u C_{\tau}^{\rho\sigma\nu} + u C_{\tau}^{\sigma\rho\nu}] = 0$$

soit, d'après (35.15), et en supposant $b \neq 0$:

$$\clubsuit \quad 2 \partial_{\tau} [u g^{\rho\sigma}] - \rho]_{\tau} \partial_{\nu} [u g^{\rho\sigma}] - \sigma]_{\tau} \partial_{\nu} [u g^{\rho\sigma}] = 0$$

Par contraction sur les indices ρ et τ , il vient

$$\diamond \quad [1 - n] \partial_{\nu} [u g^{\nu\sigma}] = 0$$

n étant la dimension de U (donc 4); d'où, en reportant dans \clubsuit

$$\heartsuit \quad \partial_{\nu} [u g^{\lambda\mu}] = 0$$

inversement, \heartsuit entraîne \clubsuit .

Introduisons la matrice de Gram G de la base $\frac{\partial X}{\partial x}$; \heartsuit peut s'écrire $\partial_{\nu} H = 0$, H étant la matrice $G^{-1} \sqrt{-\det(G)}$ (voir (29.19) et (34.9)); δ on a $G = H^{-1} [-\det(H)]^{\frac{1}{n-2}}$; $\partial_{\nu} H = 0$ entraîne donc $\partial_{\nu} G = 0$, soit encore

$$\partial_{\nu} g_{\lambda\mu} = 0;$$

puisque les $\Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}$ sont nuls en ce point (34.4), la formule (28.59) montre que l'on a

$$\tilde{\frac{\delta g}{\delta X}} = 0$$

\sim désignant la dérivation covariante dans la connexion de gravitation; d'où le théorème (définition (30.11)) :

(35.17) Dans l'approximation du premier ordre (35.12), l'équation aux variations de la gravitation exprime que celle-ci coïncide, en chaque point, avec la connexion riemannienne de U .

On peut alors appliquer divers résultats du § 30; on a notamment, dans une carte quelconque (formule (30.12)) :

$$(35.18) \quad \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [\partial_{\rho} g_{\lambda\sigma} + \partial_{\sigma} g_{\lambda\rho} - \partial_{\lambda} g_{\rho\sigma}]$$

la formule (30.11 \clubsuit) montre que :

(35.19) Le champ $[X \rightarrow g]$ est trois fois différentiable;

— Comme la densité riemannienne a une dérivée covariante nulle (30.21), le tenseur de Ricci est symétrique (28.87) :

$$(35.20) \quad R_{\lambda\mu} = R_{\mu\lambda}$$

si bien que (35.14) se simplifie en

$$(35.21) \quad A^{\lambda\mu} = -b R_{\lambda'\mu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\mu\mu'}$$

d'où l'on déduit les composantes covariantes du *tenseur d'énergie de la gravitation*, par application de (34.19) et (34.21) :

$$(35.22) \quad T_{\mu\nu} = -2b R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}[a + bR_{\mu\nu}g^{\mu\nu}]$$

(35.23) — Nous savons que la divergence de ce tenseur est identiquement nulle, si les équations aux variations (35.18) sont vérifiées (th. (34.24)) ; on peut d'ailleurs le vérifier directement, en utilisant l'identité de Bianchi (28.80) et (30.45).

— L'équation aux variations des $g_{\mu\nu}$, $\sum_j T = 0$ (34.13) s'écrit donc :

$$(35.24) \quad \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi \sum_j T_{\mu\nu}$$

en posant

$$(35.25) \quad \begin{cases} R = R_{\mu\nu} \cdot g^{\mu\nu} \text{ (1)} \\ \chi = \frac{1}{2b} \\ \Lambda = \frac{-a}{2b} ; \end{cases}$$

la somme des tenseurs d'énergie du second membre s'étend à tous les phénomènes *autres que la gravitation*.

Cette équation (35.24), que l'on trouve ici par voie déductive, est celle qui a été proposée par Einstein dans sa théorie de la gravitation (2).

— En résumé :

(1) Ce nombre, que l'on appelle *courbure contractée*, ne doit pas être confondu avec le tenseur de courbure lui-même.

(2) C'est l'expérience qui peut indiquer la valeur des constantes χ et Λ , donc a et b , (voir ci-dessous (39.63)) ; en fait, la valeur de Λ est trop petite pour être mesurable. Einstein, d'ailleurs, a proposé l'équation (35.24) avec $\Lambda = 0$: le terme supplémentaire $\Lambda g_{\mu\nu}$ n'a été introduit que plus tard, particulièrement dans des recherches de cosmologie : c'est pourquoi Λ s'appelle parfois la « constante cosmologique ».

L'hypothèse suivant laquelle la gravitation est une connexion symétrique (35.1) conduit aux résultats suivants :

(a) La présence p de la gravitation ne dépend que du tenseur g et du tenseur de courbure R ; elle admet un développement limité

$$p = a + b g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \dots$$

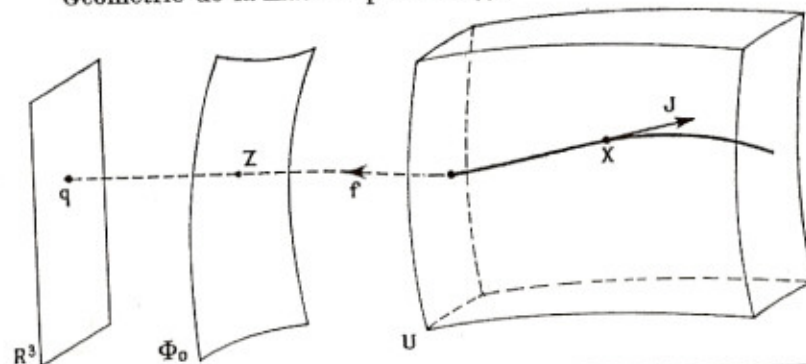
(b) Dans l'approximation du premier ordre, qui consiste à négliger les termes non écrits :

- 1) la gravitation coïncide avec la connexion riemannienne ;
- 2) l'équation aux variations des $g_{\mu\nu}$ est l'équation d'Einstein (35.24).

§ 36 La matière parfaite.

(36.1) Nous définirons la *matière parfaite* (1) comme un phénomène repéré par un champ *trivial*, à valeurs dans une fibre de dimension 3.

Géométrie de la matière parfaite (2).



(1) Nous verrons que cette « matière parfaite » peut être, suivant les cas, un milieu élastique, un fluide parfait, de la poussière (dite aussi *matière pure*).

(2) En fait, comme U désigne l'espace-temps, nous étudions simultanément la géométrie et la cinématique de la matière.

(36.2) Soit Φ_0 la fibre-type de la matière ; le champ matériel f est une application $[X \rightarrow Z]$, deux fois différentiable (33.14), de la variété U dans la variété Φ_0 (parce que toutes les fibres d'une racine triviale sont égales à la fibre type [voir (24.3)]).

Nous pourrions choisir une carte $[q \rightarrow Z]$ de la fibre-type Φ_0 ; les les coordonnées q^i seront repérés par des indices *latins*, prenant les valeurs 1, 2, 3.

(36.3) — Chaque point Z_0 de Φ_0 représentera une « molécule » de matière ; l'image réciproque $f^{-1}(Z_0)$, c'est-à-dire l'ensemble des points X de U tels que

$$f(X) = Z_0$$

sera en général une courbe, que l'on appellera *ligne de courant* ⁽¹⁾ ; un vecteur dX sera tangent à la ligne de courant passant par le point X si $dZ = 0$, c'est-à-dire si dX appartient au noyau de l'opérateur linéaire $\frac{\partial Z}{\partial X}$.

Définition :

(36.4) — Considérons, en un point X de U , l'image par f du tenseur contravariant $g^{\lambda\mu}$; c'est, selon la définition (25.60), un tenseur contravariant h de Φ_0 , au point $Z = f(X)$, dont les composantes sont

$$\diamond \quad h^{jh} = g^{\lambda\mu} \delta_\lambda^j \delta_\mu^h ;$$

nous l'appellerons *conformation* de la matière au point X .

(36.5) — La conformation *n'est pas* un tenseur au point X ; en général, les différents points X d'une même ligne de courant ont des conformations *différentes* (au même point Z) ; c'est la variation de h le long de cette ligne qui définira la *déformation* de la matière au cours de son évolution.

(36.6) — Il est commode de choisir, sur Φ_0 , un champ de 3-formes :

$$Z \rightarrow \omega$$

⁽¹⁾ On peut la considérer comme la trajectoire d'espace-temps de la molécule Z_0 .

L'image réciproque de ω par f définit un champ de 3-formes de U (25.33, 35), qui peut s'écrire $\text{vol}(J)$, vol désignant la jauge riemannienne de U (localement orientée) et J un vecteur que nous appellerons *courant* (th. (26.12)) ; J est défini (voir (25.33)) par

$$(36.7) \quad \text{vol}(J)(d_1X)(d_2X)(d_3X) = \omega(d_1Z)(d_2Z)(d_3Z)$$

quels que soient les vecteurs d_1X, d_2X, d_3X .

En appliquant les propriétés des jauges (26.11, 12) et le théorème (20.19), on en déduit le théorème suivant :

$$(36.8) \quad [J \neq 0 \text{ au point } X] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega \neq 0 \text{ au point } f(X) \\ \frac{\partial Z}{\partial X} \text{ de rang 3 au point } X \end{array} \right]$$

↓

[Il passe une ligne de courant par X ; elle est tangente à J].

— Supposons le champ $[Z \rightarrow \omega]$ différentiable ; comme f est deux fois différentiable, le théorème (27.17) montre que la dérivée extérieure $\nabla[\text{vol}(J)]$ est l'image réciproque de la dérivée $\nabla\omega$, elle-même nulle comme 4-forme d'une variété de dimension 3 ; compte tenu de la formule

$$\nabla[\text{vol}(J)] = [\text{div } J] \text{vol}$$

(30.35), on voit que

$$(36.9) \quad \text{Le vecteur courant } J \text{ vérifie} \quad \text{div } J = 0$$

(36.10) — Si l'on change le champ $[Z \rightarrow \omega]$, le vecteur J est multiplié par un scalaire, *constant sur chaque ligne de courant* ; bien entendu, l'équation $\text{div } J = 0$ reste vraie.

(36.11) — Le flux du vecteur J sur une 3-chaîne C de U , c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_C \text{vol}(J)$$

ne dépend que de l'image de C par f , puisqu'il est égal à

$$\int_{f^{-1}(C)} \omega$$

(36.12) — L'opérateur $\frac{\partial q}{\partial X}$ applique dans R^3 l'espace euclidien tangent à U en X ;

on peut donc le transposer (29.3) ; $\overline{\frac{\partial q}{\partial X}}$ est une ligne de trois vecteurs ;

$H = \frac{\partial q}{\partial X} \cdot \overline{\frac{\partial q}{\partial X}}$ est une matrice symétrique d'ordre 3, dont les éléments sont les composantes du tenseur de conformation h .

Soit V un autre vecteur tangent en X ; si l'on pose

$$S = \left[V \quad \overline{\frac{\partial q}{\partial X}} \right]$$

on trouve (36.7, 26.13) :

$$\clubsuit \quad \overline{V} \cdot J = \omega_{123} \det(\overline{S}) ;$$

comme le multiplicateur de l'espace euclidien tangent en X à U est -1 (34.8), on sait que $\det(\overline{S}) = -\det(S)$ (29.25, e), d'où

$$\det(\overline{S})^2 = -\det(\overline{S} \cdot S) = -\det \left(\begin{bmatrix} \overline{V}V & \overline{V} \frac{\partial q}{\partial X} \\ \frac{\partial q}{\partial X} V & H \end{bmatrix} \right)$$

et, compte tenu de \clubsuit (1) :

$$\diamond \quad J \cdot \overline{J} = -[\omega_{123}]^2 \left[\det(H) - \overline{\frac{\partial q}{\partial X}} \cdot \text{Adj}(H) \cdot \frac{\partial q}{\partial X} \right]$$

d'où, en prenant la trace

$$\heartsuit \quad \overline{J} \cdot J = -[\omega_{123}]^2 \det(H) ;$$

d'où le théorème :-

(1) Voir SOURIAU [réf. p. 117], chap. V, ex. 13.

$$\left[J \text{ n'est pas isotrope} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{la forme } \omega \text{ n'est pas nulle ;} \\ \text{le tenseur } h \text{ (resp. la matrice } H) \\ \text{est régulier.} \end{array} \right]$$

↓

$$(36.13) \quad \left[\begin{array}{l} \text{le projecteur orthogonal sur le vecteur } J \text{ est} \\ \Pi_J = I_{D_X} - \frac{\overline{\frac{\partial q}{\partial X}} \cdot \frac{\partial q}{\partial X}}{H^{-1} \cdot \frac{\partial q}{\partial X}} \end{array} \right]$$

En effet, le projecteur orthogonal sur J vaut $\frac{J \cdot \overline{J}}{J \cdot J}$ (29.21), et l'on a

$$H^{-1} = \frac{\text{Adj}(H)}{\det(H)} \quad (21.22).$$

C.Q.F.D.

Présence de la matière.

Selon les principes généraux, la présence de la matière s'écrit

$$p \equiv \varphi(g_{\lambda\mu}, Z, \partial_\nu Z)$$

la fonction φ étant indépendante du choix de la carte de U .

De cette invariance, on déduit (1) que :

(36.14) [La présence de la matière ne dépend que de la molécule Z et de la conformation h .

En d'autres termes, on peut écrire, après avoir choisi des cartes de U et de Φ_0 :

$$(36.15) \quad p = \varphi(q^i, h^{ki})$$

avec (36.4)

$$(36.16) \quad h^{ki} = g^{\lambda\mu} \partial_\lambda q^k \partial_\mu q^i ;$$

(1) Voir SOURIAU (quatrième référence de la p. 336), § 5.

(36.17) — Inversement, il est immédiat que la formule (36.15) donne une expression convenable de la présence, à condition que les hypothèses de différentiabilité (33.14) soient vérifiées.

Équations et énergie de la matière.

En différentiant (36.15), on peut écrire

$$(36.18) \quad \delta p \equiv b_j \delta q^j + \theta_{ki} \delta [h^{ki}] \quad (\theta_{ki} \equiv \theta_{ik});$$

le tenseur covariant symétrique θ , ayant les θ_{ki} pour composantes, ne dépend pas du choix des cartes, puisque l'on a (25.79) :

$$(36.19) \quad \delta p = \theta(\delta h)$$

dans une variation de h seul.

De (36.18), on déduit immédiatement les *équations aux variations* (voir (34.15)) :

$$(36.20) \quad \boxed{b_j - \frac{2}{u} \partial_\nu [u g^{\nu\lambda} \theta_{j\lambda} \partial_\lambda q^k] = 0} \quad (j = 1, 2, 3)$$

et le *tenseur d'énergie* de la matière parfaite (voir (34.23)) :

$$(36.21) \quad \boxed{T_{\lambda\mu} = p g_{\lambda\mu} - 2\theta_{im} \partial_\lambda q^i \partial_\mu q^m}$$

(36.22) — On peut remarquer que le tenseur $\frac{1}{2}[pg - T]$ est l'*image réciproque*, par le champ f , du tenseur covariant θ . Il en résulte que $[pg - T](J) = 0$, puisque le vecteur J , tangent à la ligne de courant, a une image nulle sur Φ_θ . Par suite :

(36.23) Le tenseur T_μ^λ admet le vecteur courant J comme *vecteur propre*, la valeur propre correspondante étant égale à la présence p :

$$T_\mu^\lambda J^\mu = p J^\lambda.$$

— Nous savons (th. (34.24)) que les 4 équations

$$(36.24) \quad [\text{div } T]_\mu = 0$$

sont conséquences des trois équations aux variations (36.20) ; c'est d'ailleurs facile à vérifier directement.

En fait, dans de nombreux cas, les équations de divergence (36.24) (ou même trois seulement d'entre elles) pourront remplacer les équations aux variations.

Fluide parfait.

Définition :

Nous appellerons *fluide parfait* une matière parfaite dont le tenseur d'énergie est toujours de la forme

$$(36.25) \quad \diamond \quad \alpha \Pi_J + \beta$$

α et β étant deux scalaires, Π_J le projecteur orthogonal sur J .

— En utilisant cette expression du tenseur T , et les deux équations

$$\text{div } J = 0 \quad \text{div } T = 0$$

on peut développer la dynamique relativiste des fluides parfaits ; nous renvoyons le lecteur, pour cette étude, aux ouvrages de Lichnerowicz (1). Indiquons simplement que les valeurs propres du tenseur T , soit $\alpha + \beta$ et β , s'appellent respectivement *densité propre* et *pression propre* (2) du fluide.

(1) Lichnerowicz, [réf. 7 de la page 9].

(2) Avec des unités convenablement choisies.

Théorème :

Un fluide parfait est une matière parfaite dont la présence est de la forme

$$\diamond \quad p = f(q^i, \sigma)$$

(36.26) avec $\sigma = -\det(H)$ (H est définie en (36.12)).

Son tenseur d'énergie est

$$\clubsuit \quad T = 2\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} \Pi_J + \left[p - 2\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right]$$

1) Introduisons la matrice Θ d'éléments θ_{jk} ; on a (36.19) :

$$\heartsuit \quad \delta p = \text{Tr}(\Theta \cdot \delta H) \text{ dans une variation de } h \text{ seul}$$

En comparant (36.21), (36.13) et (36.25, \diamond), on trouve, dans le cas d'un fluide et si $J \neq 0$:

$$T = p - 2 \frac{\partial q}{\partial X} \cdot \Theta \cdot \frac{\partial q}{\partial X} = \alpha + \beta - \alpha \frac{\partial q}{\partial X} \cdot H^{-1} \cdot \frac{\partial q}{\partial X};$$

en multipliant par J , δ on en tire

$$p = \alpha + \beta; \quad \Theta = \frac{\alpha}{2} H^{-1}$$

d'où, grâce à \heartsuit , $\delta p = \frac{\alpha}{2} \frac{\delta \sigma}{\sigma}$ dans une variation de h seul; ceci montre que $p = f(q^i, \sigma)$ [le cas $\sigma = 0$ est obtenu par continuité].

2) De (36.26, \diamond), on tire $\Theta = \sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} H^{-1}$, d'où \clubsuit .

C.Q.F.D.

(36.27) — La densité propre d'un fluide parfait est donc égale à sa présence p ; sa pression propre est $\omega = p - 2\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma}$.

— En éliminant σ , on peut trouver, pour chaque molécule, une « équation d'état » liant p et ω .

Fluides homogènes.

On dit qu'un fluide est *homogène* si on a une équation

$$(36.28) \quad p = f(\sigma)$$

indépendante des q^i (on prend $\Phi_0 = R^3$).

(36.29) — Alors l'équation d'état est indépendante de la molécule; δ d'un écoulement f (solution des équations aux variations), on tire une classe d'écoulements par la substitution

$$f \rightarrow A \cdot f$$

A étant un glissement de R^3 à jacobien $+1$.

(36.30) Chaque classe d'écoulements peut s'étudier directement à l'aide des « variables d'Euler » J, σ , qui vérifient les « équations d'Euler » $\bar{J} \cdot J = \sigma$ (1); $\text{div } J = 0$; $\text{div} [2f'(\sigma)J \cdot \bar{J} + f(\sigma) - 2\sigma f'(\sigma)] = 0$.

(36.31) — On obtient une famille particulière de solutions de ces équations en écrivant le principe variationnel (33.1 d) :

$$\delta \int_C p \varphi = 0$$

avec les seules liaisons $p = f(\sigma)$; $\sigma = \bar{J} \cdot J$; $\text{div } J = 0$;

δ l'introduction d'un *multiplicateur de Lagrange* φ conduit à l'équation

$$(36.32) \quad \text{grad } \varphi = J f'(\sigma)$$

qui, jointe aux liaisons, caractérise les écoulements *irrotationnels* (2).

(1) On a choisi $\omega = \text{vol}_3$ (formule (36.12 \heartsuit)).

(2) Voir Lichnerowicz (réf. p. 9) : le fluide est *holonome*; son *indice* est la longueur du vecteur $Jf'(\sigma)$.

Poussières.

(36.33) On appelle *poussière*, ou matière pure, un fluide parfait dont la pression propre est nulle ; soit

$$T = p\Pi_J$$

(on ne considère que le cas $\bar{J} \cdot J > 0$).

On établit facilement le théorème :

(36.34) Les lignes de courant de la poussière sont des géodésiques du genre temps (voir (30.25)).

qui conduit au « principe des géodésiques » : on assimile les petits corps célestes aux molécules d'une poussière d'énergie négligeable ; par conséquent ceux-ci doivent graviter suivant des géodésiques d'espace-temps, que l'on peut déterminer à partir du champ $[X \rightarrow g]$; de là découlent les vérifications de la Relativité Générale par l'astronomie de position (voir (39.68)).

(36.35) — L'expression (36.27) de la pression propre conduit pour la poussière, à l'équation $p - 2\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0$, qui s'intègre en

$$p = f(q^i) \sqrt{\sigma}$$

parce que σ est positif (36.12 \heartsuit) ; \hat{O} on en déduit le théorème :

Une poussière est caractérisée par un champ de densités de Φ_0 :

$$Z \rightarrow \varphi ;$$

(36.36) la présence de la poussière est alors donnée par la formule

$$p = \varphi \left(\frac{\partial Z}{\partial q} \right) \sqrt{-\det(H)}$$

qui ne dépend pas du choix de la carte $[q \rightarrow Z]$.

§ 37 La lumière.

Champs de covecteurs.

(37.1) Étudions, à priori, un champ de covecteurs ⁽¹⁾ :

$$X \rightarrow A$$

La présence de ce champ doit se mettre sous la forme

$$p = f(g_{\lambda\mu}, A_\lambda, \partial_\nu A_\lambda)$$

indépendamment du choix de la carte ; de cette invariance, on peut déduire ⁽²⁾ que p ne dépend que des scalaires suivants :

(37.2) $g^{\lambda\mu} A_\lambda A_\mu ; g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} F_{\lambda\nu} F_{\mu\sigma} ; g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} g^{\rho\alpha} A_\lambda F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} A_\alpha$ et, si l'univers est orienté

$$\text{vol}^{\lambda\mu\nu\sigma} F_{\lambda\mu} F_{\nu\sigma} ;$$

on a posé

(37.3) $F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda$

soit, en introduisant la dérivation extérieure ∇ (cf. (27.10))

(37.4) $F = \nabla A$

Une fonction de ces 4 quantités est invariante dans la substitution $A \rightarrow -A$; on en déduit que les équations aux variations admettent la solution $A = 0$; on est donc conduit à étudier les *champs faibles* en remplaçant la présence par un développement limité au voisinage de $A = 0$; ce qui conduit à l'expression :

(37.5) $p = a + \frac{e}{2} g^{\lambda\mu} A_\lambda A_\mu + \frac{1}{4} F_{\nu\sigma} F_{\rho\alpha} [f g^{\nu\rho} g^{\sigma\alpha} + b \text{vol}^{\nu\rho\sigma\alpha}]$

où a, b, e, f désignent des constantes universelles.

⁽¹⁾ On doit noter qu'un *champ de vecteurs* ne conduit qu'à des équations triviales.
⁽²⁾ Voir Souriau (réf. de la p. 336), § 6.

— On peut vérifier que le terme en b , qui n'existe que dans l'hypothèse où U est une variété orientée, disparaît à la fois des équations aux variations et de l'expression de l'énergie ; quant au terme constant a , son seul rôle est d'ajouter un terme $a g_{\lambda\mu}$ aux composantes du tenseur d'énergie ; terme que l'on peut d'ailleurs incorporer à la constante cosmologique, compte tenu de l'équation d'Einstein (35.24).

— Pour ces divers raisons, on est donc conduit à étudier un champ de covecteurs, muni de la présence

$$(37.6) \quad p = \frac{e}{2} g^{\lambda\mu} A_\lambda A_\mu + \frac{f}{4} g^{\nu\sigma} g^{\rho\zeta} F_{\nu\zeta} F_{\rho\sigma}$$

soit

$$(37.7) \quad p = \frac{1}{2} \{ e \langle A, A \rangle + f \langle F, F \rangle \}$$

en introduisant le produit scalaire des formes (29.22), noté par le signe $\langle \rangle$. On suppose $f \neq 0$.

Le calcul donne alors l'équation aux variations

$$(37.8) \quad eA - f \operatorname{div} F = 0$$

et les composantes du tenseur d'énergie

$$(37.9) \quad T_{\lambda\mu} = e \left[\frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \langle A, A \rangle - A_\lambda A_\mu \right] + f \left[\frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \langle F, F \rangle - g^{\nu\zeta} F_{\lambda\nu} F_{\mu\zeta} \right]$$

(37.10) Ces équations sont généralement admises comme « équations d'onde des particules de spin 1 ».

— Du système (37.4) et (37.8) :

$$(37.11) \quad \begin{cases} F - \nabla A = 0 \\ eA - f \operatorname{div} F = 0 \end{cases}$$

découlent immédiatement les équations suivantes :

$$(37.12) \quad \operatorname{div} T = 0$$

(théorème (34.24)) :

$$(37.13) \quad \begin{cases} \nabla F = 0 \\ f \square F - eF = 0 \quad (*) \end{cases}$$

(théorème de Poincaré (27.24) et définition (30.49) du laplacien) ; et, si $e \neq 0$:

$$(37.14) \quad \begin{cases} \operatorname{div} A = 0 \\ f \square A - eA = 0 \end{cases}$$

(formules (30.48) et (30.49)).

Invariance de jauge.

Théorème :

Si la constante e est nulle, le champ $[X \rightarrow F]$, la présence, les équations aux variations (37.8) et le tenseur d'énergie (37.9) sont invariants dans la substitution, dite *transformation de jauge* :

$$(37.15) \quad A \rightarrow A + \nabla \varphi$$

ou

$$A_\lambda \rightarrow A_\lambda + \partial_\lambda \varphi$$

où $[X \rightarrow \varphi]$ désigne un *champ scalaire arbitraire* (deux fois différentiable).

(*) On a coutume de désigner par \square l'opérateur laplacien Δ sur la variété quadridimensionnelle U ; on l'appelle alors *d'Alembertien*.

En effet, les équations (37.7), (37.8), (37.9) ne dépendent alors de A que par l'intermédiaire de la 2-forme F ; et le théorème de Poincaré donne

$$\nabla[A + \nabla\varphi] = \nabla A$$

C.Q.F.D.

— D'une solution quelconque des équations de champ, \hat{O} on peut alors déduire localement, par une transformation de jauge, une nouvelle solution vérifiant la condition

$$(37.16) \quad \text{div } A = 0$$

dite *condition de Lorentz*; on a alors

$$(37.17) \quad \square A = 0$$

si bien que l'on a artificiellement étendu les équations (37.14) au cas $e = 0$; notons que la condition de Lorentz ne détermine pas complètement le scalaire φ , car on peut lui ajouter une solution arbitraire de l'équation

$$(37.18) \quad \square \varphi = 0$$

Cas de la lumière.

Nous admettrons que la lumière est un champ de covecteurs $[X \rightarrow A]$, avec la présence

$$(37.19) \quad p = \frac{f}{2} \langle F, F \rangle$$

f étant une constante positive.

(37.20) On est dans le cas précédent, avec $e = 0$ (voir (37.7)); la lumière est donc supposée *invariante de jauge* (37.15); la 2-forme F , que l'on appelle *champ électromagnétique*, vérifie (37.11) et (37.13), d'où les *équations de Maxwell*:

$$(37.21) \quad \begin{array}{l} \nabla F = 0 \\ \text{div } F = 0 \end{array}$$

et l'équation des ondes :

$$(37.22) \quad \square F = 0$$

(37.23) — La réciproque du théorème de Poincaré (27.25) montre que la première équation de Maxwell est équivalente *localement* à l'existence d'un *potentiel électromagnétique* A tel que $F = \nabla A$; l'existence de A est même assurée *globalement* si l'univers est un morceau (27.27), en particulier s'il existe une carte appliquant R^4 sur U .

Localement, l'invariance de jauge permet d'assurer la condition de Lorentz $\text{div } A = 0$ (37.16).

— En orientant localement l'univers, on peut définir (voir (29.26)) le tenseur $\ast(F)$, souvent noté F^* . On trouve :

$$\ast(F)_{\nu\epsilon} = \frac{1}{2} \text{vol}_{\lambda\mu\nu\epsilon} F^{\lambda\mu} \quad (29.26 \spadesuit)$$

$$\ast(\ast(F)) = -F \quad (29.26 \heartsuit)$$

$$(37.24) \quad \ast(F) = -\text{div}[\text{vol}(\bar{A})] \quad (30.31), (29.27)$$

$$\text{div}[\ast(F)] = 0 \quad (30.31)$$

$$\nabla[\ast(F)] = 0 \quad (30.32)$$

$\ast(F)$ vérifie donc aussi les équations de Maxwell.

(37.25) — Effectuons un changement de variable $A \rightarrow kA$, A étant une constante (c'est un *automorphisme* de la racine des covecteurs); il en résulte les transformations $F \rightarrow kF$, $p \rightarrow \frac{fk^2}{2} \langle F, F \rangle$; on peut donc par ce procédé donner à f n'importe quelle valeur positive; ainsi, dans le système C.G.S., on choisit $f = \frac{1}{4\pi}$.

Théorème :

Le tenseur d'énergie T de la lumière vérifie les équations

$$(37.26) \quad g^{\lambda\mu} T_{\lambda\mu} = 0$$

$$[V : \text{vecteur de temps}] \Rightarrow [T_{\lambda\mu} V^\lambda V^\mu > 0]$$

Pour une étude plus détaillée du tenseur T, le lecteur pourra se reporter à Lichnerowicz (réf. p. 9, première partie, § 10).

Interaction lumière-matière parfaite.

Nous allons caractériser l'interaction de la lumière (champ électromagnétique) et de la matière parfaite électrisée (mais non conductrice) par le principe suivant :

(a) Par définition, l'électrisation de la matière parfaite est un champ de 3-formes

$$Z \rightarrow \omega$$

défini sur la fibre-type Φ_0 de la matière (voir (36.6)) ;

(b) Le système de la matière et de la lumière admet la présence

$$(37.27) \quad p_{lum} + p_{mat} + p_{int}$$

où p_{mat} désigne la présence de la matière (36.15), p_{lum} la présence de la lumière (37.19), et où l'on a posé

$$p_{int} = A \cdot J = A_\mu \cdot J^\mu$$

A étant le potentiel électromagnétique, J le vecteur courant électrique ⁽¹⁾ défini à partir de l'électrisation $[Z \rightarrow \omega]$ par la formule (36.7).

Le caractère arbitraire de cet énoncé n'échappera pas au lecteur ; mais il est d'une part conforme aux principes généraux du § 33,

⁽¹⁾ On dit aussi vecteur densité de courant.

et d'autre part nous allons constater qu'il aboutit aux lois classiques de l'électrodynamique.

Théorème :

Le tenseur d'énergie du système lumière-matière chargée est la somme

$$(37.28) \quad T_{lum} + T_{mat}$$

de ceux de la lumière et de la matière.

En effet, la formule (36.12, ♣) donne

$$AJ = \omega_{123} \det \left(\begin{bmatrix} A \\ \frac{\partial q}{\partial X} \end{bmatrix} \right),$$

d'où

$$p_{int} \cdot u = \pm \omega_{123} \det \left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \partial_1 q & \partial_2 q & \partial_3 q & \partial_4 q \end{bmatrix} \right)$$

puisque $u = \left| \det \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \right|$; cette quantité ne dépend pas des $g_{\lambda\mu}$; on en déduit par dérivation que la contribution du terme p_{int} au tenseur d'énergie total est nulle.

C.Q.F.D.

(37.29) En d'autres termes, il n'existe pas d'énergie d'interaction ; mais l'interaction entraîne des échanges d'énergie entre lumière et matière.

En effet, le théorème général de conservation (34.24) donne

$$(37.30) \quad \text{div} [T_{lum} + T_{mat}] = 0$$

mais les covecteurs [opposés] $\text{div} [T_{lum}]$ et $\text{div} [T_{mat}]$ ne sont pas nuls, en général ; nous allons les calculer et les interpréter.

Un calcul simple donne d'abord l'équation aux variations du covecteur A :

$$(37.31) \quad \boxed{f \operatorname{div} F = J} \quad (1)$$

qui constitue la *seconde équation de Maxwell en présence de matière chargée* ; la première équation (37.21) n'est pas modifiée :

$$(37.32) \quad \boxed{\nabla F = 0} \quad (2)$$

D'autre part, un calcul élémentaire, partant de l'expression de T_{lum} [(37.9), avec $e = 0$] et tenant compte des deux équations de Maxwell $f \operatorname{div} F = J$, $\nabla F = 0$, conduit à l'équation

$$(37.33) \quad [\operatorname{div} T_{lum}]_{\mu} = F_{\nu\mu} J^{\nu}$$

ou, avec la convention (25.1) ou (25.79) :

$$(37.34) \quad \operatorname{div} T_{lum} = F(J)$$

L'équation de conservation (37.30) donne alors :

$$(37.35) \quad \boxed{\operatorname{div} T_{mat} = -F(J)}$$

équation qui peut remplacer l'équation aux variations de la matière.

- (37.36) — Le second membre $-F(J)$ s'interprète comme la *densité de force* (quadridimensionnelle) appliquée par le champ électromagnétique aux charges électriques ; en chaque point, $F(J)$ est un (co)vecteur orthogonal à ligne de courant passant par ce point.

(1) On rappelle que $f = \frac{1}{4\pi}$ en unités C.G.S. (37.25).

(2) On voit que l'existence des charges fait disparaître la symétrie formelle qui existe entre les tenseurs F et F^* (voir (37.24)).

- (37.37) — Nous constatons que les équations font intervenir F et non A ; elles sont donc *invariantes de jauge*, bien que la présence *ne le soit pas* : en effet, dans la substitution $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\varphi$, la présence totale p devient $p + J^{\mu}\partial_{\mu}\varphi$.

Mais le terme supplémentaire peut s'écrire $\operatorname{div} [\varphi J]$, grâce à l'identité $\operatorname{div} J = 0$ (36.9) ; ce qui explique qu'il n'intervienne pas dans les équations aux variations.

- (37.38) — L'identité $\operatorname{div} (J) = 0$, conséquence comme nous venons de le rappeler de la géométrie de la matière, est *aussi* une conséquence de l'équation de Maxwell $f \operatorname{div} F = J$ (voir (30.48)) ; on l'interprète comme la loi de *conservation de l'électricité* [voir (36.11) ; le flux de J à travers une 3-chaîne est la quantité d'électricité « contenue » dans cette chaîne].

Nous voyons donc qu'il y a un lien étroit entre l'invariance de jauge et la conservation de l'électricité.

§ 38 Passage à la relativité restreinte.

Hypothèses globales.

Nous avons jusqu'ici étudié la relativité du seul point de vue local, et on pourrait garder ce point de vue dans l'approximation de la relativité restreinte. Mais ce n'est pas l'usage.

Nous commencerons donc par formuler une double hypothèse relative à la *structure globale* de l'univers :

- (38.1) H_1 : L'univers U est *simplement connexe* (définition (10.21)) et *séparé* ;
 H_2 : U est *complet*, c'est-à-dire que toute géodésique $[s \rightarrow X]$ est prolongeable, par une géodésique, pour toutes les valeurs réelles de s .

La première hypothèse ne concerne que la *topologie* de U (th. (10.25)) ; elle se décompose en trois (U doit être à la fois *simple connexe* et *séparé*).

L'hypothèse suivant laquelle U est connexe est fort naturelle : sinon ^(*), U se décomposerait en plusieurs variétés disjointes ; ces variétés seraient autant d'univers n'ayant aucun rapport (passé, présent ou à venir) entre eux ; et il suffirait d'étudier l'un d'entre eux — le nôtre.

— Quant à l'hypothèse suivant laquelle U ne serait pas séparé, le lecteur pourra imaginer ses conséquences extraordinaires en se reportant à l'exemple (5.6).

L'hypothèse suivant laquelle U est simple est beaucoup moins évidente ; nous étudierons d'ailleurs au chapitre suivant une théorie où l'on y renonce.

Notons que H_1 permet de donner une définition continue et globale des *vecteurs d'avenir* de U .

— L'hypothèse H_2 fait intervenir la *structure riemannienne* de U ; en considérant successivement des géodésiques du genre espace et du genre temps, on peut l'exprimer naïvement en disant que l'univers n'a ni *frontière*, ni *commencement*, ni *fin*.

L'approximation de la relativité restreinte.

(38.2) — Nous avons déjà eu recours à l'hypothèse suivant laquelle la courbure de la connexion de gravitation est faible (35.12) ; on voit sur l'équation d'Einstein (35.24) que cette hypothèse est valable si les constantes χ et Λ sont petites, c'est-à-dire si la constante b est grande (35.25).

(38.3) — L'approximation de la relativité restreinte consiste à supposer la courbure partout nulle et la constante b infinie (c'est-à-dire à négliger l'équation d'Einstein).

(38.4) Des hypothèse (38.1) et (38.3), on peut déduire (voir (28.72)) qu'il existe une carte F_0 , appliquant R^4 sur U , où les symboles de Chris-

(*) Voir la note II à la fin de l'ouvrage.

toffel sont nuls, et où par conséquent les $g_{\lambda\mu}$ sont constants (30.12 ♣) ; les géodésiques de U sont les images par F_0 de droites $[s - x_0s + x_1]$ (28.65) ; celles-ci sont bien illimitées (hypothèse H_2) ; donc :

(38.5) Nous décrivons l'approximation de la Relativité Restreinte en supposant qu'il existe une carte F_0 , appliquant R^4 sur U , où les $g_{\lambda\mu}$ sont constants.

(38.6) En fait, cette hypothèse est plus précise que l'énoncé (38.3), parce que le théorème (28.72) affirme seulement que F_0 est une carte pour la structure de classe C^2 de U .

Nous la supposons vérifiée dans toute la suite de ce paragraphe.

Géométrie de la relativité restreinte.

Théorème, définition :

(a) Il existe une carte F , appliquant R^4 sur U , telle que les $g_{\lambda\mu}$ soient, en tout point, égaux aux éléments de la matrice

$$(38.7) \quad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Nous appellerons *prérecueil de Lorentz* le prérecueil L engendré par les cartes F ayant cette propriété.

En effet, on peut définir une *structure euclidienne* sur U en postulant la linéarité de la carte F_0 définie en (38.5) ^(*) ; F_0 est alors une *base* (17.15) ; la dimension étant 4 et l'indice d'inertie 1, il existe une base F telle que $\bar{F} \cdot F = G$ (th. (29.34)) et une matrice de changement de base M telle que $F = F_0 \cdot M$ (on peut supposer $\det(M) > 0$) ; F est donc une carte de U .

C.Q.F.D.

(*) Cette structure dépend du choix de F_0 par le choix de l'origine $F_0(0)$.

Théorème :

Supposons U orienté (resp. non orienté).

Soit F_0 une carte vérifiant (38.7 a).

Alors le prérecueil de Lorentz se compose :

1) du groupe $L_{\mathbb{R}^4}$ des transformations affines

$$x \rightarrow x_0 + Mx$$

δ
(38.8)

où M est une matrice (resp. une matrice à déterminant positif) vérifiant

$$\bar{M}.G.M = G \quad (\text{notations (29.17) et (38.7)});$$

2) des cartes $F_0 \cdot \Lambda$ ($\Lambda \in L_{\mathbb{R}^4}$);

3) des cocartes $\Lambda \cdot F_0^{-1}$ ($\Lambda \in L_{\mathbb{R}^4}$);

4) du groupe L_U des glissements $F_0 \cdot \Lambda \cdot F_0^{-1}$ ($\Lambda \in L_{\mathbb{R}^4}$).

(38.9) — Nous appellerons *glissements de Lorentz*, *cartes de Lorentz*, etc., les éléments de L ; les mots « transformations de Lorentz », « groupe de Lorentz » sont souvent ambigus.

Σ

— L'expression générale des matrices M vérifiant $\bar{M}.G.M = G$ a été donnée en (29.42).

Théorème :

Soit F une carte de Lorentz; posons $F(x) \equiv X$.

Pour que le champ de vecteurs $[X \rightarrow \delta X]$ soit un glissement de Lorentz infinitésimal, il faut et il suffit que

δ
(38.10)

$$\delta x \equiv G^{-1}.M.x + x_0$$

M étant une matrice antisymétrique ($\bar{M} = -M$).

(38.11) — Considérons les matrices

$$T = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Il résulte de (38.8) que

$$[T \in L] \Leftrightarrow [P \in L] \Leftrightarrow [U \text{ non orienté}]$$

Or, à la suite des travaux de Lee et Yang sur la parité, les physiciens admettent généralement que $T \in L$, $P \notin L$.

En fait, on peut concilier les deux points de vue en admettant, avec Landau, que U n'est pas orientée, et que la matrice P ci-dessus correspond à la transformation usuellement appelée CP. (1).

Théorème :

Appelons \mathcal{R}_L le plus petit recueil contenant le prérecueil de Lorentz L et engendrant sur $\mathbb{R}^4 \cup U$ la topologie usuelle.

Alors :

1) Pour qu'un opérateur régulier A appartienne à \mathcal{R}_L , il faut et il suffit que

δ
(38.12)

$$[X \in \text{def}(A)] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{il existe un élément de } L \text{ qui coïncide avec} \\ A \text{ dans un voisinage de } X \end{array} \right];$$

2) Soit A un glissement de U ; alors

$$[A \in \mathcal{R}_L] \Leftrightarrow [A \text{ invariante } (2) \text{ le champ } [X \rightarrow g]]$$

(1) Ceci revient à dire que « l'image de la matière dans un miroir est de l'antimatière » : ce que montrent les expériences de Lee et Yang, c'est qu'il faut modifier la *variance* traditionnellement affectée aux particules élémentaires.

(2) Définition (15.12).

(38.13) — On déduit en particulier de ce théorème que *les glissements de Lorentz sont les glissements globaux de U qui invarient le champ [X → g]*.

(38.14) — Il est clair que l'on a

$$L \subset \mathcal{R}_L \subset \mathcal{R},$$

\mathcal{R} étant le recueil définissant la structure de variété de U.

— La restriction de \mathcal{R}_L à R^4 est un *recueil classique* (19.1); donc :

(38.15) \mathcal{R}_L définit sur U une *structure de variété*, qui caractérise la *géométrie de la Relativité Restreinte* (*).

(38.16) — Puisque \mathcal{R}_L est un *sous-recueil* de \mathcal{R} (38.14), on passe canoniquement de la géométrie de la Relativité Générale à celle de la Relativité Restreinte; en ce qui concerne notamment les *racines* de U, ceci résulte du théorème (16.2); nous avons vu que ce passage peut entraîner des confluences de *noyaux* et de *variance*; ainsi, en Relativité Restreinte, *toutes les racines sont d'ordre 1* (24.1); la racine des tenseurs de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ est isomorphe à celle des tenseurs d'ordre $\begin{bmatrix} 0 \\ p+q \end{bmatrix}$, l'isomorphisme étant le « *changement de variance* » défini en (29.10)); la racine des densités est isomorphe à celle des scalaires, celle des 4-formes à celle des pseudo-scalaires, celle des connexions à celle des tenseurs d'ordre 3, etc.

Champs en relativité restreinte.

(38.17) — Les équations aux variations et les équations de conservation des divers champs (en dehors, bien entendu, du champ de gravi-

(*) On peut aussi considérer la structure d'espace définie sur U par le prérecueil L: alors U est un *univers non séparé* (les seuls ouverts étant U et \emptyset : voir (1.21), (2.6)); c'est cette géométrie qui est utilisée implicitement dans les formulations de la théorie quantique des champs recourant à la transformation de Fourier.

tation) s'écrivent en Relativité Restreinte *sans aucune modification*; il peut seulement se produire quelques simplifications d'écriture.

Par exemple, en l'absence de charges électriques, l'équation $\square F = 0$ (37.22) montre que *chaque composante* $F_{\lambda\mu}$ du champ électromagnétique est une solution de l'équation des ondes

$$(38.18) \quad \square\varphi \equiv \partial_1\partial_1\varphi - [\partial_2\partial_2\varphi + \partial_3\partial_3\varphi + \partial_4\partial_4\varphi] \equiv 0$$

(théorème (30.50)).

(38.19) — Tout glissement de Lorentz infinitésimal $[X \rightarrow \delta X]$ est un vecteur de Killing du champ $[X \rightarrow g]$ ((23.15), (38.12)); si T est le tenseur d'énergie d'un phénomène, le vecteur $T(\delta X)$ a donc une divergence nulle (th. (34.26)); par application de (38.10), on obtient donc dix vecteurs à divergence nulle en posant successivement

$$V^\lambda \equiv T^{\lambda\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \\ V^\lambda \equiv T^{\lambda\alpha} x^\beta - T^{\lambda\beta} x^\alpha \quad (\alpha < \beta)$$

par intégration, on en déduit les théorèmes de conservation de la théorie classique des champs.

(38.20) — Il résulte de (33.8) que la présence d'un champ peut se mettre sous la forme

$$\diamond \quad p = \varphi(z, \partial_\nu z)$$

φ étant une fonction *indépendante de la carte de Lorentz choisie*, puisque les $g_{\lambda\mu}$ ont des valeurs constantes.

2 Mais toute fonction de ce type ne peut pas constituer une expression valable pour la présence d'un phénomène; il faut recourir à la Relativité Générale pour exclure, par exemple, le tenseur symétrique $\partial_\lambda A_\mu + \partial_\mu A_\lambda$ du « *lagrangien* » d'un champ de covecteurs $X \rightarrow A$.

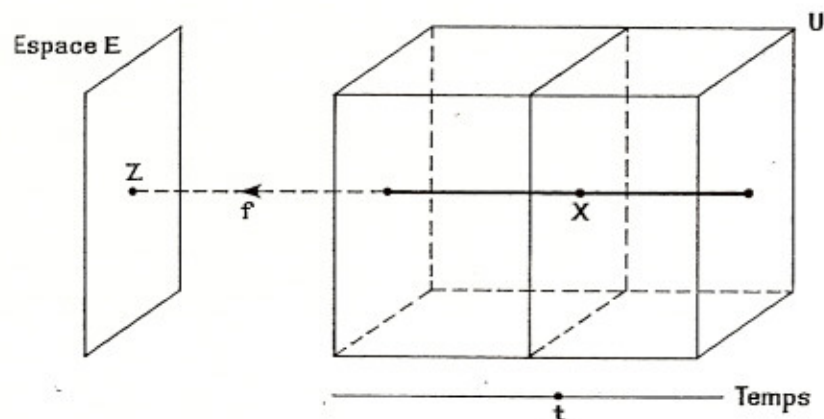
Z — De même, cette expression \diamond ne permet pas de définir le tenseur $T_{\mu\nu}$; la notion d'énergie est essentiellement liée à la Relativité Générale.

§ 39 Passage à la physique classique.

Espace et temps.

(39.1) La physique classique peut être considérée comme une formulation approchée de certaines lois relativistes, dans laquelle la référence à la Terre joue un rôle essentiel.

En première approximation, en effet, on peut considérer la Terre — ou une partie de la Terre, le « laboratoire » — comme une matière parfaite, dont les lignes de courant sont des droites parallèles du genre temps ⁽¹⁾ (on se place donc dans l'approximation de la Relativité Restreinte, et on néglige la rotation de la Terre en même temps que la pesanteur).



⁽¹⁾ On obtient évidemment une formulation plus précise en se référant, non à la matière même du laboratoire, mais à une matière fictive imaginée de façon à vérifier cette condition (référentiel astronomique).

\diamond Il existe alors une carte de Lorentz $F(x \rightarrow X)$ telle que les lignes de courant de la matière aient pour équation $x^2 = \text{Cte}$, $x^3 = \text{Cte}$, $x^4 = \text{Cte}$; on en déduit immédiatement le théorème :

Soit $f: [X \rightarrow Z]$ le champ trivial qui définit la matière du laboratoire (cf. § 36); désignons par c une constante positive.

1) Le groupe des glissements de Lorentz qui *invariant* le champ f admet deux *projections* (voir (7.1)) :

(a) La projection $[X \rightarrow Z]$, dont la *base* E (voir (7.2)) sera appelée *espace* (du laboratoire); E possède une structure invariante de *variété euclidienne positive à trois dimensions*, caractérisée par la relation

$$\diamond \quad \frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \frac{\partial \bar{Z}}{\partial X} = -c^2 \mathbf{1}_E$$

(b) La projection $[X \rightarrow t]$ dont les *fibres* (voir (6.3)) sont les variétés à trois dimensions orthogonales aux lignes de courant, et dont la *base* Θ sera appelée *temps* (du laboratoire, ou *temps propre*).

(39.2)

Le temps possède une structure invariante de *variété euclidienne à une dimension*, caractérisée par la relation

$$\heartsuit \quad \frac{\partial t}{\partial X} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial X} = \mathbf{1}_\Theta$$

2) Il existe une application régulière R du produit direct $\Theta \times E$ sur U , définie par

$$\clubsuit \quad R \begin{pmatrix} f \\ Z \end{pmatrix} = X;$$

R s'appellera le *repère* du laboratoire.

En choisissant un point 0 de U comme origine, on définit sur U , E et Θ des structures d'*espaces vectoriels euclidiens*, telles que R soit linéaire;

(39.2) on a alors

$$\bar{R}.R = \begin{bmatrix} 1_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} 1_E \end{bmatrix}$$

— Ce théorème explique que U soit appelé « espace-temps ».

(39.3) — Un point t du temps s'appelle un *instant*; la fibration \sim correspondant à la projection $X \rightarrow t$:

$$[X \sim X'] \Leftrightarrow [t = t']$$

s'appelle la *simultanéité* (du laboratoire).(39.4) — Les glissements de l'espace euclidien E s'appellent les *déplacements*.**Décomposition électro-magnétique de la lumière.**

Il est parfois utile de donner une description « classique » des champs, en utilisant des variables liées à la décomposition de U en espace et temps.

Par exemple, on peut étudier la lumière en posant ⁽¹⁾

$$(39.5) \quad \begin{aligned} A(dX) &= v dt + \mathcal{M}(dZ); \\ F(dX)(\delta X) &= \mathcal{E}(dt \delta Z - \delta t dZ) + \mathcal{K}(dZ)(\delta Z); \\ J.dX &= \rho dt + \mathcal{J}(dZ) \end{aligned}$$

 v et ρ sont des scalaires; \mathcal{M} et \mathcal{E} des covecteurs de E; \mathcal{K} une 2-forme.⁽¹⁾ En nous conformant à un abus usuel, nous identifions les intervalles de temps dt à des nombres: ceci suppose une *orientation* préalable du temps: si on changeait d'orientation, il faudrait remplacer v , \mathcal{E} , ρ par leurs opposés.

On trouve le tableau de correspondance:

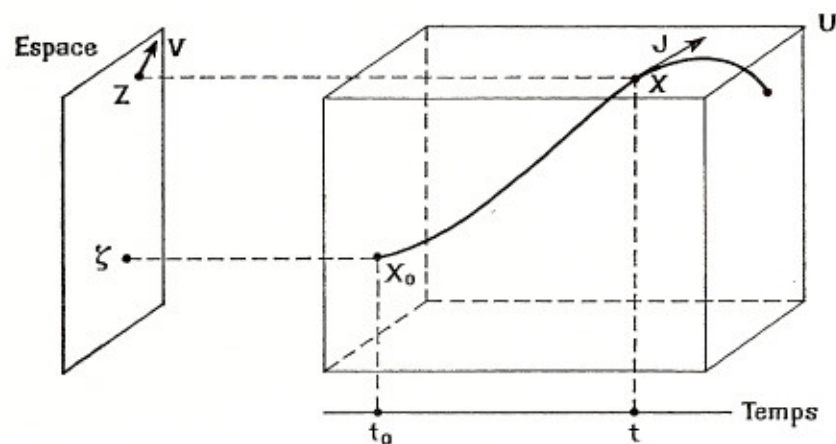
a) Désignation des équations	Notations d'univers	Notations spatio-temporelles
b) Définition de F	$F = \nabla A$	$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \nabla v$; $\mathcal{K} = \nabla \mathcal{M}$
c) première équation de Maxwell	$\nabla F = 0$	$\nabla \mathcal{E} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = 0$; $\nabla \mathcal{K} = 0$
d) deuxième équation de Maxwell (en présence de matière chargée)	$f \operatorname{div} F = \bar{J}$	$c^2 \operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\rho}{f}$; $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - c^2 \operatorname{div} \mathcal{K} = \frac{\mathcal{J}}{f}$
e) Conservation de l'électricité	$\operatorname{div} J = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} - c^2 \operatorname{div} \mathcal{J} = 0$
f) Equation des ondes (dans le vide)	$\square F = 0$	$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathcal{E} = 0$; $\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathcal{K} = 0$
g) Condition de Lorentz	$\operatorname{div} A = 0$	$\frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \operatorname{div} \mathcal{M} = 0$
h) Expression de la présence	$p = \frac{f}{2} \langle F, F \rangle$	$p = \frac{f}{2} \left\{ c^4 \langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle - c^2 \langle \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \right\}$

— Il est clair que les notations ∇ , div , Δ , $\langle \rangle$, dans la troisième colonne, se rapportant à l'espace E; on rappelle que $f = \frac{1}{4\pi}$ dans de nombreux systèmes d'unités.

- (39.7) — Il est plus classique — mais moins commode — d'introduire, à côté du *champ électrique* \mathcal{E} , du *potentiel électrique* $-v$, et du *potentiel-vecteur magnétique* \mathcal{M} , l'*induction magnétique* $\ast(\mathcal{K})$, au lieu de la 2-forme \mathcal{K} (après orientation de l'espace). Les équations de Maxwell s'écrivent alors avec des *rotationnels* (voir (30.53)).
- (39.8) — La constante c peut s'interpréter comme *vitesse de la lumière dans le vide* (équation f) et comme *rapport des unités magnétiques et électriques* (équation h).

Dynamique classique.

- (39.9) — Considérons une matière parfaite (différente de celle du laboratoire) dont les lignes de courant sont du genre temps :



Chaque ligne de courant coupe une surface $t = t_0$ en un point X_0 au plus; nous supposons donc que l'on peut repérer chaque molécule de matière par le point ζ de l'espace du laboratoire qu'elle occupe à l'instant arbitrairement choisi $t = t_0$.

Posons alors :

$$(39.10) \quad D \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \zeta}{\partial X} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X}$$

D est un affineur symétrique de l'espace E , qui vaut 1_E lorsque $t = t_0$; il caractérise la *conformation* (voir 36.12)).

La présence de la matière est une fonction de ζ et de D ; nous pouvons toujours l'écrire sous la forme

$$(39.11) \quad p \equiv c^2 f(\zeta) \sqrt{\det(D)} + w$$

$f(\zeta)$ étant une fonction positive, w une autre fonction de ζ et de D .

— Nous nous proposons de considérer la vitesse de la lumière c comme *très grande*; l'écriture (39.11) de la présence devient alors une hypothèse, selon laquelle la cohésion de la matière est faible — puisque le terme prépondérant de sa présence est celui d'une poussière (cf. (36.36)).

— Par ailleurs, nous introduirons le vecteur J , défini (voir (36.7)) à partir de la 3-forme de E

$$(39.12) \quad \omega \equiv \frac{1}{c^3} f(\zeta) \text{vol}_E$$

et nous poserons

$$(39.13) \quad J \equiv R \begin{bmatrix} p \\ \rho V \end{bmatrix}, \quad R \text{ étant le repère du laboratoire;}$$

A la place du tenseur θ , nous considérerons l'affineur symétrique Θ défini par

$$(39.14) \quad \Theta = \bar{\Theta}, \quad \delta w = \text{Tr}(\Theta \cdot \delta D) \text{ dans une variation de } D \text{ seul.}$$

Le calcul donne les formules suivantes :

$$(39.15) \quad \rho \equiv f(\zeta) \det \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Z} \right)$$

$$(39.16) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial Z} \cdot V = 0 \quad (V \text{ est le vecteur vitesse des molécules})$$

$$(39.17) \quad D = \frac{\partial \zeta}{\partial Z} \left[1_E - \frac{V \cdot \bar{V}}{c^2} \right] \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial Z}$$

$$(39.18) \quad T = c^2 f(\zeta) \sqrt{\det(D)} \cdot \Pi_J + w + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial X} \cdot \Theta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X}$$

T étant l'affineur d'énergie de la matière, Π_J le projecteur orthogonal sur J ; soit

$$(39.19) \quad T = R \cdot \begin{bmatrix} e & -\frac{\bar{Y}}{c^2} \\ Y & K \end{bmatrix} \cdot R^{-1}$$

avec les notations auxiliaires

$$(39.20) \quad v = |V|;$$

$$(39.21) \quad A = 2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial Z} \cdot \Theta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial Z} - w \cdot 1_E$$

$$(39.23) \quad K = -A - \rho \frac{V \cdot \bar{V}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$(39.24) \quad Y = \left[\frac{\rho c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + w + A \right] V;$$

$$(39.25) \quad e = \frac{\rho c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + w \left[1 + \frac{v^2}{c^2} \right] + \frac{1}{c^2} \bar{V} \cdot A \cdot V.$$

Les équations d'univers $\operatorname{div} J = 0$, $\operatorname{div} T = 0$ s'écrivent alors

$$(39.26) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho V] = 0$$

$$(39.27) \quad \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} Y = 0$$

$$(39.28) \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} + \operatorname{div} K = 0$$

En combinant les équations (39.26, 27), de façon à faire disparaître leurs termes en c^2 , on a aussi

$$(39.29) \quad \frac{\partial}{\partial t} [e - \rho c^2] + \operatorname{div} [Y - \rho c^2 V] = 0$$

Il suffit maintenant de faire $c = \infty$ dans ces formules. On trouve alors le système :

$$(39.30) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho V] = 0$$

$$(39.31) \quad \rho \Gamma + \operatorname{div} A = 0$$

$$(39.32) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[w + \frac{\rho v^2}{2} \right] + \operatorname{div} \left[\left[w + \frac{\rho v^2}{2} + A \right] V \right] = 0$$

$$(39.33) \quad D = \frac{\partial \zeta}{\partial Z} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial Z}$$

$$(39.34) \quad \begin{cases} A = 2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial Z} \cdot \Theta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial Z} - w \cdot 1_E \\ \delta w = \operatorname{Tr} (\Theta \cdot \delta D), \quad \Theta = \bar{\Theta} \end{cases}$$

dont l'interprétation est facile. En effet :

— L'équation (39.30), dite *équation de continuité*, exprime la *conservation de la masse* (supposée finie)

$$(39.35) \quad m = \int_{\mathbb{R}} \rho \text{ vol}$$

si l'on identifie ρ avec la *masse spécifique* du milieu (la fonction $f(\zeta)$ désigne donc la masse spécifique à l'instant $t = t_0$; ceci résulte de (39.15)).

— L'équation (39.31), dite *équation d'Euler*, exprime la « *loi fondamentale de la dynamique* » : l'accélération Γ des molécules, multipliée par la masse (spécifique), est égale à la force (spécifique)

— $\text{div } \bar{A}$, \bar{A} étant la *contrainte*. Cette équation dérive de (39.28) compte tenu des identités :

$$(39.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} [\rho \bar{V}] + \text{div} [\rho V \bar{V}] = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} [\rho V] \right] \bar{V} + \rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial Z} V \right] \\ \Gamma = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial Z} V \end{array} \right.$$

(39.37) — L'équation (39.32) exprime la *conservation de l'énergie*

$$\int_{\mathbb{R}} \left[w + \rho \frac{v^2}{2} \right] \text{ vol} ;$$

on voit que w est l'*énergie élastique spécifique*, et on constate que l'*énergie cinétique spécifique* est égale, comme on peut s'y attendre, à $\frac{1}{2} \rho v^2$.

Le vecteur $\left[w + \rho \frac{v^2}{2} + \bar{A} \right] V$ peut donc être considéré comme vecteur *courant d'énergie*.

Cette équation (39.32) (qui dérive de (39.29)), peut aussi se déduire directement de l'équation d'Euler ; on sait en effet que les 4 équations de conservation notées $\text{div } T = 0$ sont surabondantes, puisqu'il n'y a que 3 variables.

(39.38) — (39.33) donne une expression classique de la *déformation*, et confirme l'interprétation de la *conformation*.

(39.39) — (39.34) exprime la relation qui existe entre la *contrainte* \bar{A} et la *déformation* D ; c'est une expression classique : le lecteur pourra la reconnaître en exprimant, selon l'usage, Z en fonction de ζ et t (variables de Lagrange) au lieu de rechercher comme ici ζ en fonction de Z et t .

L'équation $\Theta = \bar{\Theta}$ entraîne $A = \bar{A}$; par suite, si $[Z + \delta Z]$ est un *déplacement* infinitésimal de l'espace, comme $\frac{\partial}{\partial Z} [\delta Z]$ est antisymétrique, on a $\text{Tr} \left(A \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \delta Z \right) = 0$; d'où $\text{div} [A \cdot \delta Z] = [\text{div } A] \delta Z$.

En intégrant sur une 3-chaîne C en dehors de laquelle A est nulle, on en tire $\int_C \text{div} (A) \cdot \delta Z \text{ vol} = 0$; d'où l'on déduit, en prenant pour δZ divers déplacements infinitésimaux, que le torseur des efforts appliqués par le milieu à ses différentes molécules est nul : c'est l'*égalité de l'action et de la réaction*.

(39.40) — L'équation (39.28), écrite sans transformation, entraîne la conservation de l'intégrale

$$\int \bar{\rho} V \text{ vol}$$

c'est-à-dire de l'*impulsion*.

— Si B est un affineur antisymétrique de U , on obtient un glissement de Lorentz infinitésimal en posant $\delta X = B \cdot X$, et l'on sait

que l'on a $\text{div}[T.\delta X] = 0$; on en déduit la conservation des intégrales

$$(39.41) \quad \int \rho Z \wedge V \text{ vol, appelée moment cinétique } (^1)$$

et

$$(39.42) \quad \int \rho[Z - Vt] \text{ vol}$$

d'où l'on déduit que le centre de gravité décrit une droite d'un mouvement uniforme.

— En utilisant (39.15) et (39.17), on peut transformer l'expression (39.11) de la présence en

$$(39.43) \quad p = \rho c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + w$$

En calculant l'action \mathcal{A} par balayage au moyen de plans $t = \text{Cte}$, on trouve, à un facteur constant près, la valeur

$$(39.44) \quad \mathcal{A} = mc^2[t_1 - t_0] + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{K}} \left[w - \frac{\rho v^2}{2} \right] \text{ vol} + O\left(\frac{1}{c^2}\right);$$

comme l'intégrale

$$\int_{\mathbb{K}} \left[w - \frac{\rho v^2}{2} \right] \text{ vol}$$

est égale à la différence de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, on retrouve le principe variationnel d'Hamilton.

(39.45) En conclusion, on voit que l'on retrouve, dans tous ses détails, la théorie classique des milieux élastiques, et que l'on vérifie tous

(¹) Le signe \wedge représente ici l'opération du produit vectoriel, définie par l'identité $A \wedge B = \text{vol}_{\mathbb{K}}(A)(B)$.

les principes de la dynamique classique sur cet exemple déjà très général (¹).

Groupe de Galilée.

Groupe de Carroll ?

Les équations de la matière parfaite sont invariantes dans les glissements de Lorentz; en affectuant judicieusement le passage à la limite $c = \infty$, on en déduit que les équations de la dynamique classique sont invariantes dans les glissements

$$(39.46) \quad \begin{bmatrix} t \\ Z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_0 + \eta t \\ Z_0 + BZ + Vt \end{bmatrix} \quad (\eta = \pm 1, \bar{B}.B = 1_{\mathbb{K}})$$

qui forment encore un groupe de dimension 10, le groupe de Galilée.

Ce groupe définit la géométrie classique de l'espace-temps.

On démontre aisément le théorème :

(39.47) L'espace temps classique est un espace fibré, [ayant le temps pour base; la fibre correspondant à un instant t est l'espace à cet instant; son groupe structural est le groupe des déplacements euclidiens (²).

(39.48) — Il faut noter que la fibration fournie par les molécules du laboratoire (39.2) disparaît; même en mécanique classique, on n'a pas le droit de parler du même point de l'espace à deux instants différents.

(¹) Le lecteur pourra traiter, grâce à (37.35), le cas d'un milieu élastique chargé électriquement en interaction avec le champ électromagnétique, et vérifier notamment que l'on retrouve l'expression classique des forces appliquées par le champ aux molécules chargées (Cf. Souriau, 4^e réf. de la page 336).

(²) Le groupe de jauge coïncide avec le groupe structural, à moins que U ne soit orientée; dans ce cas, le groupe de jauge est le sous-groupe distingué des déplacements conservant l'orientation.

Équivalence de la masse et de l'énergie.

- (39.49) — Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, la décomposition (39.11) de la présence est *parfaitement arbitraire* si l'on renonce à faire $c = \infty$; de même l'artifice qui conduit à la combinaison (39.29).

Par conséquent, dès qu'on attribue une valeur finie à c , l'énergie spécifique $e - \rho c^2$ cesse d'être définie, ainsi d'ailleurs que la masse spécifique ρ . Seule conserve un sens la grandeur e , dont l'intégrale spatiale, conservative d'après (39.27), est égale à $mc^2 + W$, m et W étant la masse et l'énergie classiques. On sait à quelles conclusions peut conduire cette remarque.

Interprétation classique de la gravitation.

Les diverses approximations de la théorie relativiste de la gravitation (§ 35) sont assez longues à discuter; le lecteur pourra par exemple consulter à ce sujet Fock (réf. p. 336).

Nous allons simplement étudier l'approximation statique, qui conduit à la théorie de Newton (attraction universelle).

Considérons une carte, primitivement de Lorentz, dans laquelle nous faisons le changement de champ $[X \rightarrow g]$ défini par

$$(39.50) \quad g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + 2\epsilon u [g_{\mu\nu} - 2^1|_{\mu}^1|_{\nu}] + O(\epsilon^2)$$

ϵ étant un paramètre, u une fonction de x^2, x^3, x^4 seuls.

En appliquant (35.18) et (28.85), on calcule les composantes de la connexion riemannienne et du tenseur de Ricci; on trouve notamment:

$$(39.51) \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \epsilon g^{\lambda\sigma} \{ \partial_{\mu} u [g_{\nu\sigma} - 2^1|_{\nu}^1|_{\sigma}] + \partial_{\nu} u [g_{\mu\sigma} - 2^1|_{\mu}^1|_{\sigma}] - \partial_{\sigma} u [g_{\mu\nu} - 2^1|_{\mu}^1|_{\nu}] \} + O(\epsilon^2)$$

$$(39.52) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \equiv 2\epsilon \square u |_{\mu}^1|_{\nu} + O(\epsilon^2)$$

On voit que l'équation d'Einstein (35.24) est vérifiée au second ordre près si

$$(39.53) \quad \Lambda = O(\epsilon^2); \quad \chi T_{\mu\nu} \equiv 2\epsilon \square u |_{\mu}^1|_{\nu} + O(\epsilon^2)$$

en comparant avec (39.19), on voit que ce sera possible si on considère, en dehors du champ de gravitation, un champ de matière parfaite, dont la présence est de la forme $c^2 f(\zeta) \sqrt{\det(D)} + \epsilon w$, et qui est en équilibre — c'est-à-dire dont les lignes de courant sont parallèles au premier vecteur de la base de Lorentz considérée.

Il vient

$$(39.54) \quad 2 \square u \equiv -2c^2 \Delta u \equiv \chi_0 c^2 \rho$$

si

$$(39.55) \quad \chi = \epsilon \chi_0 + O(\epsilon^2)$$

Cette équation (39.54), dite équation de Poisson, peut déterminer u en fonction de ρ ; si l'on considère en particulier une sphère matérielle, homogène par couches concentriques, δ (39.54) possède la solution:

$$(39.56) \quad u = \frac{\chi_0}{8\pi} \int_r^{\infty} \frac{m_r dr}{r^2}$$

r désignant la distance au centre O , m_r la masse contenue dans la sphère de centre O , de rayon r . On a en particulier, à l'extérieur de la sphère,

$$(39.57) \quad u = \frac{\chi_0 m}{8\pi r}$$

m étant la masse totale.

L'équation de Poisson étant linéaire, on en déduit par superposition la solution extérieure, dans le cas où les masses constituent des sphères réparties dans l'espace (ou, à la limite, si on suppose des masses ponctuelles).

Considérons maintenant une « masse d'épreuve », assez petite pour ne pas modifier les $g_{\mu\nu}$, et « libre dans l'espace »; en l'assimilant

à une molécule de poussière, on sait qu'elle décrit une géodésique (36.34), d'équation (28.65)

$$(39.58) \quad \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

soit, si on l'abandonne sans vitesse initiale $\left[\frac{dx^\mu}{ds} = \delta_{\mu 1} \right]$

$$(39.59) \quad \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = -\Gamma_{11}^\lambda$$

ou, d'après (39.51),

$$(39.60) \quad \frac{d^2X}{ds^2} = -\epsilon \frac{\partial u}{\partial X} + O(\epsilon^2)$$

En notation spatio-temporelle, cette équation s'écrit

$$(39.61) \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = \epsilon c^2 \text{grad } u + O(\epsilon^2)$$

soit, dans le cas de masses m_j concentrées en des points dont les distances sont appelées r_j :

$$(39.62) \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{\chi c^2}{8\pi} \sum_j m_j \text{grad} \frac{1}{r_j} + O(\epsilon^2)$$

On retrouve donc la loi de Newton en supposant ϵ petit, c'est-à-dire en supposant que la constante de gravitation, les vitesses des molécules et les efforts internes de la matière sont faibles; de la valeur expérimentale de la constante G de Newton, on déduit

$$(39.63) \quad \chi = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,865 \cdot 10^{-27} \text{ cm} \cdot \text{g}^{-1}$$

hic facit lepus

(39.64) — On peut aussi établir, en introduisant l'expression (39.51) des $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ dans l'équation $\text{div } T = 0$, l'équation qui remplace (39.31) et donne les conditions de l'équilibre de la matière sous son propre poids.

(39.65) — En appliquant (39.50), le lecteur vérifiera immédiatement que si une source lumineuse, immobile dans un champ de gravitation, envoie des éclairs séparés par un intervalle τ de *temps propre*, ceux-ci seront perçus par un observateur éloigné ($u = 0$) avec un intervalle de temps *plus élevé*:

$$(39.66) \quad \tau' = \tau[1 + \epsilon u] + O(\epsilon^2),$$

la valeur de u étant prise à la source (1).

C'est l'effet *Einstein*, qui a été bien vérifié expérimentalement, notamment sur les raies spectrales des étoiles denses, et en laboratoire (donc en utilisant le champ de gravitation terrestre) grâce à l'effet *Mössbauer* qui permet des comparaisons de fréquences très précises (2).

— L'équation d'Einstein dans le vide possède une solution *exacte*, découverte par Schwarzschild, à savoir:

$$(39.67) \quad g(dX)(dX) = \left[\frac{r-a}{r+a} \right]^2 dt^2 - \left[\frac{r+a}{r} \right]^4 [dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

en désignant par t, x, y, z des coordonnées d'espace-temps, a une constante positive, et en posant toujours $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ($r > a$).

(1) Avec les approximations consenties ici, on peut remarquer que $\frac{\tau' - \tau}{\tau} = \frac{v^2}{2c^2}$, v étant la vitesse de libération du champ de pesanteur: soit, dans le cas de la surface du Soleil, $\frac{\tau' - \tau}{\tau} \approx 2 \cdot 10^{-4}$.

(2) Voir BERTOTTI, BRILL et KROTOKOV, « Experiments on gravitation », in « Gravitation » (réf. p. 336).

En supposant le rapport $\frac{a}{r}$ petit ⁽¹⁾, on retrouve l'expression

(39.50), avec $\epsilon u = \frac{2a}{r}$; en comparant avec (39.57), on peut donc

interpréter (39.67) comme le champ de pesanteur créé à l'extérieur par un corps à symétrie sphérique, de *masse gravitationnelle*

$$m = \frac{16\pi a}{\chi}.$$

(39.68) — En cherchant les géodésiques de ce champ ⁽²⁾, on peut étudier le mouvement des planètes : on trouve des lois voisines de celles de Képler ; la différence la plus notable est une rotation séculaire du périhélie ; elle atteint 43 secondes d'arc (par siècle) pour la planète la plus rapide, Mercure ; cette variation avait été constatée antérieurement à la découverte de la Relativité Générale ; la valeur numérique expérimentale (après correction des perturbations causées par les autres planètes) coïncide avec la valeur théorique avec toute la précision des mesures ⁽³⁾.

(39.69) — La recherche des géodésiques isotropes conduit à prévoir une *déviatiion des rayons lumineux* passant au voisinage du soleil, la déviation totale atteignant $\frac{8a}{r}$ [r = distance minimum du rayon au centre] ; cette valeur (1,7" pour des rayons rasant le Soleil) a été confirmée par les observations faites pendant les éclipses totales, avec une précision satisfaisante ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Dans le cas du Soleil, $\frac{a}{r} < 10^{-4}$.

⁽²⁾ Pour plus de détails, voir Pauli (réf. p. 336) § 58.

⁽³⁾ Voir BRADOTTI et al. (réf. p. 385).