CHAPITRE IV

Variétés différentiables

§ 17 Notations matricielles (¹)

Soit

(17.1)
$$x = \begin{bmatrix} {}^1x \\ {}^2x \\ \cdots \\ {}^nx \end{bmatrix}$$

un élément quelconque de l'espace numérique R^n (${}^ix \in R$).

Nous poserons

(17.2)
$${}^j|(x) = {}^jx \quad (\text{pour} \quad j = 1, 2, \cdots n)$$

et, pour tout s réel

(17.3)
$$|_j(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ s \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s \text{ à la place n}^o\ j)$$

(¹) Pour plus de détails sur ce §, on peut consulter : J. M. Souriau, « Calcul linéaire » (Presses Univ. de France, coll. Euclide).

Les opérateurs ${}^j|$ et $|_j$, qui appliquent respectivement R^n sur R et R dans R^n, s'appelleront *clefs matricielles*.

R^n possède une structure d'espace vectoriel sur le corps R, définie en postulant la linéarité des clefs matricielles. Cette structure permet d'écrire la formule

$$1_{R_n} = \sum_{j=1}^{n} |_j . {}^j| \tag{17.4}$$

Nous poserons aussi

$${}^j| . |_k = {}^j|_k \tag{17.5}$$

En convenant d'identifier, dans un espace vectoriel réel dont les éléments ne sont pas des opérateurs, tout vecteur V avec l'opérateur linéaire $\underset{\smile}{V}$ défini par

$$\underset{\smile}{V}(s) = sV \quad \text{(pour tout } s \text{ réel)} \tag{17.6}$$

et donc de poser notamment

$$s(t) = st \quad \text{si} \quad s \quad \text{et} \quad t \quad \text{sont réels} \tag{17.7}$$

on peut écrire

$${}^j|_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ 1 & \text{si} \quad j = k \end{cases} \tag{17.8}$$

${}^j|_k$ est donc le symbole de Kronecker (noté souvent δ_{jk}).

— Nous appellerons *colonnes* d'ordre n les opérateurs linéaires à valeurs dans R^n ; A étant une colonne (définie dans un espace vectoriel E quelconque), on voit que

$$\boxed{A = \sum_j |_j . {}^jA}, \quad \text{en posant} \quad \boxed{{}^jA = {}^j| . A} \tag{17.9}$$

les opérateurs ${}^jA$ (qui appartiennent au dual de E) s'appellent *éléments* de la colonne A. Nous noterons aussi

$$A = \begin{bmatrix} {}^1A \\ {}^2A \\ \dots \\ {}^nA \end{bmatrix} \tag{17.10}$$

Dans le cas E = R, on retrouve la notation (17.1), les ${}^jA$ étant des nombres.

— Nous appellerons *lignes* d'ordre n les opérateurs linéaires définis sur R^n ; A étant une ligne (à valeurs dans un espace vectoriel E quelconque), on voit que

$$\boxed{A = \sum_j A_j . {}^j|}, \quad \text{en posant} \quad \boxed{A_j = A . |_j} \tag{17.11}$$

les opérateurs A_j (qui appartiennent à E) s'appellent *éléments* de la ligne A. Nous noterons aussi

$$A = [A_1 \, A_2 \, \dots \, A_n] \tag{17.12}$$

Dans le cas E = R, on voit que le dual de R^n est composé des lignes de n nombres réels.

Un opérateur linéaire A qui applique R^n dans $R^{n'}$ s'appelle *matrice* (réelle) ; en lui appliquant les résultats précédents, on voit que

$$A = \sum_{j,k} |_j . {}^jA_k . {}^k| \quad \text{avec} \quad {}^jA_k = {}^j| . A . |_k \tag{17.13}$$

les *nombres* ${}^jA_k$ s'appellent *éléments* de la matrice A.

On peut aussi appliquer les notations (17.10) et (17.12), séparément ou simultanément, on peut donc écrire

$$A = [A_1 \, A_2 \, \dots \, A_n] = \begin{bmatrix} {}^1A \\ {}^2A \\ \dots \\ {}^{n'}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1A_1 & {}^1A_2 & \dots & {}^1A_n \\ {}^2A_1 & {}^2A_2 & \dots & {}^2A_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n'}A_1 & {}^{n'}A_2 & \dots & {}^{n'}A_n \end{bmatrix} \tag{17.14}$$

Les $A_j = A.|_j$ sont les colonnes de la matrice A ; les ${}^iA = {}^i|.A$ en sont les lignes.

On voit notamment que les ${}^i|$, $|_k$ et ${}^i|_k$ sont respectivement les lignes, colonnes et éléments de la *matrice unité* 1_n. [ce que rappellent les notations proposées pour les clefs et le symbole de Kronecker].

— Nous appellerons *bases* (d'ordre n) les opérateurs linéaires *réguliers* définis sur R^n ; toute base S est donc une ligne

(17.15) $$S = [S_1\, S_2 \ldots S_n]$$

dont les éléments $S_j = S.|_j$ sont des vecteurs (« vecteurs de base ») ; pour que S soit régulière, il faut et il suffit que les S_j soient linéairement indépendants (qu'ils forment un système *libre*, en terminologie Bourbaki).

(17.16) Un espace vectoriel E est dit *de dimension finie* s'il est l'ensemble de valeurs d'une base S (on dit alors que S est une « base de E ») ; on montre que toutes les bases de E ont le même ordre n, qu est la *dimension* de E.

(17.17) Nous appellerons *cobase* de E l'inverse d'une base de E ; si S est une base, la cobase S^{-1} est un opérateur linéaire régulier appliquant E sur R^n ; S^{-1} est donc une *colonne*, dont les élément ${}^jS^{-1}$ sont des *covecteurs* de E (covecteurs de base).

(17.18) — S et S′ étant deux bases de E, l'opérateur $M = S^{-1}.S'$ est donc une matrice carrée d'ordre n, régulière, appelée *matrice de changement de base* ; les problèmes de changement de base se résolvent immédiatement au moyen des formules usuelles

$$\begin{array}{ll} M = S^{-1}.S' & M^{-1} = S'^{-1}.S \\ S' = S.M & S = S'.M^{-1} \\ [S']^{-1} = M^{-1}.S^{-1} & S^{-1} = M.S'^{-1} \end{array}$$

§ 18 Opérateurs différentiables

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

E possède une *topologie usuelle*, caractérisée par le fait que les vecteurs et covecteurs sont des opérateurs linéaires continus [1] ; il en résulte évidemment que les colonnes, lignes, matrices, bases et cobases sont aussi des opérateurs continus.

Définition :

Soient E et E′ deux espaces vectoriels de dimension finie. F un opérateur appliquant une partie de E dans E′. Nous dirons que F est *différentiable* si :

(*a*) def (F) est un *ouvert* de E (pour la topologie usuelle) ;

(18.1) (*b*) Quel que soit X dans def (F), H dans E, la limite

$$D(F)(X)(H) = \lim_{s \to 0} \frac{F(X + sH) - F(X)}{s}$$

existe toujours.

(*c*) Pour H donné, D(F)(X)(H) dépend continûment de X.

(18.2) Dans le cas $E = E' = R$, on voit que F est une fonction qui admet une *dérivée continue* ; D(F) est la *fonction dérivée* F′ ; nous appellerons encore *dérivé de* F l'opérateur D(F) dans le cas général.

— On dit souvent « continûment différentiable » au lieu de « différentiable ».

Théorème :

δ (18.3) Si F est différentiable, F est *continu*, l'opérateur D(F)(X) est *linéaire*, l'opérateur dérivé D(F) est *continu*.

[1] Cf. (17.6).

(18.4) — Il importe de remarquer que l'opérateur D(F) applique un ouvert de E dans l'espace vectoriel (de dimension finie) des opérateurs linéaires de E à E'.

(18.5) — On appelle parfois « différentielle » de F, et on note alors dF, l'opérateur D(F)(X), ou encore l'opérateur D(F); *nous n'utiliserons pas cette notation*, qui rend peu de services dans les calculs pratiques.

Z

— Exemples d'opérateurs différentiables :

ô (18.6) — Si A est linéaire, A est différentiable, $D(A)(X) \equiv A$.

ô (18.7) — Si A est quadratique $[A(X) \equiv B(X)(X)$, B bilinéaire symétrique], A est différentiable, $D(A) = 2B$.

ô (18.8) — Si F est différentiable dans un ouvert de R^n, $D(F)(x)$ est une ligne, dont l'élément n° j est

$$\frac{\partial\,[F(x)]}{\partial[^j x]}$$

(18.9) — En particulier, si F est différentiable dans un ouvert de R^n et prend ses valeurs dans $R^{n'}$, D(F)(X) est une matrice à n colonnes et n' lignes (matrice des dérivées partielles).

Définition :

Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie.

— Un opérateur F, appliquant une partie de E dans E', sera dit p fois différentiable ($p = 2, 3, 4, \ldots$) si :

(18.10) (a) F est différentiable ;

(b) D(F) est $p - 1$ fois différentiable.

— F sera dit *infiniment différentiable* s'il est p fois différentiable pour tout p.

Si F est deux fois différentiable, D(F) admet une dérivée $D^2(F)$, défini par $D^2(F)(X)(H) = \lim \dfrac{D(F)(X+sH) - D(F)(X)}{s}$; $D^2(F)(X)(H)$ est une limite d'opérateur linéaire, donc un opérateur linéaire ; l'expression $[D^2(F)(X)(H)](K)$, que nous écrirons simplement $D^2(F)(X)(H)(K)$ en sous-entendant un crochet dont la place n'est pas ambiguë, peut se définir directement par la formule

(18.11)
$$D^2(F)(X)(H)(K) =$$
$$\lim_{s,t\to 0} \frac{F(X + sH + tK) - F(X + sH) - F(X + tK) + F(X)}{st}$$

qui montre que $D^2(F)(X)$ est symétrique ; par itération, on montre que

(18.12) Si F est p fois différentiable, $D^p(F)(X)$ est un opérateur p fois linéaire, complètement symétrique.

En d'autres termes, l'expression $D^p(F)(X)(H_1)(H_2)\ldots(H_p)$ ne change pas par permutation des vecteurs H_j, et dépend linéairement de chacun d'eux.

Théorème (formule de Taylor) :

Si F est p fois différentiable

(18.13)
$$F(X + H) = F(X) + D(F)(X)(H) + \frac{1}{2!} D^2(F)(X)(H)(H) + \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{1}{p!} D^p(F)(X)(H)\ldots(H) + o(|H|^p)$$

$|H|$ désigne la norme de H (définie de façon arbitraire dans l'espace E) et $o(|H|^p)$ un vecteur V tel que $\dfrac{|V|}{|H|^p}$ tend vers 0 lorsque $|H|$ tend vers 0, X restant fixe.

Définition :

On dira que F est *analytique* (réelle) si F est infiniment différentiable, et si tout point X de def (F) possède un voisinage Ω tel que la série de Taylor

(18.14) $$F(X) + D(F)(X)(H) + \ldots \frac{1}{p!} D^p(F)(X)(H) \ldots (H) + \ldots$$

converge uniformément vers $F(X + H)$ lorsque $X + H \in \Omega$(1).

Exemples :

Un polynôme P (que l'on peut définir, dans un espace vectoriel, comme polynôme par rapport à des variables $C_j X$, les C_j étant des covecteurs) est analytique ; sa série de Taylor ne comporte qu'un nombre fini de termes.

Théorème (classique) (2) **:**

Soient E, E′ E″ des espaces vectoriels de dimension finie ; F une application d'un ouvert de E′ dans E″ ; G une application d'un ouvert de E dans E′.

(18.15) Si F et G sont différentiables (resp. p fois différentiables, infiniment différentiables, analytiques), F.G est différentiable (resp. p fois différentiable, infiniment différentiable, analytique), et l'on a

$$\diamond \qquad D(F.G)(X) = D(F)(G(X)).D(G)(X)$$

Théorème (classique) (2) **:**

Soient E et E′ deux espaces vectoriels, de dimensions n et n' ; F une application différentiable d'un ouvert de E dans E′.

— Si D(F)(X) est régulier (donc de rang n), X possède un voisinage ouvert Ω tel que $F.1_\Omega$ soit régulier, et que D(F)(Y) soit régulier pour tout Y dans Ω.

(18.16)

— Si D(F)(X) est de rang n', val (F) est un *voisinage* de F (X).

(1) Cette convergence uniforme se définit à l'aide d'une norme, dont le choix est sans influence sur la définition.
(2) Voir par exemple G. Valiron, « Théorie des fonctions », tome I (Masson éd.).

Théorème (classique) :

Soient E et E′ deux espaces de même dimension ; F une application différentiable (resp. p fois différentiable, infiniment différentiable, analytique) d'un ouvert de E dans E′, telle que

(18.17) (*a*) F est régulière ;

(*b*) D(F)(X) est régulière pour tout X.

Alors F^{-1} est différentiable (resp. p fois différentiable, infiniment différentiable, analytique).

La formule (18.15 $\diamond$) donne immédiatement, dans ce cas :

(18.18) $$D(F^{-1})(F(X)) = [D(F)(X)]^{-1}$$

ce qui montre notamment que la condition (*b*) est aussi nécessaire pour que F^{-1} soit différentiable.

Corollaire :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Les opérateurs A qui appliquent un ouvert de E sur un ouvert de E, tels que

— A est différentiable (resp. p fois différentiable, infiniment différentiable, analytique)

δ

(18.19) — A est régulier ;

— D(A)(X) est régulier pour tout X

forment un *recueil* d'espace E, que l'on appelle $C^1(E)$ (resp. $C^p(E)$, $C^\infty(E)$, $C^\omega(E)$).

(18.20) On appellera $C^0(E)$ le recueil des homéomorphismes locaux de E (voir (2.5)) ; les éléments de $C^1(E)$ s'appellent parfois *difféomorphismes* locaux de E.

§ 19 Variétés

Définition :

Un recueil $\mathfrak{R}$, d'espace R^n, sera dit *classique* si :

(19.1) (*a*) La topologie naturelle du recueil coïncide avec la topologie usuelle de R^n ;

(*b*) Les translations de R^n font partie de $\mathfrak{R}$.

— A cause de la condition (*a*), les éléments de $\mathfrak{R}$ sont des homéomorphismes locaux (c'est-à-dire des applications bicontinues d'un ouvert de R^n sur un ouvert de R^n) (th. (2.4)).

— Il résulte de (*b*) que $\mathfrak{R}$ donne à R^n une structure d'*univers*, et plus particulièrement d'*univers-groupe* (13.9).

Exemple de recueils classiques :

(19.2) — Nous connaissons déjà les recueils $C^p(R^n)(p = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty, \omega)$.

(19.3) Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie. Une application A d'un ouvert de E dans E' est dite *lipschitzienne* si, pour tout X dans def (A), il existe un voisinage Ω de X et un nombre positif k tels que

$$[Y, Y' \in \Omega] \Rightarrow [|A(Y) - A(Y')| \leqslant k\,|Y - Y'|]$$

Cette définition est indépendante de la façon dont on définit les normes des vecteurs de E et de E'. Une fonction lipschitzienne est continue.

Nous appellerons $C^{\mathrm{Lip}}(E)$ l'ensemble des applications régulières A d'un ouvert de E sur un ouvert de E, telles que A et A^{-1} soient lipschitziennes ; c'est un *recueil* d'espace E. $C^{\mathrm{Lip}}(R^n)$ est un *recueil classique*. On montre que toutes les fonctions différentiables sont lipschitziennes, si bien que

$$C^1(E) \subset C^{\mathrm{Lip}}(E) \subset C^0(E)$$

(19.4) — Soit G un groupe de permutations continues de R^n, contenant les translations ; les opérateurs $A.1_\Omega$ ($A \in G$, Ω = ouvert de R^n) est un pré-recueil, qui engendre un recueil classique (voir § 2). On peut appliquer ceci notamment au cas où G est le recueil des translations (on obtient ainsi le plus petit recueil classique) ; au cas où G est le *groupe affine* (ensemble des A tels que $A(X) = M.X + P$, M étant une matrice régulière, P un élément fixe de R^n) ; etc.

— Si nous choisissons un groupe G de matrices carrées d'ordre n, et un indice p ($p = 1, 2, 3, \ldots \infty, \omega$), l'ensemble des opérateurs A tels que

(19.5) (*a*) $A \in C^p(R^n)$,

(*b*) pour tout X, $D(A)(X) \in G$

forme un recueil classique.

Ce dernier énoncé est un corollaire immédiat de (18.15) et (18.18), et du fait que $[B > A] \Rightarrow D(B)(X) = D(A)(X)$.

Définition des variétés :

Soit $\mathfrak{R}$ un recueil classique de R^n. Nous dirons que l'ensemble V est une *variété, de classe* $\mathfrak{R}$, *de dimension n*, si nous avons choisi un recueil $\mathfrak{R}'$ tel que :

(19.6) (*a*) $\mathfrak{R}'$ opère transitivement sur $R^n \cup V$;

(*b*) R^n et V sont des ouverts dans $R^n \cup V$;

(*c*) La restriction de $\mathfrak{R}'$ à R^n coïncide avec $\mathfrak{R}$.

Remarque :

(19.7) Toute variété de classe $\mathfrak{R}$ possède une *structure d'univers*, localement isomorphe à l'univers R^n (muni du recueil $\mathfrak{R}$) [voir (4.11)].

— Inversement, tout univers V localement isomorphe à R^n (muni d'un recueil classique $\mathfrak{R}$) possède une structure de variété de classe $\mathfrak{R}$, pourvu que V soit disjoint de R^n (th. 5.3) *mais la structure de variété n'est pas entièrement déterminée par la structure d'univers, sauf si le recueil $\mathfrak{R}$ est parfait.*

— Nous pouvons, comme au § 5, considérer une variété V comme un univers localement isomorphe à l'*univers-type* R^n; nous utiliserons la même terminologie; ainsi :

Soit V une variété (notations de (19.6)).

— Un élément A de $\mathfrak{R}'$ s'appellera :

(19.8)

glissement de V	si def (A) $\subset$ V, val (A) $\subset$ V;
carte de V	si def (A) $\subset R^n$, val (A) $\subset$ V;
cocarte de V	si def (A) $\subset$ V, val (A) $\subset R^n$;
changeur de cartes de V	si def (A) $\subset R^n$, val (A) $\subset R^n$.

— Un ensemble de cartes dont les ensembles de valeurs recouvrent V s'appellera *atlas* de V.

(19.9) — Il est clair que l'ensemble des glissements de V constitue un recueil (c'est lui qui donne à V sa structure d'univers); que *le recueil des changeurs de cartes coïncide avec* $\mathfrak{R}$, et que notamment les translations de R^n sont des changeurs de cartes; que l'inverse d'une carte est une cocarte, et réciproquement.

(19.10) — Les cartes sont souvent appelées « cartes locales », ou encore « systèmes de coordonnées locales »; en effet, toute carte F met en correspondance biunivoque le point F(x) de la variété avec les n nombres réels ${}^ix$ que l'on peut donc considérer comme des « coordonnées » de F(x).

(19.11) — L'ensemble des glissements, cartes, cocartes et changeurs de cartes de V est un *pré-recueil*, qui engendre le recueil $\mathfrak{R}'$.

Théorème :

Soit $\mathfrak{R}$ un recueil classique de R^n; V un ensemble, disjoint de R^n; F_j une famille d'opérateurs réguliers, définis sur des ouverts de R^n, tels que

(19.12) (*a*) $F_j^{-1}.F_k \in \mathfrak{R}$ pour tous j, k;

(*b*) $\bigcup_j$ val $(F_j) =$ V.

Alors V possède une *structure de variété de classe* $\mathfrak{R}$, *et une seule,* telle que les F_j soient des cartes de V.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier de (2.11).

C.Q.F.D.

Exemple :

Soit E un espace vectoriel de dimension n; S et S′ étant deux *bases* de E (17.15), $S^{-1}.S'$ est une matrice régulière, d'où le théorème :

(19.13) Soit $\mathfrak{R}$ un recueil classique de R^n, contenant les matrices régulières; alors tout espace vectoriel E de dimension n possède une structure de variété de classe $\mathfrak{R}$, et une seule, telle que les bases de E soient des cartes.

Ce théorème permet en particulier de définir sur E la structure de *variété affine* (voir 19.4), de variété de classe C^p ($p = 0$, Lip, 1, 2, 3, ... ∞, ω).

Mais il y a bien entendu des recueils classiques $\mathfrak{R}$ qui ne contiennent pas toutes les matrices régulières; par exemple le recueil euclidien, défini par le procédé (19.4) en prenant pour G le groupe des matrices orthogonales; on peut donner une structure euclidienne à tout espace vectoriel de dimension finie, mais cette structure n'est pas canoniquement définie par la structure vectorielle.

Théorème :

Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux recueils classiques de R^n, tels que $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$; V une variété de classe $\mathcal{R}_1$ (disjointe de R^n).

(19.14) Alors V possède une seule structure de variété de classe $\mathcal{R}_2$, caractérisée par la propriété suivante : les cartes de V (pour la première structure) sont aussi des cartes de V pour la seconde structure.

Démonstration : Soit en effet F_j l'atlas de toutes les cartes pour la première structure ; les changeurs de cartes $F_j^{-1}.F_k$ appartiennent à $\mathcal{R}_1$, donc à $\mathcal{R}_2$; il suffit d'appliquer (19.12).

C.Q.F.D.

— En particulier, toute variété V possède une structure de variété de classe C^0 ; les glissements de $R^n \cup V$ sont alors les homéomorphismes locaux ; par suite tout point de V possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de R^n. On en déduit le théorème suivant [1] :

Toute variété V est une réunion d'ouverts connexes deux à deux
(19.15) disjoints (on les appelle *composantes connexes* de V) ;

Toute variété connexe possède un *revêtement universel*.

Définition :

(19.16) On appelle variété *lipschitzienne* (resp. C^1, C^p, C^∞, *analytique réelle*) une variété V dont les changeurs de cartes sont lipschitziens (resp. différentiables, *p* fois différentiables, infiniment différentiables, analytiques réels).

Il revient au même de dire que le recueil $\mathcal{R}$ des changeurs de cartes de V est contenu dans C^{Lip} (resp. C^1, C^p, C^∞, C^ω) ; le théorème (19.14) permet de prolonger cette définition (19.16) par le théorème :

[1] Voir la note II, à la fin de l'ouvrage.

(19.17) V possède alors *une seule structure de variété de classe* C^{Lip} (resp. C^1, C^p, C^∞, C^ω), telle que les cartes de V restent des cartes de V pour la nouvelle structure.

Z

Il importe donc de ne pas confondre les « variétés C^p » et les « variétés de classe C^p ».

(19.18) — Soient V_1 et V_2 deux variétés, de classes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, de dimensions n_1 et n_2 ; le *produit direct des deux variétés* est l'ensemble $V_1 \times V_2$ des couples $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ $(P_1 \in V_1,\ P_2 \in V_2)$; considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des opérateurs F tels que

$$F\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(X_1) \\ F_2(X_2) \end{pmatrix}$$

F_1 et F_2 étant des cartes respectives de V_1 et V_2 ; il est clair que les éléments de $\mathcal{A}$ sont réguliers, définis sur des ouverts de $R^{n_1+n_2}$, et que si F et F′ appartiennent à $\mathcal{A}$, $F^{-1}.F' \in C^0$.

Si les $F^{-1}.F'$ appartiennent à un recueil classique $\mathcal{R}$ de $R^{n_1+n_2}$, le théorème (19.12) montre que l'on pourra définir canoniquement sur $V_1 \times V_2$ une structure de classe $\mathcal{R}$, telle que $\mathcal{A}$ soit un *atlas ;* en particulier :

(19.19) Si deux variétés V_1 et V_2 sont C^p, le produit direct $V_1 \times V_2$ possède une structure canonique de variété de classe C^p, définie par l'atlas $\mathcal{A}$ ci-dessous (pour $p = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty, \omega$) ; la dimension de $V_1 \times V_2$ est la somme des dimensions de V_1 et de V_2.

Il est clair que cet énoncé peut s'étendre au produit direct de plusieurs variétés.

On sait (voir Bourbaki, Topologie générale, chap. I) qu'un espace topologique est dit *séparé* si deux points distincts admettent toujours des voisinages respectifs disjoints. La construction donnée à la fin du § 5 fournit aisément des exemples de *variétés non séparées*.

Théorème :

ô
(19.20) Soit V une variété *séparée.*

L'image, par une carte F de V, d'un ensemble compact contenu dans def (F) est compact ; V est *localement compacte.*

Définition, théorème [1] ***:***

Une variété V est dite *dénombrable à l'infini* si elle est séparée et si elle possède un atlas dénombrable.

Soit V une variété C^p ($p = 1, 2, 3, \ldots \infty$), dénombrable à l'infini ; soit U_j une famille d'ouverts qui recouvre V.

(19.21) Il existe alors des fonctions φ_j, à valeurs $\geqslant 0$, telles que :

(*a*) Chaque φ_j est p fois différentiable sur V, et nulle en dehors de U_j.

(*b*) Tout point X_0 de V possède un voisinage ouvert où les $\varphi_j(X)$ sont identiquement nuls, en dehors d'un nombre fini d'entre eux ; on a

$$\sum_j \varphi_j(X) = 1 \quad \text{quel que soit X dans V.}$$

On dit que les φ_j forment une *partition de l'unité, subordonnée au recouvrement* U_j.

Définition, théorème :

Soit V une variété de dimension n (notations de 19.6).

Nous appellerons *racine canonique* de V toute racine Ψ, définie sur l'univers $R^n \cup V$, telle que [si $X \in R^n$ et si T est une transla-

(19.22) tion de R^n],

◇ $$\Psi(T)(X) = 1_{\Psi_0}$$

— Toute racine définie sur une variété V, disjointe de R^n, est prolongeable par une racine canonique.

[1] Voir De Rham, « Variétés différentiables » (Hermann, Act. Sc. Ind.).

Démonstration :

V étant un ouvert de $R^n \cup V$, on sait que toute racine Φ de V est prolongeable par une racine Ψ' de $R^n \cup V$ (th. 16.3) ; la restriction Ψ'' de Ψ' à R^n est une racine d'un univers-groupe ; il existe donc un isomorphisme de racine, F_X, entre Ψ'' et une racine Ψ''' vérifiant la condition (19.22. ◇) (th. (13.10)) ; ô l'isomorphisme $G_X = \begin{cases} 1_{\Phi_X} \text{ si } X \in V \\ F_X \text{ si } X \in R^n \end{cases}$ transforme Ψ' en une racine canonique Ψ, qui prolonge bien Φ.

C.Q.F.D.

(19.23) — Il est clair, d'après (19.22. ◇) si Ψ est une racine canonique et si $X \in R^n$, que la fibre Ψ_X au point X coïncide avec la fibre Ψ_0 à l'origine, que l'on appelle *fibre-type.* En particulier, le groupe structural de la fibre type est indépendant du point de R^n où on la considère.

Soit F une carte de V ; X un point de def (F).

F appartenant au recueil $\mathcal{R}'$ (notations de (19.6)), $\Psi(F)(X)$ est un *opérateur régulier,* qui applique la fibre-type sur la fibre au point F(X), et qu'on appellera *repère.*

De même, si G est une *cocarte,* $\Psi(G)(X) = [\Psi(G^{-1})(G(X))]^{-1}$ (th. (12.2)) est l'inverse d'un repère, ou *corepère.*

Théorème :

Soit Φ une racine d'une variété V ; Ψ est une racine canonique prolongeant Φ.

(19.24) — Toute structure invariante des fibres de Φ est prolongeable, d'une seule façon, par une structure invariante des fibres de Ψ ;

— Si on a défini une structure de la fibre-type Ψ_0 qui soit invariante par son groupe structural, celle-ci est prolongeable, d'une seule façon, par une structure invariante des fibres de Ψ [donc de celles de Φ].

Ce théorème est une simple application de (12.16). C.Q.F.D.

Théorème :

Soit V une variété de dimension n ; Φ une racine définie sur $R^n \cup V$ (par exemple une racine canonique) ; F_j un atlas de V.

(19.25) Si $\mathcal{F}$ est une *famille invariante* de Φ-champs définie sur R^n, il existe une famille invariante $\mathcal{F}'$ de Φ-champs définie sur $R^n \cup V$, *et une seule,* dont la restriction à R^n coïncide avec $\mathcal{F}$.

Pour qu'un Φ-champ f, défini sur un ouvert de V, appartienne à $\mathcal{F}'$, il faut et il suffit que ses images par les F_j^{-1} appartiennent à $\mathcal{F}$.

ô Ce théorème résulte de la formule

$$f = \sup_j [F_j]_\Phi [F_j^{-1}]_\Phi(f)$$

valable pour tous les Φ-champs définis sur un ouvert de V, et du théorème (15.10).

C.Q.F.D.

— On voit de même qu'une famille invariante définie sur V est prolongeable d'une seule façon par une famille invariante sur $R^n \cup V$.

Lemme :

Soit V une variété lipschitzienne, de dimension n ; r un nombre $\geqslant 0$. Appelons N_r l'ensemble des changeurs de cartes A de V, conservant l'origine 0 de R^n, et tels que

ô
(19.26)

$$\lim_{|X| \to 0} \frac{|A(X) - X|}{|X|^r} = 0$$

Les germes en 0 des éléments de N_r forment un *sous-groupe distingué* du groupe des germes de changeurs de carte en 0.

— La définition de N_r est indépendante du choix de la norme sur R^n.

— On sait qu'il existe sur $R^n \cup V$ une racine J_r, admettant N_r comme noyau (th. (14.5)). On peut en fait en construire de très nombreux exemples.

Définition :

Soit Φ une racine d'une variété lipschitzienne V ; Ψ un prolongement canonique de Φ.

(19.27) Nous dirons que Φ est une *racine d'ordre r* si le noyau de Ψ à l'origine contient N_r.

Il faut, bien entendu, vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de Ψ ; ceci résulte du théorème suivant (cf. (14.10)) :

ô
(19.28) Soit Φ_0 une racine canonique dont le noyau est N_r ; les racines d'ordre r sont les racines *subordonnées à* Φ_0.

— On vérifie immédiatement que N_r est une fonction décroissante de r ($r < r' \Rightarrow N_r \supset N_{r'}$) ; par suite, si Φ est une racine d'ordre r, elle est aussi racine d'ordre r' pour tout r' plus grand que r ; on peut définir *l'ordre minimum* de Φ comme la borne inférieure des r' tels que Φ soit racine d'ordre r'.

Théorème :

Soit V une variété C^p ($p = 0, 1, 2, \ldots$) ; A et B deux changeurs de carte de V, définis à l'origine. Alors

(19.29)

$$[A^{-1}.B \in N_p] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(0) = B(0) \\ D^j(A)(0) = D^j(B)(0) \ \text{pour } j = 1, 2, \ldots p \end{bmatrix}$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de la formule de Taylor (18.13).

Corollaire :

Soit Ψ un prolongement canonique d'une racine Φ, d'ordre p, définie sur une variété C^p. Il existe une fonction g telle que, pour tout changeur de carte A et pour tout X dans def (A) :

ô
(19.30)

$$\Psi(A)(X) = g(D(A)(X), D^2(A)(X), \ldots, D^p(A)(X))$$

Lemme:

Soient B_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ des opérateurs j-linéaires, complètement symétriques, appliquant R^n dans R^n ; on suppose B_1 régulier.

Il existe alors un opérateur A, dans $C^\omega(R^n)$, tel que

(19.31)

$$\diamond \quad \begin{cases} D(A)(0) = B_1 \\ D^2(A)(0) = B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^p(A)(0) = B_p \end{cases}$$

δ Le polynôme P, défini par

$$P(X) = B_1(X) + \frac{1}{2!}B_2(X)(X) + \ldots + \frac{1}{p!}B_p(X)\ldots(X)$$

vérifie les conditions $\diamond$; comme $D(P)(0)$ est régulier, il existe un voisinage Ω de 0 tel que $A = P.1_\Omega$ soit régulier et que $D(A)(X)$ soit régulier pour tout X (th. 18.16) ; comme P et 1_Ω sont analytiques, A est analytique (18.15), et A^{-1} aussi (18.17) ; $A \in C^\omega(R^n)$.

C.Q.F.D.

Corollaire :

Soit V une variété dont le recueil $\mathfrak{R}$ des changeurs de cartes vérifie

$$C^\omega(R^n) \subset \mathfrak{R} \subset C^p(R^n) ;$$

δ

(19.32) Φ une racine d'ordre p définie sur V.

Alors Φ est prolongeable, d'une seule façon, par une racine Φ' d'ordre p pour la structure de variété de classe C^p que V possède canoniquement (th. 19.14).

§ 20 Variétés différentiables

Soit $\mathfrak{R}$ un *recueil classique* d'espace R^n (définition (19.1)), dont les éléments sont différentiables :

$$\mathfrak{R} \subset C^1(R^n)$$

Soit $A \in \mathfrak{R}$, $X \in \mathrm{def}(A)$; on sait que $D(A)(X)$ est un opérateur linéaire appliquant R^n sur R^n (th. 18.3)), que

$$D(A.B)(X) = D(A)(B(X)).D(B)(X) \quad (18.15) ;$$

il est clair que $D(1_\Omega)(X) = 1_{R^n}$ si Ω est un ouvert contenant X.

D est donc une *racine* de l'espace R^n, muni du recueil $\mathfrak{R}$ (définition (12.1)) ; il est clair que, pour tout X, la fibre D_X est égale à R^n (définition (12.2)), et que la structure vectorielle de ces fibres est *invariante* (définition (12.15)).

Soit maintenant V une *variété de classe* $\mathfrak{R}$ (définition (19.6)) ; on peut prolonger la racine D de R^n par une racine de $R^n \cup V$ (th. (16.3)) ; la structure vectorielle invariante se prolonge d'une seule façon à toutes les fibres de la nouvelle racine (19.24) ; cette racine est par ailleurs *canonique* (déf. 19.22)), puisque $D(T)(X) = 1_{R^n}$ si T est une translation de R^n. D'où l'énoncé :

Théorème, définition:

Soit V une variété C^1, de dimension n.

— On peut construire une racine canonique D de la variété V, telle que, pour tout changeur de cartes A, $D(A)(X)$ soit égal à la matrice dérivée de A en X.

(20.1) — Lorsque nous aurons choisi une telle racine D, nous dirons que V possède une structure *différentiable* (ou que V est une *variété différentiable*).

— Les fibres de D possèdent une seule structure invariante d'espace vectoriel ; si M est un point de V, la fibre D_M s'appellera *espace vectoriel tangent* à V en M ; ses éléments : *vecteurs tangents* à V en M.

— Puisque la structure vectorielle des fibres est invariante, les opérateurs réguliers D(A)(X) sont linéaires [que A soit un changeur de carte, une carte, une cocarte ou un glissement de V]; d'où le théorème :

Soit V une variété différentiable, de dimension n.

(20.2) — En tout point M de V, l'espace vectoriel tangent D_M a la dimension n.

— Si F est une *carte* de V, et si X ∈ def (F), l'opérateur D(F)(X) est une *base* (¹) de l'espace vectoriel tangent au point F(X).

Exemples :

Soit E un espace vectoriel de dimension n ; on sait que E possède une structure de variété de classe C^1, caractérisée par le fait que les bases de E sont des glissements.

Soit A un glissement de $R^n \cup E$; ό A est une application différentiable, ou une borne supérieure d'opérateurs différentiables ; nous savons déjà définir D(A)(X), qui vérifie évidemment les axiomes des racines (²), en raison de (18.15) ; donc :

(20.3) Tout espace vectoriel de dimension finie E possède une structure canonique de variété différentiable.

(20.4) — On voit immédiatement, si M ∈ E, que $D_M = E$; l'espace vectoriel tangent à un espace vectoriel (de dimension finie) E coïncide avec E, en tout point.

(20.5) — Ces considérations s'appliquent en particulier au cas $E = R^n$.

(¹) Voir la définition (17.15).

(²) En fait, on prendra pour définition $D(A)(X) = D(A.1_\Omega)(X)$, Ω étant soit E, soit R^n, de façon à ce que def $(A.1_\Omega)$ soit un espace vectoriel, et $A.1_\Omega$ différentiable au sens (18.1).

Définition, théorème :

Soient V et V′ deux variétés C^p ($p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) de dimensions quelconques ; A une application d'un ouvert de V dans V′.

(20.6) — Nous dirons que A est *p fois différentiable* si, pour toutes cartes F et F′ de V et V′, $F'^{-1}.A.F$ est p fois différentiable (au sens (18.1), (18.10)).

— ό Si B est aussi une application p fois différentiable (d'un ouvert de V′ dans une variété C^p, V″), B.A est une application p fois différentiable d'un ouvert de V dans V″.

Remarques :

(20.7) Si V et V′ sont des espaces vectoriels (avec la structure C^p qui résulte du théorème (19.13)), on retrouve la définition (18.10) des opérateurs p fois différentiables ; (20.6) est bien une *généralisation* de (18.10) et de (18.15).

(20.8) — Si V est une variété C^p, on voit que les glissements, cartes et cocartes de V sont (comme ses changeurs de cartes) p fois différentiables.

— Nous avons déjà donné un sens à l'écriture D(A)(X) dans deux cas :

1) quand A est une application différentiable d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel ;

2) quand A est un glissement de $R^n \cup V$, V étant une variété différentiable. Le théorème suivant permet d'englober ces deux cas dans un cas plus général :

Il existe un prolongement du symbole D, et un seul, tel que :

(*a*) D(A)(X) existe si A est une application différentiable d'un ouvert d'une variété différentiable V dans une variété différentiable V′, et si X ∈ def (A) ;

(20.9) (*b*) D(A.B)(X) = D(A)(B(X)).D(B)(X) ;

(*c*) L'opérateur D(A)(X), ainsi défini, applique l'espace vectoriel D_X dans l'espace vectoriel $D_{A(X)}$.

Démonstration :

Unicité. Soient F et F′ deux cartes de V et V′, telles que $X \in \mathrm{val}\,(F)$, $A(X) \in \mathrm{val}\,(F')$.

F, F′ et $F'^{-1}.A.F$ étant différentiables, on doit avoir suivant (*b*) :

$$D(F'^{-1}.A.F)(F^{-1}(X)) = D(F'^{-1})(A(X)).D(A)(X).D(F)(F^{-1}(X))$$

d'où

$$\diamond \qquad D(A)(X) = D(F')(F'^{-1}.A(X)).D(F'^{-1}.A.F)(F^{-1}(X)).D(F^{-1})(X)$$

Existence. ǒ le second membre de $\diamond$ est indépendant du choix des cartes F et F′ ; on peut donc le prendre comme définition de D(A)(X) ; ǒ cette définition conduit bien aux propriétés (*a*), (*b*), (*c*).

C.Q.F.D.

Il résulte évidemment de la formule $\diamond$ que :

(20.10) L'opérateur D(A)(X) est toujours *linéaire*.

(20.11) — Enfin, ǒ les théorèmes (18.16) à (18.20) restent vrais lorsqu'on remplace les espaces vectoriels E, E′ par des variétés différentiables.

Plongements.

Définition, théorème :

(20.12) Soient V et V′ deux variétés différentiables.

— Nous appellerons *plongement* de V dans V′ tout opérateur A, appliquant V (toute entière) dans V′, différentiable, et tel que

(*a*) A est régulier ;

(*b*) D(A)(X) est régulier pour tout X.

— ǒ Si A est un tel plongement, l'ensemble val (A) possède une structure de variété différentiable ayant pour cartes les A.F (pour toute carte F de V) ; cette variété a les mêmes changeurs de cartes que V ; on dira que val (A) est une *variété plongée* dans V′.

Remarques :

(20.13) Pour qu'une variété V soit plongée dans la variété différentiable V′, il est évidemment nécessaire que 1_V soit un *plongement* de V dans V′.

— Pour tout X de V, $D(1_V)(X)$ désigne l'opérateur identique sur l'espace vectoriel tangent à V en X, et une application linéaire de cet espace dans l'espace vectoriel tangent à V′ en X ; donc :

(20.14) Si une variété V est plongée dans une variété différentiable V′, l'espace vectoriel tangent à V en X est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à V′ en X ; la dimension de V est au plus égale à la dimension de V′.

(20.15) — Un exemple de variété plongée est fournie par les *surfaces* classiques, qui sont des variétés de dimension 2 plongées dans l'espace euclidien à 3 dimensions, et possèdent en chaque point un *plan tangent*.

(20.16) — Si V est une variété plongée dans V′, et si V et V′ ont *même dimension*, il résulte immédiatement du théorème (18.16) que V est un *ouvert* de V′ ; inversement, tout ouvert de V′ possède une structure évidente de variété plongée dans V′.

(20.17) — Si on donne une structure de variété différentiable à une partie V d'une variété différentiable V′, et si 1_V n'est pas un plongement, toutes les définitions et notations précédentes deviennent ambiguës : *une application différentiable* F *dans* V *peut ne plus être différentiable comme application dans* V′ ; de même, *l'écriture* D(F)(X) *peut avoir deux significations différentes.*

Théorème de Whitney (¹) ***:***

(20.18) Soit V une variété différentiable séparée et dénombrable à l'infini, de dimension *n*.

(¹) Le lecteur en trouvera une démonstration dans De Rham, « Variétés différentiables » (Hermann éd.).

(20.18) — Il existe un plongement A de V dans R^{2n+1}.

— On peut de plus supposer A *propre* ([1]) et p fois différentiable (si V est C^p) ($p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$).

Théorème :

Soit V une variété différentiable C^p, de dimension n ($p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) ; A une application p fois différentiable de V dans $R^{n'}$ ($n' < n$).

L'ensemble V′ des X de V tels que

(20.19) $$\diamondsuit \qquad [A(X) = 0,\ D(A)(X) \text{ de rang } n']$$

s'il n'est pas vide, possède *une seule structure de variété de classe* C^p telle que $1_{V'}$ soit un plongement p fois différentiable de V′ dans V ; l'espace vectoriel tangent à V′ en un point X est le noyau de D(A)(X) ; la dimension de V′ est $n - n'$.

En particulier, si $[A(X) = 0] \Rightarrow [D(A)(X)$ de rang $n']$, V′ est égal à $A^{-}(0)$.

(20.20) — Soit inversement V′ une variété plongée dans V, de dimension plus petite.

S'il existe un opérateur A tel que V′ soit caractérisé par $\diamondsuit$, nous dirons que $A(X) = 0$ est une *équation* de V′ ; toutes les variétés plongées ne possèdent pas d'équation, mais on peut montrer qu'elles sont des réunions d'ouverts possédant une équation.

Produit de variétés différentiables.

Nous avons déjà vu qu'un produit direct de variétés C^p possède une structure canonique de variété de classe C^p (19.19) ; ce théorème se complète par le suivant :

([1]) Voir la définition des applications *propres* dans BOURBAKI, « Topologie générale », chap. I (Hermann éd.).

Soient $V_1, V_2, \ldots, V_r$ des variétés différentiables.

La variété produit $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_r$ possède une structure de variété *différentiable*, caractérisée par la propriété suivante : Si $F_1, F_2, \ldots, F_r$ sont des cartes respectives de $V_1, V_2, \ldots, V_r$, la carte F de V (voir (19.18)) définie par

(20.21) $$F\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F_1(X_1) \\ F_2(X_2) \\ \ldots\ldots \\ F_r(X_r) \end{bmatrix}$$

a pour dérivée

$$D(F)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} D(F_1)(X_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D(F_2)(X_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & D(F_r)(X_r) \end{bmatrix}$$

Remarques :

(20.22) — On voit que l'espace vectoriel tangent à V au point $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \ldots \\ M_r \end{bmatrix}$ est le *produit direct* des espaces vectoriels tangents aux V_j ès points M_j.

(20.23) — Si on se donne des points M_j pris respectivement dans les V_j, fixes à l'exception de l'un d'entre eux M_k, l'opérateur A :

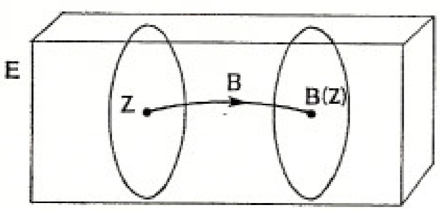
$$A(M_k) = \begin{bmatrix} M_1 \\ \ldots \\ M_k \\ \ldots \\ M_r \end{bmatrix}$$

est un *plongement* de V_k dans V.

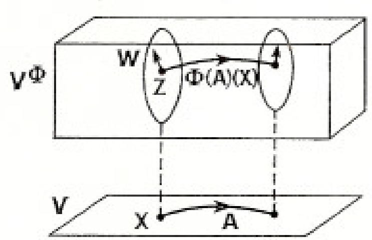
(20.24) — Si les V_j sont des espaces vectoriels, la structure différentiable de V définie par (20.21) coïncide avec celle qui résulte de la structure vectorielle de V.

1) Espaces fibrés à fibres différentiables.

(20.25) — Soit E un espace fibré. Il peut arriver que l'on puisse donner aux fibres de E une *structure invariante de variété* de dimension N [voir (8.5)], en particulier de *variété différentiable* : cela signifie



que chaque fibre de E est une variété (resp. une variété différentiable), et que, pour tout glissement B de E, sa restriction à une fibre (appelée *article*) est un *isomorphisme de variété ;* E possède alors une structure de variété (resp. de variété différentiable) *de dimension* N, pour laquelle les fibres sont des ouverts [de la variété] et les glissements [de la structure fibrée] des glissements [de la variété].



— Considérons en particulier une *racine* Φ d'un espace V. Nous savons que l'ensemble V^Φ des couples $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$ ($Z \in \Phi_X$) est un *espace fibré de base* V (12.7).

(20.26) On dira que Φ est une racine *à fibres différentiables* (resp. C^p) si chaque fibre Φ_X de Φ possède une structure de variété différentiable (resp. de variété C^p) telle que les articles $\Phi(A)(X)$ soient différentiables (resp. p fois différentiables).

(20.27) — Les fibres de V^Φ possèdent alors une *structure invariante* de variété différentiable (resp. de classe C^p) (voir (12.7)).

(20.28) — On obtient notamment une telle structure si les fibres possèdent une *structure vectorielle invariante*, puisque dans ce cas les articles $\Phi(A)(X)$ sont *linéaires*.

Application (voir fig.) :

Soit V un espace, Φ une racine de V, *à fibres différentiables*. L'opérateur ψ défini par

ǒ

(20.29)

$$\psi(A)(X)\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(A)(X)(Z) \\ D(\Phi(A)(X))(Z)(W) \end{pmatrix}$$

est une *racine* de V, dont la fibre ψ_X est l'ensemble des couples d'un point Z de Φ_X et d'un vecteur W tangent à Φ_X en Z ; ψ est *subordonnée* à Φ.

2) Racines différentiables.

Définition, théorème :

Soit V une variété ; Φ une racine canonique de V (19.22).

— Nous dirons que Φ est une *racine p fois différentiable* ($p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) si V et la fibre-type Φ_0 sont chacune une variété C^p de dimensions respectives n et N et si, pour tout changeur de carte A de V, l'opérateur

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \to \Phi(A)(X)(Z)$$

est une application p fois différentiable de def (A) $\times$ Φ_0 dans Φ_0.

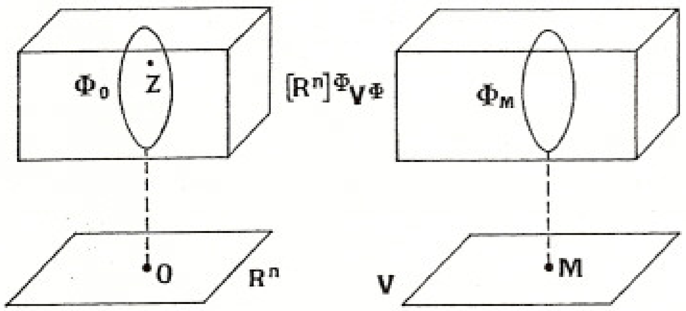
(20.30) — ǒ Alors l'espace fibré $[R^n \cup V]^\Phi$ possède une structure de *variété de classe* C^p, définie par :

(*a*) $[R^n]^\Phi$ est le *produit direct* des variétés (de classe C^p) R^n et Φ_0 (19.19) ;

(*b*) pour tout glissement A de $R^n \cup V$, l'opérateur A^Φ (voir (12.7))

$$A^\Phi\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(X) \\ \Phi(A)(X)(Z) \end{pmatrix}$$

est un *glissement* de $[R^n \cup V]^\Phi$.



— En appliquant les définitions (19.19) et (20.30), on voit que :

(20.31) Si F_j et G_k sont des atlas respectifs de V et Φ_0, on obtient un atlas A_{jk} de V^Φ en posant :

$$A_{jk}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_j(X)\\ \Phi(F_j)(X)(G_k(Y))\end{pmatrix} \quad [X \in R^n,\ Y \in R^N]$$

(20.32) — Il en résulte que V^Φ (ou $[V \cup R^n]^\Phi$) est une variété *de dimension* $n + N$; que la *projection* P de V^Φ sur V, définie (12.7) par $P\begin{pmatrix}X\\Z\end{pmatrix} = X$, est *p fois différentiable.*

— Supposons que nous ayons défini une *structure différentiable* sur Φ_0 (20.1) ; nous savons alors définir les *vecteurs tangents* à Φ_0 en un point Z ; nous savons aussi que l'espace vectoriel tangent à $R^n \times \Phi_0$ en $\begin{pmatrix}X\\Z\end{pmatrix}$ est le *produit direct* de R^n par l'espace vectoriel tangent à Φ_0 en Z (20.22) ; la racine D, ainsi définie sur l'ouvert $[R^n]^\Phi$, peut se prolonger à $[R^n \cup V]^\Phi = [R^n]^\Phi \cup V^\Phi$ (16.3) ; ce qui permet de définir les *vecteurs tangents à* V^Φ.

— Soit M un point de V (voir figure), F une carte de V telle que $F(0) = M$. ♁ L'opérateur A, défini sur Φ_0 par $A(Z) = F^\Phi\begin{pmatrix}0\\Z\end{pmatrix}$ est

un *plongement p fois différentiable* de Φ_0 dans V^Φ (définition 20.12)) ; val (A) [qui est égal à Φ_M] possède donc une structure de *variété* [*de classe* C^p, *de dimension* N] *plongée* dans V^Φ ; ♁ cette structure ne dépend pas du choix de F ; d'où l'énoncé :

Soit Φ une racine p fois différentiable de la variété V.

(20.33) — Les fibres de la variété V^Φ possèdent une *structure invariante de variété de classe* C^p (de dimension N) ; elles admettent un *plongement p fois différentiable* dans V^Φ.

— Un vecteur tangent à V^Φ en un point sera dit *vertical* s'il appartient au sous-espace vectoriel tangent à la fibre qui passe par ce point.

(20.34) — Soit Z un point de $[R^n]^\Phi = R^n \times \Phi_0$. Tout vecteur tangent en Z est. d'une seule façon, la somme d'un vecteur *vertical* (tangent à Φ_0) et d'un vecteur parallèle à R^n (« horizontal ») (th. (20.22)) ; *mais cette décomposition n'est pas invariante par glissement ;* la donnée, en chaque point N de V^Φ, d'un sous-espace supplémentaire des vecteurs verticaux est une opération arbitraire, appelée dans certains cas (1) *connexion infinitésimale ;* le § 28 ci-dessous est consacré à l'étude de l'un de ces cas.

Définition, théorème :

Soit Φ une racine p fois différentiable ($p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) d'une variété V ; f un Φ-champ.

(20.35) — Nous dirons que f est un champ *p fois différentiable* si l'opérateur $X \to \begin{pmatrix}X\\f(X)\end{pmatrix}$ est une application p fois différentiable de def (f) dans V^Φ (munie de la structure C^p définie en (20.30)).

— ♁ Les Φ-champs p fois différentiables forment une *famille invariante* (définition (15.9)).

On en déduit immédiatement l'énoncé suivant :

(1) Voir à ce sujet Lichnerowicz, « Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie » (Dunod).

Soit F_j un atlas de V (hypothèses de (20.35)).

(20.36) Pour qu'un Φ-champ f soit p fois différentiable, il faut et il suffit que ses *images* par les F_j^{-1} (qui appliquent un ouvert de R^n dans la fibre type Φ_0) soient p fois différentiables.

Il est clair que :

(20.37) Les énoncés (20.30, 31, 32, 35, 36) s'étendent au cas $p = 0$, en remplaçant l'expression « 0 fois différentiable » par l'adjectif « continu ».

En particulier :

(20.38) — Pour toute racine continue Φ d'une variété V, on définit la *famille invariante des Φ-champs continus ;* un Φ-champ f est continu si ses images par les F_j^{-1} (F_j étant un atlas de V) sont des applications continues (d'un ouvert de R^n dans la variété Φ_0).

— Soit f un Φ-champ différentiable ; il est clair que l'opérateur

$$X \to \begin{pmatrix} X \\ f(X) \end{pmatrix}$$

qui est différentiable par hypothèse (20.35), est un *plongement* de l'ouvert def (f) dans V^Φ ; donc :

(20.39) Si f est un Φ-champ différentiable, le *graphe* de f est une variété différentiable (de dimension n) *plongée* dans V^Φ ; la *projection* P est un difféomorphisme de ce graphe sur def (f).

Définition, théorème :

Soit f un Φ-champ différentiable ; M un point de def (f).

(20.40) Un autre Φ-champ différentiable f', sera dit *tangent à f en* M si $f(M) = f'(M)$, et si les graphes de f et f' ont *même espace vectoriel* tangent au point $\begin{pmatrix} M \\ f(M) \end{pmatrix}$

— ô Si f et f' sont tangents en M, et si A est un glissement, $A_\Phi(f)$ et $A_\Phi(f')$ sont tangents en A(M).

Corollaire :

— Dans l'ensemble des Φ-champs différentiables définis au point M d'une variété V, la relation

$$[f \sim f'] \Leftrightarrow [f \text{ et } f' \text{ sont tangents en M}]$$

(20.41) est une *équivalence ;* la classe de f suivant $\sim$ s'appelle *élément de contact* de f au point M ; nous la noterons $\text{contact}_M(f)$.

— L'opérateur Θ, défini pour tout glissement A par :

$$\Diamond \qquad \Theta(A)(M)\,(\text{contact}_M(f)) = \text{contact}_{A(M)}(A_\Phi(f))$$

est une *racine* de V, appelée *racine des éléments de contact de Φ-champs.*

(20.42) — La formule $\Diamond$ permet de définir la racine Θ sur $V \cup R^n$; cette racine *n'est pas canonique, mais le devient si on convient d'identifier l'élément de contact de f en un point* X *de* R^n *avec l'élément de contact de* $f.T^{-1}$ *en* T(X) (pour toute translation T de R^n).

2

— Soit G_k un atlas de la fibre-type Φ_0 ; il est clair qu'il existe des opérateurs H_k tels que, pour $X \in R^n$, $f(X) \in \text{val}\,(G_k)$:

(20.43) $$\text{contact}_X(f) = H_k \begin{pmatrix} [G_k^{-1}.f](X) \\ D(G_k^{-1}.f)(X) \end{pmatrix}$$

(grâce à l'identification (20.42)).

Les H_k appliquent un espace vectoriel de dimension $N + nN$ dans la fibre-type Θ_0 de la racine Θ ; ô ils sont réguliers, leurs ensembles de valeurs recouvrent Θ_0, et les $H_j^{-1}.H_k$ sont continus ; ils définissent donc sur Θ_0 une structure de variété de classe C^0, de dimension $[n + 1]N$; pour cette structure, ô la racine Θ est *continue.*

Les H_k sont définis sur l'espace vectoriel des couples $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ ($Y \in R^N$, Z = matrice de nombres à n colonnes et N lignes), espace dont la dimension est $N + nN$; leurs ensembles de valeurs recouvrent la fibre-type Θ_0 de la racine Θ ; ô on a :

(20.44)
$$H_j^{-1}.H_k\begin{pmatrix}Y\\Z\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}L_{jk}(Y)\\D(L_{jk})(Y).Z\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L_{jk} \equiv G_j^{-1}.G_k$$

et

(20.45)
$$\Theta(A)(X)\left(H_k\begin{pmatrix}Y\\Z\end{pmatrix}\right) \equiv H_j\begin{pmatrix}A_{jk}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\\D(A_{jk})\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}.\begin{bmatrix}1_{R^n}\\Z\end{bmatrix}.[D(A)(X)]^{-1}\end{pmatrix}$$

les A_{jk} étant définis par $\Phi(A)(X)(G_k(Y)) \equiv G_j\left(A_{jk}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$

Supposons que la racine Φ soit p fois différentiable; par hypothèse (20.30), les opérateurs A, L_{jk}, A_{jk}, sont p fois différentiables; la formule (20.44) montre que les $H_j^{-1}.H_k$ sont p-1 fois différentiables, donc que l'*atlas* H_k définit sur Θ_0 une structure de variété de classe C^{p-1}; la formule (20.45) montre que $\Theta(A)(X)\left(H_k\begin{pmatrix}Y\\Z\end{pmatrix}\right)$ est une fonction p-1 fois différentiable de $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$, donc de $\begin{pmatrix}X\\H_k\begin{pmatrix}Y\\Z\end{pmatrix}\end{pmatrix}$; par conséquent la définition (20.30) est applicable à la racine Θ, on a démontré le théorème :

(20.46) Soit V une variété de dimension n; Φ une racine p fois différentiable ($p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) de V; N la dimension de sa fibre-type Φ_0; G_k un atlas de Φ_0; Θ la racine des *éléments de contact de Φ-champs*.

1) La fibre-type Θ_0 (convention (20.42)) possède une structure de variété de classe C^{p-1}, de dimension $[n+1]N$, définie par l'atlas H_k (formule (20.43)) [1].

2) Pour cette structure de Θ_0, la racine Θ est p-1 *fois différentiable*.

---

[1] En toute rigueur, les H_k ne forment pas un atlas, puisque leur espace n'est pas $R^{[n+1]N}$; on lève cette difficulté en prenant une base S de cet espace, et en remplaçant les H_k par les $H'_k = H_k.S$.
D'autre part, il faut remarquer que la structure de Θ_0 ne dépend pas du choix de l'atlas G_k; on voit en effet qu'elle reste la même si on remplace G_k par *l'atlas de toutes les cartes de Φ_0*.

§ 21 Champs de vecteurs

(21.1) Soit V une variété différentiable; n sa dimension.

Par définition (20.1), D est une *racine* de V; si $M \in V$, les éléments de D_M s'appellent vecteurs tangents à V en M; un D-champ s'appellera donc aussi *champ de vecteurs.*

— Soit f un champ de vecteurs défini sur un ouvert de V; si A est un glissement de $R^n \cup V$, l'*image* de f par A est donnée par la formule (voir (15.2)) :

(21.2)
$$A_D(f)(A(X)) = D(A)(X)(f(X))$$

$A_D(f)$ est encore un D-champ; en particulier, si A est l'inverse d'une carte F, l'image de f par A (qu'on appellera aussi *image réciproque* du champ par F) sera un D-champ défini sur un ouvert de R^n, donc une application d'un ouvert de R^n dans R^n, qui est la *fibre-type* de D.

L'application des définitions (20.30, 35, 37) conduit à l'énoncé suivant :

Soit V une variété différentiable C^{p+1} ($p = 0, 1, 2, \ldots, \infty$).

— La racine D est p *fois différentiable* sur V.

(21.3) — Les champs de vecteurs p fois différentiables forment une *famille invariante* de champs de vecteurs.

— Pour qu'un D-champ f soit p fois différentiable, il faut et il suffit que ses images réciproques par les cartes d'un atlas de V soient p fois différentiables.

— Bien entendu, dans le cas $p = 0$, il faut dire « continu » au lieu de « 0 fois différentiable »; le cas $p = \infty$ suppose que l'on a posé $\infty + 1 = \infty$.

Dérivations.

Nous appellerons *variables* des lettres X, Y, Z, ..., auxquelles nous nous proposons de *donner des valeurs*, prises dans certains ensembles; nous conviendrons ce qui suit :

(*a*) L'une des lettres (X par exemple), appelée *variable indépendante*, pourra désigner n'importe quel élément d'un certain ensemble E;

(21.4) (*b*) à tout autre variable Y correspondra un opérateur F ($\mathrm{def}(F) \subset E$); chaque fois que X désignera un élément de def(F), Y désignera l'élément F(X); ce qui s'écrira

$$Y = F(X)$$

ou encore

$$F \text{ est l'opérateur } (X \to Y).$$

— Supposons que E soit un ouvert d'une variété différentiable V; soit f un champ de vecteurs défini sur E.

Nous associerons au champ f un symbole (δ par exemple), appelé *dérivation* (ou *symbole de différentiation*), que nous utiliserons de la façon suivante :

(21.5) — On dira qu'une variable Y (parcourant une variété différentiable V') est *différentiable* (resp. *p fois différentiable*) si l'opérateur (X → Y) est lui-même différentiable (resp. p fois différentiable);

— Nous noterons alors δY la variable définie par

$$\diamond \qquad \delta Y = D(F)(X)(f(X))$$

— Pour chaque valeur de la variable indépendante X, Y est un point [de V'], et δY est un *vecteur tangent* [à V' en Y].

— En particulier, la variable indépendante X est différentiable, puisque l'opérateur (X → X), soit 1_E, est différentiable (comme glissement); on a donc

$$\delta X = D(1_E)(X)(f(X)) = 1_{D_X}(f(X)) = f(X),$$

si bien que la formule (21.5 ◇) peut aussi s'écrire

(21.6)
$$\delta Y = D(F)(X)(\delta X)$$

Théorème :

Soit F une *application différentiable* d'un ouvert de V' dans V"; Y une *variable différentiable*, à valeurs dans V'.

— Alors la variable Z telle que

(21.7)
$$Z = F(Y)$$

est *différentiable* et l'on a, pour toute dérivation δ :

$$\diamond \qquad \delta Z = D(F)(Y)(\delta Y)$$

Soit en effet G l'opérateur (X → Y), X étant la variable indépendante; comme on a $Z = F(Y) = [F.G](X)$, on a par définition de δZ :

$$\begin{aligned} \delta Z &= D(F.G)(X)(f(X)) \\ &= D(F)(G(X)(D(G)(X)(f(X))) \quad &&[\text{axiome } (20.9.b)] \\ &= D(F)(Y)(\delta Y) &&\text{par définition de Y et de } \delta Y]. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

— C'est ce théorème qui montre l'utilité pratique des dérivations; la formule (21.7 ◇) contient à la fois la définition de δY (mise sous la forme (21.6)) et la formule de « dérivation des fonctions de fonctions »

$$D(F.G)(X) = D(F)(G(X)).D(G)(X);$$

nous écrirons ce théorème sous la forme abrégée

(21.8) $$\boxed{\delta[\mathrm{F(X)}] = \mathrm{D(F)(X)}(\delta\mathrm{X}) \text{ pour toute dérivation } \delta.}$$

(21.9) — On a coutume de désigner les dérivations par des symboles rappelant graphiquement la lettre d : d, δ, d_1, d_2, d_3, ∂_j, etc.

— Soient X et Y deux variables différentiables, telles que $\mathrm{Y} = \mathrm{F(X)}$; la formule (21.8) montre que l'opérateur linéaire D(F)(X) transforme δX en δY, quelle que soit la dérivation δ ; nous noterons

(21.10) $$\mathrm{D(F)(X)} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{X}}$$

si bien que nous pourrons écrire

(21.11) $$\delta\mathrm{Y} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{X}}(\delta\mathrm{X}) \quad \text{pour tout } \delta ;$$

on en déduit immédiatement les formules

(21.12) $$\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{X}} = \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{Y}} \cdot \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{X}}$$

(si Z est fonction différentiable de Y, et Y fonction différentiable de X), et

(21.13) $$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{Y}} = \left[\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{X}}\right]^{-1}$$

(si les opérateurs $(\mathrm{X} \to \mathrm{Y})$ et $(\mathrm{Y} \to \mathrm{X})$ sont tous deux différentiables).

— Si $\mathrm{Y} = \mathrm{F(X)}$, les deux notations $\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{X}}$ et D(F)(X) sont donc synonymes ; *nous exclurons les notations* $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}}$ *et* D(Y)(X).

Soit V une variété différentiable ; f un D-champ défini sur un ouvert de $\mathrm{R}^n \cup \mathrm{V}$; si X est une variable indépendante qui prend ses valeurs dans def (f), nous avons vu qu'il existe une dérivation δ telle que $\delta\mathrm{X} = f(\mathrm{X})$.

Soit A un glissement de $\mathrm{R}^n \cup \mathrm{V}$; posons $\mathrm{X}^* = \mathrm{A(X)}$; on a $\delta\mathrm{X}^* = \mathrm{D(A)(X)}(\delta\mathrm{X}) = \mathrm{D(A)(X)}(f(\mathrm{X}))$; la comparaison avec (21.2) montre que $\delta\mathrm{X}^* = \mathrm{A_D}(f)(\mathrm{X}^*)$; il *existe donc un champ* f^* *tel que* $\delta\mathrm{X}^* = f^*(\mathrm{X}^*)$, *et* f^* *est l'image de* f *par* A.

— Mais, en général, si Y est une variable différentiable, on ne peut pas affirmer qu'il existe un champ φ tel que $\delta\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{Y})$; par exemple, il peut arriver que deux valeurs différentes de la variable indépendante X donnent la même valeur à Y, et des valeurs différentes à δY.

— Considérons une variable indépendante x qui parcourt l'ensemble R^n ; définissons les dérivations ∂_j par

(21.14) $$\partial_j x = |_j \quad \text{(notations du § 17)}$$

Si Y est une fonction différentiable de x, la formule (18.8) montre immédiatement que $\partial_j\mathrm{Y}$ est le *dérivée partielle* de Y par rapport à la composante numéro j de x (notée ${}^jx$) ; nous employerons systématiquement cette notation $\partial_j\mathrm{Y}$, d'ailleurs classique.

— Soit en particulier F une carte de la variété V ; x parcourant R^n, posons $\mathrm{F}(x) = \mathrm{M}$; on sait que l'opérateur

(21.15) $$\boxed{\mathrm{S} = \mathrm{D(F)(X)} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}}$$

est une *base* de l'espace vectoriel tangent à V en M ; les vecteurs de base sont donnés par la formule

(21.16) $$\boxed{\mathrm{S}_j = \mathrm{S}.|_j = \partial_j\mathrm{M}}$$

Chacun des opérateurs $[\mathrm{M} \to \partial_j\mathrm{M}]$ est donc un *champ de vecteurs* sur l'ouvert val (F).

Indiquons maintenant quelques propriétés usuellles, dont les vérifications sont immédiates :

(21.17) Si la variable X est *constante*, $dX = 0$ pour toute dérivation d.

— Soient d_1 et d_2 deux dérivations définies à partir de la même variable indépendante ; il existe une dérivation, que nous noterons $d_1 + d_2$, telle que $[d_1 + d_2]X = d_1X + d_2X$ pour toute variable différentiable X.

(21.18) — Si a est une *constante réelle*, d une dérivation, il existe une dérivation, que nous noterons ad, telle que $[ad]\,X = a\,[dX]$ pour toute variable différentiable X [1].

— Les dérivations engendrées par les champs de vecteurs définis sur un ouvert E (notations de (21.5)) forment un *espace vectoriel* pour les opérations ci-dessus.

(21.19) — Soit A un *opérateur linéaire variable*, appliquant un espace vectoriel fixe E_1 dans un espace vectoriel fixe E_2 ; si A est une variable différentiable, et si la variable X, à valeurs dans E_1, est différentiable, la variable A(X) est différentiable, et l'on a

$$\delta[A(X)] = [\delta A](X) + A(\delta X) \quad \text{pour toute dérivation } \delta.$$

Par itération, on voit que :

Si A est un opérateur multilinéaire variable, on a pour toute dérivation δ :

(21.20)
$$\delta[A(X_1)(X_2)\ldots(X_p)] = \begin{cases} [\delta A](X_1)(X_2)\ldots(X_p) \\ + A(\delta X_1)(X_2)\ldots(X_p) \\ + \ldots \\ + A(X_1)(X_2)\ldots(X_{p-1})(\delta X_p) \end{cases}$$

On en déduit facilement (voir le § 26), si A est un opérateur linéaire appliquant E_1 dans E_1, que :

(21.21)
$$\delta[\det(A)] = \operatorname{Tr}(\operatorname{Adj}(A).\delta A)$$

Adj (A) étant l'*opérateur adjoint* de A, qui vérifie notamment

(21.22)
$$A^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}(A)}{\det(A)} \quad \text{si } \det(A) \text{ n'est pas nul}$$

[1] Cette définition s'applique encore lorsque a est *variable*.

on en déduit la formule importante

(21.23)
$$\frac{\delta[\det(A)]}{\det(A)} = \operatorname{Tr}(A^{-1}.\delta A)$$

Signalons aussi la formule

(21.24)
$$\delta[A^{-1}] = -A^{-1}.[\delta A].A^{-1}$$

valable dans les mêmes conditions.

Indiquons pour finir que la définition (20.21) de la structure différentiable d'un produit direct peut s'écrire

(21.25)
$$\delta\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \ldots \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ \ldots \\ \delta M_r \end{bmatrix}$$

dès que les variables M_j sont différentiables.

Crochets de Lie

Considérons une variable indépendante X qui parcourt un espace vectoriel de dimension finie E ; deux dérivations d et δ.

Si le champ f tel que $\delta X = f(X)$ est différentiable, nous dirons que δ est une *dérivation différentiable ;* comme la variable δX prend ses valeurs dans E, on pourra calculer l'expression

(21.26)
$$d\delta X = D(f)(X)(dX) = \frac{\partial[\delta X]}{\partial X}(dX)$$

Si F est une application deux fois différentiable de E dans un autre espace vectoriel, on trouve immédiatement par application de (21.19) :

(21.27)
$$d\delta[F(X)] = d[D(F)(X)(\delta X)] = D^2(F)(X)(dX)(\delta X) + D(F)(X)(d\delta X)$$

la présence du premier terme montre que $d\delta$ *n'est pas une dérivation* ; mais comme $D^2(F)(X)$ est *symétrique* (th. (18.12)), on a, si d est aussi différentiable :

(21.28) $$d\delta[F(X)] - \delta d[F(X)] = D(F)(X)(d\delta X - \delta dX);$$

on en déduit immédiatement le théorème :

Soit V une variété différentiable C^{p+1}, de dimension n ($p = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) ; E un ouvert de $R^n \cup V$; f et g deux champs de vecteurs p fois différentiables sur E (déf. (21.3)).

1) Il existe un champ de vecteur de E, appelé *crochet de Lie* de f et g, noté $[f, g]_L$, $[p\text{-}1]$ fois différentiable, caractérisé par les identités

$$\begin{cases} [f, g]_L(X) = D(g)(X)(f(X)) - D(f)(X)(g(X)) \quad \text{si} \quad X \in R^n ; \\ [A_D(f), A_D(g)]_L = A_D([f, g]_L) \ \text{pour tout glissement A de } R^n \cup V. \end{cases}$$

2) L'expression $[f, g]_L$ est *antisymétrique* et *bilinéaire* en f et g :

$$[g, f]_L = -[f, g]_L$$

(21.29) $[af_1 + bf_2, g]_L = a[f_1, g]_L + b[f_2, g]_L$ pour a et b réels constants ;

3) Si f, g, h sont des champs deux fois différentiables, on a l'*identité de Jacobi*

$$[f, [g, h]_L]_L + [g, [h, f]_L]_L + [h, [f, g]_L]_L = 0.$$

4) Si X est une variable indépendante qui parcourt E, et si on appelle d et δ les dérivations telles que $dX = f(X)$, $\delta X = g(X)$, nous appellerons aussi *crochet de Lie* de d et δ, et nous noterons aussi $[d, \delta]_L$ la dérivation telle que

$$[d, \delta]_L X = [f, g]_L(X);$$

si Y est une fonction différentiable de X, *à valeurs dans un espace vectoriel fixe*, on a

◇ $$[d, \delta]_L Y = d\delta Y - \delta dY$$

Remarques :

(21.30) — Dans le cas $p = \infty$, on voit que le crochet de Lie de deux champs infiniment différentiables est encore un champ infiniment différentiable ; ces champs forment donc une *algèbre de Lie*.

(21.31) — La formule (21.29, ◇) ne peut pas s'appliquer sans précautions si Y parcourt une variété différentiable V′, parce que les expressions $d\delta Y$ et δdY peuvent ne pas avoir de sens ; elle est vraie par exemple si $1_{V'}$ est un plongement deux fois différentiable de V′ dans un espace vectoriel ; mais $d\delta Y$ et δdY pourront ne pas être tangents à V′.

— Avec les notations de (21.29, 4°), les formules précédentes peuvent s'écrire :

$$[\delta, d]_L = -[d, \delta]_L$$

(21.32) $[ad_1 + bd_2, \delta]_L = a[d_1, \delta]_L + b[d_2, \delta]_L$ pour a et b réels constants ;

$$[d_1, [d_2, d_3]_L]_L + [d_2, [d_3, d_1]_L]_L + [d_3, [d_1, d_2]_L]_L = 0$$

δ, d, d_1, d_2, d_3 désignant des dérivations suffisamment différentiables.

(21.33) — Nous dirons que deux dérivations d et δ *commutent* si leur crochet de Lie est nul ; c'est le cas notamment pour les dérivations ∂_j définies en (21, 14) ; en effet, on a $\partial_j \partial_k x = \partial_j|_k = 0$, et de même $\partial_k \partial_j x = 0$, d'où $[\partial_j, \partial_k]_L x = 0$, et $[\partial_j, \partial_k]_L = 0$, puisque x est la variable indépendante.

§ 22 Équations différentielles

Nous admettrons le ***théorème d'Arzelà*** [1] :

Soit V une variété différentiable de dimension n ; f un champ de vecteurs défini sur un ouvert de $R^n \cup V$, et *continu* (21.3).

(22.1) Pour tout point X_0 de def (f), il existe un opérateur F tel que :

[1] Voir VALIRON, « Equations fonctionnelles - Applications » (Masson éd.).

(22.1) ◇
$$\begin{cases} (a)\ \text{def (F) est un intervalle ouvert réel I, contenant } 0\,; \\ (b)\ \text{F est une application différentiable de I dans def } (f), \\ \quad \text{telle que } F'(t)[\,= D(F)(t)] = f(F(t))\,; \\ (c)\ F(0) = X_0. \end{cases}$$

En d'autres termes, si f est continu, l'*équation différentielle*

(22.2)
$$\frac{dX}{dt} = f(X)$$

possède au moins une solution $X = F(t)$, prenant pour $t = 0$ la valeur initiale donnée X_0.

— On peut ramener à cette forme (22.2) d'autres types d'équations ou de systèmes différentiels ; par exemple, si g_u est un champ de vecteurs de la variété V dépendant du paramètre réel u, on peut étudier l'équation

(22.3)
$$\frac{dY}{du} = g_u(Y)$$

en posant

(22.4)
$$X \equiv \begin{bmatrix} Y \\ u \end{bmatrix} \qquad f(X) = \begin{bmatrix} g_u(Y) \\ 1 \end{bmatrix}$$

en effet, l'équation $\dfrac{dX}{dt} = f(X)$ s'écrit

$$\frac{dY}{du} = g_u(Y) \qquad \frac{dt}{du} = 1$$

le théorème d'Arzelà montre qu'elle aura une solution, avec la condition initiale

(22.5)
$$Y = Y_0 \quad \text{pour} \quad u = u_0$$

si f est un *champ continu sur la variété produit* V × R.

— De même, une *équation différentielle du second ordre* classique

(22.6)
$$y'' = \varphi(x, y, y')$$

se ramène à la forme (22.2) en posant

(22.7)
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix};$$

elle admet donc, si φ est continue, une solution vérifiant la condition initiale $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = z_0$.

Définition :

(22.8) Nous dirons qu'un champ de vecteurs continu f est un *champ de Cauchy* si, pour tout X_0 dans def (f), toutes les solutions F de (22.1 ◇) sont *compatibles*.

— ỏ Il revient au même de dire que, si deux solutions F_1 et F_2 sont définies sur un même intervalle I, elles coïncident.

— Dans ces conditions, ỏ la borne supérieure des solutions de (22.1, ◇) est encore une solution (définie éventuellement sur un intervalle I *infini*) ; on l'appelle *solution maximale ;* désignons-la provisoirement par la notation

$$F(t) = \psi(t)(f)(X_0).$$

Soit a une constante réelle ; ỏ le système (22.1, ◇) est encore vérifié si on remplace f par $f^* = af$ et F par $F^* = F.a^{-1}$; ỏ f^* est encore un champ de Cauchy ; on a donc $\psi(at)(f) \equiv \psi(t)(af)$; si bien que si l'on pose $\exp = \psi(1)$, on peut énoncer :

Il existe un opérateur, noté « exp », tel que, pour tout champ de Cauchy f, la solution maximale de l'équation différentielle

(22.9)
$$\frac{dX}{dt} = f(X)$$

prenant, pour $t = 0$, la valeur initiale X_0, s'écrive

$$X = \exp(tf)(X_0).$$

Exemple :

(22.10) Dans le cas $V = R$, $f = 1$, l'équation différentielle $\dfrac{dX}{dt} = f(X)$, qui s'écrit $\dfrac{dx}{dt} = 1(x) = x$ (17.7) admet la seule solution $x = e^t x_0$; l'opérateur exp défini en (22.9) *prolonge bien l'exponentielle réelle ; nous écrirons aussi bien* e^{tf} *que* exp (tf).

— En écrivant que $F(t) = e^{tf}(X_0)$ est solution de (22.1, $\Diamond$), il vient :

(22.11)
$$\frac{\partial}{\partial t}[e^{tf}(X_0)] = f(e^{tf}(X_0))$$
$$e^{0f} = 1_{\mathrm{def}\,(f)}$$

— Soit a une constante réelle, prise dans l'intervalle de définition de F $[F(t) = e^{tf}(X_0)]$. Posons $G(t) = F(t + a)$; on a alors $G'(t) = F'(t + a) = f(G(t))$; G est donc une solution du système (22.1, $\Diamond$), dans lequel on remplace X_0 par $G(0) = F(a) = e^{af}(X_0)$; on a donc, par définition d'une borne supérieure, $G(t) = e^{tf}(e^{af}(X_0))$.

On peut faire $t = -a$ dans cette formule ; il vient $X_0 = e^{-af}(e^{af}(X_0))$; d'où le théorème :

(22.12)
$$e^{tf} \text{ est régulier, } [e^{tf}]^{-1} = e^{-tf} ;$$

en prenant au contraire t du signe de a, on trouve

(22.13)
$$e^{[t+a]f} = e^{tf}.e^{af} \quad (\text{pour } t \text{ et } a \text{ réels, } at \geqslant 0) ;$$

si a et t ne sont pas de même signe, on peut seulement écrire

(22.14)
$$e^{tf}.e^{af} < e^{[t+a]f}$$

le signe $<$ indiquant, bien entendu, le prolongement d'un opérateur (1.10).

— Soit A un glissement de $R^n \cup V$; f un champ de Cauchy.

Si la variable X, fonction de t, est solution de l'équation différentielle $\dfrac{dX}{dt} = f(X)$, on vérifie immédiatement que la variable $X^* = A(X)$ est solution de $\dfrac{dX^*}{dt} = f^*(X^*)$, f^* étant l'image $A_D(f)$ du champ f par A (21.2) ; $\Diamond$ d'où l'énoncé :

(22.15) — La famille des champs de Cauchy sur $R^n \cup V$ est une *famille invariante ;* si A est un glissement (de $R^n \cup V$), f un champ de Cauchy, on a
$$e^{tA_D(f)} = A.e^{tf \cdot 1_{\det(A)}}.A^{-1} < A.e^{tf}.A^{-1}$$

Exemples de champs de Cauchy :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On démontre le théorème de *Cauchy-Lipschitz* (1) :

(22.16) Toute application *lipschitzienne* (déf. (19.3)) d'un ouvert de E dans E est un *champ de Cauchy.*

(22.17) — Il existe d'autres champs de Cauchy que les champs lipschitziens ; ceci résulte d'ailleurs du fait que la famille des champs lipschitziens de E n'est pas invariante pour la structure C^1 de E.

Z

— Soit A une application continue d'un intervalle ouvert I (fini ou infini) dans l'espace vectoriel des opérateurs linéaires de E à E ; considérons l'*équation différentielle linéaire*

(22.18)
$$\frac{dY}{du} = A(u).Y$$

Suivant la méthode (22.3), on peut poser

(22.19)
$$X = \begin{bmatrix} Y \\ u \end{bmatrix} \qquad f(X) = \begin{bmatrix} A(u).Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) Voir VALIRON [réf. p. 159].

f est un champ continu sur la variété $E \times I$, ce qui montre l'existence d'une solution du système $\dfrac{dX}{dt} = f(X)$, soit

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dY}{du} = A(u).Y \\[2mm] \dfrac{du}{dt} = 1 \end{array}\right.$$

prenant, pour $t = 0$, toute valeur $X_0 = \begin{bmatrix} Y_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$ de $E \times I$; on a évidemment $u = u_0 + t$; l'équation (22.18) admet donc une solution, $Y = F(u)$, telle que $F(u_0) = Y_0$, définie dans un intervalle $I_0 \,[u_0 \in I_0 \subset I]$; *cette solution est unique* car ò la différence $\Phi(u)$ de deux solutions vérifie l'identité

$$\Phi(u) = \int_{u_0}^{u} A(v)\Phi(v)dv$$

d'où $\Phi = 0$ par de classiques majorations d'intégrales.

f est donc un *champ de Cauchy;* on peut écrire $\begin{bmatrix} Y \\ u \end{bmatrix} = e^{tf}\begin{bmatrix} Y_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$, d'où l'on tire (puisque $t = u - u_0$) la solution de (22.18) sous la forme

(22.20) $$Y = B(u, u_0)(Y_0)$$

ò $B(u, u_0)$ *est un opérateur linéaire, défini pour tout couple* u, u_0 *de nombres de* I.

Les propriétés de l'exponentielle se transcrivent sous la forme :

(22.21) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial u}[B(u, u_0)] = A(u).B(u, u_0) \\[2mm] B(u_0, u_0) = 1_E \\[1mm] B(u_0, u) = [B(u, u_0)]^{-1} \\[1mm] B(u_1, u_2).B(u_2, u_3) = B(u_1, u_3) \end{array}\right.$$

Il résulte de (21.23) que, le déterminant $w = \det(B(u, u_0))$, qui ne s'annule pas quand u parcourt I, vérifie l'équation différentielle

(22.22) $$\frac{dw}{du} = \mathrm{Tr}\,(A(u)).w$$

ce qui permet de l'exprimer par une quadrature.

— Indiquons aussi que l'équation différentielle « non homogène »

(22.23) $$\frac{dY}{du} = A(u).Y + F(u)$$

(F = application continue de I dans E) se résout par « variation des constantes » en faisant le changement de variable

$$Y = B(u, u_0).Z\,;$$

ò Z vérifie

$$\frac{dZ}{du} = B(u_0, u).F(u)$$

d'où la solution de (22.23) :

(22.24) $$Y = B(u, u_0).Y_0 + \int_{v=u_0}^{v=u} B(u, v).F(v)\,dv$$

Cas des champs différentiables :

Nous admettrons le théorème classique (¹) :

(22.25) Soit V une variété différentiable, séparée et C^{p+1} ($p = 1, 2, 3, \ldots \infty$); f un champ de vecteurs *p fois différentiable* (21,3) sur un ouvert de $R^n \cup V$.

— Alors f est un *champ de Cauchy; e^{tf} est p fois différentiable;* la variable $e^{tf}(X_0)$ est p fois différentiable en $\begin{pmatrix} X_0 \\ t \end{pmatrix}$.

— Dans le cas où V est un espace vectoriel, on a le développement limité :

◇ $$D(e^{tf})(X_0) = 1_V + t\,D(f)(X_0) + 0(t)$$

(¹) Voir Valiron [réf. p. 159].

Remarques :

— En fait, $X = e^{tf}(X_0)$ est $p+1$ fois différentiable en t; dans le cas où V est un espace vectoriel, on calcule aisément ses dérivées successives :

(22.26)
$$\frac{dX}{dt} = f(X) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = D(f)(X)(f(X))$$
$$\frac{d^3X}{dt^3} = D^2(f)(X)(f(X))(f(X)) + [D(f)(X)]^2(f(X))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ces formules peuvent s'employer pour le calcul numérique des solutions.

— L'identité $e^{tf}.e^{af} = e^{[t+a]f}$, jointe à (22.25, $\diamond$), donne immédiatement la formule (valable si V est un espace vectoriel)

(22.27)
$$\frac{d}{dt}[D(e^{tf})(X_0)] = D(f)(e^{tf}(X_0)).D(e^{tf})(X_0)$$

— Si on connaît une solution $X = e^{tf}(X_0)$ de l'équation différentielle $\frac{dX}{dt} = f(X)$, (22.27) est une *équation différentielle linéaire* en $D(e^{tf})(X_0)$; sa résolution permet donc le calcul de cette dérivée (puisque l'on connaît sa valeur initiale 1_V pour $t = 0$).

Application :

Equation dépendant d'un paramètre.

(22.28) Soit f_u un champ de vecteurs défini sur un ouvert E d'une variété, dépendant du paramètre réel u, et tel que que $f_u(X)$ soit p fois différentiable en $\begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$.

Alors $e^{tf_u}(X_0)$ est p fois différentiable en $\begin{bmatrix} X_0 \\ u \\ t \end{bmatrix}$.

— Il suffit en effet de poser $\xi = \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix}$, $\varphi(\xi) = \begin{bmatrix} f_u(X) \\ 0 \end{bmatrix}$ et d'appliquer le théorème (22.25) à $e^{t\varphi}$.

C.Q.F.D.

Posons $\xi_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$, $X = e^{tf_u}(X_0)$, $V = f_u(X)$; on a

$$\xi = \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} = e^{t\varphi}(\xi_0), \qquad u = u_0.$$

Prenons ξ_0 comme variable indépendante ; donnons-nous un vecteur fixe $\delta\xi_0 = \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta u \end{bmatrix}$, et supposons que X prenne ses valeurs dans un espace vectoriel (on peut toujours se ramener à ce cas en prenant une carte). La formule (22.27) nous donne :

$$\frac{d}{dt}[\delta\xi] = \frac{d}{dt}[D(e^{t\varphi})(\xi_0)(\delta\xi_0)] = D(\varphi)(\xi)(\delta\xi)$$

d'où

(22.29)
$$\frac{d}{dt}[\delta X] = \frac{\partial V}{\partial X}\delta X + \frac{\partial V}{\partial u}\delta u$$

Si l'on connait une solution de l'équation initiale $\frac{dX}{dt} = f_u(X)$, (22.29) est une *équation linéaire non homogène* en δX (voir (22.23)), appelée *équation aux variations* de l'équation initiale, ou encore équation *linéarisée*.

En remarquant que le second membre de (22.29) est égal à δV, et que l'on peut poser $V = \frac{dX}{dt}$, cette équation prend la forme mnémotechnique

(22.30)
$$\frac{d}{dt}[\delta X] = \delta\left[\frac{dX}{dt}\right]$$

Corollaire :

Soit V une variété différentiable séparée C^2 ; f et g deux champs de vecteurs différentiables, définis sur un même ouvert de $R^n \cup V$, *dont le crochet de Lie est nul.*

Alors :

(22.31) (*a*) $D(e^{tf})(X)(g(X)) \equiv g(e^{tf}(X))$

(*b*) $D(e^{tg})(X)(f(X)) \equiv f(e^{tg}(X))$

(*c*) Si $e^{tf}.e^{ug}(X)$ existe dans un rectangle ($|t| < a$, $|u| < b$), on a dans ce rectangle

$$[e^{tf}.e^{ug}](X) \equiv [e^{ug}.e^{tf}](X) \equiv e^{tf+ug}(X)$$

Démonstration :

(*a*) Supposons d'abord que f et g soient définis dans un ouvert de R^n ; Choisissons un point fixe X_0 ; posons $\delta X_0 = g(X_0)$, $X = e^{tf}(X_0)$.

La formule (22.30) donne

$$\frac{d}{dt}[\delta X] = \delta[f(X)] = D(f)(X)(\delta X) ;$$

on a d'autre part $\dfrac{d}{dt}[g(X)] = D(g)(X)\left[\dfrac{dX}{dt}\right] = D(g)(X)(f(X))$

$$= D(f)(X)(g(X)) \qquad (\text{puisque } [f, g]_L = 0) ;$$

on voit que δX et $g(X)$ sont deux solutions de la même équation *linéaire*, avec la même valeur initiale $g(X_0)$ pour $t = 0$; le théorème d'unicité ci-dessus donne bien :

$$g(e^{tf}(X_0)) = g(X) = \delta X = \delta[e^{tf}(X_0)] = D(e^{tf})(X_0)(g(X_0)).$$

— La formule (*a*) s'établit ensuite pour un ouvert qui est l'ensemble de valeurs d'une carte, en utilisant le théorème (22.15) ; enfin on établit le cas général en recouvrant l'arc parcouru par $e^{tf}(X)$ (lorsque t parcourt un intervalle compact) par un nombre fini d'ensembles de valeurs de cartes, et en utilisant le théorème d'addition de l'exponentielle (22.13).

— (*b*) se déduit de (*a*) par échange de f et g.

— (*c*) Dans le rectangle indiqué, on a évidemment

$$\frac{d}{du}[e^{tf}.e^{ug}(X)] \equiv D(e^{tf})(e^{ug}(X))(g(e^{ug}(X))) \equiv g(e^{tf}.e^{ug}(X))$$

(formule (*a*)) ; la variable $\Phi(u) \equiv e^{tf}.e^{ug}(X)$ vérifie donc l'équation différentielle $\Phi'(u) = g(\Phi(u))$; d'où $\Phi(u) \equiv e^{ug}(\Phi(0)) \equiv e^{ug}.e^{tf}(X)$.

Posons enfin, t et u étant fixes dans le rectangle, $\psi(s) = e^{stf}(e^{sug}(X))$; d'après la différentiabilité de $e^{zf}(Y)$ par rapport au couple $\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}$ (th. (22.25)), il vient $\psi'(s) = tf(e^{stf}.e^{sug}(X)) + D(e^{stf})(e^{sug}(X))(ug(e^{sug}(X))) = [tf + ug](\psi(s))$ d'après (*a*) ; d'où $\psi(1) = e^{tf+ug}(\psi(0))$.

C.Q.F.D.

Remarques :

(22.32) — Quel que soit X dans l'ensemble de définition de f et g, $\dot{\delta}$ il existe un rectangle où $e^{tf}.e^{ug}(X)$ existe.

(22.33) — Si les champs f et g sont différentiables dans un ouvert, et si e^{tf} et e^{ug} commutent, $\dot{\delta}$ le crochet $[f, g]_L$ est nul.

(22.34) — Appliquons les résultats précédents au cas des champs *linéaires* ; on obtient le formulaire suivant :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; A et B des opérateurs linéaires appliquant E dans E.

$e^{A} = \exp(A)$ est un opérateur linéaire, défini par

(22.35) $$\left[\frac{dX}{dt} = A.X\right] \Leftrightarrow [X = e^{tA}.X_0];$$

on a :

(22.36) $$e^{-A} = [e^{A}]^{-1}$$

(22.37) $$[\text{B régulier}] \Rightarrow [e^{B.A.B^{-1}} = B.e^{A}.B^{-1}]$$

(22.38) $$[A, B]_L = B.A - A.B \quad (^1)$$

(22.39) $$[A.B = B.A] \Rightarrow [A.e^{B} = e^{B}.A,\ e^{A}.e^{B} = e^{B}.e^{A} = e^{A+B}]$$

(22.40) $$\frac{d}{dt}[e^{tA}] = A.e^{tA} = e^{tA}.A$$

(22.41) $$\text{dét}\,(e^{A}) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$$

(22.42) $$\frac{d}{dt}[e^{tA}.B.e^{-tA}] = [A,\ e^{tA}.B.e^{-tA}]_- = e^{tA}.[A, B]_-.e^{-tA}$$

Indiquons deux expressions de e^{A} ; le développement en série entière :

(22.43) $$e^{A} = 1_E + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

toujours convergent,

et l'*expression spectrale :*

(22.44) $$e^{A} = \sum_{\alpha} e^{\alpha}\,\Pi_{\alpha}\left[1_E + N_{\alpha} + \frac{N_{\alpha}^2}{2} + \ldots + \frac{N_{\alpha}^{k_{\alpha}}}{k_{\alpha}!}\right]$$

(1) On voit que le crochet de Lie $[A, B]_L$ est *opposé du commutateur*

$$[A, B]_- = A.B - B.A.$$

où les α sont les *valeurs propres* de A (pôles de la fraction rationnelle $[s1_E - A]^{-1}$), les Π_{α} *les projecteurs propres* (1) (résidus correspondants), les N_{α} les *nilpotents propres* $[N_{\alpha} = \Pi_{\alpha}[A - \alpha 1_E]$; il existe un entier k_{α} tel que $N_{\alpha}^{k_{\alpha}+1} = 0]$; pour plus de détails, voir Souriau (réf. p. 117).

— Il résulte de (22.28) que l'opérateur exp (restreint aux opérateurs linéaires) est *différentiable ;* on obtient sa dérivée (cf. (22.30)) en différentiant l'équation $\frac{dX}{dt} = A.X$, d'où

$$\frac{d}{dt}[\delta X] = A.\delta X + \delta A.X;$$

en résolvant cette équation différentielle linéaire non homogène en δX, par la formule (22.24), il vient :

(22.45) $$\delta[e^{A}] = \int_0^1 e^{[1-t]A}.\delta A.e^{tA}\,dt$$

— Les formules précédentes permettent aisément d'étudier les *groupes de Lie* d'opérateurs linéaires ; on peut aussi utiliser le *logarithme* d'un opérateur linéaire, défini par le développement en série

(22.46) $$\mathrm{Log}\,(1 + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \ldots + [-1]^{n+1}\frac{A^n}{n} + \ldots$$

convergent quand les valeurs propres de A sont dans le cercle $|\alpha| < 1$, et qui vérifie

(22.47) $$e^{\mathrm{Log}\,(1+A)} \equiv 1 + A$$

et la série de *Campbell-Haussdorf :*

(22.48) $$\mathrm{Log}\,(e^{A}.e^{B}) = A + B + \frac{1}{2}[A, B]_- + \frac{1}{12}[A - B, [A, B]_-]_- + \ldots$$

dont tous les termes sont des combinaisons linéaires de commutateurs itérés de A et B, et qui converge lorsque A et B appartiennent à un certain voisinage de 0.

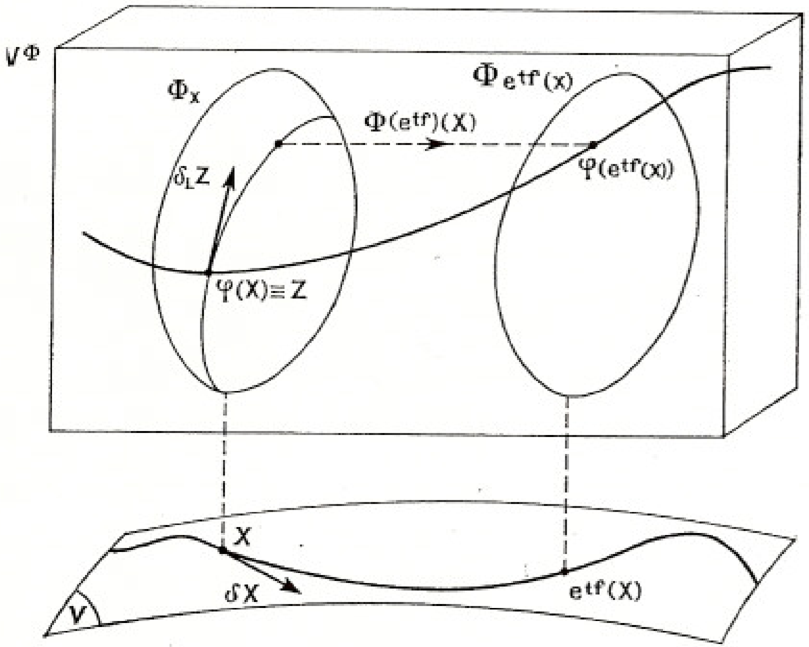
(1) On appelle *projecteur* tout opérateur linéaire égal à son carré.

variable Z par $\delta X \equiv f(X)$, $Z = \varphi(X)$) ; nous pourrons donc écrire :

(23.8)
$$[f, \varphi]_L(X) \equiv \delta_L[\varphi(X)] = \frac{d}{dt}[e^{-tf}{}_\Phi(\varphi)(X)]_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}[\Phi(e^{tf})(X)^{-1}(\varphi(e^{tf}(X)))]_{t=0}$$

(23.9) — Les deux notations $[f, \varphi]_L(X)$, $\delta_L[\varphi(X)]$ supposent que l'on sait Z bien quelle est la racine Φ ; dans les cas où φ pourrait être à la fois un Φ champ et un ψ champ [Φ et ψ étant deux racines différentes], il y aura lieu de préciser Φ par une explication.

(23.10) — La deuxième formule (23.8) conduit à la construction indiquée sur la figure :



on voit que $\delta_L Z = [f, \varphi]_L(X)$ est un *vecteur tangent à la fibre* Φ_X, au point $Z = \varphi(X)$.

Exemple :

(23.11) Si Φ est une racine *triviale*, et φ un Φ-champ *différentiable*, la dérivée de Lie de φ existe pour tout glissement infinitésimal f, et l'on a
$$[f, \varphi]_L(X) = D(\varphi)(X)(f(X))$$
ou
$$\delta_L(Z) \equiv \delta Z \qquad [\delta X \equiv f(X) \quad , \quad Z \equiv \varphi(X)]$$

— En effet, par définition d'une racine triviale (12.4), $\Phi(e^{tf})(X)$ est l'opérateur identique sur la fibre ; d'où,
$$\frac{d}{dt}[e^{-tf}{}_\Phi(\varphi)(X)] = \frac{d}{dt}\varphi(e^{tf}(X)) = D(\varphi)(e^{tf}(X))(f(e^{tf}(X)))$$

C.Q.F.D.

— Transformons la figure par un glissement A de V : $f^* = A_D(f)$ est un glissement infinitésimal (23.2) ; si l'on pose aussi $X^* \equiv A(X)$, $\varphi^* = A_\Phi(\varphi)$, on a, pour t assez petit :
$$\begin{aligned} e^{-tf^*}{}_\Phi(\varphi^*)(X^*) &= [e^{-tA_D(f)}]_\Phi . A_\Phi(\varphi)(A(X)) \\ &= [e^{-tA_D(f)} . A]_\Phi(\varphi)(A(X)) && [15.6] \\ &= [A . e^{-tf}]_\Phi(\varphi)(A(X)) && [22.15] \\ &= A_\Phi(e^{-tf}{}_\Phi(\varphi))(A(X)) \end{aligned}$$
d'où
$$[e^{-tf^*}]_\Phi(\varphi^*)(X^*) = \Phi(A)(X)(e^{-tf}{}_\Phi(\varphi)(X)) \qquad [15.2] ;$$

par définition d'une racine à fibres différentiables [20.26], $\Phi(A)(X)$ est différentiable ; on peut donc dériver cette formule par rapport à t ; en faisant $t = 0$, il vient :

(23.12)
$$[A_D(f),\ A_\Phi(\varphi)]_L(A(X)) = D(\Phi(A)(X))(\varphi(X))([f, \varphi]_L(X))$$

La formule évidente :

$$e^{-(t+a)f}{}_{\Phi}(\varphi)(X) = e^{-tf}{}_{\Phi}(e^{-af}{}_{\Phi}(\varphi))(X)$$

donne, en dérivant par rapport à t, en faisant $t = 0$, et en remplaçant finalement a par t :

(23.13)
$$\frac{d}{dt}[e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X)] = [f, e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)]_L(X)$$

— Le second membre de cette formule peut encore s'écrire

$$[e^{-tf}{}_D(f),\ e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)]_L(e^{-tf}(Y))$$

en posant $Y = e^{tf}(X)$ et en remarquant que $e^{-tf}{}_D(f) < f$; en appliquant la formule (23.12), avec $A = e^{-tf}$, il vient :

(23.14)
$$\frac{d}{dt}[e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X)] = D(\Phi(e^{tf})(X)^{-1})(\varphi(e^{tf}(X)))([f, \varphi]_L(e^{tf}(X)))$$

Corollaire :

(23.15) Supposons que $\operatorname{def}(f) \subset \operatorname{def}(\varphi)$ (notations de (23.6)).

— Pour que les glissements e^{tf} *invarient* tous le champ φ, il est nécessaire et suffisant que $[f, \varphi]_L(X) \equiv 0$.

— On dira alors que le *glissement infinitésimal* f *invarie* φ, ou que $f(X)$ est un *vecteur de Killing* de φ, ou encore que $\varphi(X)$ *est un invariant du champ* f.

En effet, pour que e^{-tf} invarie φ, il faut et il suffit que $e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi) < \varphi$ [définition (15.12)] ; on a donc $\dfrac{d}{dt}[e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X)] = 0$, d'où, en faisant $t = 0$, $[f, \varphi]_L(X) = 0$.

— Réciproquement, si $[f, \varphi]_L(X)$ est nul pour tout X, la formule (23.14) montre que $\dfrac{d}{dt}[e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X)]$ est nul, (pour toutes les valeurs de t telles que $e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X)$ existent, et qui constituent un intervalle ouvert contenant 0); on a donc $e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X) \equiv \varphi(X)$ si le premier membre existe, $e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi) < \varphi$. C.Q.F.D.

Théorème :

(23.16) Soit F_X un *homomorphisme* différentiable de la racine Φ à une racine Ψ ; φ un Φ-champ ; f un glissement infinitésimal.

Alors le Ψ-champ ψ, image de φ par l'homomorphisme F_X :

$$\psi(X) \equiv F_X(\varphi(X))$$

vérifie

$$[f, \psi]_L(X) = D(F_X)(\varphi(X))([f, \varphi]_L(X))$$

Ceci résulte immédiatement de la formule $e^{-tf}{}_{\Psi}(\psi)(X) \equiv F_X(e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X))$, elle-même conséquence triviale de la définition (13.1) des homomorphismes de racines.

C.Q.F.D.

— Ce théorème peut aussi s'écrire :

(23.17) $\delta_L[F_X(Z)] \equiv D(F_X)(Z)(\delta_L Z)$ si F_X est un homomorphisme.

— Considérons deux racines à fibres différentiables, Φ_1 et Φ_2; le produit direct Φ de ces racines (définition (16.18)) a pour fibre en un point X le produit direct des fibres de Φ_1 et Φ_2; ce produit direct possède une structure différentiable (20.21), telle que

(23.18)
$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \end{pmatrix} \quad \text{pour toute dérivation } d$$

(21.25) ; il résulte de la définition (16.17) que, pour tout Φ-champ φ :

$$\varphi(X) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(X) \\ \varphi_2(X) \end{pmatrix}$$

on a

$$e^{-tf}{}_{\Phi}(\varphi)(X) = \begin{pmatrix} e^{-tf}{}_{\Phi_1}(\varphi_1)(X) \\ e^{-tf}{}_{\Phi_2}(\varphi_2)(X) \end{pmatrix}$$

La formule (23.18) permet de dériver par rapport à t; il en résulte immédiatement l'énoncé :

Si les Z_j admettent des dérivées de Lie $\delta_L Z_j$ (pour un glissement infinitésimal δX) on a

$$\delta_L \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ .. \\ Z_p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \delta_L Z_1 \\ \delta_L Z_2 \\ .... \\ \delta_L Z_p \end{pmatrix} \tag{23.19}$$

Cas des fibres vectorielles.

Soit Φ une racine dont les fibres possèdent une structure invariante d'espace vectoriel de dimension finie. Φ est une racine à fibres différentiables (20.28) ; la dérivée de Lie d'un Φ-champ est encore un Φ-champ ; un certain nombre de formules précédentes se simplifient, notamment parce que les opérateurs $\Phi(A)(X)$ sont linéaires pour tout glissement A (12.16). On trouve ainsi, à partir de (23.12), (23.14), (23.17) :

Si Φ est une racine à fibres vectorielles :

$$[A_D(f), A_\Phi(\varphi)]_L = A_\Phi([f, \varphi]_L) \quad \text{pour tout glissement A ;} \tag{23.20}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-tf}{}_\Phi(\varphi)(X)] = [\Phi(e^{tf})(X)]^{-1}([f, \varphi]_L(e^{tf}(X))) \tag{23.21}$$

Si F_X est un homomorphisme de racine, linéaire pour tout X :

$$\delta_L[F_X(Z)] = F_X(\delta_L Z) \tag{23.22}$$

— Considérons deux racines Φ et Ψ à fibres vectorielles ; la racine Θ des opérateurs linéaires de Φ à Ψ (16.26) ; un Θ-champ θ et un Φ-champ φ.

Si on pose $\theta(X) = Y$, $\varphi(X) = Z$, ô l'opérateur F_X

$$F_X\left(\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}\right) = Y(Z)$$

est un *homomorphisme de racine ;* les formules (23.17) et (23.19) donnent alors

$$\delta_L[Y(Z)] = D(F_X)\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_L Y \\ \delta_L Z \end{pmatrix}$$

soit

$$\delta_L[Y(Z)] = [\delta_L Y](Z) + Y(\delta_L Z) \quad \text{si} \quad Y \text{ est linéaire} \tag{23.23}$$

Par itération, on en déduit la formule

$$\begin{aligned} \delta_L[Y(Z_1)(Z_2)\ldots(Z_p)] = {} & [\delta_L Y](Z_1)(Z_2)\ldots(Z_p) \\ & + Y(\delta_L Z_1)(Z_2)\ldots(Z_p) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + Y(Z_1)(Z_2)\ldots(\delta_L Z_p) \end{aligned} \tag{23.24}$$

si Y est p fois linéaire.

— La formule (23.23) permet d'interpréter (23.22) ; en effet, on sait que tout homomorphisme F_X est un *champ invariant* (16.23) ; pour tout glissement infinitésimal δX, on a donc $\delta_L F_X = 0$ (23.15) ; d'où $\delta_L[F_X(Z)] = F_X(\delta_L Z)$ si F_X est linéaire.

— Soit Y un opérateur linéaire dépendant de X ; les opérateurs $F_X(Y) = \mathrm{Tr}(Y)$, $G_X(Y) = \text{dét}\,(Y)$; $H_X(Y) = Y^{-1}$ sont des homomorphismes de racines ; compte tenu de (21.23) et (21.24), on en tire

$$\mathrm{Tr}\,(\delta_L Y) = \delta[\mathrm{Tr}(Y)] \tag{23.25}$$

$$\mathrm{Tr}\,(Y^{-1}.\delta_L Y) = \frac{\delta\,[\det\,(Y)]}{\det\,(Y)} \tag{23.26}$$

$$\delta_L[Y^{-1}] = -\,Y^{-1}.\delta_L Y.Y^{-1} \tag{23.27}$$

(23.28) — Soit à calculer $[f, \varphi]_L(X)$, X étant un point de V.

Choisissons une *carte* F telle que $X \in \mathrm{val}\,(F)$; en faisant $A = F^{-1}$ dans la formule (23.20), il vient immédiatement :

$$F^{-1}{}_\Phi([f, \varphi]_L) = [F^{-1}{}_D(f), F^{-1}{}_\Phi(\varphi)]_L$$

d'où $\qquad [f, \varphi]_L(X) = F_\Phi([F^{-1}{}_D(f),\ F^{-1}{}_\Phi(\varphi)]_L)(X)$

$\diamondsuit \qquad\qquad = \Phi(F)(x)([F^{-1}{}_D(f),\ F^{-1}{}_\Phi(\varphi)]_L(x))$

en posant $x = F^{-1}(X)$.

Cette formule $\diamondsuit$ nous donne l'expression de $[f, \varphi]_L(X)$ dans le *repère* $\Phi(F)(x)$; nous sommes ramenés au calcul d'une dérivée de Lie $[f', \varphi]_L(x)$, dans le cas où $x \in R^n$.

— Soit donc Φ une racine différentiable à fibre vectorielle ; f un changeur de carte infinitésimal ; φ un Φ-champ défini dans un ouvert de R^n, que nous supposerons *différentiable.*

$\Phi(e^{tf})(X)$ est un opérateur linéaire, appliquant la fibre-type Φ_0 sur elle-même ; si elle est différentiable en t, la formule (23.8) donne immédiatement

(23.29)
$$[f, \varphi]_L(X) = \Omega(\varphi(X)) + D(\varphi)(X)(f(X))$$
avec
$$\Omega = -\frac{d}{dt}[\Phi(e^{tf})(X)]_{t=0}$$

ce qui peut aussi s'écrire

(23.30)
$$\delta_L Z = \Omega(Z) + \delta Z$$

On voit que $[f, \varphi]_L(X)$ ne dépend de φ que *par son élément de contact au point* X ; si f s'annule au point X, $[f, \varphi]_L(X)$ dépend seulement (et linéairement) de $\varphi(X)$.

Mais il n'existe pas d'opérateur A tel que $\delta_L Z = A(\delta X)$; $[f, \varphi]_L(X)$ dépend, non seulement de la valeur de f au point X, mais du *germe* de f en X.

— Comme application, calculons la *dérivée de Lie d'un champ de vecteurs.* Faisons $\Phi = D$ dans la formule (23.29) ; on a

$$\Omega = -\frac{d}{dt}[D(e^{tf})(X)]_{t=0} = -D(f)(X) \quad \text{(théorème (22.27))}$$

d'où $\qquad [f, \varphi]_L(X) = D(\varphi)(X)(f(X)) - D(f)(X)(\varphi(X))$

comme on a aussi

$$[A_D(f), A_D(\varphi)]_L = A_D([f, \varphi]_L) \qquad (23.20)$$

on retrouve les axiomes définissant le *crochet de Lie* de f et φ (21.29, 1°) ; donc

(23.31) La *dérivée de Lie d'un champ de vecteurs* φ, pour le glissement infinitésimal f, coïncide avec le *crochet de Lie* de f et φ, déjà désigné par $[f, \varphi]_L$; on a donc

$$\delta_L[dX] = [\delta, d]_L X$$