CHAPITRE III

Théorie de la variance

§ 11 Germes

(11.1)

— Soit E un espace topologique ; X un point de E.

— Considérons l'ensemble des opérateurs A tels que

$$\mathrm{def}\,(A) \subset E$$

— Définissons sur cet ensemble la relation $\sim$:

$$[A \sim B] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{il existe un ouvert } \Omega \text{, conte-}\\ \text{nant } X\text{, tel que}\\ \qquad A.1_\Omega = B.1_\Omega\end{array}\right]$$

ô la relation $\sim$ est une équivalence.

— Nous appellerons *germe* de A au point X la classe de A suivant $\sim$

(11.2)

— Soit E un espace topologique ; X un point de E.

— Considérons l'ensemble des opérateurs A tels que

$$\mathrm{val}\,(A) \subset E$$

— Définissons sur cet ensemble la relation $\backsim$:

$$[A \backsim B] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{il existe un ouvert } \Omega \text{, conte-}\\ \text{nant } X\text{, tel que}\\ \qquad 1_\Omega.A = 1_\Omega.B\end{array}\right]$$

ô la relation $\backsim$ est une équivalence.

— Nous appellerons *co-germe* de A au point X la classe de A suivant $\backsim$.

Puisque la relation $\sim$ (resp. $\backsim$) est une équivalence, on a

(11.3) $$[A \in \text{germe}_X(B)] \Leftrightarrow [\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)]$$

(11.4) $$[A \in \text{cogerme}_X(B)] \Leftrightarrow [\text{cogerme}_X(A) = \text{cogerme}_X(B)]$$

— Soient A et B des opérateurs réguliers ; il est clair que $A.1_\Omega = B.1_\Omega$ est équivalent à $1_\Omega.A^{-1} = 1_\Omega.B^{-1}$; donc :

(11.5) Si A et B sont réguliers

$$[\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)] \Leftrightarrow [\text{cogerme}_X(A^{-1}) = \text{cogerme}_X(B^{-1})]$$

Théorème :

(11 6) Soit A un opérateur qui applique un voisinage de X_0 dans un espace topologique ; alors :

$$[A \text{ continu en } X_0] \Leftrightarrow [\text{cogerme}_{A(X_0)}(A) \subset \text{germe}_{X_0}(A)]$$

— Soit ε un ouvert contenant $A(X_0)$; $1_\varepsilon.A$ appartient au cogerme de A ; il existe donc, si le cogerme de A en $A(X_0)$ est contenu dans le germe en X_0, un ouvert η, contenant X_0, tel que $1_\varepsilon.A.1_\eta = A.1_\eta$; si X appartient à l'intersection de η et de def (A) (qui est un voisinage de X_0), A(X) appartient à ε ; A est donc *continu* en X_0.

— Réciproquement, si A est continu en X_0, et si $B \in \text{cogerme}_{A(X_0)}(A)$, il existe un ouvert ε, contenant $A(X_0)$, tel que $1_\varepsilon.B = 1_\varepsilon.A$, et par suite un ouvert η contenant X_0, tel que $1_\varepsilon.A.1_\eta = A.1_\eta$, d'où

$$A.1_\eta = 1_\varepsilon.B.1_\eta < B.1_\eta ;$$

def (A) étant un voisinage de X_0, il existe un ouvert ω tel que

$$X_0 \in \omega \subset \text{def}\,(A) ;$$

on a $A.1_\eta.1_\omega < B.1_\eta.1_\omega$; or $\text{def}\,(B.1_\eta.1_\omega) \subset \eta \cap \omega \subset \text{def}\,(A.1_\eta.1_\omega)$; d'où $A.1_\eta.1_\omega = B.1_\eta.1_\omega$, $B \in \text{germe}_{X_0}(A)$.

C.Q.F.D.

— Soient A et B deux homéomorphismes locaux, tels que $A(X) = B(X) = Y$. Si $\text{cogerme}_Y(A) = \text{cogerme}_Y(B)$, on a $B \in \text{co-germe}_Y(A)$, donc $B \in \text{germe}_X(A)$ (th. (11.6)), donc $\text{germe}_X(B) = \text{germe}_X(A)$.

Si $\text{germe}_X(B) = \text{germe}_X(A)$, on a $\text{cogerme}_Y(B^{-1}) = \text{cogerme}_Y(A^{-1})$ (th. (11.5)) ; le résultat précédent montre que $\text{germe}_X(B^{-1}) = \text{germe}_X(A^{-1})$; d'où $\text{cogerme}_Y(B) = \text{cogerme}_Y(A)$, et le théorème :

(11.7) Soient A et B deux homéomorphismes locaux tels que $A(X) = B(X) = Y$; alors :

$$[\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)] \Leftrightarrow [\text{cogerme}_Y(A) = \text{cogerme}_Y(B)]$$

Théorème :

(11.8) Soit E un espace topologique ; C_X l'ensemble des opérateurs appliquant une partie de E dans E, conservant le point X, continus en X.

Les germes en X des éléments de C_X ont une loi de composition associative $\times$, définie par

$$\text{germe}_X(A) \times \text{germe}_X(B) = \text{germe}_X(A.B)$$

— Il est clair que la formule (11.8) définit bien une loi de composition associative, sous la seule réserve qu'elle soit cohérente, c'est-à-dire que

$$[\text{germe}\,(A) = \text{germe}\,(A'),\ \text{germe}\,(B) = \text{germe}\,(B')] \Rightarrow [\text{germe}\,(A.B) = \text{germe}\,(A'.B')].$$

Supposons donc qu'il existe des ouverts F, G, contenant X, tels que

$$A.1_F = A'.1_F, \qquad B.1_G = B'.1_G ;$$

B étant continu en X, il existe un ouvert H, contenant X, tel que

$$1_F.B.1_H = B.1_H$$

(voir la démonstration de (11.6)) ; on a donc

$$A.B.1_H.1_G = A.1_F.B.1_H.1_G = A'.1_F.B.1_H.1_G = A'.B.1_H.1_G = A'.B.1_G.1_H = A'.B'.1_G.1_H ;$$

comme $1_H.1_G$ est l'opérateur identique sur l'ouvert $H \cap G$, on voit que germe (A.B) = germe(A'.B').

C.Q.F.D.

Théorème :

Soit X un point de l'espace E.

(11.9) Les germes des glissements conservant X forment un groupe pour la loi (11.8) ; on l'appellera *groupe des germes de glissements au point* X.

Il suffit de vérifier qu'il y a un élément neutre (le germe de 1_E), et que tout élément germe_X (A) possède un inverse (c'est le germe de A^{-1}).

C.Q.F.D.

Remarques :

— On trouverait le même groupe en se limitant aux germes des glissements d'un pré-recueil engendrant le recueil des glissements de E.

— On peut aussi définir la composition des cogermes de glissements au point X; on obtient ainsi le même groupe (th. (11.7)).

— L'ensemble R des glissements conservant le point X est un *recueil ;* ce n'est un *groupe* que si les éléments de R ont même ensemble de définition, soit E; E est alors *le seul ouvert* contenant X.

Dans ce cas, R est évidemment isomorphe au groupe des germes en X (car $[\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)] \Leftrightarrow [A = B]$).

Théorème :

Soit F un *isomorphisme local* de E à E′.

δ
(11.10) Si $X' = F(X)$, il existe un isomorphisme Φ du groupe des germes de glissements de E en X sur le groupe des germes de glissements en X′, défini par

$$\Phi(\text{germe}_X(A)) = \text{germe}_{X'}(F.A.F^{-1})$$

Ainsi, la structure du groupe des germes de glissements de E en X ne dépend que de la *structure locale* en ce point ; en particulier, elle est la même en tous les points d'un univers (th. 4.10).

— Considérons un point X de l'espace E ; soit G_{gliss} le groupe des germes de glissements en X.

Les automorphismes locaux de E constituent un pré-recueil, contenant le recueil des glissements ; les germes d'automorphismes locaux conservant X constituent donc un groupe G_{auto}, qui admet G_{gliss} comme sous-groupe.

Soit F un automorphisme local conservant X ; on sait (th. (11.10)) qu'il lui correspond un isomorphisme Φ de G_{gliss} défini par

$$\Phi(\text{germe}(A)) = \text{germe}(F.A.F^{-1}) = \text{germe}(F) \times \text{germe}(A) \times \text{germe}(F)^{-1};$$

on voit que les éléments de G_{auto} transmutent les éléments de G_{gliss} en éléments de G_{gliss}, donc que G_{gliss} est un sous-groupe distingué de G_{auto} ; il coïncide évidemment avec G_{auto} si E est parfait.

— Soit U un univers ; X un point de U où $G_{gliss} = G_{auto}$; F un automorphisme local non impuissant de U ; Y un point de def (F).
U étant un univers, il existe des glissements A et B tels que $A(X) = Y$, $B(X) = F(Y)$; A, B, F appartenant au pré-recueil des automorphismes, il en est de même de $B^{-1}.F.A$, qui conserve visiblement X ; par hypothèse, $B^{-1}.F.A$ a même germe en X qu'un glissement ; il existe donc un ouvert V, contenant X, tel que $C = B^{-1}.F.A.1_V$ soit un glissement. Par suite $B.C.A^{-1} = B.B^{-1}.F.A.1_V.A^{-1}$ est un glissement ; or c'est la restriction de F à un voisinage ouvert de Y ; donc F, qui est régulier et qui est borne supérieure de glissements, est un glissement ; U est parfait.

D'où le théorème :

Soit X un point de l'espace E ; G_{gliss} le groupe des germes de glissements en X ; G_{auto} le groupe des germes d'automorphismes locaux en X.

(11.11) G_{gliss} est un sous-groupe *distingué* de G_{auto} ; nous appellerons *groupe d'imperfection* le groupe quotient G_{auto}/G_{gliss} ; pour que E soit *parfait*, il est nécessaire que ce groupe se réduise à un élément ; c'est suffisant si E est un univers.

§ 12 Racines

Définition :

(12.1)

Soit E un espace.

Nous appellerons *racine* de E tout opérateur Φ tel que :

(a) Si A est un *glissement* de E, et si $X \in \mathrm{def}\,(A)$

$\Phi(A)(X)$ est un *opérateur ;*

(b) Si Ω est un *ouvert* de E, et si $X \in \Omega$,

$\Phi(1_\Omega)(X) = \Phi(1_E)(X) =$ opérateur *régulier ;*

(c) Si A et B sont des glissements, et si $X \in \mathrm{def}\,(A.B)$,

$$\Phi(A.B)(X) = \Phi(A)(B(X)).\Phi(B)(X)$$

Théorème :

(12.2)

Φ étant une *racine* de l'espace E :

(a) $\Phi(1_E)(X)$ est l'opérateur *identique* sur un ensemble, que nous appellerons *fibre* de la racine Φ au point X, et que nous noterons Φ_X.

(b) Si $X \in \mathrm{def}\,(A)$, $\Phi(A)(X)$ est un opérateur *régulier*, qui applique *la fibre* Φ_X *sur la fibre* $\Phi_{A(X)}$.

(c) $[\Phi(A)(X)]^{-1} = \Phi(A^{-1})(A(X))$.

Démonstration :

(a) — En faisant dans la formule (12.1, c) $A = B = 1_E$, on voit que $\Phi(1_E)(X)$ est égal à son carré ; comme il est régulier, c'est un opérateur identique.

(b, c) — Soit A un glissement défini en X ; posons $Y = A(X)$, $P = \Phi(A)(X)$, $Q = \Phi(A^{-1})(Y)$. En appliquant plusieurs fois la formule (12.1, c), il vient : $P.1_{\Phi_X} = P$; $1_{\Phi_Y}.P = P$ (d'où $\mathrm{def}(P) \subset \Phi_X$, $\mathrm{val}\,(P) \subset \Phi_Y$) ; $Q.P = 1_{\Phi_X}$, $P.Q = 1_{\Phi_Y}$ (d'où $\Phi_X \subset \mathrm{def}\,(P)$, $\Phi_Y \subset \mathrm{val}\,(P)$) ; on a donc $\mathrm{def}\,(P) = \Phi_X$,

$\mathrm{val}\,(P) = \Phi_Y$; de même $\mathrm{def}\,(Q) = \Phi_Y$, $\mathrm{val}\,(Q) = \Phi_X$; et les formules $P.Q = 1_{\Phi_Y}$ et $Q.P = 1_{\Phi_X}$ montrent que P et Q sont inverses, donc réguliers.

C.Q.F.D.

Remarque :

— Il est évidemment loisible d'inclure quelques-uns des résultats du théorème (12.2) dans l'axiomatique (12.1), sans en changer la valeur logique.

Exemples de racines :

Exemple I. — Soit E un espace, H un ensemble. Posons, pour tout glissement A de E et tout X dans def (A)

(12.3)

$$\Phi(A)(X) = 1_H$$

Il est clair que :

(12.4) L'opérateur Φ défini par (12.3) est une *racine* de E, dont la fibre est H en tout point X de E ; on l'appellera *racine triviale* (de fibre H).

(12.5) Exemple II. — Soit E′ un *espace fibré sans jauge* (définition (8.11)), de projection P, de base E.

A étant un glissement de E, il existe un seul glissement A′ de E′, tel que $P^*(A') = A$; X étant un point de def (A), désignons par $\Phi(A)(X)$ l'article $A'.1_{P^-(X)}$; on sait que $\Phi(A)(X)$ est un opérateur régulier, qui applique la fibre $P^-(X)$ sur la fibre $P^-(A(X))$; la formule $P^*(A'.B') = P^*(A').P^*(B')$ (th. (6.17)) montre que $\Phi(A.B)(X) = \Phi(A)(B(X)).\Phi(B)(X)$; enfin il est clair que si Ω est un ouvert de E, $1_{P^-(\Omega)}$ est le seul relèvement de 1_Ω, donc que $\Phi(1_\Omega)(X) = 1_{P^-(X)}$; les axiomes (12.1) sont vérifiés, Φ *est une racine de* E ; *la fibre* Φ_X (terminologie de (12.2)) est égale à la *fibre* $P^-(X)$ (terminologie des espaces fibrés), ce qui explique le double emploi du mot.

(12.6) Mais les diverses fibres d'une racine ne sont pas nécessairement disjointes deux à deux (exemple 12.4), alors que les fibres d'un espace fibré le sont (th. (6.4)).

Ceci ne nous empêchera pas de donner une sorte de réciproque de la construction précédente, à savoir le théorème :

Soit Φ une racine de l'espace E ; R le recueil des glissements de E ; E^Φ l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$ $(Z \in \Phi_X)$.

— Si $A \in R$, si $X \in \operatorname{def}(A)$, et si $Z \in \Phi_X$, on posera

$$\diamond \qquad A^\Phi\left(\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} A(X) \\ \Phi(A)(X)(Z) \end{pmatrix}$$

(12.7) Alors les A^Φ forment un recueil R^Φ, d'espace E^Φ.

— Si l'on pose

$$\clubsuit \qquad P\left(\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\right) \equiv X,$$

P est une *projection* de l'espace E^Φ ; le recueil R^Φ et la projection P font de E^Φ un *espace fibré de base* E, *sans jauge*.

— En effet, il résulte de l'axiome (12.1, *c*) des racines que

(12.8) $$A^\Phi . B^\Phi = [A . B]^\Phi$$

du théorème (12.2, *c*) que

(12.9) $$[A^{-1}]^\Phi = [A^\Phi]^{-1} ;$$

comme les A^Φ sont visiblement *permis* par P, et comme

(12.10) $$P^*(A^\Phi) = A$$

on voit que les A_j^Φ ne peuvent être compatibles que si les A_j le sont (th. 6.21)) ; on vérifie que

(12.11) $$[A_j^\Phi \text{ compatibles, } \sup [A_j^\Phi] \text{ régulier}] \Rightarrow \begin{cases} \sup [A_j] \quad \text{régulier} \\ [\sup [A_j]]^\Phi = \sup [A_j^\Phi] \end{cases}$$

ce qui montre, avec (12.8) et (12.9), que les A^Φ forment un recueil R^Φ ; la formule (12.10) montre que la projection du recueil R^Φ est R, et que tout élément A de R admet un seul relèvement, à savoir A^Φ ; E^Φ est donc un espace fibré sans jauge (th. (8.11)).

C.Q.F.D.

— Puisque toute racine Φ définie sur un espace E donne naissance à un espace fibré E^Φ de base E, nous pourrons appliquer aux racines les résultats du chapitre II relatifs aux espaces fibrés ; on justifiera ainsi les résultats (12.12) à (13.3) ci-dessous, qui peuvent bien entendu se vérifier directement, à partir des axiomes des racines (et du théorème (12.2)).

(12.12) — Les opérateurs $\Phi(A)(X)$ s'appelleront les *articles* de la racine Φ.

— X étant un point de l'espace E, Φ une racine de E, l'ensemble des articles

$$\Phi(A)(X),$$

(12.13) où A est un glissement *qui conserve* X,

est un groupe de permutations de la fibre Φ_X ; on l'appellera *groupe structural* de cette fibre.

(12.14) Si A est un glissement de E, et si $X \in \operatorname{def}(A)$, l'article $\Phi(A)(X)$ transmute le groupe structural de Φ_X en le groupe structural de $\Phi_{A(X)}$.

— On voit en particulier que si E est un univers, les groupes structuraux des fibres Φ_X sont *tous isomorphes* (en tant que groupes d'opérateurs).

Définition :

(12.15) On appellera *structure invariante* d'une racine Φ la donnée d'une structure (d'espace, d'espace vectoriel, d'espace topologique, etc...) sur *chaque fibre* Φ_X, telle que les articles $\Phi(A)(X)$ en soient des isomorphismes.

Théorème :

Soit E un *univers ;* Φ une racine de E.

(12.16) Si l'on a défini, sur une fibre Φ_{X_0}, une structure d'espace, (resp. d'espace topologique, d'espace vectoriel, etc...) telle que les éléments du groupe structural de cette fibre en soient des automorphismes (resp. continus, linéaires, etc...) on peut prolonger, *d'une seule façon*, cette structure de la fibre Φ_{X_0} par une *structure invariante* de la racine.

(Cf. (8.6).)

§ 13 Variance

Nous avons défini ((7.10), (7.9)) les homomorphismes et isomorphismes d'espaces fibrés de base E ; en appliquant ces résultats au cas de l'espace fibré E^Φ construit à partir d'une racine Φ (th. (12.7)), on arrive aux énoncés suivants :

Soit Φ une racine de l'espace E.

— Nous appellerons *homomorphisme* de la racine Φ toute famille F_X d'opérateurs, associés à chaque point X de E, telle que

(a) $\operatorname{def}(F_X) = \Phi_X$;

(b) Si A est un glissement de E, et si $X \in \operatorname{def}(A)$,

(13.1) $F_{A(X)} . \Phi(A)(X)$ est *divisible* par F_X.

(13.1) — Alors l'opérateur Ψ, défini par

$$\diamond \qquad \Psi(A)(X) = [F_{A(X)} . \Phi(A)(X)]/F_X$$

est une *racine* de E, dont la fibre Ψ_X est égale à $\operatorname{val}(F_X)$; on dira alors que F_X est un homomorphisme de Φ à Ψ.

Remarques :

— L'homomorphisme F de l'espace fibré E^Φ qui correspond à F_X est donné par la formule

(13.2)
$$F\left(\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} X \\ F_X(Z) \end{pmatrix}$$

On a :

(13.3)
$$F_{A(X)} . \Phi(A)(X) = \Psi(A)(X) . F_X$$

$F_{A(X)} . \Phi(A)(X)$ est non seulement divisible par F_X, mais multiple de F_X (voir (6.7) et (6.10)).

— La condition de divisibilité (13.1, *b*) est donnée par (6.7) :

(13.4)
$$[F_X(Z) = F_X(Z')] \Rightarrow [F_{A(X)}(\Phi(A)(X)(Z)) = F_{A(X)}(\Phi(A)(X)(Z'))]$$

L'énoncé (13.1) justifie en particulier :

Soit Φ une racine de l'espace E.

Nous appellerons *isomorphisme* de la racine Φ toute famille F_X d'opérateurs *réguliers*, tels que

$$[X \in E] \Rightarrow [\operatorname{def}(F_X) = \Phi_X]$$

(13.5) Alors l'opérateur Ψ défini par

$$\diamond \qquad \Psi(A)(X) = F_{A(X)} . \Phi(A)(X) . F_X^{-1}$$

est une *racine* de E ; on dira que F_X est un isomorphisme de Φ à Ψ.

Définition, théorème :

Deux racines Φ et Ψ d'un même espace E seront dites *isomorphes*
♁ s'il existe un isomorphisme F_X de Φ à Ψ ; cette relation est une
(13.6) *équivalence entre racines de* E ; la classe d'une racine Φ s'appellera *variance* de Φ.

Exemples :

Exemple I. — Soit Φ une racine de l'espace E ; X étant un point de E, Z un point de la fibre Φ_X, posons

(13.7) $$F_X(Z) = \binom{X}{Z}$$

F_X étant régulier, est un isomorphisme de Φ à une racine Ψ ;

(13.8) ♁ $$\Psi(A)(X)\binom{X}{Z} = \binom{A(X)}{\Phi(A)(X)(Z)}$$

toute racine Φ est donc *isomorphe à une racine* Ψ *à fibres disjointes ;* on voit que la réunion des fibres de Ψ constitue l'espace fibré E^Φ défini en (12.7), et que $\Psi(A)(X)$ est un article du relèvement A^Φ de A.

Exemple II. Cet exemple, fourni par l'énoncé (13.10), est précédé de la définition suivante :

(13.9) Nous appellerons *univers-groupe* tout ensemble muni simultanément d'une structure d'espace et d'une structure de groupe, les translations à gauche [1] T(X) étant des glissements. C'est nécessairement un univers.

Théorème :

(13.10) Soit Φ une racine définie sur un univers-groupe G ; H sa fibre en l'élément neutre e de G.

[1] Nous avons défini T(X) au § 2 (nous écrivions $T_f(X)$).

(13.10) Il existe alors une racine Ψ, et une seule, qui vérifie :

$$\begin{cases} (a)\ \Psi(A)(e) = \Phi(A)(e) \text{ si le glissement A conserve } e\,; \\ (b)\ \Psi(A)(X) = 1_H \text{ si A est une translation à gauche.} \end{cases}$$

Cette racine Ψ est *isomorphe* à Φ, l'isomorphisme F_X étant égal à

$$\Phi(T(X)^{-1})(X)\,;$$

toutes les fibres de Ψ sont égales à H.

Démonstration :

1) Unicité : Soit A un glissement ; X un point de def (A) ; Y le point A(X). Il est clair que l'opérateur $B = T(Y)^{-1}.A.T(X)$ est un glissement qui conserve e (puisque T(Z) est la translation qui transforme e en Z) ; que $A = T(Y).B.T(X)^{-1}$; si donc une racine Ψ vérifie (a) et (b), on a
$\Psi(A)(X)$
$= \Psi(T(Y))(e).\Psi(B)(e).\Psi(T(X)^{-1})(X)$ (double application de (12.1, c))
$= \Phi(B)(e)$ (13.10, a et b)
$= \Phi(T(Y)^{-1})(Y).\ \Phi(A)(X).\ \Phi(T(X))(e)$ (par définition de B)
$= F_{A(X)}.\ \Phi(A)(X).F_X^{-1}$.

2) Existence : Si l'on pose inversement

$$\Psi(A)(X) = F_{A(X)}.\ \Phi(A)(X).F_X^{-1}$$

Ψ est une racine isomorphe à Φ (th. (13.5, ◇)) ; ♁ Ψ vérifie bien les conditions (13.10, a et b).

C.Q.F.D.

Théorème :

Soient Φ une racine d'un *univers* U, X_0 un point de U, F un opérateur défini sur la fibre Φ_{X_0}.

(13.11) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Les éléments du groupe structural de Φ_{X_0} sont *permis* par F.

(b) Il existe une racine Ψ, et un homomorphisme F_X de Φ à Ψ, tels que $F_{X_0} = F$.

Démonstration :

— ◊ (b) ⇒ (a).

— Si (a) est vérifiée, choisissons pour chaque X de U un glissement B_X tel que $B_X(X) = X_0$; on prendra notamment $B_{X_0} = 1_U$. Soit A un glissement quelconque de U ; X un point de def (A). Il est clair que $B_{A(X)}.A.B_X^{-1}$ est un glissement qui conserve X_0 ; la condition (a) montre que l'on peut poser

$$\Psi(A)(X) = F^*(\Phi(B_{A(X)}.A.B_X^{-1})(X_0)) \quad \text{(notation (6.11))}$$

Un calcul simple montre que, si l'on pose

$$F_X = F.\Phi(B_X)(X)$$

on a $\Psi(A)(X) = [F_{A(X)}.\Phi(A)(X)]/F_X$.

F_X est bien un homomorphisme de Φ à la racine Ψ (th. (13.1)) ; on a $F_{X_0} = F$.

C.Q.F.D.

Théorème :

Soient Φ et Ψ deux racines d'un univers U ; X_0 un point de U. Pour qu'il existe un homomorphisme (resp. un isomorphisme) de Φ à Ψ, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un opérateur (resp.

(13.12) un opérateur régulier) F tel que

◊ $\Psi(A)(X_0) = [F.\Phi(A)(X_0)]/F$ (resp. $F.\Phi(A)(X_0).F^{-1}$)

pour tout glissement A conservant X_0.

Il est clair que si F_X est un homomorphisme de Φ à Ψ, (13.12, ◊) est vérifiée en prenant $F = F_{X_0}$.

— Partons réciproquement de (13.12, ◊) ; soit X un point de U, B un glissement tel que $B(X_0) = X$. ◊ L'opérateur $\Psi(B)(X_0).F.\Phi(B)(X_0)^{-1}$ ne dépend que de X (et pas du choix de B) ; si on l'appelle F_X, et si C est un glissement défini en X, ◊ $\Psi(C)(X) = [F_{C(X)}.\Phi(C)(X)]/F_X$; F_X est bien un homomorphisme de Φ à Ψ.

Le cas des isomorphismes se vérifie immédiatement.

C.Q.F.D.

Ce théorème montre en particulier que deux racines d'un univers sont isomorphes si elles coïncident en un point $[\Psi(A)(X_0) = \Phi(A)(X_0)]$.

§ 14 Classification des racines

Théorème :

Soit Φ une racine d'un espace E ; A un glissement de E ; X un point de def (A).

(a) L'article Φ(A)(X) ne dépend que du *germe* de A au point X.

(14.1) (b) L'opérateur H défini par

◊ $H(\text{germe}_X(A)) = \Phi(A)(X)$ [pour $A(X) = X$]

est une *représentation du groupe des germes de glissements en* X *sur le groupe structural de la fibre* Φ_X.

En effet :

(a) Si A et A′ ont même germe en X, il existe un ouvert Ω contenant X tel que $A.1_\Omega = A'.1_\Omega$.

Alors

$$\Phi(A)(X) = \Phi(A.1_E)(X) = \Phi(A)(X).\Phi(1_E)(X) = \Phi(A)(X).\Phi(1_\Omega)(X) = \Phi(A.1_\Omega)(X);$$

de même, $\Phi(A')(X) = \Phi(A'.1_\Omega)(X)$; d'où $\Phi(A)(X) = \Phi(A')(X)$.

(b) L'opérateur H existe en vertu de (a) ; le groupe structural, par définition, est égal à val (H) ; si les glissements A et B conservent X, on a, par définition du produit des germes :

$$H(\text{germe}_X(A) \times \text{germe}_X(B)) = H(\text{germe}_X(A.B)) = \Phi(A.B)(X) = \Phi(A)(X).\Phi(B)(X) = H(\text{germe}_X(A)).H(\text{germe}_X(B)).$$

C.Q.F.D.

Ce théorème possède l'importante réciproque suivante :

Soit E un *univers*, X_0 un point de E, H une représentation du groupe des germes de glissements en X_0.

(14.2) Il existe alors une racine Φ de E telle que

◊ $H(\text{germe}_{X_0}(A)) = \Phi(A)(X_0)$ pour tout glissement A conservant X_0 ;

Φ est unique, à un isomorphisme près.

(*a*) Unicité de la variance.

Si deux racines Φ et Ψ vérifient (14.2, $\Diamond$), on a $\Phi(A)(X_0) = \Psi(A)(X_0)$ pour tout glissement A conservant X_0 ; Φ et Ψ sont isomorphes d'après (13.12).

(*b*) Existence de Φ.

Considérons les couples $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$, où A est un glissement défini en X_0, et Z un point de l'espace de la représentation H. Définissons la relation $\sim$ en posant

$$\left[\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' \\ Z' \end{pmatrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} A(X_0) = A'(X_0) \\ Z' = H\,(\mathrm{germe}_{X_0}\,(A'^{-1}.A))(Z) \end{matrix}\right]$$

ô cette relation $\sim$ est une équivalence ; ô si un glissement B est défini au point $A(X_0)$, et si $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' \\ Z' \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} B.A \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B.A' \\ Z' \end{pmatrix}$.

— Y étant un point de def (B), on a donc le droit de poser

$$\Psi(B)(Y)\left(\text{classe}\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}\right) = \text{classe}\begin{pmatrix} B.A \\ Z \end{pmatrix}$$

pour tout glissement A tel que $A(X_0) = Y$.

ô Ψ est une racine de E ; sa fibre Ψ_Y au point Y est l'ensemble des classes des couples $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$, A étant un glissement tel que $A(X_0) = Y$.

— Z étant un élément de l'espace de représentation de H, posons $F(Z) = \text{classe}\begin{pmatrix} 1_E \\ Z \end{pmatrix}$; il est immédiat que F est un opérateur régulier, qui applique l'espace de représentation de H dans la fibre Ψ_{X_0} ; en fait, val (F) est égal à Ψ_{X_0}, parce que, si le glissement A conserve X_0, on a

$$\clubsuit \qquad \text{classe}\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = F\,(H(\mathrm{germe}_{X_0}\,(A))(Z))$$

Si on pose $F_Y = 1_{\Psi_Y}$ pour $Y \neq X_0$, et $F_{X_0} = F$, l'opérateur F_Y^{-1} est défini, pour tout Y, sur la fibre Ψ_Y, et l'opérateur Φ :

$$\Phi(B)(Y) = F_{B(Y)}^{-1}.\Psi(B)(Y).F_Y$$

est une racine isomorphe à Ψ (th. 13.5) ; si A conserve X_0, on a $\Phi(A)(X_0) = F^{-1}.\Psi(A)(X_0).F = H\,(\mathrm{germe}_{X_0}(A))$ (formule $\clubsuit$).

C.Q.F.D.

Définition :

(14.3) On appellera *noyau* de la racine Φ au point X l'ensemble des glissements A tels que

$$A(X) = X \quad , \quad \Phi(A)(X) = 1_{\Phi_X}$$

Lemme :

ô (14.4) Soient A et B deux glissements tels que $A(X) = B(X)$; Φ une racine ; alors

$$[\Phi(A)(X) = \Phi(B)(X)] \Leftrightarrow [A^{-1}.B \in [\text{noyau de } \Phi \text{ au point } X]]$$

— On en conclut immédiatement que le noyau de Φ au point X est un *recueil*, et que les glissements conservant X en sont des *automorphismes locaux*.

Théorème :

(14.5) Soit E un univers ; X un point de E ; N un ensemble de glissements conservant X. Alors les conditions (*a*) et (*b*) sont équivalentes :

(*a*) Il existe une racine Φ admettant N comme noyau en X ;

(*b*) Il existe un sous-groupe distingué Γ du groupe des germes de glissements en X tel que :

$$[A \in N] \Leftrightarrow [\mathrm{germe}_X(A) \in \Gamma]$$

1) Supposons (*a*). H étant la représentation définie en (14.1), on voit que $[A \in N] \Leftrightarrow [\mathrm{germe}_X(A) \in H^{-1}(1_{\Phi_X})]$; on sait que l'image réciproque de l'élément neutre d'un groupe par une représentation est un sous-groupe distingué.

2) Supposons (*b*). On sait qu'il existe un homomorphisme H_0 du groupe G des germes de glissements en X ayant Γ comme noyau (homomorphisme canonique $G \to G/\Gamma$) ; une représentation T du groupe G/Γ (translations à gauche) ; $H = T.H_0$ est donc une représentation du groupe des germes ayant Γ comme noyau ; la racine Φ que lui fait correspondre le théorème (14.2) vérifie (*a*).

C.Q.F.D.

Exemples :

Il est clair que le noyau en X de toute racine *triviale* (12.4) est l'ensemble des glissements conservant X, donc que le sous-groupe Γ est confondu avec G (notations de (14.5)) ; réciproquement :

ô (14.6) Pour que le noyau d'une racine Φ (d'un univers E, au point X) soit l'ensemble des glissements conservant X, il faut et il suffit que Φ soit *isomorphe à une racine triviale.*

— Une racine triviale a donc *le plus grand noyau* possible ; de même, le théorème (14.5) montre qu'il existe, sur un univers E, une racine Φ ayant *le plus petit* noyau possible, c'est-à-dire telle que

(14.7) $$[\text{A conserve X},\ \Phi(A)(X) = 1_{\Phi_X}] \Leftrightarrow [\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(1_E)]$$

Nous allons construire, sur un espace *quelconque* E, une racine ayant cette propriété (14.7) *en tout point* X.

Soit en effet A un glissement de E, X un point de def (A) ; F_1 et F_2 deux opérateurs à valeurs dans E, ayant même cogerme en X.

ô $A.F_1$ et $A.F_2$ ont même cogerme en A(X) ; on peut donc définir un opérateur par

(14.8) $$\Phi(A)(X)(\text{cogerme}_X(F)) = \text{cogerme}_{A(X)}(A.F)$$

pour tout opérateur F à valeurs dans E.

ô Φ est une racine ; si A conserve X et si $\Phi(A)(X) = 1_{\Phi_X}$, il vient, en prenant $F = 1_E$:

$$\text{cogerme}_X(A) = \text{cogerme}_X(1_E)$$

d'où, A et 1_E étant des isomorphismes locaux (th. (11.7)), $\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(1_E)$; donc :

(14.9) La racine Φ définie par (14.8) vérifie (14.7) ; elle possède en chaque point X le plus petit noyau.

Théorème :

Soient Φ et Ψ deux racines d'un même espace E ; X un point de E.

1) Les deux conditions (*a*) et (*b*) sont équivalentes :

(*a*) $\{\ \text{noyau}_X(\Phi) \subset \text{noyau}_X(\Psi)$;

(14.10) (*b*) il existe une représentation H du groupe structural de Φ en X sur le groupe structural de Ψ en X telle que, pour tout glissement A conservant X,

$$\Psi(A)(X) = H(\Phi(A)(X))$$

Nous exprimerons (*a*) ou (*b*) en disant que Ψ est *subordonnée* à Φ au point X.

2) Si E est un univers, cette condition est indépendante du point X ; nous dirons simplement que Ψ est *subordonnée* à Φ.

Démonstration :

1) ô (*b*) ⇒ (*a*).

— Supposons (*a*) ; soient H_1 et H_2 les deux représentations du groupe des germes telles que, pour tout glissement A conservant X,

$$\Phi(A)(X) = H_1(\text{germe}_X(A)) \quad , \quad \Psi(A)(X) = H_2(\text{germe}_X(A))$$

(th. 14.1)).

La condition (*a*) exprime que le noyau de H_1 est contenu dans le noyau de H_2 ; ô il en résulte que H_2 est *multiple* de H_1 (définition (6.10)), et que $H = H_2/H_1$ est un *homomorphisme* [1], donc une représentation du groupe structural de Φ sur le groupe structural de Ψ ; l'égalité $H_2 = H.H_1$ exprime la condition (*b*).

2) Supposons que E soit un univers, que (*a*) soit vérifiée au point X, et que le glissement A′ appartienne au noyau de Φ au point X′.

Il existe un glissement B tel que B(X) = X′ ; un calcul simple montre que $\Phi(B^{-1}.A'.B)(X) = 1_{\Phi_X}$, c'est-à-dire que $B^{-1}.A'.B$ appartient au noyau de

[1] Voir la note I à la fin de l'ouvrage.

Φ en X, donc au noyau de Ψ en X ; en développant la relation $\Psi(B^{-1}.A'.B)(X) = 1_{\Psi_X}$, il vient $\Psi(A')(X') = 1_{\Psi_{X'}}$; la condition (*a*) est vérifiée en X'.

C.Q.F.D.

(14.11) Il est clair que la relation de subordination est *transitive ;* elle ordonne les noyaux, *mais pas les racines.*

Supposons en effet que les racines Φ et Ψ aient même noyau en X ; puisqu'elles sont subordonnées l'une à l'autre, la représentation H (14.10, *b*) est régulière, les groupes structuraux de Φ et Ψ sont isomorphes *comme groupe abstraits ;* ceci sera réalisé à fortiori s'ils sont isomorphes *comme groupes d'opérateurs*, c'est-à-dire si Φ et Ψ sont des *racines isomorphes.* Mais on peut construire des exemples de racines qui ont même noyau sans être isomorphes (par exemple des racines triviales dont les fibres n'ont pas le même nombre d'éléments).

(14.12) Nous avons ainsi obtenu une classification des racines d'un univers E : les racines se classent par variances, les variances se classent par noyaux ; les noyaux correspondent biunivoquement aux sous-groupes distingués du groupe des germes de glissements en un point.

Terminons par quelques remarques :

(14.13) — S'il existe un homomorphisme F_X d'une racine Φ à une racine Ψ (13.1), Φ est subordonnée à Ψ ; l'énoncé réciproque est faux.

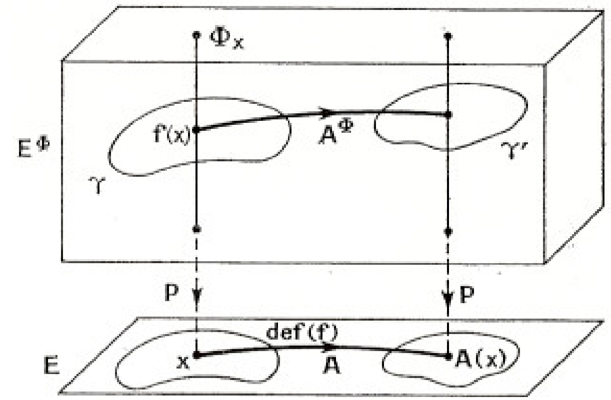
— Les racines triviales sont subordonnées à toutes les autres (puisque leur noyau est le plus grand) ; de même, toute racine est subordonnée à la *racine des cogermes*, définie en (14.8).

§ 15 Champs

Soit Φ une racine d'un espace E.

(15.1) Nous appellerons *Φ-champ* tout opérateur *f*, défini dans un ouvert de E, tel que

$$[[X \in \operatorname{def}(f)] \Rightarrow [f(X) \in \Phi_X]$$



Soit *f* un Φ-champ défini dans un ouvert de E. Le *graphe* γ de *f*, c'est-à-dire l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} X \\ f(X) \end{pmatrix}$ $[X \in \operatorname{def}(f)]$, est une partie de l'espace fibré E^Φ (définition (12.7)), qui se projette suivant un ouvert, et qui ne rencontre les fibres de E^Φ qu'en un point au plus ; on dit que γ est une *section locale* de l'espace fibré E^Φ.

Inversement, toute section locale de E^Φ est évidemment le graphe d'un Φ-champ.

Soit A un glissement quelconque de E ; on sait que A se relève, d'une seule façon, par un glissement de E^Φ, noté A^Φ (th. (12.10) et 8.11)) ; l'image γ' du graphe γ par A^Φ est l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} A(X) \\ \Phi(A)(X)(f(X)) \end{pmatrix}$; sa projection est l'image de def (*f*) par A, donc un ouvert de E ; A^Φ étant régulier, γ' ne rencontre les fibres de E^Φ qu'en un point au plus ; γ' est une section locale, donc le graphe d'un Φ-champ ; d'où l'énoncé :

Soit E un espace, Φ une racine, f un Φ-champ défini dans un ouvert de E, A un glissement de E.

Nous appellerons *image de f par* A, et nous noterons $A_\Phi(f)$, le

(15.2) Φ-champ défini par

$\diamond$ $$A_\Phi(f)(A(X)) = \Phi(A)(X)(f(X))$$

L'ensemble de définition de $A_\Phi(f)$ est l'image par A de def (f); le graphe de $A_\Phi(f)$ est l'image par A^Φ du graphe de f.

Remarques :

En remplaçant X par $A^{-1}(X)$ dans (15.2, $\diamond$), il vient une formule équivalente :

(15.3) $$A_\Phi(f)(X) = \Phi(A)(A^{-1}(X))(f(A^{-1}(X)))\,;$$

en particulier,

ô

(15.4) Si la racine Φ est triviale,

$$A_\Phi(f) = f.A^{-1}.$$

— On connait les formules $[A.B]^\Phi = A^\Phi.B^\Phi$ (12.8), $[P.Q]^+ = P^+.Q^+$ (6.2); en les appliquant au graphe de f, il vient

(15.5) $$[A_\Phi.B_\Phi](f) = [A.B]_\Phi(f)$$

ce qui s'écrit encore

(15.6) $$A_\Phi.B_\Phi = [A.B]_\Phi$$

Mais l'opérateur A_Φ *n'est pas nécessairement régulier ;* en effet, si Ω est un ouvert de E, le théorème (12.2) montre que

(15.7) $$[1_\Omega]_\Phi(f) = f.1_\Omega$$

quelle que soit la racine Φ; si E comporte au moins deux ouverts non vides disjoints Ω et Ω', tous les champs f dont l'ensemble de définition est contenu dans Ω' ont pour image par 1_Ω le champ impuissant.

Théorème :

Si des Φ-champs f_j sont compatibles, et si A est un glissement, les $A_\Phi(f_j)$ sont compatibles, et vérifient

ô

(15.8) $$\sup_j \left[A_\Phi(f_j)\right] = A_\Phi\left(\sup_j [f_j]\right)$$

Définition :

Une famille $\mathcal{F}$ de Φ-champs sera dite *stable* si

$$[f \in \mathcal{F},\ \text{A est un glissement}] \Rightarrow [A_\Phi(f) \in \mathcal{F}]$$

(15.9) Elle sera dite *invariante* si elle est stable et si

$$[f_j \in \mathcal{F},\ f_j\ \text{compatibles}] \Rightarrow [\sup_j [f_j] \in \mathcal{F}]$$

Théorème :

Soit $\mathcal{F}_0$ une famille de Φ-champs; R le recueil des glissements.

Définissons les familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ par :

ô

(15.10) $$\begin{aligned}[f \in \mathcal{F}_1] &\Leftrightarrow [f = A_\Phi(f_0),\quad A \in R,\quad f_0 \in \mathcal{F}_0]\\ [f \in \mathcal{F}_2] &\Leftrightarrow [f = \sup_j [A_j]_\Phi(f_j),\quad A_j \in R,\quad f_j \in \mathcal{F}_0]\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) est *la plus petite famille stable* (resp. *invariante*) contenant $\mathcal{F}_0$.

(15.11) ***Remarque :*** Si $\mathcal{F}$ est une famille stable (en particulier invariante), les restrictions à un ouvert d'éléments de $\mathcal{F}$ font partie de $\mathcal{F}$ (à cause de (15.7)).

Définition, théorème :

Soit f un Φ-champ. Nous dirons que le glissement A *invarie* le champ f si

(15.12) $$\text{def}\,(A) \subset \text{def}\,(f),\quad \text{val}\,(A) \subset \text{def}\,(f),\quad A_\Phi(f) < f$$

Les glissements qui invarient f forment un *recueil*, dont l'espace est def (f).

Soit R l'ensemble des glissements qui invarient f.

— Si A et B appartiennent à R, on a

$$[A.B]_\Phi(f) = A_\Phi(B_\Phi(f)) < A_\Phi(f) < f; \quad \text{donc} \quad A.B \in R.$$

— Si $A \in R$, il est clair que

$$\text{def}([A^{-1}]_\Phi(f)) = A^{-}(\text{def}(f)) = \text{val}(A^{-1}) = \text{def}(A);$$

on a d'autre part

$f.1_{\text{def}(A)} = [1_{\text{def}(A)}]_\Phi(f) = [A^{-1}.A]_\Phi(f) = [A^{-1}]_\Phi(A_\Phi(f)) < [A^{-1}]_\Phi(f)$ qui, comparé, à ce qui précède, donne $[A^{-1}]_\Phi(f) = f.1_{\text{def}(A)} < f$, d'où $A^{-1} \in R$.

— Supposons que les A_j appartiennent à R, et que sup $[A_j]$ soit régulier ; alors sup $[A_j]$ est un glissement A, et l'on peut écrire $A_j = 1_{\Omega_j}.A$, $\bigcup_j(\Omega_j) = \text{val}(A)$. Les relations $[A_j]_\Phi(f) < f$ s'écrivent

$$[1_{\Omega_j}]_\Phi . A_\Phi(f) = A_\Phi(f).1_{\Omega_j} < f;$$

par suite la borne supérieure des $A_\Phi(f).1_{\Omega_j}$ est $< f$; or elle s'écrit $A_\Phi(f).1_{\text{val}(A)} = [1_{\text{val}(A)}]_\Phi . A_\Phi(f) = A_\Phi(f)$; donc $A \in R$.

C.Q.F.D.

(15.13) Si le recueil des glissements qui invarient f opère transitivement sur def (f), nous dirons que le champ f est *homogène* (c'est dans ce sens, par exemple, que l'on parle de l'*homogénéité* d'un liquide ou d'un cristal, même anisotrope).

(15.14) — Si tous les glissements invarient un champ f, nous dirons que le champ f est *invariant ;* il revient au même de dire que l'ensemble des $f.1_\Omega$ (Ω ouvert) est une famille invariante ; (c'est cette propriété qui caractérise, en géométrie euclidienne, les milieux « *homogènes et isotropes* »). Un champ invariant est défini sur *tout l'espace ;* mais il est loisible de considérer les champs invariants sur chaque sous-espace ouvert.

Théorème :

Soit Φ une racine d'un univers U, X un point de U, Z un élément de Φ_X ; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(15.15) (a) Z est invariant par le groupe structural de Φ_X.

(b) Il existe un Φ-champ *invariant*, f, défini sur U, tel que $f(X) = Z$.

— Si elles sont vérifiées, le champ f défini par (b) est unique.

1) ♂ (b) ⇒ (a).

2) Supposons (a). Pour tout Y dans U, il existe un glissement A tel que $A(X) = Y$; soit A′ un autre tel glissement ; alors

$$\Phi(A')(X)(Z) = \Phi(A)(X)(\Phi(A^{-1}.A')(X)(Z)) = \Phi(A)(X)(Z);\ \Phi(A)(X)(Z)$$

ne dépend donc que de Y (et pas du choix de A) ; si on l'appelle $f(Y)$, ♂ le champ f est invariant, $f(X) = Z$.

3) Si f^* est aussi un champ invariant tel que $f^*(X) = Z$, il est clair que pour tout glissement A défini en X, $f^*(A(X)) = \Phi(A)(X)(f^*(X)) = f(A(X))$.

C.Q.F.D.

— On voit, en particulier, que tout champ invariant défini sur un ouvert non vide d'un univers est prolongeable, d'une seule façon invariante, à tout l'univers.

Un exemple de champ *homogène* est fourni par le théorème :

Soit G un univers-groupe, Φ une racine de G, Z_0 un point de la fibre de l'élément neutre e de G.

(15.16) Il existe un seul Φ-champ f, défini sur G, *invariant par les translations à gauche*, et tel que $f(e) = Z_0$.

♂ Le champ répondant à la question est donné par la formule

(15.17) $$f(X) = \Phi(T(X))(e)(Z_0)$$

T(X) étant la translation qui transforme e en X.

C.Q.F.D.

Remarques :

— On voit que les champs invariants par les translations à gauche (on dit parfois *invariants à gauche*) correspondent biunivoquement à leurs valeurs à l'origine, qui parcourent la fibre Φ_e ; il en est de même, d'ailleurs, pour les champs invariants à droite.

— On sait que l'on peut remplacer Φ par une racine Ψ, isomorphe à Φ, ayant même fibre en e, et telle que $\Psi(A)(X) = 1_{\Phi_e}$ si A est une translation à gauche (th. 13.10) ; la formule (15.17) qui donne le champ invariant se simplifie alors en

(15.18) $$f(\mathrm{X}) \equiv \mathrm{Z}_0$$

Considérons maintenant un espace E ; une racine Φ ; un point X de E ; deux Φ-champs f et g.

Si f et g ont même *germe* en X, il existe un ouvert Ω, contenant X, tel que $f.1_\Omega = g.1_\Omega$; quel que soit le glissement A défini en X, l'image $\mathrm{A}^+(\Omega)$ est un ouvert, Ω', contenant A(X), tel que $1_{\Omega'}.\mathrm{A} = \mathrm{A}.1_\Omega$; on a donc $\mathrm{A}_\Phi(f).1_{\Omega'} = [1_{\Omega'}]_\Phi.\mathrm{A}_\Phi(f) = [1_{\Omega'}.\mathrm{A}]_\Phi(f) = [\mathrm{A}.1_\Omega]_\Phi(f) = \mathrm{A}_\Phi(f.1_\Omega)$; de même $\mathrm{A}_\Phi(g).1_{\Omega'} = \mathrm{A}_\Phi(g.1_\Omega)$; par suite $\mathrm{A}_\Phi(f).1_{\Omega'} = \mathrm{A}_\Phi(g).1_{\Omega'}$, les champs $\mathrm{A}_\Phi(f)$ et $\mathrm{A}_\Phi(g)$ ont même germe au point A(X). On peut donc définir un opérateur Θ par la relation

(15.19) $$\Theta(\mathrm{A})(\mathrm{X})(\mathrm{germe}_\mathrm{X}(f)) = \mathrm{germe}_{\mathrm{A}(\mathrm{X})}(\mathrm{A}_\Phi(f))$$

Théorème :

δ (15.20) Soit Φ une racine ; l'opérateur Θ, défini par (15.19) (où $\mathrm{A}_\Phi(f)$ est l'image par le glissement A d'un Φ-champ f), est une racine ; nous l'appellerons *racine des germes de Φ-champs.*

(15.21) — Il ne faut pas croire que la racine Θ soit isomorphe à Φ, ni même qu'elle ait même noyau ; en fait, c'est la racine Φ qui est subordonnée à Θ ; on le vérifie aisément, en utilisant l'axiome du choix.

— Un cas particulier important est celui où l'espace E ne comporte que deux ouverts, E et $\varnothing$ (voir le théorème (2.6)) ; les champs non impuissants sont définis *sur* E ; deux champs qui ont même germe en X coïncident ; on peut donc identifier les germes de champs aux champs. D'où l'énoncé :

Soit E un ensemble, muni de la structure d'espace définie par un groupe G de permutations de E.

(15.22) Φ étant une racine de E, on définit une racine Ψ en posant

$$\Psi(\mathrm{A})(\mathrm{X})(f) = \mathrm{A}_\Phi(f)$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$, tout $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$, et tout Φ-champ f.

Il est clair dans ce cas que $\Psi(\mathrm{A})(\mathrm{X})$ ne dépend pas de X, et que toutes les fibres de Ψ sont égales.

§ 16 Constructions de racines

Nous avons déjà rencontré un certain nombre de procédés de construction de racines, dont voici la liste :

— Les racines *triviales* (12.4).

— Les racines obtenues à partir d'un espace fibré sans jauge (12.5).

— Les racines construites à partir d'une racine donnée par *homomorphisme* (13.1) ou *isomorphisme* (13.5) ; le théorème (13.10) en donne un cas particulier important (cas des univers-groupes).

— Les racines déduites (sur un univers) d'une *représentation du groupe des germes de glissements en un point* (14.2) ; on sait que toutes les racines d'un univers s'obtiennent par ce procédé, à un isomorphisme près (14.1).

— Comme cas particulier, les représentations du groupe structural d'une racine Φ [en un point d'un univers] définiront (à un isomorphisme près) toutes les racines *subordonnées* à Φ (14.10).

— Nous avons vu que les *cogermes d'opérateurs* à valeurs dans un espace définissent une racine à laquelle toutes les autres sont subordonnées (14.9).

— A toute racine Φ, nous savons associer canoniquement une nouvelle racine, la racine des *germes de Φ-champs*, à laquelle Φ est subordonnée (15.20).

Voici maintenant la liste des autres méthodes de construction que nous allons étudier dans ce paragraphe :

— Restriction du recueil (16.2).

— Prolongement de l'univers (16.3).

— Sous-racines (16.4), (16.7), (16.10), (16.11).

— Juxtaposition (16.15).
— Produit direct (16.17).
— Racines d'opérateurs (16.20), (16.25).
— Racines principales (16.27).

Changement de recueil :

Soit E un espace ; R le recueil de ses glissements. R′ un recueil contenu dans R.

Il est clair que l'espace de R′ est une partie ouverte E′ de E. Soit Φ une racine de l'espace E ; désignons par Φ′ la *restriction* de Φ à R′, définie par

(16.1) $$\Phi'(A)(X) = \Phi(A)(X) \quad \text{pour tout} \quad A \in R'.$$

Il est clair que Φ′ vérifie les axiomes des racines ; donc :

(16.2) Φ étant une racine d'un espace E, R′, un recueil de glissements de E, la restriction Φ′ de Φ à R′, définie par (16.1), est une racine de l'espace E′ de R′.

— Il est clair que si $X \in E'$, la fibre de Φ′ en X est la même que la fibre de Φ ; que le groupe structural de Φ′ est un *sous-groupe* du groupe structural de Φ sur la même fibre ; que tout Φ′-champ *f* est aussi un Φ-champ.

— Deux racines Φ et Ψ de E, distinctes, peuvent avoir la même restriction à E′, ou bien avoir des restrictions isomorphes alors qu'elles ne l'étaient pas ; leurs restrictions peuvent avoir même noyau, sans que ce soit le cas pour Φ et Ψ [nous en rencontrerons plus loin des exemples, en particulier dans le passage de la Relativité Générale à la Relativité Restreinte]. On voit que la restriction du recueil peut faire confluer des variances ou des noyaux ; le problème inverse est donc en général indéterminé.

Considérons cependant le cas particulier où E est un univers, et où E′ est pourvu de sa structure de sous-espace de E (le recueil R′ est alors constitué, on le sait, des $1_{E'}.A.1_{E'}$, $A \in R$ (2.10)).

Il n'y a évidemment plus confluence de noyaux ou de variance ; l'existence de la solution du problème inverse résulte du théorème suivant :

(16.3) Soit E′ un sous-univers ouvert, non vide, de l'univers E ; Φ′ une racine de E′.

Alors il existe une racine Φ de E, dont la restriction à E′ coïncide avec Φ′ ; elle est unique, à un isomorphisme près.

On peut démontrer ce théorème à partir des théorèmes de représentation ; X étant un point de E′, A un glissement de E′ conservant X, on peut définir une représentation H du groupe des germes en posant $H(\mathrm{germe}_X(A)) = \Phi'(A)(X)$ (th. 14.1) ; or les glissements de E ou de E′ qui conservent X ont mêmes germes ; on a donc défini une représentation H du groupe des germes de E ; il lui correspond (th. (14.2)) une racine Ψ de E, dont la restriction Ψ′ à E′ est isomorphe à Φ′ ; appelons F'_Y l'isomorphisme correspondant, et posons

$$\begin{cases} F_Y = F'_Y & \text{si} \quad Y \in E' \\ F_Y = 1_{\Psi_Y} & \text{si} \quad Y \in E, \quad Y \notin E'. \end{cases}$$

Alors ♁ le transformé Φ de Ψ par l'isomorphisme F_Y répond à la question.

C.Q.F.D.

Sous-racines

Définition, théorème :

Soient Φ et Ψ deux racines d'un espace E.

— Nous dirons que Ψ est une *sous-racine* de Φ si, pour tout glissement A et pour tout X dans def (A)

$$\Psi(A)(X) < \Phi(A)(X)$$

(16.4) — Dans ce cas, la fibre Ψ_X est une *partie* de Φ_X ; ♁ Ψ_X est stable [1] par le groupe structural de Φ en X.

— Soit inversement Φ une racine d'un *univers* E ; X un point de E ; H une partie de la fibre Φ_X non vide et stable par le groupe structural en X ; ♁ il existe alors *une seule sous-racine* Ψ telle que $\Psi_X = H$.

[1] Un ensemble H est dit *stable* par une famille d'opérateurs si les images de H par ces opérateurs sont contenues dans H.

Cet énoncé justifie évidemment le suivant :

— Une racine sera dite *irréductible* si elle n'admet pas d'autre sous-racine qu'elle-même.

(16.5) — Pour qu'une racine d'un univers E soit irréductible, il faut et il suffit qu'en un (resp. tout) point X de E, le groupe structural soit transitif sur la fibre.

(16.6) — Si les fibres d'une racine Φ possèdent une *structure invariante d'espace vectoriel* (12.15), on dira que Ψ est une *sous-racine linéaire* de Φ si Ψ est une sous-racine, et si la fibre de Ψ est un *sous-espace vectoriel ;* ǒ cette structure vectorielle induite sur les fibres de Ψ est invariante.

— On dira que Φ est *linéairement irréductible* si elle ne possède pas d'autre sous-racine linéaire que

1) elle-même ;

2) sa restriction à l'élément nul.

Z Il importe de ne pas confondre l'irréductibilité linéaire avec l'irréductibilité au sens (16.5).

Théorème :

Soit Φ une racine d'un univers E ; Z_0 un point de la fibre de Φ en un point X_0.

ǒ

(16.7) — Il existe *une seule sous-racine irréductible* Φ' de Φ, telle que $Z_0 \in \Phi'_{X_0}$; on dira que Φ' est la sous-racine irréductible *engendrée* par le couple $\begin{pmatrix} X_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$.

— Quel que soit X dans E, la fibre Φ'_X est l'ensemble des $\Phi(A)(X_0)(Z_0)$, A parcourant l'ensemble des glissements tels que $A(X_0) = X$.

— Sur un univers, les sous-racines irréductibles correspondent donc aux classes de transitivité du groupe structural en un point.

(16.8) — Soit Φ une racine irréductible ; si on réduit le recueil des glissements, on réduit aussi à un sous-groupe le groupe structural d'une fibre ; par suite le nombre de classes de transitivité peut augmenter ; *une racine irréductible peut cesser de l'être lorsqu'on restreint le recueil des glissements.*

— Il est clair, si le glissement A conserve X, et si Ψ est une sous-racine de Φ, que la correspondance

$$\Phi(A)(X) \to \Psi(A)(X) \; [= \Phi(A)(X) . 1_{\Psi_X}]$$

est un homomorphisme de groupe ; donc que (th. 14.10) :

(16.9) Toute sous-racine Ψ d'une racine Φ est subordonnée à Φ.

Exemples de sous-racines :

Exemple I. — Considérons une racine Φ de l'espace E ; une *famille invariante* $\mathcal{F}$ de Φ-champs (def. (15.9)) ; désignons par Ω_X l'ensemble des germes en X d'éléments de $\mathcal{F}$.

Soit Z un élément de Ω_X : $Z = \mathrm{germe}_X(f)$, $f \in \mathcal{F}$. Θ désignant la racine des germes de Φ-champs (15.20), on a évidemment

$\Theta(A)(X)(Z) = \Theta(A)(X) \; (\mathrm{germe}_X \; (f)) = \mathrm{germe}_{A(X)}(A_\Phi(f)) \in \Omega_{A(X)}$;

donc :

(16.10) Soit Φ une racine d'un espace E ; Θ la racine des germes de Φ-champs. A toute famille invariante $\mathcal{F}$ de Φ-champs correspond une sous-racine de Θ, obtenue par restriction de $\Theta(A)(X)$ aux germes en X d'éléments de $\mathcal{F}$.

Exemple II. — Soit X un point d'un espace E ; G_X l'ensemble des cogermes en X de glissements de E ; Z un élément de G_X : $Z = \mathrm{cogerme}_X(B)$, B = glissement de E.

La définition (14.8) de la racine Φ des cogermes donne

$$\Phi(A)(X)(Z) = \Phi(A)(X)\,(\text{cogerme}_X(B)) = \text{cogerme}_{A(X)}(A.B) \in G_{A(X)}$$

pour tout glissement A défini en X ; donc :

(16.11) La racine Φ des cogermes d'un espace E (14.8) admet une *sous-racine* qui s'obtient en restreignant $\Phi(A)(X)$ aux cogermes en X de glissements.

(16.12) — ǒ Cette racine des *cogermes de glissements* est *irréductible ;* elle admet, comme la racine Φ, le plus petit noyau ; *toutes les racines de* E *lui sont donc subordonnées.*

— Considérons maintenant une racine quelconque Φ d'un espace E ; une sous-racine Ψ de E.

Soit f un Ψ-champ ; quel que soit X dans def (f), $f(X)$ est un élément de Ψ_X, donc de Φ_X. Si A est un glissement de E, on a

$$A_\Psi(f)(A(X)) = \Psi(A)(X)(f(X)) = \Phi(A)(X)(f(X)) = A_\Phi(f)(A(X))\,;$$

d'où :

(16.13) Si Ψ est une sous-racine d'une racine Φ, l'on a pour tout glissement A

$$A_\Psi < A_\Phi\,;$$

l'ensemble des Ψ-champs est une *famille invariante de Φ-champs.*

(16.14) — Application : supposons qu'en un point X_0 d'un univers U, il existe un élément Z_0 de la fibre de Φ, invariant par le groupe structural. Il existe alors (th. (16.4)) une sous-racine Ψ de Φ, admettant Z_0 tout seul comme fibre en X_0 ; ǒ sa fibre en tout point X de E se réduit à un seul point, que l'on peut appeler $f(X)$. Il est clair que f est un *champ invariant* (15.14). Inversement , ǒ si f est un Φ-champ invariant, $f(X)$ est invariant par le groupe structural de Φ [en tout point X].

Juxtaposition

Théorème, définition :

Soient ${}^j\Phi$ des racines d'un même espace E, dont les fibres en tout point X de E sont deux à deux disjointes ; désignons par Φ_X la réunion de ces fibres.

Si l'on pose, Z appartenant à Φ_X

(16.15)

$$\Phi(A)(X)(Z) = {}^j\Phi(A)(X)(Z)$$

l'indice j étant choisi pour que le second membre ait un sens, ǒ on définit ainsi une racine Φ, dont la fibre en X est Φ_X, et qui admet les ${}^j\Phi$ comme sous-racines. On dira que Φ est la *juxtaposition des racines* ${}^j\Phi$.

— ǒ Sur un univers, toute racine est égale à la juxtaposition de ses sous-racines irréductibles.

Remarque : si on se donne des racines ${}^j\Phi$ quelconques, on pourra toujours construire des racines isomorphes ${}^j\Phi'$, dont les fibres sont disjointes en tout point X de E ; par exemple en posant

(16.16) $${}^j\Phi'(A)(X)\begin{pmatrix} j \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ {}^j\Phi(A)(X)(Z) \end{pmatrix}$$

et ensuite construire, comme en (16.15), la juxtaposition des ${}^j\Phi'$.

Produit direct

Considérons deux racines ${}^1\Phi$ et ${}^2\Phi$ d'un espace E ; il est clair que si ${}^1Z$ et ${}^2Z$ appartiennent à leurs fibres en X, et si le glissement A est défini en X, ${}^1\Phi(A)(X)({}^1Z)$ et ${}^2\Phi(A)(X)({}^2Z)$ appartiendront à leurs fibres en A(X) ; si l'on pose

(16.17) $$\Phi(A)(X)\begin{pmatrix} {}^1Z \\ {}^2Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\Phi(A)(X)({}^1Z) \\ {}^2\Phi(A)(X)({}^2Z) \end{pmatrix}$$

ô on définit ainsi une racine Φ dont la fibre en un point X est le produit direct (ensemble des couples) des fibres de ${}^1\Phi$ et ${}^2\Phi$. Plus généralement :

Soient ${}^j\Phi$ des racines d'un même espace E. Il existe une racine Φ dont la fibre en X est le produit direct des $[{}^j\Phi]_X$, et qui est définie
(16.18) par [1]

$${}^j[\Phi(A)(X)(Z)] = {}^j\Phi(A)(X)({}^jZ)$$

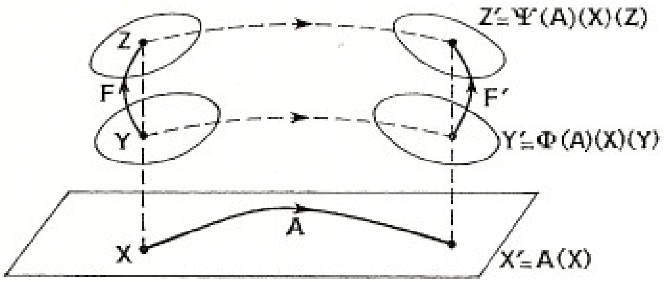
Φ s'appellera *produit direct* des racines ${}^j\Phi$.

— Ne pas confondre avec la juxtaposition des racines ${}^j\Phi$, dont la fibre est la réunion des $[{}^j\Phi]_X$.

— Il est clair qu'un Φ-champ définit un ${}^j\Phi$-champ pour chaque valeur de j.

Racines d'opérateurs

Soient Φ et Ψ deux racines d'un même espace E ; désignons par Θ_X l'ensemble des opérateurs qui appliquent une partie de Φ_X dans Ψ_X. Supposons que $F \in \Theta_X$, $Y \in \mathrm{def}\,(F)$. Alors $Z = F(Y) \in \Psi_X$.



[1] Nous désignerons généralement par ${}^jY$ l'élément du produit direct Y dont l'indice est j ; soit, dans le cas d'un produit fini :

$$Y = \begin{pmatrix} {}^1Y \\ {}^2Y \\ \cdots \\ {}^nY \end{pmatrix}$$

Effectuons un glissement A ; X devient $X' = A(X)$; Y et Z deviennent respectivement $Y' = \Phi(A)(X)(Y)$ et $Z' = \Psi(A)(X)(Z)$; l'opérateur F′ qui fait passer de Y′ à Z′, et que nous pouvons appeler $\Theta(A)(X)(F)$, est donc défini par

$$\Theta(A)(X)(F)(\Phi(A)(X)(Y)) = \Psi(A)(X)(F(Y))$$

ou encore

(16.19) $$\Theta(A)(X)(F) = \Psi(A)(X).F.[\Phi(A)(X)]^{-1}$$

ô l'opérateur Θ ainsi défini est une racine ; d'où l'énoncé :

Soient Φ et Ψ deux racines d'un espace E.

Si $X \in E$ et si l'on appelle Θ_X l'ensemble des opérateurs qui appli-
(16.20) quent une partie de la fibre Φ_X dans la fibre Ψ_X, il existe une racine Θ, dont la fibre en X est Θ_X, et qui est définie par (16.19). Nous dirons que Θ est la *racine des opérateurs de Φ à Ψ*.

— Il est clair que Θ admet beaucoup de *sous-racines* : on en obtient en se restreignant aux éléments de Θ_X qui sont définis *sur* Φ_X, ou bien dont l'ensemble de valeurs est Ψ_X *tout entier*, à ceux qui sont *réguliers*, etc.

— On peut bien entendu prendre $\Phi = \Psi$. Un autre cas important est celui où l'on considère des opérateurs F définis (resp. prenant leurs valeurs) dans un ensemble fixe H ; ceci revient à prendre Φ (resp. Ψ) *trivial ;* la formule (16.19) devient évidemment :

(16.21) $$\Theta(A)(X)(F) = \Psi(A)(X).F$$

resp.

(16.22) $$\Theta(A)(X)(F) = F.[\Phi(A)(X)]^{-1}$$

(si Φ et Ψ sont tous deux triviaux, Θ l'est aussi).

Théorème :

(16.23) Soient Φ et Ψ deux racines d'un espace E ; f un champ d'opérateurs de Φ à Ψ, défini sur E. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) f est un *champ invariant ;*

(*b*) f est un *homomorphisme* d'une *sous-racine* de Φ à une *sous-racine* de Ψ.

1) Supposons que f soit un homomorphisme de Φ à Ψ (le cas des sous-racines s'y ramenant immédiatement) ; soit Θ la racine des opérateurs de Φ à Ψ ; on a, par définition de Θ :

$$A_\Theta(f)(A(X)) = \Theta(A)(X)(f(X)) = \Psi(A)(X).f(X).[\Phi(A)(X)]^{-1}$$

(définitions (15.2) et 16.19))

$= f(A(X))$ (définition (13.1) des homomorphismes, avec la notation $f(X)$ au lieu de F_X)

d'où $A_\Theta(f) < f$; f est bien un champ invariant (définitions (15.14), (15.12)).

2) Soit f un Θ-champ invariant ; le même calcul conduit à l'identité

$$\Psi(A)(X).f(X) = f(A(X)).\Phi(A)(X)$$

où l'on peut remplacer $\Psi(A)(X)$ par $\Psi'(A)(X) = \Psi(A)(X).1_{\mathrm{val}(f(X))}$, $\Phi(A)(X)$ par $\Phi'(A)(X) = 1_{\mathrm{def}(f(A(X)))}.\Phi(A)(X)$. δ la formule

$$\Psi'(A)(X).f(X) = f(A(X)).\Phi'(A)(X)$$

montre que Ψ' et Φ' sont des sous-racines de Ψ et Φ, et donne évidemment $\Psi'(A)(X) = [f(A(X)).\Phi'(A)(X)]/f(X)$, ce qui est bien la définition (13.1) des homomorphismes de Φ' à Ψ'.

C.Q.F.D.

— Considérons trois racines ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ et Ψ d'un même espace E. Nous savons qu'il existe une racine Θ_0 des opérateurs de ${}^2\Phi$ à Ψ ; il existe aussi une racine Θ des opérateurs de ${}^1\Phi$ à Θ_0. On voit que

— X étant un point de E, la fibre Θ_X est composée des opérateurs F tels que

(16.24) $$F(Z)(Z') \in \Psi_X$$

pour certains couples Z, Z' ($Z \in [{}^1\Phi]_X$, $Z' \in [{}^2\Phi]_X$).

— A étant un glissement, on a

(16.25) $$\Theta(A)(X)(F)({}^1\Phi(A)(X)(Z))({}^2\Phi(A)(X)(Z')) = \Psi(A)(X)(F(Z)(Z'))\,;$$

nous dirons que Θ est une racine d'*opérateurs doubles ;* par itération, on construira les racines d'*opérateurs multiples.*

(16.26) — Considérons deux racines Φ et Ψ d'un espace E, dont les fibres sont pourvues d'une *structure vectorielle invariante* [ce qui signifie que les articles $\Phi(A)(X)$ et $\Psi(A)(X)$ sont toujours des opérateurs linéaires].

Considérons la racine Θ des opérateurs de Φ à Ψ (16.20) ; soit F un élément de Θ_X. La formule (16.19) montre que la structure vectorielle de l'ensemble des opérateurs qui appliquent Φ_X dans Ψ_X est une *structure invariante ;* que les *opérateurs linéaires de* Φ_X *à* Ψ_X *forment une sous-racine de* Θ, pourvue elle aussi d'une structure vectorielle invariante.

Théorème :

δ

(16.27) Soit U un univers ; Φ une racine de U ; 0 un point de U.

1) Il existe une *racine* Ψ définie par

$$\Psi(A)(B(0))(\Phi(B)(0)) = \Phi(A.B)(0)$$

pour tous les glissements A et B de U tels que $0 \in \mathrm{def}\,(A.B)$;

2) les éléments de la fibre Ψ_X sont les *opérateurs* S qui se mettent sous la forme $\Phi(B)(0)$, B étant un glissement tel que $B(0) = X$. Si $S \in \Psi_X$, on a

$$\Psi(A)(X)(S) = [\Phi(A)(X)].S$$

3) La fibre Ψ_0 est le *groupe structural* de la fibre Φ_0.

4) Ψ est *irréductible.*

5) Les racines Ψ et Φ ont *même noyau* en tout point de U.

6) Si l'on pose, pour tous σ, X, S ($\sigma \in \Psi_0$, $X \in U$, $S \in \Psi_X$)

$$\hat{\sigma}\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ S.\sigma^{-1} \end{pmatrix}$$

la correspondance $\sigma \to \hat{\sigma}$ est une *représentation régulière* du groupe Ψ_0 sur l'espace fibré U^{Ψ};

7) U^{Ψ} possède une structure d'*univers fibré principal*, ayant pour groupe principal l'ensemble des $\hat{\sigma}$ définis en 6).

8) Si l'on pose, pour tout opérateur f défini sur Ψ_X et pour tout glissement A de U

$$\Theta(A)(X)(f) = f.[\Psi(A)(X)]^{-1}$$

on définit une *racine* Θ.

9) Soit $\mathfrak{R}$ une représentation du groupe Ψ_0; H l'ensemble sur lequel elle opère.

On obtient une *sous-racine* Θ' de Θ en restreignant $\Theta(A)(X)$ aux opérateurs f tels que

$$\text{val}\,(f) = H, \quad f(S.\sigma^{-1}) = \mathfrak{R}(\sigma)(f(S))$$

(pour tous $S \in \Psi_X$, $\sigma \in \Psi_0$).

10) Soit Φ' une racine subordonnée à Φ.

Il existe, pour tout X de U, un opérateur F_X tel que

$$F_X(\Phi'(B)(0)(Z))(\Phi(B)(0)) = Z$$

pour tout $Z \in \Phi'_0$ et tout glissement B tel que $B(0) = X$.

11) F_X est un *isomorphisme* de la racine Φ' à la racine Θ' définie en 9), $\mathfrak{R}$ étant la représentation telle que

$\Phi'(A)(0) = \mathfrak{R}(\Phi(A)(0))$ pour tout glissement A conservant 0.

On voit que l'on peut associer à toute racine Φ une racine Θ telle que les racines subordonnées à Φ soient isomorphes à une sous-racine de Θ; en prenant en particulier pour Φ la racine des cogermes de glissements (16.12), on construit donc une racine Θ dont les sous-racines ont *toutes les variances*.