CHAPITRE II

Espaces fibrés

§ 6 Quotients d'opérateurs

Notations :

Soit E un ensemble, A un opérateur.

Nous poserons

(6.1) $A^+(E) = \mathrm{val}\,(A\,.\,1_E)$

$A^-(E) = \mathrm{def}\,(1_E\,.\,A)$

L'ensemble $A^+(E)$ s'appelle *image* de E par A ; l'ensemble $A^-(E)$ *image réciproque* de E par A.

ȯ On a les formules

(6.2)
$$[A\,.B]^+ = A^+.B^+ \qquad [A\,.B]^- = B^-.A^-$$
$$A^-(\bigcup_j E_j) = \bigcup_j A^-(E_j) \qquad A^-(\bigcap_j E_j) = \bigcap_j A^-(E_j)$$

— On écrit souvent, par abus de notations, A et A^{-1} au lieu de A^+ et A^-.

— Nous conviendrons d'identifier tout ensemble ne contenant qu'un élément avec cet élément lui-même.

Définition :

(6.3) On appellera *fibres* d'un opérateur A les images réciproques par A des éléments de val (A).

Théorème :

ό

(6.4) — La réunion des fibres de A est égale à def (A).

— Si $X \in$ def (A), il existe *une seule fibre* contenant X, soit $A^{-}(A(X))$.

— Il est clair que la relation $\sim$, définie sur l'ensemble def (A) par

(6.5)
$$[X \sim Y] \Leftrightarrow [A(X) = A(Y)]$$

est une *équivalence* (relation réflexive, symétrique et transitive), et que les *classes* suivant la relation $\sim$, définies par

(6.6)
$$[Y \in \text{classe}\,(X)] \Leftrightarrow [X \sim Y]$$

sont les *fibres* de A.

Inversement, si $\sim$ est une équivalence définie sur un ensemble E, il existe un opérateur A vérifiant (6.5) ; notamment l'opérateur *canonique* « classe », défini par la relation (6.6).

Définition, théorème :

Soient A et B deux opérateurs.

ό — Nous dirons que A est *divisible* par B s'il existe un opérateur C tel que

$$\diamondsuit \qquad A < C.B$$

— Si A est divisible par B, il existe un opérateur appelé *quotient* de A par B, noté A/B, et caractérisé par

$$\heartsuit \qquad [A/B]^{+} = A^{+}.B^{-}$$

(6.7) A/B est *le plus petit* opérateur C vérifiant $\diamondsuit$.

— Pour que A soit divisible par B, il faut et il suffit que

$$\clubsuit \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{def}\,(A) \subset \text{def}\,(B) \\ \begin{bmatrix} X, Y \in \text{def}\,(A) \\ B(X) = B(Y) \end{bmatrix} \Rightarrow [A(X) = A(Y)] \end{array} \right.$$

— Il est commode de remarquer, *si* A *est divisible par* B, que

(6.8)
$$\text{def}\,(A/B) \subset \text{val}\,(B) \qquad \text{val}\,(A/B) = \text{val}\,(A)$$
$$[Y = [A/B](X)] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Il existe Z tel que} \\ Y = A(Z),\; X = B(Z) \end{bmatrix}$$

(6.9) — Si B est *régulier*, la condition (6.7 ♣) se réduit à def (A) $\subset$ def (B) ; on a alors

$$A/B = A.B^{-1}$$

Définition, Théorème :

ό Soient A et B deux opérateurs.

Nous dirons que A est *multiple* de B s'il existe un opérateur C tel que

$$\diamondsuit \qquad A = C.B$$

(6.10) — Si A est multiple de B, le plus petit opérateur C vérifiant $\diamondsuit$ est égal à A/B.

— Pour A soit multiple de B, il faut et il suffit que

$$\clubsuit \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{def}\,(A) \subset \text{def}\,(B) \\ \begin{bmatrix} X \in \text{def}\,(A) \\ B(X) = B(Y) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y \in \text{def}\,(A) \\ A(X) = A(Y) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

— Il importe de bien faire le parallèle entre les énoncés (6.7) et (6.10). En particulier, A peut être *divisible* par B sans être *multiple* de B ; c'est le cas avec $A(x) = x$ pour $x \geqslant 0$, $B(x) = x^2$ pour réel.

Définition :

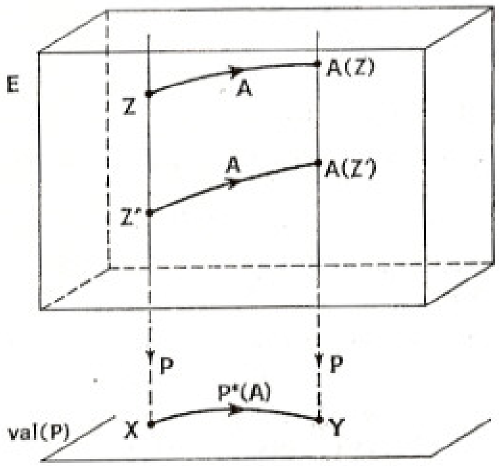
(6.11) Soit P un opérateur défini sur un ensemble E ; A un opérateur tel que def (A) $\subset$ E, val (A) $\subset$ E.
— Nous dirons que A est *toléré* par P si P.A est *divisible* par P ; le quotient [P.A]/P s'appellera *transmuté* de A par P, nous le noterons P*(A).
— Nous dirons que A est *permis* par P si P.A est *multiple* de P.

Notons que P*(A) applique une partie de val (P) dans val (P).

En appliquant (6.7 ♣) et (6.10 ♣), on voit que :

(6.12) $$[\text{A toléré}] \Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} Z, Z' \in \text{def}(A) \\ P(Z) = P(Z') \end{bmatrix} \Rightarrow [P(A(Z)) = P(A(Z'))] \right\}$$

(6.13) $$[\text{A permis}] \Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} Z \in \text{def}(A) \\ P(Z) = P(Z') \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Z' \in \text{def}(A) \\ P(A(Z)) = P(A(Z')) \end{bmatrix} \right\}$$



— Les opérateurs *permis* par P sont donc les opérateurs *tolérés* par P dont l'ensemble de définition est une *réunion de fibres* de P.

— Si A est toléré (ou permis), la formule (6.8) montre que

(6.14) $$[Y = P^*(A)(X)] \Leftrightarrow \left[\text{il existe Z tel que} \left\{ \begin{matrix} X = P(Z) \\ Y = P(A(Z)) \end{matrix} \right\}\right]$$

— Il résulte aussi de (6.7 ♡) et de (6.2) que

(6.15) $$[P^*(A)]^+ = [P.A]^+.P^- = P^+.A^+.P^-$$

Théorèmes :

(6.16) Si A et B sont *tolérés* par P, A.B est *toléré* par P, et
$$P^*(A.B) < P^*(A).P^*(B)$$

(6.17) Si A et B sont *permis* par P, A.B est *permis* par P, et
$$P^*(A.B) = P^*(A).P^*(B)$$

(6.18) Nous dirons que A est *bi-toléré* (resp. *bi-permis*) par P si A est régulier, et si A et A^{-1} sont tolérés (resp. permis) par P.
— Si A est *bi-toléré* (resp. *bi-permis*) P*(A) est régulier, et
$$[P^*(A)]^{-1} = P^*(A^{-1})$$

(6.19) Si E' est une partie de def (P), $1_{E'}$ est *toléré* par P, et l'on a
$$P^*(1_{E'}) = 1_{P^*(E')}$$
— Pour que $1_{E'}$ soit permis, il faut et il suffit que E' soit une réunion de fibres de P.

(6.20) $$[\text{B toléré par P, } A < B] \Rightarrow [\text{A toléré par P, } P^*(A) < P^*(B)]$$

Si les A_j forment une *famille compatible d'opérateurs permis* par P, alors

(6.21) — $\sup_j (A_j)$ est *permis* par P ;

— les $P^*(A_j)$ sont *compatibles* ;

— $\sup_j [P^*(A_j)] = P^* (\sup_j [A_j])$.

Corollaire :

(6.22) Les opérateurs *bi-tolérés* (resp. *bi-permis*) par P forment un *pré-recueil* (resp. un *recueil*) d'espace def (P).

§ 7 Définition des espaces fibrés

Définition :

Soit E un espace ; $\mathfrak{R}$ le recueil de ses glissements ; P un opérateur défini sur E.

(7.1) — Nous dirons que P est une *projection* de E si tous les éléments de $\mathfrak{R}$ sont *permis* par P.

— Nous appellerons *espace fibré* tout espace E sur lequel nous aurons choisi une projection P.

Si E est un espace fibré, le recueil $\mathfrak{R}$ de ses glissements est donc un sous-recueil du recueil des opérateurs bi-permis par P (voir 6.22).

Théorème, définition :

Soit E un *espace fibré* ; $\mathfrak{R}$ le recueil de ses glissements ; P sa projection.

(7.2) — L'ensemble $P^{*+}(\mathfrak{R})$ des opérateurs $P^*(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ est un *pré-recueil* d'espace val (P) ;

— On appellera *base* de E l'ensemble val (P), muni de la structure d'espace définie par le pré-recueil $P^{*+}(\mathfrak{R})$ (voir 2.1).

En effet, deux éléments quelconques $P^*(A)$ et $P^*(B)$ de $P^{*+}(\mathfrak{R})$ vérifient

$$P^*(A).P^*(B) = P^*(A.B) \in P^{*+}(\mathfrak{R}) \text{ (th. 6.17)}$$

et $$P^*(A^{-1}) = [P^*(A)]^{-1} \in P^{*+}(\mathfrak{R}) \text{ (th. 6.18)} ;$$

enfin, comme $\text{val}(P) = P^+(E)$, $1_{\text{val}(P)} = P^*(1_E) \in P^{*+}(\mathfrak{R})$ (th. 6.19).

C.Q.F.D.

Remarques :

— Grâce à cette structure d'espace de la base, *la projection est continue.*

(7.3) — On appelle *fibration* d'un espace E toute équivalence $\sim$, définie sur E, telle que l'opérateur canonique P :

$$P(X) = \text{classe de } X \text{ suivant } \sim$$

soit une *projection* ; une fibration de E lui donne donc une structure d'*espace fibré*, de projection P, dont les fibres sont les classes suivant $\sim$; la base est l'*ensemble des fibres* (et non la *réunion* des fibres !) ; on l'appellera *espace quotient* de E par la fibration $\sim$.

(7.4) — Si P est une projection d'un espace E, la relation

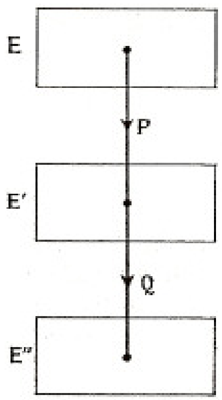
$$[X \sim X'] \Leftrightarrow [P(X) = P(X')]$$

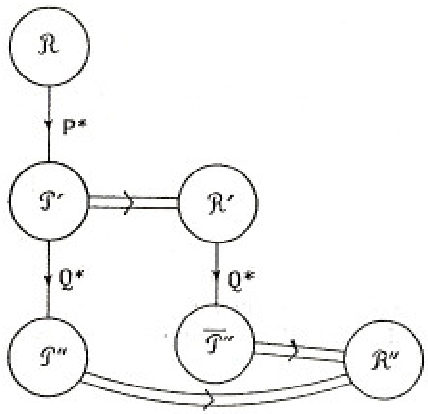
est une *fibration* de E ; la base $P^+(E)$ est un espace *isomorphe* à l'espace quotient de E par $\sim$.

(7.5) — Dans un espace fibré, *tout ouvert est une réunion de fibres* (th. 6.19) ; les espaces fibrés dont une fibre a plus d'un point *ne sont donc pas séparés.*

(7.6) — Si A est un glissement de la base $P^+(E)$, nous appellerons *relèvement* de A tout glissement B de E tel que A soit le transmuté de B ; le théorème (7.2) montre que les glissements de la base qui possèdent un relèvement forment un pré-recueil, qui engendre le recueil des glissements. Mais on peut construire des exemples d'espaces fibrés tels que les glissements de la base ne possèdent pas tous de relèvements, bien qu'ils soient *localement relevables* [1]. A est donc un glissement de la base $P^{+}(E)$ s'il est *borne supérieure régulière de transmutés de glissements* de E (1.21).

(7.7) — Si l'espace fibré E est un univers, il est clair que sa base est aussi un univers; la réciproque *n'est pas vraie.*





Soit E un espace fibré; $\mathfrak{R}$ le recueil de ses glissements; P sa projection; E′ sa base.

On sait que le transmuté $P^{*+}(\mathfrak{R})$ du recueil $\mathfrak{R}$ est un pré-recueil $\mathfrak{T}'$, et que le recueil $\mathfrak{R}'$ des glissements de E′ est constitué par les bornes supérieures régulières de parties de $\mathfrak{T}'$ (7.6).

Soit Q une application de E′ sur un ensemble E″ telle que *les éléments de $\mathfrak{T}'$ soient permis par* Q. Le théorème (6.21) montre que les éléments de $\mathfrak{R}'$ sont permis par Q, donc que Q est une *projection* de E′.

D'autre part, les ensembles $Q^{*+}(\mathfrak{T}')$ et $Q^{*+}(\mathfrak{R}')$ sont deux pré-recueils $\mathfrak{T}''$ et $\overline{\mathfrak{T}}''$; le même théorème (6.21) montre que les éléments de $\overline{\mathfrak{T}}''$ appartiennent au recueil $\mathfrak{R}''$ engendré par $\mathfrak{T}''$, donc que $\mathfrak{T}''$ et $\overline{\mathfrak{T}}''$ engendrent le même recueil $\mathfrak{R}''$.

[1] Voir ci-dessous, (10.34) et la suite.

— Soit A un élément de $\mathfrak{R}$; A étant permis par P, on a (6.10)

$$P.A = P^{*}(A).P\,;$$

$P^{*}(A)$ étant permis par Q, on a de même

$$Q.[P^{*}(A)] = Q^{*}(P^{*}(A)).Q, \text{ d'où}$$
$$Q.P.A = Q^{*}(P^{*}(A)).Q.P$$

ce qui montre que A est *permis par* Q.P, et que $[Q.P]^{*}(A) < Q^{*}(P^{*}(A))$; en fait, ô $[Q.P]^{*}(A) = Q^{*}(P^{*}(A))$; $\mathfrak{T}''$ est donc l'image de $\mathfrak{R}$ par $[Q.P]^{*}$.

D'où le théorème :

Soit E un espace; P une projection de E sur l'espace E′; Q une projection de E′ sur l'espace E″.

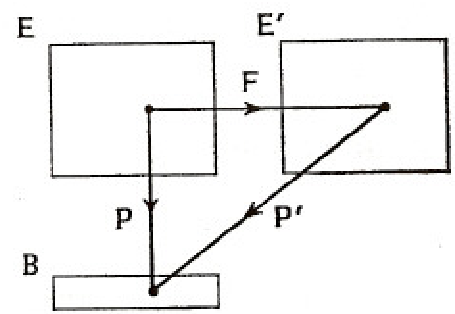
(7.8) Alors Q.P est une *projection* de E sur E″; les deux structures de E″ (base de E pour la projection Q.P; base de E′ pour la projection Q) *coïncident.*

Inversement, on démontre sans difficulté que :

Soient Π et P deux projections d'un même espace E, telles que

(7.9) Π soit *divisible* par P; alors le quotient $Q = \Pi/P$ est une *projection de* la base $P^{+}(E)$ sur la base $\Pi^{+}(E)$.

(7.10) Considérons en particulier un espace fibré E, de projection P, de base B, et un opérateur régulier F, défini sur E. Il est clair que F est une projection de E; A étant un glissement de E, $F^{*}(A)$



est égal à $F.A.F^{-1}$ (6.9); par suite, F est un *isomorphisme* de l'espace E à l'espace $E' = \mathrm{val}(F)$ (3.2).

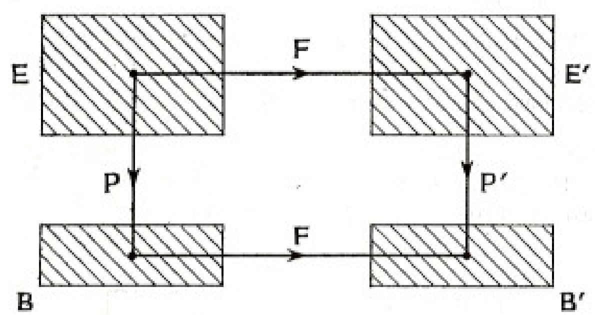
Par ailleurs, P est visiblement divisible par F; le quotient

$$P' = P/F = P.F^{-1}$$

est une projection de E′ sur la base B; nous dirons que les espaces E (fibré par P) et E′ (fibré par P′) sont des *espaces fibrés de base* B *isomorphes*.

Plus généralement, si P est divisible par une projection F, le théorème (7.9) nous permettra de dire que F est un *homomorphisme d'espace fibré de base* B.

Il ne faut pas confondre avec les *homomorphismes* (ou *isomorphismes*) *d'espace fibré;* le lecteur définira un tel homomorphisme F à partir du diagramme commutatif suivant (où chaque flèche représente une projection) :



§ 8 Groupe structural - Jauge

Définition :

(8.1) Soit E un espace fibré. Nous appellerons *article* de E tout opérateur qui est la restriction d'un glissement à une fibre.

Les glissements de E étant bi-permis (7.1), la formule (6.13) montre que :

(8.2) — Tout article non impuissant est une application régulière d'une fibre sur une fibre;
— Les articles de E forment un pré-recueil d'espace E.

Par conséquent :

(8.3) Si Φ est une fibre de l'espace fibré E, les articles A tels que

$$\mathrm{def}(A) = \mathrm{val}(A) = \Phi$$

forment un *groupe de permutations* de Φ; ce groupe s'appelle *groupe structural* de la fibre Φ.

(8.4) On peut remarquer que le recueil des glissements de la fibre Φ (considérée comme *sous-espace* de E, voir (2.9)) se compose du groupe structural et de l'opérateur impuissant.

Définition :

(8.5) — Nous appellerons *structure invariante* d'un espace fibré E une structure définie sur chaque fibre de E (structure d'espace, structure topologique, structure vectorielle, etc...) de sorte que les *articles* en soient des *isomorphismes*.

En particulier, les éléments du groupe structural d'une fibre doivent être des *automorphismes* de cette fibre. Réciproquement, indiquons le théorème :

(8.6) Soit E un espace fibré *dont la base est un univers*.
Supposons que l'on ait défini sur une fibre Φ_0 une structure d'espace (resp. d'espace topologique, d'espace vectoriel, etc...) telle que les éléments du groupe structural de Φ_0 en soient des *automorphismes* (resp. continus, linéaires, etc...); on peut alors prolonger, *d'une seule façon*, cette structure de Φ_0 par une *structure invariante* de toutes les fibres de E.

Définition :

Soit E un espace fibré ; P sa projection.

(8.7) On appellera *glissement de jauge* de E tout glissement A tel que

$$P^*(A) < 1_{P^+(E)}$$

c'est-à-dire tout glissement qui *conserve globalement les fibres.*

Théorèmes :

δ (8.8) Soit E un espace fibré ; R le recueil de ses glissements.
L'ensemble R′ des glissements de jauge de E est un *sous-recueil* de R ; il définit sur E la même topologie que R.

δ (8.9) Soit E un espace fibré ; Φ une fibre de E.
Les *articles de jauge* de Φ (restriction à Φ des glissements de jauge définis en un point de Φ) forment un *sous-groupe distingué* du groupe structural de Φ ; on l'appellera *groupe de jauge* de Φ.

δ (8.10) Soit E un espace fibré ; P sa projection.
Désignons par $\mathfrak{J}(X)$ la *classe de jauge* d'un point X de E :
$[Y \in \mathfrak{J}(X)] \Leftrightarrow$ [Il existe un glissement de jauge A tel que $Y = A(X)$]
Alors $\mathfrak{J}$ est une *projection* de E, qui *divise* P (voir 7.9) ; dans l'espace $\mathfrak{J}^+(E)$ des classes de jauge, fibré par la projection quotient $P/\mathfrak{J}$, le groupe de jauge de chaque fibre se réduit à l'opérateur identique.

Théorème :

(8.11) Soit E un espace fibré de base E′ ; P la projection.
Les conditions (*a*) et (*b*) sont équivalentes :
(*a*) — Le groupe de jauge de chaque fibre de E se réduit à l'unité.
(*b*) — Quel que soit le glissement A′ de E′, il existe *un seul* glissement A de E tel que $P^*(A) = A'$.
Nous dirons alors que E est un espace fibré *sans jauge.*

Démonstration :

1) δ (*b*) ⇒ (*a*).

2) Supposons (*a*) ; soit A′ un glissement de E′ ; il existe des glissements A_j de E tels que $A' = \sup P^*(A_j)$ (voir (7.6)) ;

on a $\quad P^*(A_j^{-1}.A_k) = P^*(A_j)^{-1}.P^*(A_k)$ (th. (6.17) et (6.18))
$< A'^{-1}.A'$ (1.17)
$< 1_{E'}$.
$A_j^{-1}.A_k$ est donc un glissement de jauge ; il résulte de la condition (*a*) que $A_j^{-1}.A_k < 1_E$.

On voit de même que $A_k.A_j^{-1} < 1_E$; δ ces deux conditions sont suffisantes (et d'ailleurs nécessaires) pour que les A_j soient compatibles, ainsi que les A_j^{-1}, et que $\sup(A_j^{-1}) = \sup(A_j)^{-1}$; l'opérateur $A = \sup(A_j)$ est donc un glissement de E (comme borne supérieure régulière de glissements), et l'on a (th. (6.21)) $P^*(A) = \sup P^*(A_j) = A'$; A est un relèvement de A′.

Reste à montrer l'unicité ; si l'on a aussi $P^*(B) = A'$, B et A ont même ensemble de définition $P^-(\mathrm{def}(A'))$; $B^{-1}.A$ est un glissement de jauge, donc l'opérateur identique sur $P^-(\mathrm{def}(A'))$; alors $B = A$.

C.Q.F.D.

§ 9 Espaces fibrés principaux

Théorème, définition :

δ (9.1) — Soit E un espace ; G un groupe de permutations de E qui *commutent* avec tous les glissements de E ; P un opérateur défini sur E, dont les fibres sont les *classes de transitivité* de G :
◇ $[P(X) = P(Y)] \Leftrightarrow$ [Il existe g dans G tel que $Y = g(X)$]
— Alors P est une *projection* de E ; on dira que E est un *espace fibré principal*, de *groupe principal* G.

— Remarque : on peut en particulier prendre pour P la projection canonique définie à partir de G par

(9.2) $\quad [X \in P(Y)] \Leftrightarrow$ [il existe g dans G tel que $Y = g(X)$] ;

alors la base est E/G, qui se trouve ainsi muni d'une structure d'espace (on l'appellera *espace quotient de l'espace* E *par le groupe principal* G).

Théorème :

δ (9.3) Soit E un espace; $\mathcal{R}$ le recueil de ses glissements; G un groupe de permutations de E.

— L'ensemble $\mathcal{R}_G$ des éléments de $\mathcal{R}$ qui commutent avec tous les éléments de G (cet ensemble s'appelle *commutant* de G dans $\mathcal{R}$) est un *recueil*.

Le recueil $\mathcal{R}_G$, le groupe G et un opérateur P vérifiant (9.1 ◇) donnent donc à E une structure d'*espace fibré principal*; mais il importe de ne pas confondre les recueils $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_G$.

Théorème :

δ (9.4) Soit E un *univers* fibré principal, G son groupe principal, Φ une fibre de E.

Il existe alors une application régulière F de Φ sur G, telle que le transmuté par F du *groupe principal* G (resp. du *groupe structural* de Φ) soit le groupe des *translations à gauche* (resp. des *translations à droite*) de G.

§ 10 Revêtements

Définition :

(10.1) Soit E un espace.

— On appellera *groupe discret* de E tout groupe G de glissements globaux de E, tel que tout point X de E appartienne à un ouvert U vérifiant

◇ $$[Y \in U, \quad g \in G, \quad g(Y) \in U] \Rightarrow [g = 1_E]$$

— Les ouverts U vérifiant ◇ s'appelleront *feuillets*.

(10.2) Il est clair que tout *sous-groupe* d'un groupe discret est un groupe discret.

(10.3) δ Pour qu'un ouvert U soit un feuillet, il faut et il suffit que ses images par les éléments de G soient deux à deux disjointes; chacune de ces images est un feuillet. On voit notamment que les éléments de G distincts de 1_E *n'ont pas de point fixe*, et que

(10.4) Tout ouvert contenu dans un feuillet est un feuillet.

Théorème :

(10.5) Soit G un groupe discret de l'espace E; F_1 et F_2 deux applications continues d'un espace Ω dans E, telles que

$$[X \in \Omega] \Rightarrow [\text{Il existe } g \text{ dans G tel que } F_2(X) = g(F_1(X))]$$

Alors Ω se partage en *ouverts disjoints* Ω_g définis par

$$[X \in \Omega_g] \Leftrightarrow [F_2(X) = g(F_1(X))] \quad (g \in G)$$

Montrons d'abord que l'ensemble Ω_1, défini par

$$[X \in \Omega_1] \Leftrightarrow [F_2(X) = F_1(X)]$$

est ouvert ; c'est évident s'il est vide ; dans le cas contraire, soit X_0 un point de $\Omega_1(F_2(X_0) = F_1(X_0))$, et U un feuillet contenant $F_1(X_0) = Z_0$. F_1 et F_2 étant continus, l'ensemble

$$\Omega' = F_1^{-}(U) \cap F_2^{-}(U)$$

est un ouvert de Ω, qui contient X_0 ; si $X \in \Omega'$, $F_1(X)$ et $F_2(X)$ appartiennent au feuillet U, il existe un g tel que $F_1(X) = g(F_2(X))$; on a donc $g = 1_E$ (10.1), $X \in \Omega_1$; ainsi $\Omega' \subset \Omega_1$, Ω_1 est ouvert comme réunion d'ouverts.

— Appliquons ensuite ce résultat au couple $[F'_1 = g.F_1, \ F'_2 = F_2]$, qui vérifient les mêmes conditions ; l'ouvert Ω'_1 où $F'_1(X) = F'_2(X)$ est égal à Ω_g.

C.Q.F.D.

Définition :

Soit E′ un espace, muni d'un groupe discret G.

Désignons par R′ le recueil des glissements de E′;

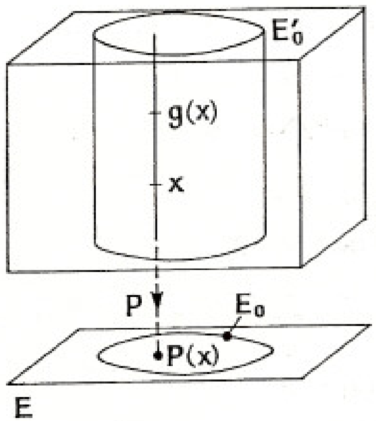
R'_G le commutant de G dans R′;

(10.6) P un opérateur défini sur E′, ayant pour fibres les classes de transitivité de G (9.1).

On sait que E′ possède une structure d'espace fibré principal, de groupe principal G, de recueil R'_G, de projection P (9.1, 9.3); nous dirons que E′ est un *revêtement* de la base $E = P^{+}(E')$.

(10.7) — On sait que le recueil R des glissements de E est engendré par le pré-recueil des transmutés des éléments de R'_G (th. 7.2).

ȯ
(10.8)



Théorème :

Soit E_0 un ouvert de l'espace E; E′ un revêtement de E (notations de 10.6); alors l'ouvert

$$E'_0 = P^{-}(E_0)$$

est un *revêtement* de E_0, ayant pour groupe principal la restriction de G à E'_0, pour projection la restriction de P à E'_0.

Théorème :

Soit E′ un revêtement de l'espace E (notations de 10.6); on suppose E′ et E disjoints.

— On peut alors donner à $\mathcal{E} = E' \cup E$ une structure d'espace,

(10.9) au moyen d'un recueil $\mathcal{R}$, complètement déterminé par les conditions suivantes :

(*a*) L'espace E′ (muni du recueil R′) et l'espace E (muni du recueil R) sont des sous-espaces ouverts de $\mathcal{E}$;

(*b*) Si U est un feuillet de E′, $P.1_U \in \mathcal{R}$.

Etablissons d'abord les lemmes suivants :

Soit A un élément de R′ tel que def (A) et val (A) soient des feuillets; alors A est *toléré* par P; il existe un seul opérateur B, tel que

(10.10) ◇
$$\begin{cases} B > A \\ B \in R'_G \\ P^*(B) = P^*(A) \end{cases}$$

on a

♣
$$B = \sup_{g \in G} [g.A.g^{-1}]$$

— Si def (A) et val (A) sont des feuillets, les opérateurs $A_g = g.A.g^{-1}$ ont des ensembles de définition et de valeurs disjoints (10.3); ils sont compatibles, leur borne supérieure B est régulière; B est donc un élément de R′.

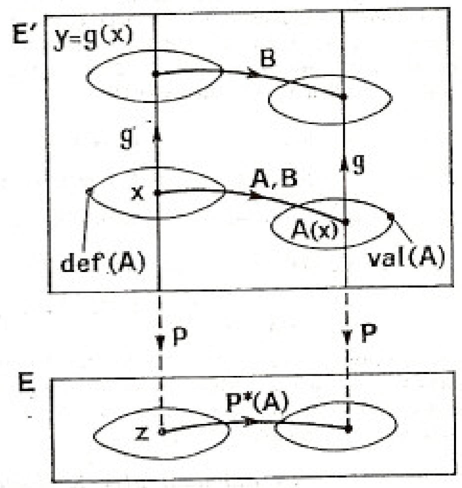
— Si $\gamma \in G$,

on a $\gamma.A_g = A_{\gamma.g}.\gamma$;

on en tire

$\gamma.\sup(A_g) = \sup(A_{\gamma.g}).\gamma$;

B appartient donc au commutant R'_G de G.



— On a évidemment $B = \sup (A_g) > A_{1_{E'}} = A$.

— B est permis par P (th. 9.1), donc toléré ; par suite A est toléré, et $P^*(A) < P^*(B)$ (th. 6.20) ; en fait, $P^*(A) = P^*(B)$, ainsi que le montre un raisonnement simple que suggère la figure.

— Inversement, ȯ si un opérateur B vérifie ◇, il vérifie ♣.

C.Q.F.D.

On en tire l'énoncé suivant :

(10.11) Si $A \in R'$, et si def (A) et val (A) sont des feuillets,

$$P^*(A) \in R$$

Lemme :

ȯ

(10.12) Si U et V sont des feuillets

$$[P.1_U]^{-1}.[P.1_V] = \sup_{g \in G} 1_U.g.1_V$$

— Il résulte évidemment de (10.12) que $[P.1_U]^{-1}.[P.1_V] \in R'$; par suite les opérateurs $P.1_U$ vérifient les conditions ♣ du théorème (2.11) ; il existe donc un recueil $\mathfrak{R}$, d'espace $\mathcal{E}$, et un seul, tel que les $P.1_U$ appartiennent à $\mathfrak{R}$, et que E′ soit un sous-espace ouvert de $\mathcal{E}$; on sait que E est aussi un sous-espace ouvert (2.11 ♤, *b*) ; il reste à montrer que la restriction de $\mathfrak{R}$ à E coïncide avec R.

1° Si $A \in R$, il existe des B_j dans R'_G tels que $A = \sup_j P^*(B_j)$; or ȯ $P^*(B_j) = \sup_{U,V \text{ feuillets}} [P.1_U].B_j.[P.1_V]^{-1}$; donc $P^*(B_j) \in \mathfrak{R}$ (2.11 ♤, *c*) ; A est borne supérieure régulière d'éléments de $\mathfrak{R}$, donc élément de $\mathfrak{R}$.

2° Si $A \in \mathfrak{R}$, def $(A) \subset E$, val $(A) \subset E$, on a

$$A = \sup_{U,V \text{ feuillets}} [P.1_U].[P.1_U]^{-1}.A.[P.1_V].[P.1_V]^{-1} ;$$

les opérateurs $A_{UV} = [P.1_U]^{-1}.A.[P.1_V]$ appartiennent à R′ (2.11, ♤ *c*) ; def (A_{UV}) et val (A_{UV}) sont des parties ouvertes de U et V, donc des feuillets (10.4) ; le lemme (10.11) montre que $P^*(A_{UV}) \in R$; comme $A = \sup_{U,V} P^*(A_{UV})$, et que A est régulier, $A \in R$.

Ce qui démontre le théorème (10.9).

— Ce théorème (10.9) admet des corollaires évidents, tels que

(10.13) Si U est un feuillet, $P.1_U$ est un *isomorphisme local* de E′ (muni du recueil R′) à E (muni du recueil R).

(10.14) P est une application *continue* de E′ sur E.

Théorème :

(10.15) Soit E′ un revêtement de l'espace E ; H une application continue d'un ouvert de E dans E′, telle que $P(H(x)) = x$.
Alors V = val (H) est un *feuillet* de E′ ; $H = [P.1_V]^{-1}$.

Soit x_0 un point de def (H), U un feuillet contenant $H(x_0).[P.1_U]^{-1}$ et H étant continus dans un voisinage ouvert de x_0, le théorème (10.5) montre qu'il existe un ouvert Ω, contenant x_0 où ces opérateurs coïncident ; l'image de Ω, par H est donc un ouvert contenu dans V ; V est ouvert. La suite résulte immédiatement du fait que V ne contient pas deux points distincts dans la même fibre.

C.Q.F.D.

Théorème (notations de 10.6) :

(10.16) Soit U_λ une famille de feuillets de E′ dont les projections recouvrent la base E ; posons

◇ $$\Phi_\lambda = [P.1_{U_\lambda}]^{-1} ;$$

soient $[\lambda, g, \mu]$ les parties de E définies par

♣ $$[x \in [\lambda, g, \mu]] \Leftrightarrow [\Phi_\lambda(x) = [g.\Phi_\mu](x)] \quad (g \in G)$$

Alors

♡
(*a*) Les $[\lambda, g, \mu]$ sont des ouverts de E
(*b*) $[\lambda, g, \mu] = [\mu, g^{-1}, \lambda]$
(*c*) $[\lambda, g_1, \mu] \cap [\mu, g_2, \nu] \subset [\lambda, g_1.g_2, \nu]$
(*d*) $[\lambda, g, \lambda]$ est vide si $g \neq 1$
(*e*) $\bigcup_\lambda [\lambda, 1, \lambda] = E$
(*f*) $[\lambda, 1, \lambda] \cap [\mu, 1, \mu] = \bigcup_g [\lambda, g, \mu]$.

Les formules ($\heartsuit$ b, c, d) se déduisent immédiatement de $\clubsuit$; les formules ($\heartsuit$, a, e, f) sont conséquences du fait que $[\lambda, g, \mu]$ est l'image par P du feuillet $U_\lambda \cap g^{+}(U_\mu)$.

C.Q.F.D.

Théorème réciproque :

Soit E un espace, G un *groupe abstrait*, I un ensemble d'indices, $[\lambda, g, \mu]$ une famille de parties de E, définies pour tous λ et μ dans I, tout g dans G, et vérifiant (10.16, $\heartsuit$).

Alors il existe un *revêtement* E′ de E, dont le groupe principal est l'image de G par une *représentation régulière* $g \to \hat{g}$; des feuillets
(10.17) U_λ de E′ dont les images par la projection P recouvrent E, tels que si l'on pose

$$\diamondsuit \qquad \Phi_\lambda = [P . 1_{U_\lambda}]^{-1}$$

on ait

$$\clubsuit \qquad \{x \in [\lambda, g, \mu]\} \Leftrightarrow \{\Phi_\lambda(x) = \hat{g}(\Phi_\mu(x))\}$$

Démonstration :

Soient λ et λ' deux éléments de I, g et g', deux éléments de G. Posons

$$C^{g, g'}_{\lambda, \lambda'} = 1_{[\lambda, g^{-1}. g', \lambda']}$$

Il résulte de cette définition, de ($\heartsuit$, b) et de ($\heartsuit$, c) que

$$C^{g, g}_{\lambda, \lambda} = 1_{[\lambda, 1, \lambda]}$$

$$C^{g', g}_{\lambda', \lambda} = [C^{g, g'}_{\lambda, \lambda'}]^{-1}$$

$$C^{g, g'}_{\lambda, \lambda'} . C^{g', g''}_{\lambda', \lambda''} < C^{g, g''}_{\lambda, \lambda''}$$

Les conditions $\heartsuit$ du lemme (2, 12) sont alors vérifiées, il existe des opérateurs réguliers Φ^g_λ tels que

$$\spadesuit \qquad [\Phi^g_\lambda]^{-1} . \Phi^{g'}_{\lambda'} = 1_{[\lambda, g^{-1}. g', \lambda']}$$

— En vertu de ($\heartsuit$, a), ces opérateurs $1_{[\lambda, g^{-1}. g', \lambda']}$ appartiennent au recueil

R des glissements de E ; on peut appliquer le théorème (2, 11) ; il existe un recueil $\mathfrak{R}^*$, *et un seul*, ayant pour espace la réunion $\mathcal{E}$ de E et de

$$E' = \bigcup_{\lambda, g} \mathrm{val}\,(\Phi^g_\lambda),$$

contenant les Φ^g_λ, et tel que E et E′ soient des sous-espaces ouverts de $\mathcal{E}$. Du fait que les $[\Phi^g_\lambda]^{-1} . \Phi^{g'}_{\lambda'}$ sont des opérateurs identiques, on déduit que les $[\Phi^g_\lambda]^{-1}$ sont compatibles ; leur borne supérieure P vérifie évidemment :

$$P(\Phi^g_\lambda(x)) = x ;$$

c'est une application de E′ dans E ; il résulte de ($\heartsuit$, e) que c'est une application de E′ *sur* E.

Il résulte de la formule $\spadesuit$ ci-dessus que, si $\gamma \in G$,

$$[\Phi^{\gamma g}_\lambda]^{-1} . \Phi^{\gamma g'}_{\lambda'} = [\Phi^g_\lambda]^{-1} . \Phi^{g'}_{\lambda'} ;$$

comme dans la démonstration de (5,5), on en déduit que les opérateurs $\Phi^{\gamma g}_\lambda . [\Phi^g_\lambda]^{-1}$ sont compatibles, et que leur borne supérieure $\hat{\gamma}$, définie par

$$\hat{\gamma}(\Phi^g_\lambda(x)) = \Phi^{\gamma g}_\lambda(x)$$

est une permutation de E′ ; $\hat{\gamma}$ appartient au recueil R′ des glissements de E′ (puisque les $\Phi^{\gamma g}_\lambda$ et $[\Phi^g_\lambda]^{-1}$ font partie de $\mathfrak{R}^*$).

— Il est clair que $\widehat{\gamma\gamma'} = \hat{\gamma} . \hat{\gamma}'$, donc que la correspondance $\gamma \to \hat{\gamma}$ est une *représentation* de G dans l'espace E′ (2.7).

— Posons $\Phi_\lambda = \Phi^1_\lambda$ et $U_\lambda = \mathrm{val}\,(\Phi_\lambda)$; il est clair que $\Phi^g_\lambda = \hat{g} . \Phi_\lambda$, et que l'on a, d'après la formule $\spadesuit$ ci-dessus,

$$\{x \in [\lambda, g, \mu]\} \Leftrightarrow \{x = \Phi_\lambda^{-1} . \hat{g} . \Phi_\mu(x)\}$$

ce qui démontre (10.17, $\clubsuit$).

— Supposons que $z \in \mathrm{val}\,(\Phi^g_\lambda)$, que $\gamma \in G$, et que $\hat{\gamma}(z) \in \mathrm{val}\,(\Phi^g_\lambda)$; on aura alors $z = \Phi^g_\lambda(x) = \Phi^{\gamma g}_\lambda(x')$, d'où selon $\spadesuit$, $x = x' \in [\lambda, \gamma, \lambda]$; d'après ($\heartsuit$, d) ceci implique $\gamma = 1$; par suite $\mathrm{val}\,(\Phi^g_\lambda)$ est un *feuillet* du groupe $\hat{G}$ (image de G par $\hat{}$), $\hat{G}$ est un *groupe discret ;* de plus la représentation $\gamma \to \hat{\gamma}$ est régulière (car $[\hat{\gamma} = 1_{E'}] \Rightarrow [\hat{\gamma}(z) = z] \Rightarrow [\gamma = 1]$) ; en particulier, les $U_\lambda = \mathrm{val}\,(\Phi_\lambda)$ sont des *feuillets* de $\hat{G}$.

— Il est clair que $P . \hat{\gamma} = P$, donc que les classes selon $\hat{G}$ sont contenues dans les fibres de P ; en fait ô l'axiome ($\heartsuit$, f) implique que *les fibres de* P *sont les classes de* $\hat{G}$.

Les conditions de (10.6) sont réunies ; E′ possède une structure de revêtement de l'*ensemble* E, ayant P pour projection, $\widehat{G}$ pour groupe principal ; ce revêtement donne à E une nouvelle structure d'espace, définie par un recueil $\overline{R}$; or on sait que $\overline{R}$ est la restriction à E du recueil $\mathfrak{R}$ défini au théorème (10.9), que $\mathfrak{R}$ contient $1_{E'}$, 1_E et les $P.1_U$ (U étant un feuillet) ; $\mathfrak{R}$ contient donc les Φ^g_λ ; or nous avons vu que seul le recueil $\mathfrak{R}^*$ avait ces propriétés ; on a donc $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^*$, et $R = \overline{R}$; E′ est donc un revêtement de l'*espace* E.

C.Q.F.D.

Théorème :

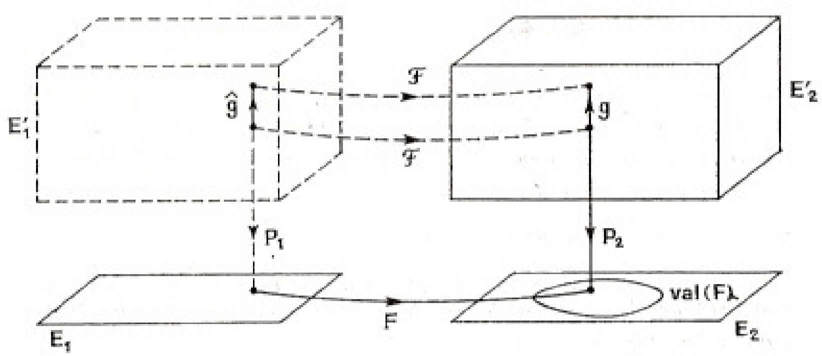
Soient E_1 et E_2 deux espaces ; F une application *continue* de E_1 dans E_2 ; E'_2 un revêtement de E_2 ; P_2 sa projection, G_2 son groupe principal.

Il existe alors un revêtement E'_1 de E_1 (de projection P_1), une *représentation régulière* $g \to \widehat{g}$ de G_2 *sur* le groupe principal G_1 de

(10.18) E'_1, et une application *continue* $\mathcal{F}$ de E'_1 dans E'_2, telle que

$$\begin{cases} \mathcal{F}.\widehat{g} = g.\mathcal{F} \quad (\text{pour} \quad g \in G_2) \\ P_2.\mathcal{F} = F.P_1. \end{cases}$$

On dira que le revêtement E'_1 est l'*image réciproque* par F du revêtement E'_2.



On sait en effet (th. 10. 16) qu'il existe des feuillets U_λ de E'_2 tels que, si l'on pose $\Phi_\lambda = [P_2.1_{U_\lambda}]^{-1}$, les ensembles $[\lambda, g, \mu]$ définis par

$$x \in [\lambda, g, \mu] \Leftrightarrow \Phi_\lambda(x) = g.\Phi_\mu(x) \quad (g \in G)$$

sont des ouverts de E_2, qui vérifient les relations (10.16, ♡) ; posons

$$\{\lambda, g, \mu\} = F^{-}([\lambda, g, \mu]) ;$$

F étant continue, les $\{\lambda, g, \mu\}$ sont des ouverts qui recouvrent E_1. Les formules (6.2.) montrent que les $\{\lambda, g, \mu\}$ vérifient aussi les formules (10.16, ♡) ; le *théorème réciproque* (10.17) montre l'existence d'un revêtement E'_1 de E_1, d'une représentation régulière $g \to \widehat{g}$ de G_2 sur le groupe principal G_1 de E'_1, et de feuillets V_λ de E'_1 tels que, si l'on pose $\Psi_\lambda = [P_1.1_{V_\lambda}]^{-1}$, on ait

$$x \in \{\lambda, g, \mu\} \Leftrightarrow \Psi_\lambda(x) = \widehat{g}.\Psi_\mu(x).$$

♁ On en déduit que l'on peut définir un opérateur $\mathcal{F}$ par la relation

$$\mathcal{F}(\widehat{g}.\Psi_\lambda(x)) = [g.\Phi_\lambda](F(x))$$

ou encore

$$\mathcal{F} = \sup_{g\lambda} [g.\Phi_\lambda.F.\Psi_\lambda^{-1}.\widehat{g^{-1}}]$$

$\mathcal{F}$ est continue, comme borne supérieure d'opérateurs continus ; ♁ elle vérifie les conditions annoncées.

C.Q.F.D.

Définitions :

Soit E′ un revêtement de l'espace E ; E_0 un ouvert de E.

(10.19) Nous dirons que E_0 est *relevable* dans le revêtement E′ si E_0 est la *projection d'un feuillet*.

(10.20) Nous dirons qu'un espace E est *simple* si E est *relevable dans tous ses revêtements*.

(10.21) Nous dirons qu'un espace E est *simplement connexe* s'il est *simple* et *connexe* [1].

---

[1] On rappelle qu'un espace E est dit *connexe* s'il ne possède pas d'autre décomposition en ouverts disjoints que E et ∅ ; on sait, par exemple, que tout *ouvert convexe* de R^n est connexe.

Il est clair (grâce à 10.8) que

(10.22) Tout ouvert *simple* E_0 de l'espace E est *relevable* dans tout revêtement E′ de E.

Lemme :

(10.23) Soit E′ un revêtement de l'espace E ; Ω_λ des ouverts de E, relevables dans E′, tels que

$\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$ est un ensemble connexe pour tous λ et μ ;

$\bigcap_\lambda \Omega_\lambda$ n'est pas vide.

Alors la *réunion* Ω des Ω_λ est *relevable* dans E.

Le théorème (10.8) permet de nous limiter au cas où $\Omega = E$ (sinon, il suffirait de restreindre E à Ω et E′ à $P^{-}(\Omega)$).

Soient alors U_λ des feuillets se projetant suivant les Ω_λ ; ils vérifient les conditions de (10.16) ; on en déduit l'existence d'ensembles $[\lambda, g, \mu]$ vérifiant (10.16, ♡), et tels que $[\lambda, 1, \lambda] = \Omega_\lambda$.

La formule (10.16, ♡ *f*) montre que $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$ (qui n'est pas vide par hypothèse) est une réunion d'ouverts disjoints ; comme cette intersection est connexe, il existe donc un élément $g_{\lambda\mu}$ de G, et un seul, tel que

$$\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu = [\lambda, g_{\lambda\mu}, \mu]$$

Comme il existe un point commun x à tous les Ω_λ, les formules (10.16) montrent que $g_{\lambda\mu}{}^{-1} = g_{\mu\lambda}$, $g_{\lambda\mu} \cdot g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu}$; si l'on choisit un α dans l'ensemble d'indices, on en déduit que les $g_{\alpha\lambda} \cdot \Phi_\lambda$ sont compatibles ; leur borne supérieure H, définie sur E, et vérifiant $P(H(x)) = x$ est de la forme $[P.1_V]^{-1}$, V étant un feuillet (th. 10.15).

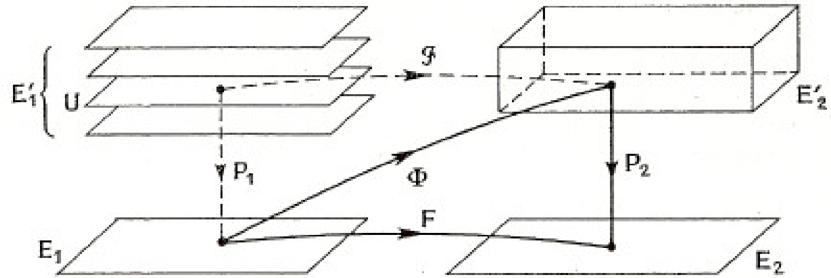
C.Q.F.D.

Théorème :

(10.24) Soit E_1 un espace *simple ;* F une application continue de E_1 dans un espace E_2 ; E'_2 un revêtement de E_2 ; P_2 sa projection.

Il existe alors un *relèvement* de F, c'est-à-dire une application *continue* Φ de E_1 dans le revêtement E'_2, telle que

$$F = P_2 . \Phi$$



Considérons l'image réciproque E'_1 du revêtement E'_2 par F (th. 10.18) ; on sait qu'il existe une application continue $\mathscr{F}$ de E'_1 dans E'_2 telle que $P_2 . \mathscr{F} = F . P_1$; par ailleurs, comme E_1 est simple, il existe un feuillet U de E'_1 qui se projette sur E_1 ; ò il suffit de poser $\Phi = \mathscr{F} . [P_1 . 1_U]^{-1}$.

C.Q.F.D.

Corollaire :

(10.25) Tout espace homéomorphe à un espace simple est simple.

Supposons en effet que l'opérateur F (notations de 10.24) soit un homéomorphisme ; alors $H = \Phi . F^{-1}$ est une application continue de E_2 dans E'_2, qui vérifie $P_2(H(x)) = x$; le théorème (10.15) montre que $H = [P_2 . 1_V]^{-1}$, V étant un feuillet qui se projette suivant E_2 ; E_2 est donc relevable quel que soit le revêtement E'_2, donc simple.

C.Q.D.F.

On voit donc que la simplicité d'un ensemble est une propriété topologique ; c'est une propriété *globale*, et non locale (ainsi, le plan est simple, le plan privé d'un point ne l'est pas).

Définition :

(10.26) Un revêtement d'un espace E est dit *universel* s'il est simplement connexe.

— Un espace E ne peut posséder de revêtement universel que s'il est lui-même connexe (car toute image continue d'un ensemble connexe est connexe).

Théorème :

Soit E_1 un espace possédant un *revêtement universel* E'_1 ; F une application continue de E_1 dans un espace E_2 ; E'_2 un revêtement quelconque de E_2 ; soient P_1, P_2, G_1, G_2 les projections et groupes principaux de E'_1 et E'_2. Alors :

Il existe une application continue $\mathcal{F}$ de E'_1 dans E'_2, telle que

(*a*) $$F.P_1 = P_2.\mathcal{F}.$$

— Toute autre solution $\mathcal{F}'$ de (*a*) est donnée par la formule

(*b*) $$\mathcal{F}' = g.\mathcal{F} \quad (g \in G_2)$$

(10.27) g étant entièrement déterminé par cette égalité ;

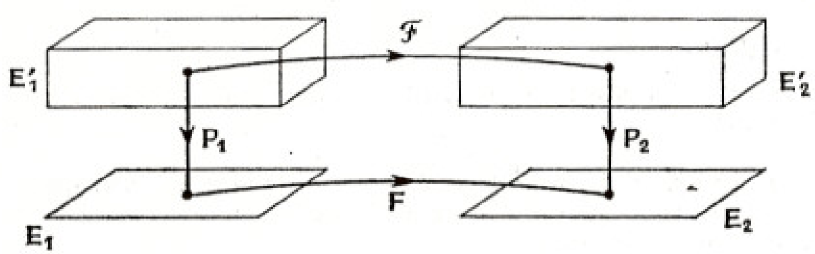
— A toute solution $\mathcal{F}$ de (*a*) correspond une *représentation* A de G_1 dans G_2, caractérisée par

(*c*) $$\mathcal{F}.\gamma = A(\gamma).\mathcal{F}$$

— Si on remplace $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}' = g.\mathcal{F}$, A est remplacé par A′ tel que

(*d*) $$A'(\gamma) = g.A(\gamma).g^{-1}$$

A toute fonction F correspond donc, dans l'ensemble des représentations de G_1 dans G_2, une classe suivant le groupe des automorphismes intérieurs de G_2.



En effet, $F.P_1$ est une application continue de E'_1, qui est simple, dans E_2 ; $\mathcal{F}$ existe en vertu de (10.24). Si on a aussi $F.P_1 = P_2.\mathcal{F}'$, on a

$$P_2(\mathcal{F}'(x)) = P_2(\mathcal{F}(x)) ;$$

E'_1 se partage en ouverts disjoints Ω_g tels que $\mathcal{F}'.1_{\Omega_g} = g.\mathcal{F}.1_{\Omega_g}$ (th. 10.5) ; E'_1 étant connexe, les Ω_g sont tous vides, sauf un ; d'où (*b*). Enfin (*c*) et (*d*) résultent d'un calcul élémentaire.

C.Q.F.D.

Théorème :

Soit E'_1 un *revêtement universel* de l'espace E ; G_1 son groupe principal.

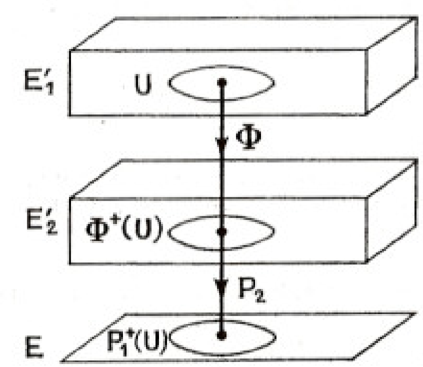
Alors tout revêtement E'_2 de E se *décompose* en ouverts connexes disjoints isomorphes, qui sont des revêtements de E (pour un sous-groupe du groupe principal G_2 de E'_2).

— Si E'_2 est un *revêtement connexe* de E, il existe une *projection*

(10.28) Φ de E'_1 sur E'_2, telle que $P_1 = P_2.\Phi$, et que E'_1 soit un *revêtement universel* de E'_2 (avec, pour groupe principal, un sous-groupe distingué de G_1) ;

— Si E'_2 est aussi un *revêtement universel*, Φ est un *isomorphisme* de E'_1 à E'_2, et transmute G_1 en G_2.

Le groupe abstrait G_1, défini à un isomorphisme près par la donnée de E, s'appelle *groupe de Poincaré* de l'espace E.



Utilisons (10.27), avec $E_1 = E_2 = E$, $F = 1_E$; il existe une application continue Φ de E'_1 dans E'_2 telle que $P_1 = P_2 . \Phi$; le th. (10.15) montre que Φ transforme tout feuillet U de E'_1 en feuillet de E'_2 ; l'ensemble $E'_3 = \mathrm{val}(\Phi)$ est une réunion de feuillets, donc un ouvert ; E'_3 est connexe parce que Φ est continu et E'_1 connexe.

— On sait qu'il existe une représentation A de G_1 dans G_2, définie par

$$\Phi . \gamma = A(\gamma) . \Phi \quad \text{(th. 10.27)} ;$$

ò $A^+(G_1)$ est un sous-groupe de G_2, qui opère discrètement sur E'_2, et dont les classes sont les fibres de $P_2 . 1_{E'_3}$; E'_3 est un revêtement de E.

En multipliant Φ à gauche par un élément g de G_2, on obtiendra un autre opérateur Φ' ayant les mêmes propriétés ; ò les ensembles de valeurs de ces opérateurs sont deux à deux disjoints ou confondus ; ils forment bien une partition de E'_2 en revêtements ouverts connexes.

Si E'_2 est connexe, il n'y a qu'une seule classe ; on a donc $E'_3 = E'_2$; A est une représentation de G_1 *sur* G_2 ; le noyau Γ de A est un sous-groupe distingué de G_1 ; ò les classes de E'_1 suivant Γ sont les fibres de Φ ; E'_1 est un revêtement de E'_2, de projection Φ, de groupe principal Γ, universel puisque E'_1 est simplement connexe.

— Enfin, si E'_2 est aussi simplement connexe, il existe un opérateur continu Ψ qui applique E'_2 sur E'_1, et qui vérifie $P_2 = P_1 . \Psi$; on en déduit, par application de (10.5), que $\Psi . \Phi \in G_1$; Φ est donc régulier ; la structure d'espace isomorphe à E'_1 que possède E'_2 en supposant que Φ est un isomorphisme (th. 3.7) est la même que sa structure initiale, parce que $\Phi = \sup\limits_{U,V} [P_2 . 1_V]^{-1} . [P_1 . 1_U]$, V et U désignant des feuillets de E'_2 et E'_1.
Enfin, Φ étant régulier, la représentation A est donnée par $A(\gamma) = \Phi . \gamma . \Phi^{-1}$; Φ transmute G_1 en G_2.

C.Q.F.D.

Théorème :

Soit E′ un revêtement universel de E ; P sa projection, G son groupe principal (groupe de Poincaré). Soit F un homéomorphisme de E sur E.

(*a*) Il existe un homéomorphisme Φ de E′ sur E′ tel que

(10.29) $\Diamond$ $$F . P = P . \Phi$$

(*b*) Si F est un glissement global de E, Φ est un glissement global de E′.

(*c*) Les différents Φ vérifiant $\Diamond$ s'obtiennent en multipliant l'un d'eux à gauche (resp. à droite) par les éléments de G.

(*d*) Si $g \in G$, $\Phi . g . \Phi^{-1} \in G$;

(*e*) Soit Auto (G) le groupe des automorphismes du groupe de Poincaré G ; Int (G) le sous-groupe des automorphismes intérieurs. Il existe une représentation ρ du groupe des homéomorphismes globaux de E sur le groupe Auto (G)/Int (G), défini par

$$\rho(F) = \text{Classe suivant Int (G) de A}$$

A étant l'automorphisme défini par $A(g) = \Phi . g . \Phi^{-1}$.

Le théorème (10.27) montre l'existence de deux opérateurs continus, Φ et Ψ, appliquant E′ dans E′, tels que $F . P = P . \Phi$, $F^{-1} . P = P . \Psi$; on en tire $P = P . \Phi . \Psi = P . \Psi . \Phi$; le théorème (10.5) montre que $g = \Psi . \Phi$ et $\gamma = \Phi . \Psi$ sont des éléments de G ; Φ et Ψ sont donc des homéomorphismes de E′ ; en particulier, si on a aussi $F . P = P . \Phi'$, il existera aussi des éléments g' et γ' de G tels que $g' = \Psi . \Phi'$, $\gamma' = \Phi' . \Psi$; d'où

$$\Phi' = \Phi . g^{-1} . g' = \gamma' . \gamma^{-1} . \Phi ;$$

par suite, quel que soit g dans G, comme $\Phi' = \Phi . g$ vérifie $\Diamond$, il existe γ dans G tel que $\Phi' = \gamma . \Phi$, d'où $\Phi . g . \Phi^{-1} = \gamma \in G$. L'opérateur A défini par $A(g) = \Phi . g . \Phi^{-1}$ est donc au automorphisme de G ; si on remplace Φ par $\Phi' = \gamma . \Phi$, A sera remplacé par A′ tel que

$$A'(g) = \Phi' . g . \Phi'^{-1} = \gamma . A(g) . \gamma^{-1},$$

ce qui montre (*e*).

Enfin, si U et V sont des feuillets de E′, on a $1_V . \Phi . 1_U = [P . 1_V]^{-1} . F . [P . 1_U]$; cet opérateur est un élément du recueil $\mathfrak{R}$ (th. 10.9), si F est un glissement ; il en est donc de même de l'opérateur régulier $\Phi = \sup\limits_{U,V} [1_V . \Phi . 1_U]$; par suite, Φ est un glissement de E′ (th. 10.9, *a*).

C.Q.F.D.

Nous allons terminer cette étude des revêtements (¹) par un exemple important :

(¹) Voir aussi la note II, à la fin de l'ouvrage.

Théorème :

(10.30) L'espace R^n, muni de sa topologie habituelle, est simplement connexe.

Nous avons déjà indiqué que R^n est connexe. Reste à montrer que R^n est simple.

Considérons un cube K, produit direct de n intervalles fermés de longueur a. En divisant chacun de ses côtés en 2 parties égales, on décompose K en réunion de 2^n cubes K_j, de côté $\frac{a}{2}$, qui ont en commun le centre X_0 de K.

Supposons que chacun des K_j soit contenu dans un ouvert relevable (pour un revêtement donné de R^n); il existera alors un nombre positif ε tel que les cubes de côté $\frac{a}{2} + \varepsilon$, homothétiques des K_j par rapport à leurs centres, soient contenus dans des ouverts relevables; désignons par Ω_j les intérieurs de ces nouveaux cubes; les Ω_j vérifient les hypothèses du lemme (10.23) (en effet, leur intersection contient X_0, et leurs intersections deux à deux sont des ouverts convexes, donc connexes); par suite la réunion des Ω_j est relevable, K est contenu dans un ouvert relevable.

Si donc K n'était pas contenu dans un ouvert relevable, il existerait un cube K', de côté $\frac{a}{2}$ intérieur à K, ayant la même propriété; puis on construirait, par itération, une suite de cubes emboîtés $K^{(p)}$, de côtés $\frac{a}{2^p}$, dont aucun ne serait contenu dans un ouvert relevable. Or l'intersection des $K^{(p)}$ est un point X de K, qui appartient (comme tout point de la base d'un revêtement) à un ouvert relevable U; or U contiendrait les $K^{(p)}$ à partir d'un certain rang; d'où contradiction.

Nous avons donc montré que tout cube K de R^n est contenu dans un ouvert relevable; considérons les cubes Q_j, de centre 0, de côté 2^j; les intérieurs Ω_j de ces cubes vérifient les conditions du lemme (10.23); leur réunion, qui est R^n, est donc relevable.

C.Q.F.D.

(10.31) Soit S une matrice régulière à éléments réels, de n lignes et p colonnes (on a nécessairement $p \leqslant n$).

Posons, pour tout X de R^n :

(10.32) $$T_M(X) = X + S.M$$

M étant une colonne (d'ordre p) *à éléments entiers.*

La formule évidente

(10.33) $$T_M . T_{M'} = T_{M+M'}$$

montre que la correspondance $M \to T_M$ est une représentation du groupe Z^p (groupe additif des colonnes d'ordre p à éléments entiers) dans le groupe des translations de R^n; ♁ cette représentation est *régulière*, le groupe G des T_M opère *discrètement* sur R^n (on peut même montrer que l'on obtient ainsi tous les groupes discrets de translations de R^n).

Soit P un opérateur défini sur R^n, ayant pour fibres les classes suivant G; si l'on a défini sur R^n une structure d'espace (telle que la topologie de R^n soit sa topologie usuelle, et que les éléments de G soient des glissements), val (P) = Θ est un *espace* (que l'on appelle souvent *tore*, par généralisation du cas $n = p = 2$), qui admet R^n comme *revêtement*, et même comme revêtement *universel* (en vertu du théorème (10.30)); le groupe G est donc le *groupe de Poincaré* de Θ; il est isomorphe à Z^p, donc abélien.

— Appliquons à Θ le théorème (10.29); à tout homéomorphisme F du tore correspond, par une représentation ρ un automorphisme de Z^p (dans le cas abélien, il n'y a pas d'autre automorphisme intérieur que l'identité); or ♁ les automorphismes de Z^p sont les matrices à éléments entiers dont l'inverse est une matrice à éléments entiers, c'est-à-dire les matrices U à éléments entiers dont le déterminant vaut ± 1; la représentation ρ est donnée par les formules

(10.34) $$F.P = P.\Phi, \quad \Phi.T_M.\Phi^{-1} = T_{U.M}, \quad U = \rho(F).$$

— Toutes les matrices U à éléments entiers et déterminant ± 1 font partie de val (ρ); en effet, il suffit de construire une matrice régulière telle que $\Phi.S = S.U$ (par exemple la matrice

$1_{R^n} + S.[U - 1_{R^p}].[S'.S]^{-1}.S$, S' désignant la matrice symétrique de S), et de poser $F = P.\Phi/P$.

On voit en particulier que F ne possèdera un relèvement dans le commutant de G que si $\rho(F) =$ matrice unité ; les homéomorphismes de Θ qui appartiennent aux autres classes fournissent donc des exemples de glissements *non relevables, bien que localement relevables* (au sens de 7.6).

— On voit que les homéomorphismes globaux de Θ contiennent un sous-groupe distingué, $\rho^{-}(1_{R^p})$; on peut également partager ces homéomorphismes en deux classes (dont l'une est un sous-groupe distingué), suivant la valeur du *caractère* χ défini par

(10.35) $$\chi(F) = \det(\rho(F)) \quad (= \pm 1)$$

On peut considérer le cas particulier $n = p = 1$, $S_0 = 1$, $P_0(x) = e^{2i\pi x}$; l'espace $\Theta_0 = \text{val}(P_0)$ est alors le *cercle unité du plan complexe* ; on voit que son groupe de Poincaré est isomorphe à Z.

Comme application, indiquons la classification des *lacets* tracés sur un tore quelconque Θ, c'est-à-dire des applications continues de Θ_0 dans Θ ; le théorème (10.27) conduit immédiatement au résultat suivant :

— A tout lacet F tracé sur le tore Θ correspond une application continue $\mathcal{F}$ de R dans R^n, telle que

$$\diamondsuit \qquad F(e^{2i\pi x}) = P(\mathcal{F}(x))$$

— Les autres opérateurs $\mathcal{F}'$ vérifiant $\diamondsuit$ sont donnés par la formule

(10.36) $$\heartsuit \qquad \mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x) + S.M \quad (M \in Z^p) ;$$

— A chaque lacet F correspondent p invariants topologiques entiers, qui sont les éléments de la colonne M_0 définie par l'identité

$$\clubsuit \qquad \mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x) = S.M_0$$

$\mathcal{F}$ étant une solution quelconque de $\heartsuit$.