ANEXO 1
EL POLIEDRO DE DIOS

La ciencia de nuestro tiempo está mediatizada al extremo. Cuando se evoca una idea, o un proyecto, hay que inventar una palabra llamativa que hable al imaginario de las personas. Hace cincuenta años, el objeto que se pensaba podía describir el destino de una estrella de neutrones cuya masa, gracias a los aportes del viento estelar emitido por una estrella compañera, podía exceder el valor crítico de 2,5 masas solares, se llamaba **CUERPO DE SCHWARZSCHILD** (*).
Un nombre poco vendedor. El término **COLLAPSAR** tampoco tuvo mucho éxito. Pero cuando John Archibald Wheeler propuso **AGUJERO NEGRO,** el éxito fue inmediato en todo el planeta. Lo mismo ocurrió con la **TOE** (Teoría de Todo = Theory of Everything), y con la **TEORÍA M** de la gente de las **SUPERCUERDAS**: Hoy día, nuestros modernos plutofísicos (de *ploutos* que, en griego, significa "costoso") están en busca del bosón de Higgs, llamado también **LA PARTÍCULA DE DIOS**.

Sacrificando un instante a estas modas imbéciles, y para hacerlos sonreir un poco, qué les parece el poliedro que no tiene sino una sola cara y una sola arista. Recuerden que *edra*, en griego, quiere decir cara, por lo tanto:

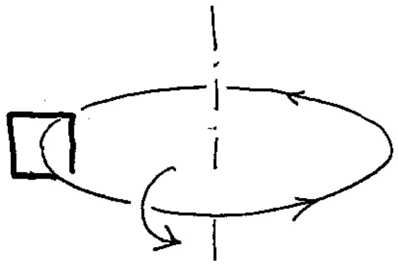
Les vamos a presentar el **MONOEDRO** o... "**POLIEDRO DE DIOS**"

La Dirección

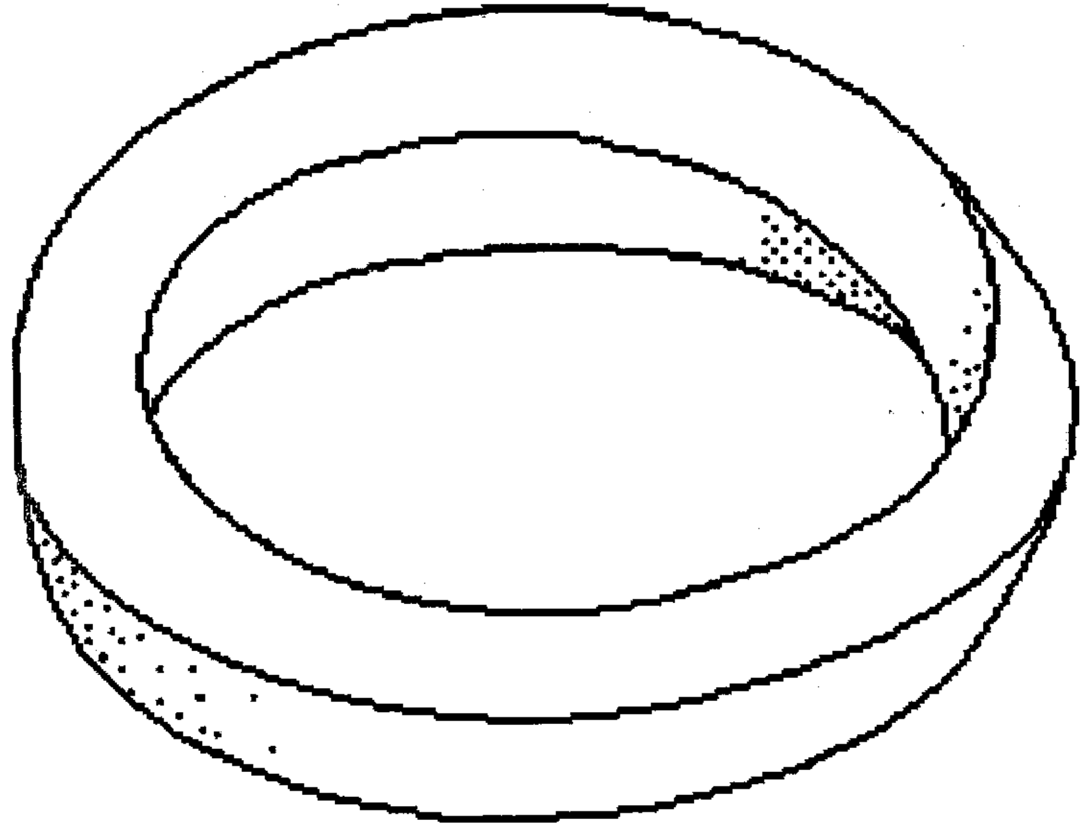
(*) El modelo de "agujero negro" se basa en el bricolaje de una solución de la ecuación de Einstein, debida a Schwarzschild (1917), referida a una región **VACÍA** del Universo. Hablaremos de eso en un futuro álbum.

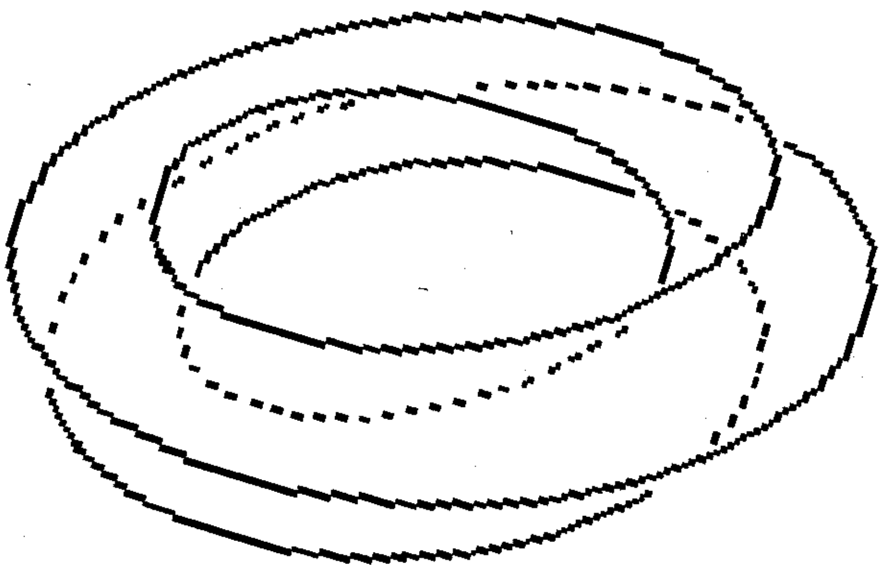
EL MONOEDRO

Se lo puede generar haciendo girar un cuadrado en torno a un eje contenido en su plano, y rotándolo $\pi/2$ en cada giro.



.... O engrosando una banda de Möbius.





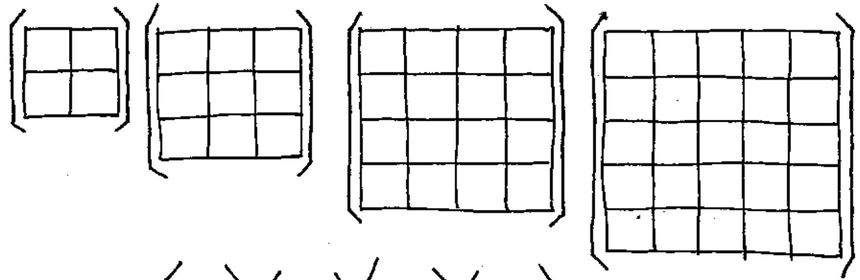
SU ÚNICA ARISTA

ANEXO 2
ESPACIO-TIEMPO Y GRUPOS

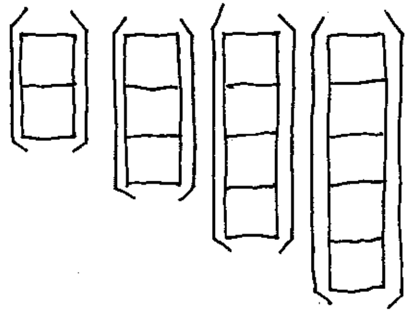
En 1850, Mijail Vasilievich Ostrogradski a Bernhard Riemann:

El tiempo ha pasado. La evolución permanente de la ciencia muestra que todo pasa, siempre, por el abandono de cierta visión ingenua procedente de nuestros sentidos. Los hechos nos muestran que los matemáticos, y especialmente los geómetras, ha tenido siempre una visión de las cosas que ha resultado estar más próxima de los experimentos de los físicos y de las observaciones de los astrónomos que visiones anteriores consagradas a la tradición. Al manejar nuevos conceptos, con la ayuda de papel y lápiz, ellos fabrican, a veces sin darse cuenta, la realidad del mañana. Para comprender, por ejemplo, la **RELATIVIDAD ESPECIAL**, vamos a necesitar operar un verdadero **DESAPEGO** en el plano de nuestra visión del mundo.
¿Están listos a seguirme?

La letra **M** designará una **MATRIZ** cuadrada
(n filas, n columnas)

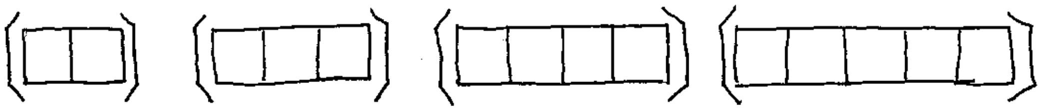


Un **VECTOR COLUMNA** es una matriz de n filas y una columna



etc...

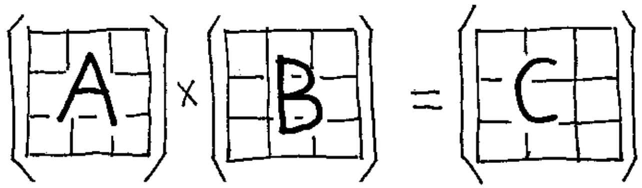
Un **VECTOR FILA** es una matriz de una fila y n columnas



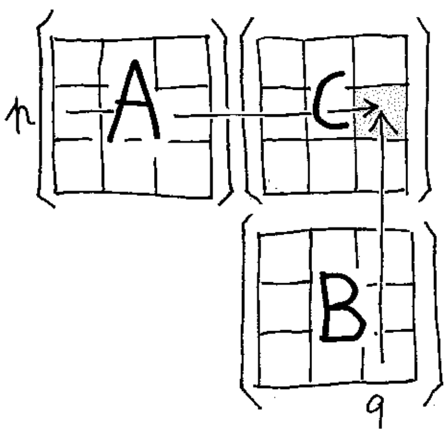
etc...

MULTIPLICACIÓN DE DOS MATRICES CUADRADAS DEL MISMO FORMATO

(que poseen el mismo número de filas y de columnas)



$C = A \times B$ *se multiplican* FILAS y COLUMNAS



Mnemotecnia: *se colocan las dos matrices* **A** y **B** y el **PRODUCTO MATRICIAL** **A x B** *como se muestra aquí y se multiplica término a término, sumando los términos de la fila p de la matriz* **A** *con los términos de la columna q de la matriz* **B**. *Se obtiene así el término correspondiente de la matriz* **C = A x B**, *situado en su p-ésima fila y q-ésima columna.*

FUNDAMENTAL: POR LO GENERAL, ESTE PRODUCTO NO ES CONMUTATIVO

$$\boxed{A \times B \neq B \times A \quad !}$$

MATRICES UNIDAD I

A todo conjunto de matrices cuadradas de n filas y n columnas [llamadas "de formato (n,n)"], se asocian matrices unidad, denotadas por la letra I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

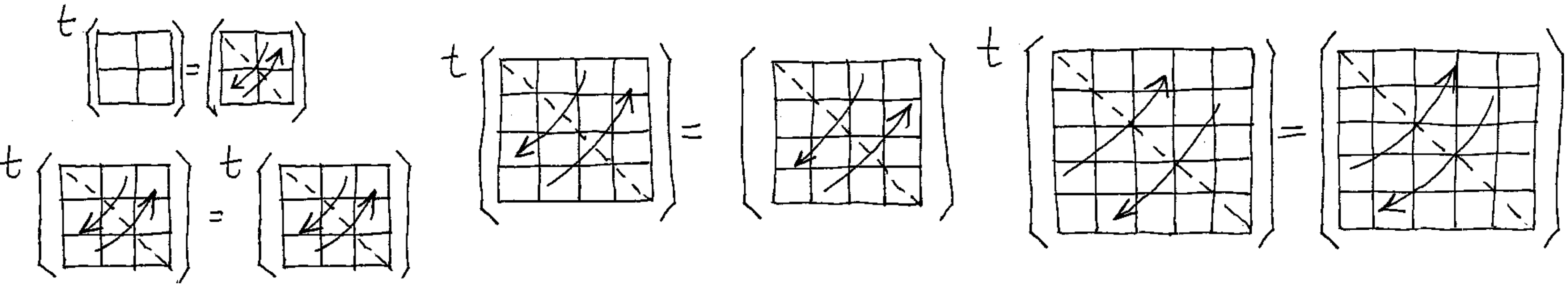
etc...

se cumple:

$$\boxed{A \times I = I \times A = A}$$

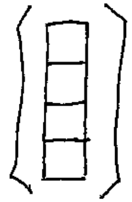
TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ, DENOTADA POR ${}^{t}A$

Es la matriz simétrica del arreglo cuadrado con respecto a su **DIAGONAL PRINCIPAL**.

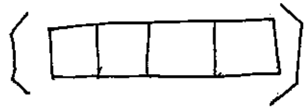


etc...

ESTABLECEMOS que la transpuesta de un vector, de una matriz columna:

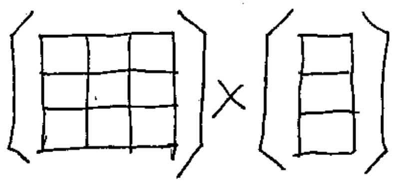
$X =$ 

es la matriz o vector fila correspondiente:

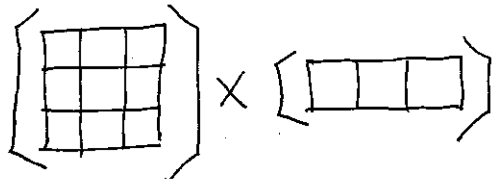
${}^{t}X =$ 

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ COLUMNA O FILA POR UNA MATRIZ CUADRADA

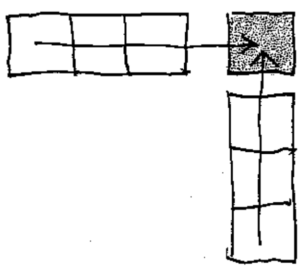
Para la matriz columna, MULTIPLICACIÓN A LA IZQUIERDA:

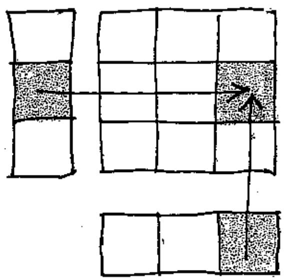
$A \times X =$ 

Para la matriz fila, MULTIPLICACIÓN A LA DERECHA:

$A \times {}^{t}X =$ 

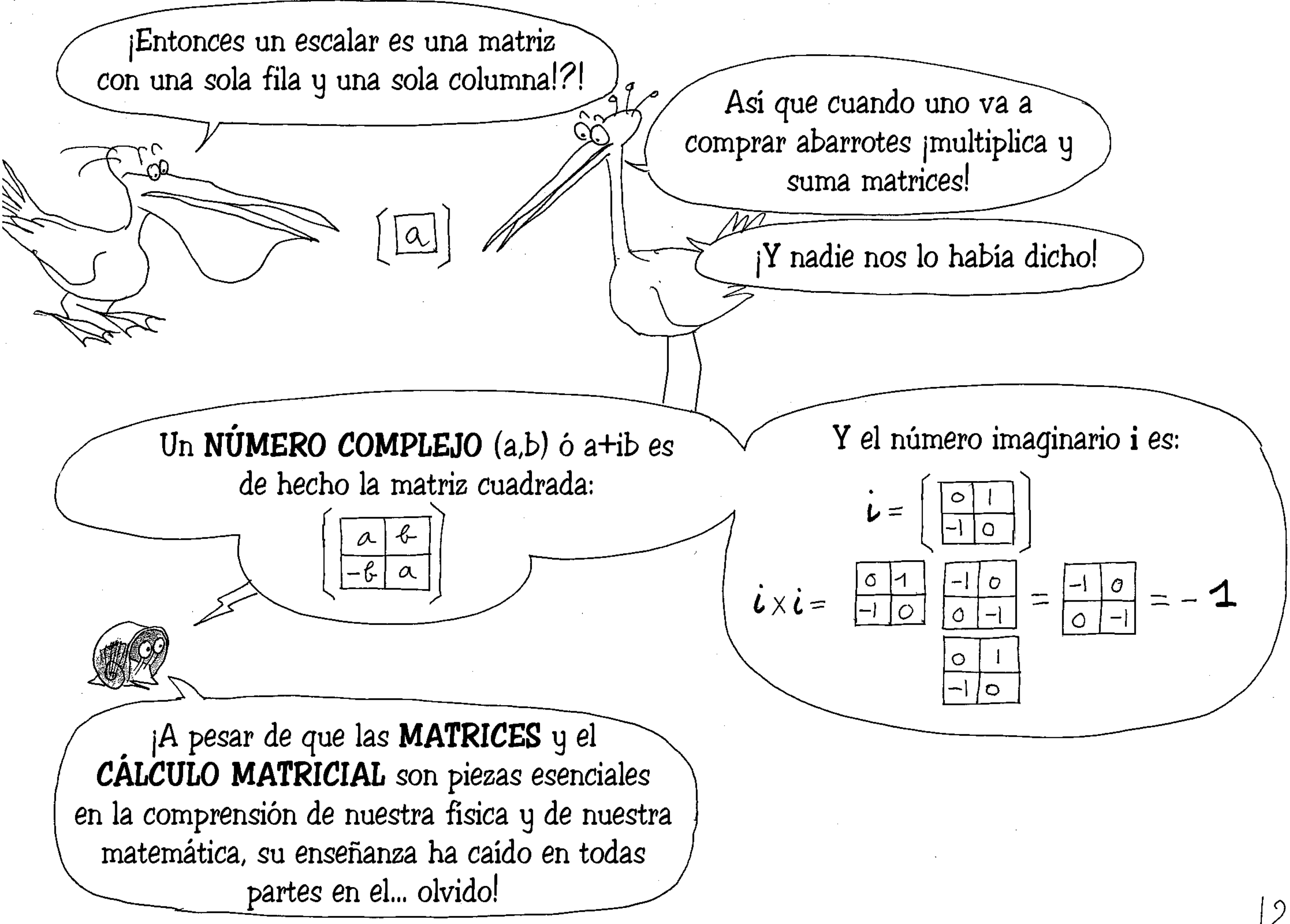
PRODUCTOS DE UNA MATRIZ COLUMNA ⇄ Y DE UNA MATRIZ FILA





${}^{t}X \times X =$ matriz de 1 fila y 1 columna = **ESCALAR**

$X \times {}^{t}X =$ matriz cuadrada de formato (n,n) ó n x n


¡Entonces un escalar es una matriz con una sola fila y una sola columna!?!
[a]
Así que cuando uno va a comprar abarrotes ¡multiplica y suma matrices!
¡Y nadie nos lo había dicho!
Un **NÚMERO COMPLEJO** (a,b) ó a+ib es de hecho la matriz cuadrada:
$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
Y el número imaginario **i** es:
$i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
$i \times i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$
¡A pesar de que las **MATRICES** y el **CÁLCULO MATRICIAL** son piezas esenciales en la comprensión de nuestra física y de nuestra matemática, su enseñanza ha caído en todas partes en el... olvido!

Las matrices cuadradas pueden tener una **INVERSA**, denotada A^{-1}, tal que:

$$\boxed{A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I}$$

Un primer teorema, sin demostración:

$$\boxed{(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}}$$

Un segundo teorema, sin demostración:

$$\boxed{{}^{t}(A \times B) = {}^{t}B \times {}^{t}A}$$

Estas demostraciones son fáciles, y no revisten mayor interés ahora (por si quieren intentarlo...).

ESPACIOS RIEMANNIANOS (*)

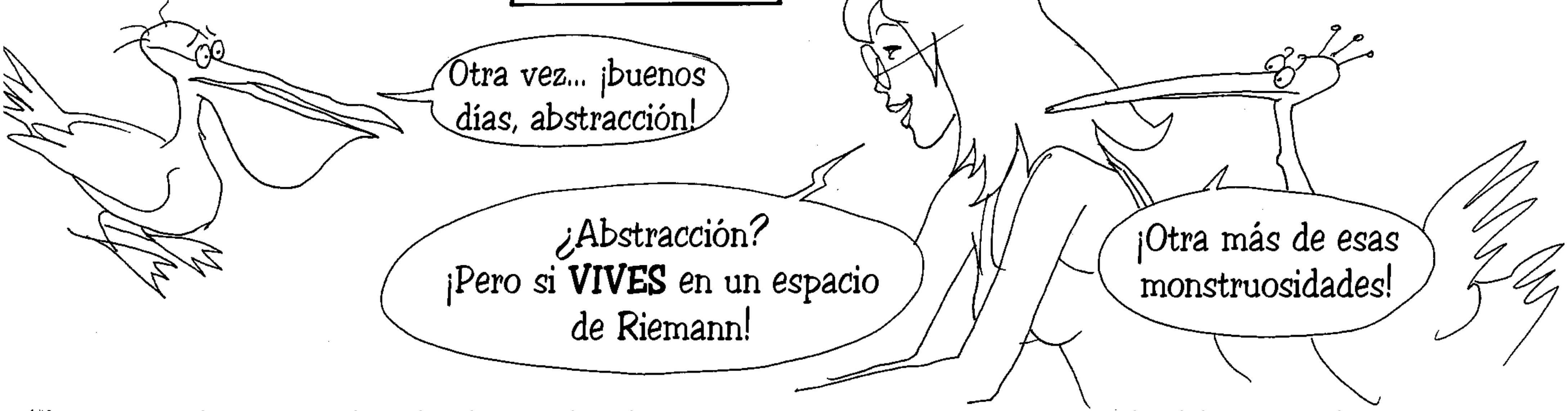
Llamaremos **MATRICES DE GRAM** a matrices cuadradas en las que los términos no diagonales son nulos y en las que los términos de la **DIAGONAL PRINCIPAL** valen ± 1.

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$$

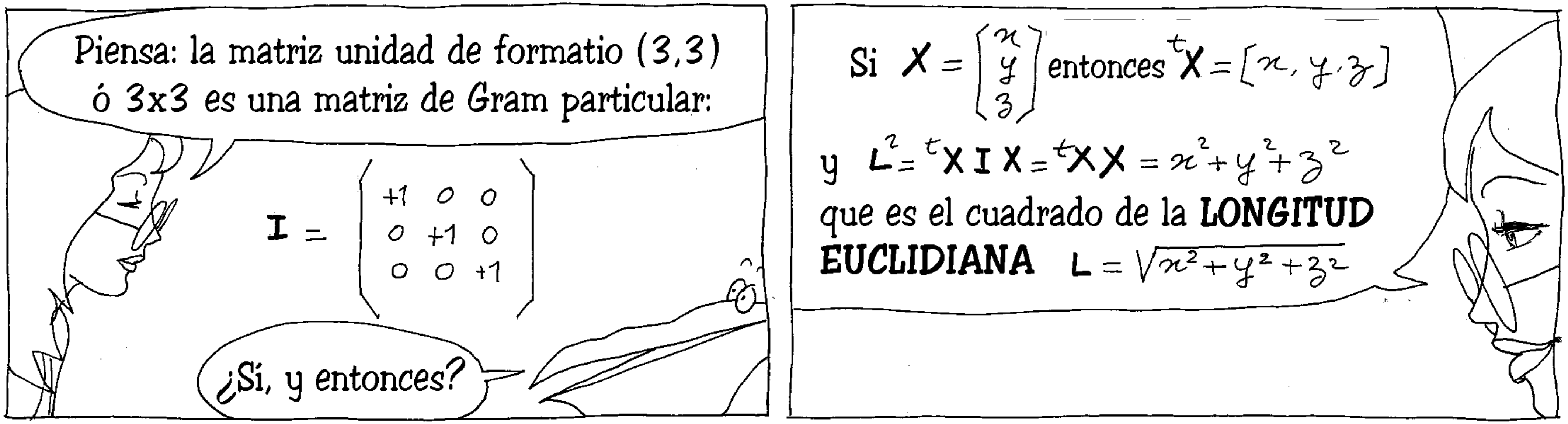
etc...

Sea un vector X perteneciente a un espacio $\mathcal{E}$ de n dimensiones. Diremos que este espacio es **RIEMANNIANO** si el cuadrado de la longitud del vector X se define por:

$$\boxed{L^2 = {}^tX\,G\,X}$$



(*) Los matemáticos no están todos de acuerdo sobre la terminología. Digamos que hemos decidido agrupar bajo esta denominación a todos los espacios de signatura ± 1.



SIGNATURA

La Signatura de estos espacios en una consecuencia de los signos de la métrica de Gram. En el caso del espacio euclidiano de tres dimensiones, es:

$$(+\ +\ +)$$

En un espacio de dos dimensiones, la matriz de Gram correspondiente a un espacio euclidiano sería:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y la signatura} \quad (+\ +)$$

Vamos ahora a ponernos la cuestión siguiente: ¿existe un conjunto de matrices M que, actuando sobre el vector $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, puedan preservar su longitud?

Vamos a realizar el cálculo de manera formal en el caso más general, el de un espacio riemanniano de n dimensiones, definido por su matriz de Gram **G**.
Sea **M** una matriz que actúa sobre el vcctor **X** y lo transforma en un vector **X'**:

$$X' = M X$$

El cuadrado de la longitud, o de la norma del vector X' es:

$$L'^2 = {}^tX' G X' = {}^t(MX)\, G\, (MX) = ({}^tX\, {}^tM)\, G' (MX) = {}^tX ({}^tM G M) X$$

Las longitudes **L** y **L'** son iguales si:

$$\boxed{{}^tM G M = G}$$

Apliquemos esto a un espacio euclidiano de dimensión n:

$$\boxed{{}^tM M = I}$$

Lo que significa simplemente que:

$$\boxed{M^{-1} = {}^tM}$$

A estas matrices se les llama ortogonales. Vamos a hacerlas explicitas en el caso 2d.

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad ; \quad c^2 + d^2 = 1 \quad ; \quad ac + bd = 0$$

Buscaremos las matrices $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que satisfacen estas relaciones.

Estas matrices M forman un conjunto $\mathcal{M}$, y además vamos a ver que ellas forman un

GRUPO

Esta es la palabra mágica de la física que ha sobrevivido. ¿Qué es un grupo?
Es un conjunto de reglas que actúan sobre un conjunto de algos. Para el caso, las reglas son **MATRICES**, y los algos son los puntos, o los conjuntos de puntos de un espacio dado.
Souriau (*) suele decir:

- Un grupo está hecho para transportar.
- El medio de transporte vale más que lo que se transporta.

En la historieta que vienen leyendo, dijimos "dime cómo te mueves y te diré QUIÉN eres".
Ahora podemos decir:

> Dime cómo te dejas transportar y te diré a qué familia de entes geométricos perteneces.
> O, dicho brevemente, qué espacio habitas.

De ahí la estrecha relación **GRUPO $\rightleftarrows$ GEOMETRÍA**

(*) J. M. Souriau, matemático francés, el "maestro de los grupos" de esta historieta (NdT).

Los axiomas que definen un grupo fueron introducidos por el noruego Sophus Lie.
Por esa razón, a los grupos de matrices se les denomina **GRUPOS DE LIE**. Pasemos a los axiomas.

- Sea un conjunto de algos-objetos que actúan unos sobre otros. Llamémosles: $\alpha, \beta, \gamma \dots$
Ellos forman un espacio $\mathcal{E}$.
- Se los puede componer mediante una **LEY DE COMPOSICIÓN** que se escribe: $\gamma = \alpha \circ \beta$

1 : Si α y β pertenecen al conjunto, $\alpha \circ \beta$ también pertenece al conjunto, y decimos que esta ley de composición es **INTERNA** (al grupo $\mathcal{E}$).
(los perros no engendran gatos)

2 : Existe un elemento, digamos e, denominado **ELEMENTO NEUTRO**, tal que para todo elemento α del grupo se cumple: $\boxed{e \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha}$

3 : Todo elemento α tiene un **INVERSO**, denotado por α^{-1}, tal que:

$$\boxed{\alpha \circ \alpha^{-1} = e}$$

4 : La operación de composición es asociativa, es decir que:

$$\boxed{(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)}$$

No utilizaremos prácticamente NUNCA este cuarto axioma. Es de hecho bastante difícil, por el contrario, encontrar operaciones de composición **NO ASOCIATIVAS**.

El físico no trabajará **SINO** con **GRUPOS DE MATRICES** llamados también **GRUPOS DE LIE.**
Se tendrán así los **CONJUNTOS DE MATRICES <u>CUADRADAS</u> M.**

- La operación de composición $\circ$ será la **MULTIPLICACIÓN MATRICIAL** $M_1 \times M_2$, **NO CONMUTATIVA.**
- El elemento neutro **e** será sistemáticamente la matriz unidad **I** en el formato considerado (n,n).

GRUPOS DISCRETOS

Llamamos así a los grupos (de matrices) que forman conjuntos con un número finito de elementos.
Las matrices de Gram de 2 filas y 2 columnas forman un grupo de cuatro elementos:

$$g = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Adicionalmente, son idénticas a... sus inversas. ¿Qué representan?
Hagámoslas ACTUAR sobre el vector $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de un espacio 2d.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$ simetría con respecto al eje oy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$ simetría con respecto al eje ox

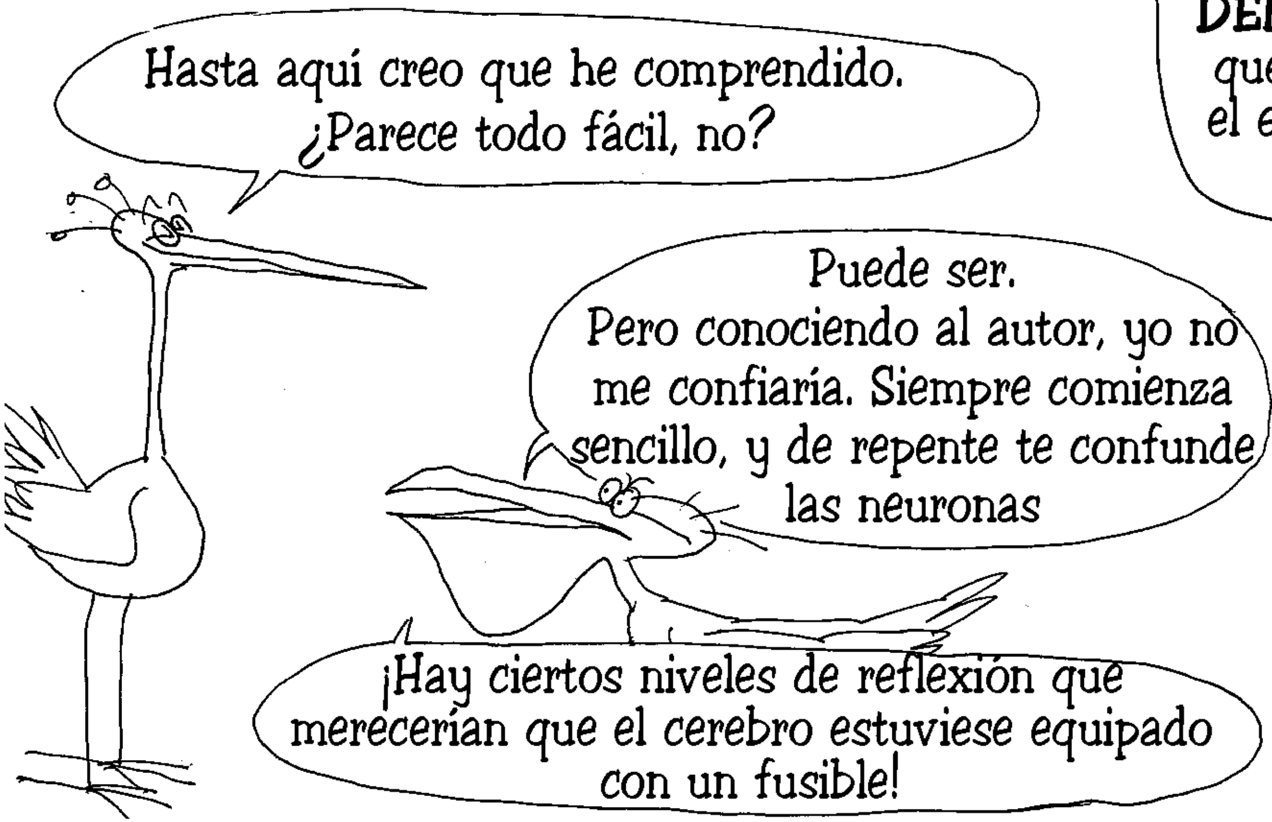
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$ simetría con respecto al origen

Nuestras condiciones están satisfechas: las simetrías preservan las longitudes

GRUPO DE 1 (O VARIOS) **PARÁMETROS**

Las matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ obedecen a nuestros criterios y forman el grupo de las rotaciones del plano en torno al origen.

Se trata de un grupo de 1 parámetro (el ángulo θ)



Las matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ forman un grupo llamado SO(2), por "special orthogonal".

ORIENTACIÓN

Multiplicando esta matriz por una de las dos matrices que invierten los objetos (R ⇄ Я) , como por ejemplo la que opera una simetría con respecto al eje oy, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Hacemos notar que $\theta = \pi$ da la simetría con respecto al eje ox.

Se obtiene un segundo conjunto de matrices que también son ortogonales puesto que cumplen: ^{t}**MM = I** . La unión de estos dos conjuntos forma el **GRUPO ORTOGONAL O(2)**.
Diremos que ese grupo, cuyos elementos denotaremos con la letra **a**, tiene **DOS COMPONENTES**:

O(2) → SO(2) → $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ que forma un **SUBPROGRAMA** del grupo O(2) que no invierte los objetos R → R

O(2) → $\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ que no es un grupo (no contiene elemento neutro). Sus elementos invierten los objetos R ⇄ Я

GRUPO DE ISOMETRÍA

El conjunto de acciones que preservan las longitudes, en un espacio de dos dimensiones, incluye:

- **Rotaciones**
- **Simetrías**
- **Translaciones** lo que se puede escribir en términos de matrices:

$E(2) \to SE(2)$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta + \Delta x \\ x\sin\theta + y\cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{R \to R}$$

$E(2)$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\cos\theta + y\sin\theta + \Delta y \\ x\sin\theta + y\cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{R \rightleftarrows Я}$$

Se obtiene así el **GRUPO DE EUCLIDES 2D** E(2), que es el **GRUPO DE ISOMETRÍA** del **ESPACIO EUCLIDIANO DE DOS DIMENSIONES**. Su primera **COMPONENTE**, SE(2) ("Special Euclid 2d"), forma un **SUBGRUPO**. La segunda es un conjunto de matrices **QUE INVIERTEN LOS OBJETOS**, pero que no constituyen un grupo.

En $2d$ es posible hacer completamente explícitos los cálculos. Y lo hecho para $2d$ puede ser extendido a $3d$. La matriz de Gram es la matriz unidad $3d$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

El cuadrado de la longitud es $L^2 = {}^tX\, I\, X$, con signatura $(+\ +\ +)$.

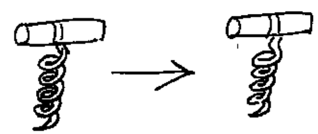
Sea una matriz M que actúa sobre el vector X según $X = M X'$.

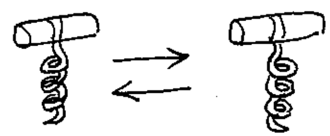
La preservación de la longitud implica: $L'^2 = {}^tX' I X' = {}^t(MX)(MX) = {}^tX({}^tMM)X$

$L' = L$ si

$$\boxed{{}^tMM = I \quad \text{ó} \quad M^{-1} = {}^tM}$$

Las matrices cuadradas $(3,3)$ que tienen esta propiedad se denominan **ORTOGONALES**, y forman el **GRUPO ORTOGONAL** $O(3)$, el cual posee **DOS COMPONENTES**:

$O(3) \to \boxed{SO(3)} \to$ No invierte los objetos 3D 

$O(3) \to$ **INVIERTE LOS OBJETOS 3D**  (**SIMETRÍA ESPECULAR**)

Agregando el vector translación

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

se construye el grupo de Euclides 3D E(3), el cual hereda la propiedad del grupo ortogonal O(3) sobre el cual está construido, cuyo elemento llamaremos $\boldsymbol{a}$ y que escribiremos:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} & a & \\ & (3,3) & \end{matrix}} & \begin{matrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \text{ actuando sobre } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

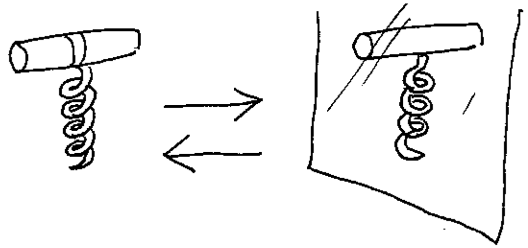
Esta **ACCIÓN**, escrita en forma matricial, le permite a los elementos del grupo de Euclides 3D E(3) actuar sobre los vectores **X** y difiere de las multiplicaciones matriciales habituales del tipo:

$$X' = MX$$

la cual no es más que una forma de **ACCIÓN** entre muchas otras. Este concepto de acción es esencial y a él volveremos más adelante.

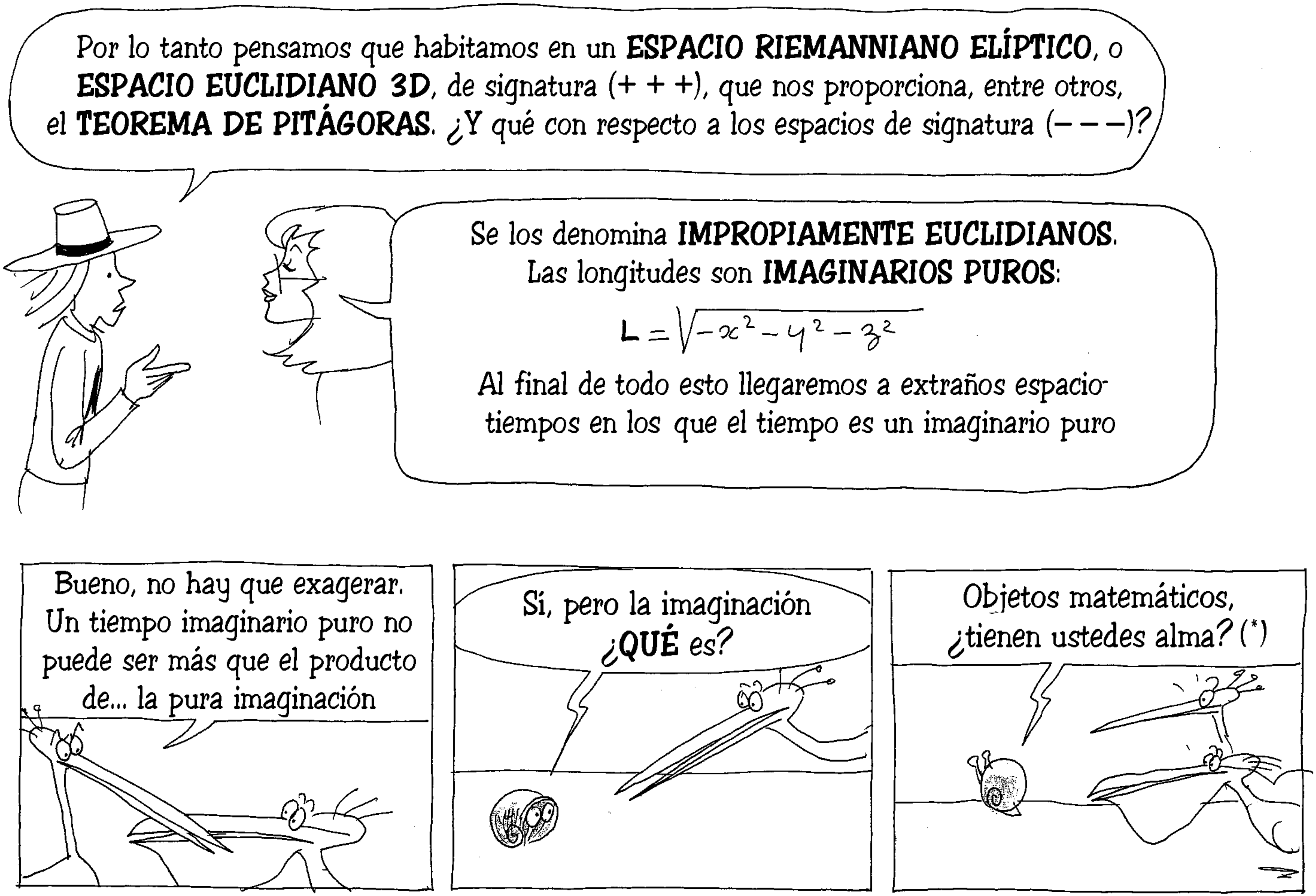
La mitad de las matrices que constituyen el grupo de Euclides transforma los objetos orientables (como el sacacorchos) en su imagen especular. Diremos que ellas operan

una **SIMETRÍA-P** o "simetría de paridad"



CUANDO LOS MATEMÁTICOS INVENTAN LOS ESPEJOS

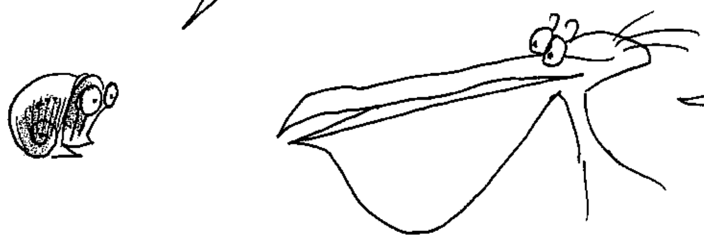
Es aquí que el matemático antecede al físico, en ciertos enfoques. Después de haber practicado las rotaciones y las translaciones, el matemático inventa la noción de grupo, las matrices de Gram, y construye el **SUBGRUPO** SE(3), que no invierte los objetos al **TRANSPORTARLOS FÍSICAMENTE**. Pero el grupo secreta elementos que el puro transporte físico no puede crear. Combinando rotaciones y translaciones no se podrá jamás crear un **SACACORCHOS IZQUIERDO** a partir de un **SACACORCHOS DERECHO**. Ahora bien, el grupo completo predice "la existencia" de tales objetos, habitantes "del otro lado de espejo", **ENANTIOMORFOS**.



(*) *Objets inanimés, avez-vous donc un âme / qui s'attache à notre âme et la force d'aimer?* (Lamartine) (NdT).

ESPACIOS RIEMANNIANOS HIPERBÓLICOS

Son aquellos en los que la **SIGNATURA** tiene signos **+** y signos - . La emergencia de la **TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL** consistió simplemente en pensar que en lugar de habitar en un espacio euclidiano de signatura (+ + +), es decir una **HIPERSUPERFICIE 3d** perpendicular al tiempo, habitamos en un espacio riemanniano hiperbólico de signatura (+ - - -), el **ESPACIO DE MINKOWSKI**



Tiresias, ¿cómo es que eres capaz de proferir semejantes monstruosidades?

La matriz de **GRAM** es entonces:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambiemos de letra para designar a un vector del espacio-tiempo:

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Definiremos un vector de translación espacio-temporal y lo escribiremos:

$$C = \Delta \xi = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Podemos considerar vectores infinitesimales:

$$d\xi = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Obtendremos entonces (al tomar c, la velocidad de la luz, igual a 1), la longitud infinitesimal:

$$\boxed{ds^2 = {}^t d\xi\, G\, d\xi = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

a la que llamaremos **MÉTRICA** (de **MINKOWSKI**) y que podremos escribir mediante un simple cambio de variables así:

$$\boxed{c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Ahora vamos a proceder como lo hicimos con el grupo de Euclides y el espacio euclidiano. Comenzaremos con un espacio-tiempo 2d:

$$\eta = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

en el que el elemento de longitud, su métrica 2d, es: $ds^2 = {}^t d\eta\, G\, d\eta$
junto con la métrica de Gram:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Construyamos ahora el **GRUPO DE ISOMETRÍA** de este espacio.

Vamos a proceder como lo hicimos con el espacio euclidiano. Abandonaremos por un momento la presentación en forma diferencial. Debemos buscar un conjunto de matricez **L** que actúen sobre el vector ξ según:

$$\xi' = L\xi$$

y que preserven esa extraña "longitud hiperbólica"; es decir, tales que:

$$L'^2 = {}^t\xi' G \xi' = {}^t(L\xi) G (L\xi) = {}^t\xi \left({}^tL G L\right) \xi = L^2 = {}^t\xi G \xi \quad \text{si:}$$

$$\boxed{{}^tL G L = G}$$

En 4d son matrices de 4 filas y 4 columnas, 4 x 4 o de formato (4,4). La fórmula de aquí arriba es la definición del grupo (de matrices) de **LORENTZ.**
Para poder explicitar, vamos a limitarnos a un espacio-tiempo 2d (t,x).

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o sea: $a^2 - c^2 = 1 \quad ; \quad b^2 - d^2 = 1 \quad ; \quad ab - cd = 0$

lo que nos da una primera $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\eta & \operatorname{sh}\eta \\ \operatorname{sh}\eta & \operatorname{ch}\eta \end{pmatrix}$

puesto que: $\operatorname{ch}^2\eta - \operatorname{sh}^2\eta = 1$

⇨ Las líneas trigonométricas son reemplazadas por líneas hiperbólicas.

$$\begin{cases} ch\,\eta = \dfrac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2} \\ sh\,\eta = \dfrac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \quad z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

El **GRUPO DE LORENTZ** es el equivalente de las rotaciones en el espacio de **MINKOWSKI**.

GRUPO DISCRETO

Las matrices de Gram 2d son matrices de Lorentz que obedecen:

$$ {}^{t}LGL = G $$

${}^{t}GGG = G$ con $GG = I$ y ${}^{t}G = G$, por lo que en 2d tenemos el grupo discreto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Podemos obtener el grupo de Lorentz completo, de cuatro componentes:

$$\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} ch\eta & sh\eta \\ sh\eta & ch\eta \end{bmatrix}} \; \boxed{\begin{bmatrix} ch\eta & -sh\eta \\ sh\eta & -ch\eta \end{bmatrix}}}_{\textbf{SUBGRUPO ORTOCRONO}} \; \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} -ch\eta & sh\eta \\ -sh\eta & ch\eta \end{bmatrix}} \; \boxed{\begin{bmatrix} -ch\eta & -sh\eta \\ -sh\eta & -ch\eta \end{bmatrix}}}_{\textbf{SUBCONJUNTO ANTICRONO}}$$

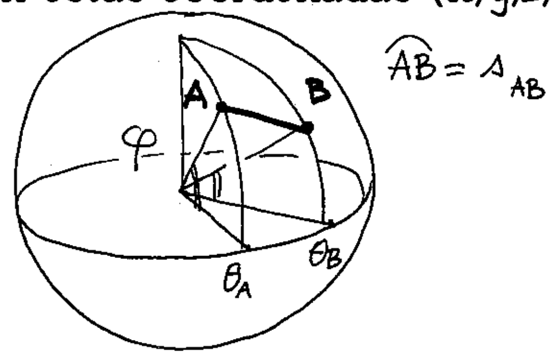
RELATIVIDAD ESPECIAL

Retomemos el cálculo de la **LONGITUD** en forma diferencial en el espacio de Riemann hiperbólico que es el **ESPACIO DE MINKOWSKI**, dada por su **MÉTRICA**:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Esto quiere decir que nuestros **MOVIMIENTOS SE INSCRIBEN** (*) en una hipersuperficie 4d. En ella, (x,y,z,t) son las **COORDENADAS**. En el álbum **MÁS RÁPIDO QUE LA LUZ** explicamos que la aplicación de un sistema de coordenadas sobre esta hipersuperficie corresponde a la lectura que hace el FÍSICO de esa hipersuperficie, en la que la única magnitud **INTRÍNSECA** es la longitud s. Hay la misma relación entre estas coordenadas y esta longitud s, la cual se mide en **METROS** y convertimos en **TIEMPO PROPIO** τ gracias a la relación ds = cdt, donde c es una velocidad característica, que entre las coordenadas de longitud θ y de latitud ϕ utilizadas para ubicar puntos sobre una esfera, y la longitud del camino recorrido $\widehat{AB}$. Lo que dice esta fórmula es que cuando se tienen estas coordenadas (x,y,z,t) se puede deducir una velocidad:

$$V = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$



Para que el tiempo $d\tau$ sea real es necesario que V < c.

El movimiento límite corresponderá a V = c, en cuyo caso $d\tau = 0$.

⇨ El tiempo propio del **FOTÓN** queda "congelado".

(*) En árabe, MEKTOUB.

Para las partículas que se mueven con $V < c$ se opera la **CONTRACCIÓN DE LORENTZ** :

$$\boxed{c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

τ es el tiempo que indica el reloj del pasajero que se mueve a la velocidad V, y fue ilustrado en el álbum **TODO ES RELATIVO**. Cuando V tiende a c, "el tiempo se detiene en los cronómetros". Pero volvamos al **GRUPO DE LORENTZ**. Sus elementos actúan sobre sucesiones de puntos del espacio tiempo que constituyen un **MOVIMIENTO**. Al hacer actuar un elemento **L** del grupo de Lorentz sobre un movimiento dado se obtiene otro movimiento. El hecho que este grupo contenga elementos **ANTICRONOS** indica que los movimientos **HACIA ATRÁS EN EL TIEMPO** deben ser tomados en consideración. A modo de ejemplo aquí hay una matriz que pertenece al grupo de Lorentz:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^tL\,G\,L = G \quad \text{con} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La acción es:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

INVERSIÓN DEL TIEMPO

Cuando definimos el **GRUPO ORTOGONAL**, subgrupo del grupo de isometría del **ESPACIO EUCLIDIANO**, lo completamos con la ayuda del vector de **TRANSLACIONES ESPACIALES**:

$$c = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

construyendo así el **GRUPO DE EUCLIDES**, su grupo de isometría:

elemento del grupo ortogonal O(3)

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De igual forma, a partir del **GRUPO DE LORENTZ**, vamos a construir el **GRUPO DE POINCARÉ**, grupo de isometría del espacio de MINKOWSKI:

$$c = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$ translaciones espaciotemporales

$$\begin{pmatrix} L & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

El grupo de Poincaré, a través de su subgrupo $\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hereda las propiedades del grupo de Lorentz y como éste posee cuatro componentes:

- **DOS ORTOCRONAS** (que no invierten el tiempo)
- **DOS ANTICRONAS** (que invierten el tiempo)

Sólo nos queda por comprender el **SIGNIFICADO FÍSICO** de esta inversión temporal.

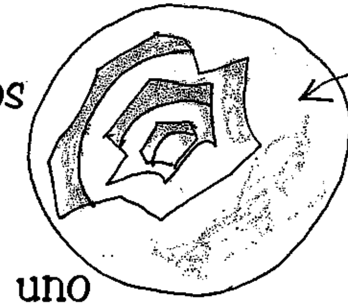
ESPACIO, GRUPOS Y OBJETOS

Hemos partido del espacio euclidiano y hemos razonado en 2d para poder hacer explícitos los cálculos. Hemos construido así su **GRUPO DE ISOMETRÍA**, el **GRUPO DE EUCLIDES**. Este acompaña entonces al espacio euclidiano y permite **ACTUAR** sobre los objetos, conjuntos de puntos que habitan en dicho espacio. Pero también se puede considerar el problema inverso: dado el grupo, en tanto que ente abstracto y puramente matemático, que permite realizar **ACCIONES**, descubrir "el espacio subyacente", el único en que dichas acciones pueden ser realizadas, "el espacio que cuadra", para decirlo de algún modo. De esta manera el espacio y su grupo (de isometría) se confieren existencia mutuamente.

Pero hay más. El grupo genera los **OBJETOS** del espacio al cual está ligado, en tanto que **INVARIANTES POR ACCIÓN DE UN SUBGRUPO**. Demos un ejemplo. Las rotaciones alrededor de un punto, en el espacio euclidiano 2d, constituyen uno de sus subgrupos. Los objetos invariantes son entonces la familia de círculos centrados en dicho punto. ¡Es así, en términos de grupo, que se define el círculo!

Lucrecio, poeta y filósofo romano, siglo I a. C. Imaginó que los objetos estaban hechos de átomos al constatar la analogía existente entre el flujo del agua y el de la arena (ver **¿Y SI VOLÁRAMOS?**, págs. 15 a 17)

En el grupo de Euclides 3d, las rotaciones en torno a un punto constituyen también uno de sus subgrupos. ¿Cuáles son los objetos que las **ACCIONES DE ESE SUBGRUPO** dejan **INVARIANTES**? Respuesta: la familia de las **ESFERAS** con centro en ese punto.



$$\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El concepto de **INVARIANTE** por tal o cual acción del grupo o de uno de sus subgrupos es un concepto fundamental de la **TEORÍA DE GRUPOS**. En el grupo de Euclides, del cual está ausente el tiempo, el grupo mismo hace nacer **OBJETOS** que irán a poblar el espacio al cual está ligado.

Cuando el tiempo interviene, el grupo se convierte en un **GRUPO DINÁMICO**. Ya no controla más objetos estáticos, sino **CONJUNTOS DE "PUNTOS-EVENTOS"**, que podemos llamar **TRAYECTORIAS** o **MOVIMIENTOS**. A comienzos del siglo pasado la notable matemática alemana Emmy Noether (calificada por Einstein como "monumento de la física") dio su nombre a uno de los teoremas más importantes de la física que afirma que a todo subgrupo de un grupo dinámico le corresponde un **INVARIANTE**.

En el **GRUPO DE POINCARÉ** encontramos el **SUBGRUPO DE TRANSLACIONES TEMPORALES**, representado por la matriz de la derecha. Es un grupo de 1 parámetro. Le corresponde, por lo tanto, un invariante escalar: la **ENERGÍA E**. ¡Es así como, en términos de grupos, definimos la energía!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\Delta t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

El segundo subgrupo es el de las **TRANSLACIONES ESPACIALES** (matriz de la derecha), grupo de tres parámetros $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le corresponde un nuevo invariante:

el **IMPULSO** $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Es así, con la ayuda de **GRUPOS DINÁMICOS**, que se define el impulso. Las magnitudes de la física se convierten entonces en **OBJETOS GEOMÉTRICOS**, y este enfoque de **GEOMETRIZACIÓN DE LA FÍSICA** constituye uno de los pilares de la **FÍSICOMATEMÁTICA**.

Continuando con el juego, podemos considerar el subgrupo de las **TRANSLACIONES ESPACIOTEMPORALES** (matriz de al lado).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \Delta t \\ x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}$$

El objeto invariante será en este caso el **CUADRIVECTOR IMPULSO-ENERGÍA:** $\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

¿Para qué sirven las **MAGNITUDES DE LA FÍSICA**? Buena pregunta. La respuesta es que **¡SE LAS PUEDE ADICIONAR!**

El grupo de Poincaré depende de diez parámetros (decimos que es de "dimensión DIEZ", simple terminología de matemático). Hay 3 para la translación espacial y 1 para la translación temporal. Quedan seis, que representan la dimensión del **GRUPO DE LORENTZ**, el cual controla "las rotaciones espacio-temporales". Si se considera al grupo de Lorentz como un subgrupo del grupo de Poincaré, el teorema de Noether nos dice que le debe corresponder un "objeto" definido por seis parámetros, el cual será invariante bajo la acción de ese subgrupo.

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\xi \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

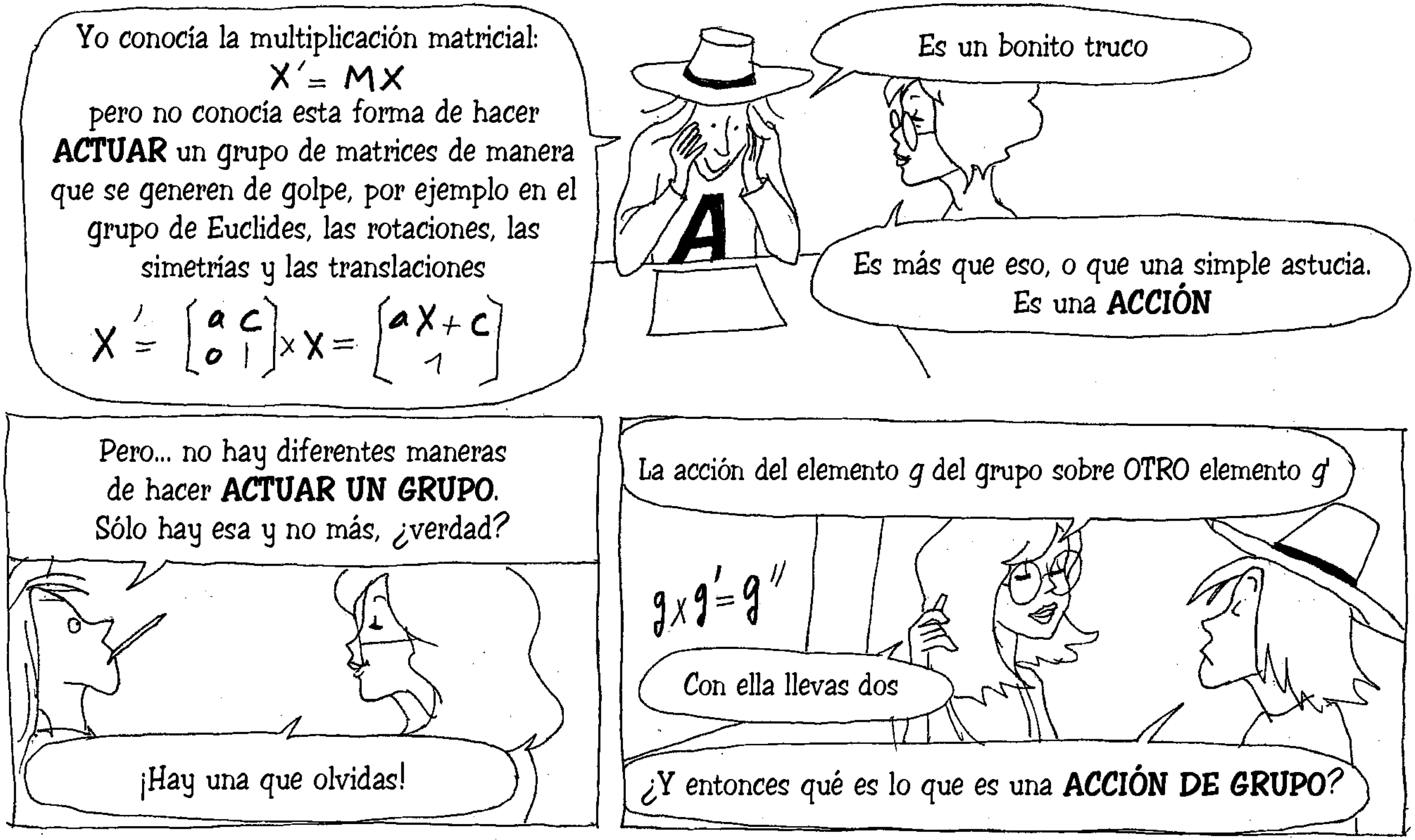
En este objeto se esconde el **ESPÍN**. Souriau mostró en 1972 su naturaleza **PURAMENTE GEOMÉTRICA**. Tiene dimensiones de un momento cinético. Puesto que es el grupo de Poincaré el que controla el movimiento del **PUNTO MATERIAL RELATIVISTA**, la interpretación del espín en tanto que objeto puramente geométrico es preferible.

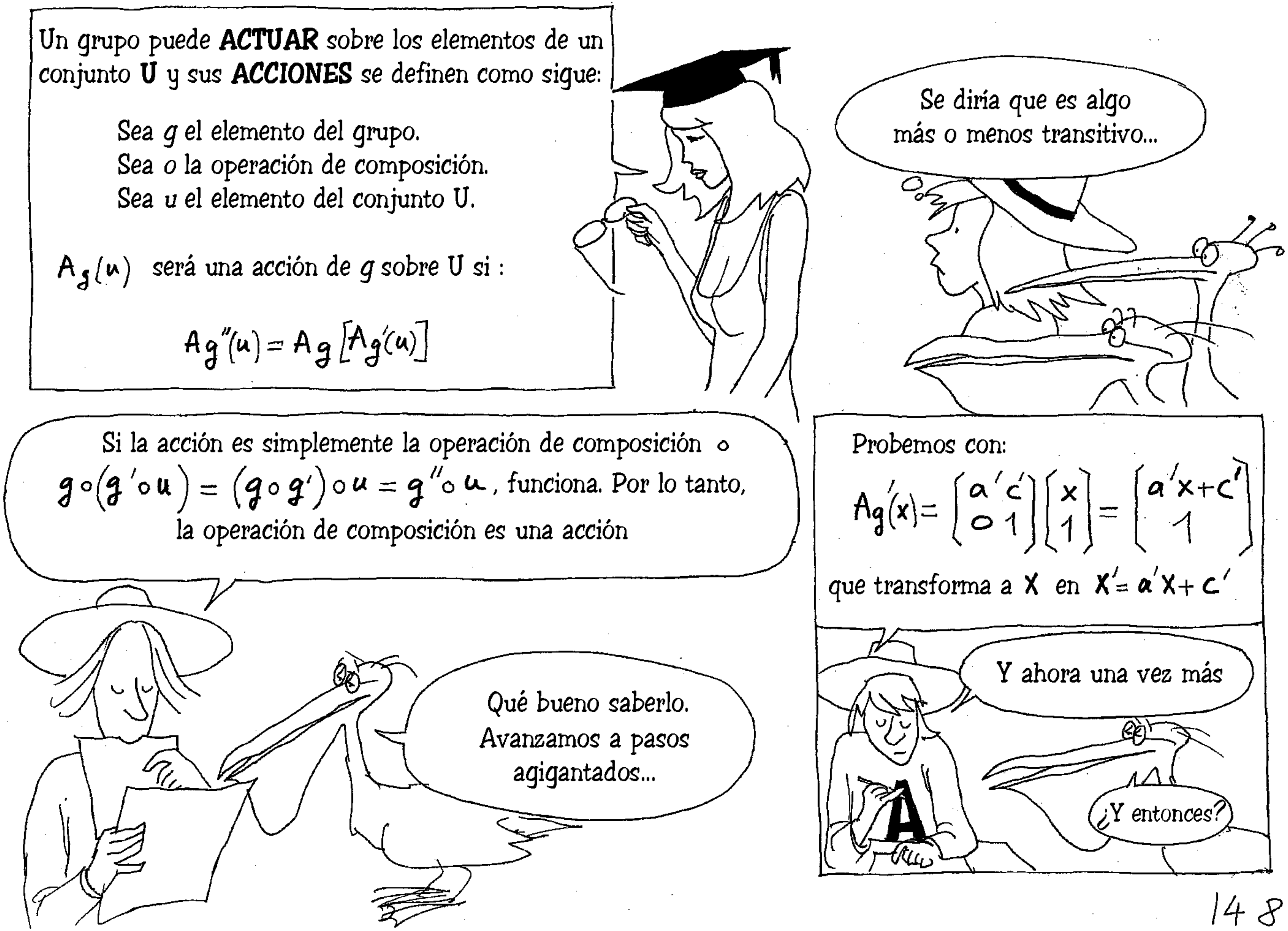
EL "MOMENTO"

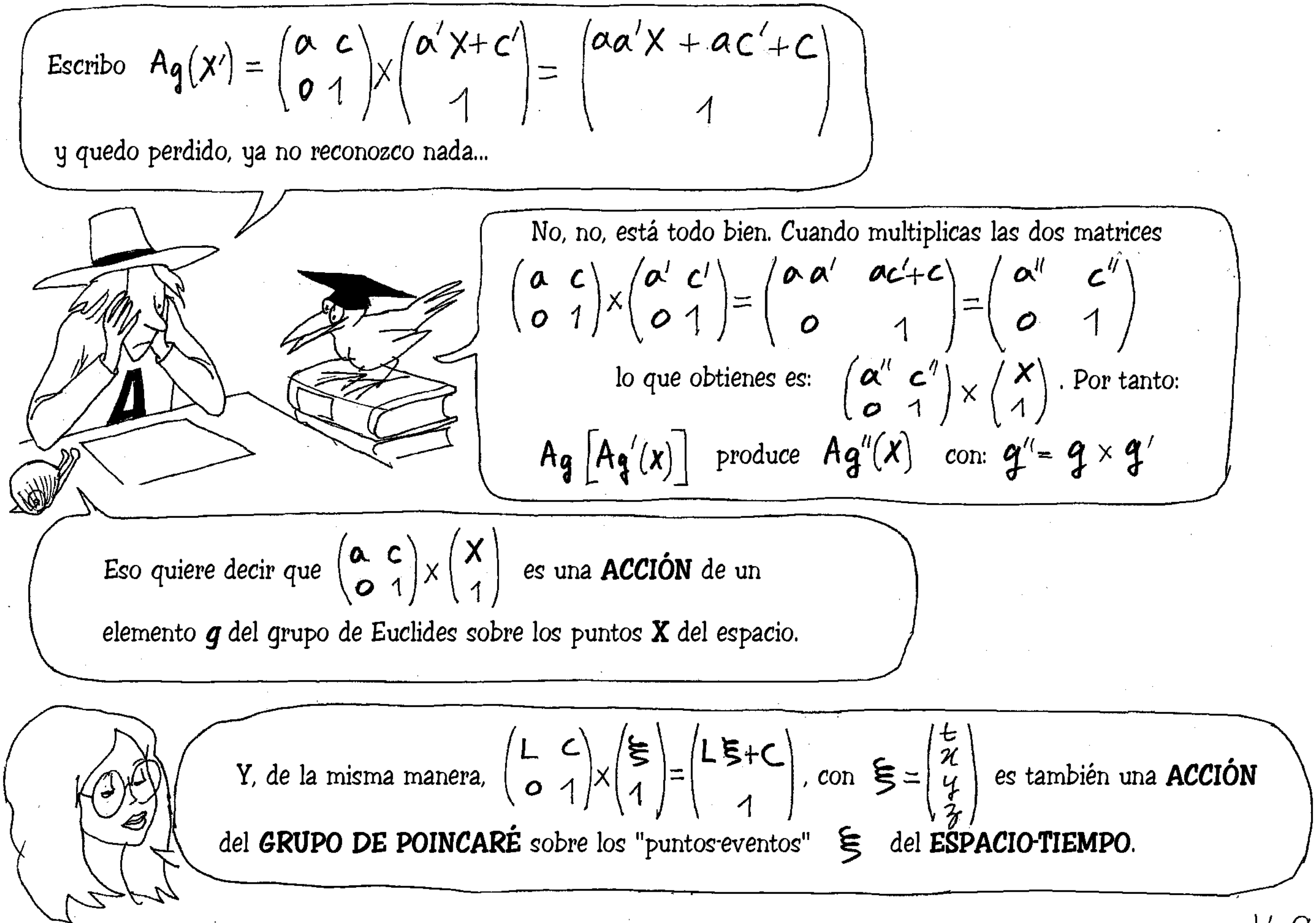
Los subgrupos corresponden a una especie de "desmontaje del grupo, pieza por pieza, rueda a rueda". Cuando se hace la operación inversa, se reconstituye el grupo. El conjunto de los invariantes nombrados anteriormente forma lo que Souriau llama el "momento":

$$\text{momento} = \{ E, p_x, p_y, p_z, \ldots \text{ESPÍN} \}$$

ACCIONES DE UN GRUPO




Un grupo puede **ACTUAR** sobre los elementos de un conjunto **U** y sus **ACCIONES** se definen como sigue:
Sea g el elemento del grupo.
Sea o la operación de composición.
Sea u el elemento del conjunto U.
$A_g(u)$ será una acción de g sobre U si :
$A_{g''}(u) = A_g\left[A_{g'}(u)\right]$
Se diría que es algo más o menos transitivo...
Si la acción es simplemente la operación de composición $\circ$
$g \circ (g' \circ u) = (g \circ g') \circ u = g'' \circ u$, funciona. Por lo tanto, la operación de composición es una acción
Qué bueno saberlo. Avanzamos a pasos agigantados...
Probemos con:
$A_{g'}(x) = \begin{bmatrix} a' & c' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'x + c' \\ 1 \end{bmatrix}$
que transforma a x en $x' = a'x + c'$
Y ahora una vez más
¿Y entonces?
A



Escribo $A_g(X') = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a'X + c' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'X + ac' + c \\ 1 \end{pmatrix}$ y quedo perdido, ya no reconozco nada...
No, no, está todo bien. Cuando multiplicas las dos matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac'+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & c'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lo que obtienes es: $\begin{pmatrix} a'' & c'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto: $A_g\left[A_{g'}(X)\right]$ produce $A_{g''}(X)$ con: $g'' = g \times g'$
Eso quiere decir que $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ es una **ACCIÓN** de un elemento ***g*** del grupo de Euclides sobre los puntos **X** del espacio.
Y, de la misma manera, $\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix}$, con $\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es también una **ACCIÓN** del **GRUPO DE POINCARÉ** sobre los "puntos-eventos" ξ del **ESPACIO-TIEMPO**.

¡CUIDADO, UNA GEOMETRÍA PUEDE ESCONDER A OTRA!

$$\boxed{J' = g \times J \times {}^t g}$$

donde J es una matriz ANTISIMÉTRICA..

Podemos verificar que se trata de una **ACCIÓN**.

$$A_g[A_{g'}(J)] = g \times [g' \times J \times {}^t g'] \times {}^t g = g\, g'\, J\; {}^t g'\, g$$

Pero ${}^t[AB] = {}^tB\,{}^tA$ luego ${}^t g'\,{}^t g = {}^t(g\,g')$ y si $g'' = g\,g'$

$$A_g[A_{g'}(J)] = g'' \quad {}^t g'' = A_{g''}(\,J\,)$$

La matriz **J** tiene necesariamente el mismo formato (5,5) de las matrices g del grupo. En una matriz antisimétrica los términos simétricos con respecto a la diagonal principal son opuestos. Lo que quiere decir que los de la diagonal principal son iguales a cero (que es su propio opuesto). Podemos entonces listar los componentes de dicha matriz:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \ell \\ \hline -\ell & 0 \\ \hline \end{array}$$

(2,2)

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -\ell_z & -\ell_y \\ \hline \ell_z & 0 & -\ell_x \\ \hline -\ell_y & \ell_x & 0 \\ \hline \end{array}$$

(3,3)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & -\ell_z & \ell_y & f_x \\ \hline \ell_z & 0 & -\ell_x & f_y \\ \hline -\ell_y & \ell_x & 0 & f_z \\ \hline -f_x & -f_y & -f_z & 0 \\ \hline \end{array}$$

(4,4)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & -\ell_z & \ell_y & f_x & -p_x \\ \hline \ell_z & 0 & -\ell_x & f_y & -p_y \\ \hline -\ell_y & \ell_x & 0 & f_z & -p_z \\ \hline -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -E \\ \hline p_x & p_y & p_z & E & 0 \\ \hline \end{array}$$

(5,5)

Formato	Número de componentes
(2,2)	1
(3,3)	3
(4,4)	6
(5,5)	10

Puedo recortar esta matriz antisimétrica **J** de formato (5,5) en una matriz antisimétrica **M** de formato (4,4) y un **CUADRIVECTOR P**, de cuatro componentes. Y podría escribir todo de manera más compacta. Eso me permitiría explicitar el cálculo de la Acción del grupo de Poincaré sobre esta matriz-momento **J** de forma más cómoda y simple

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x & -p_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y & -p_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z & -p_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -E \\ p_x & p_y & p_z & E & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \\ -E \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z & E \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E \end{pmatrix}$$

$${}^tP = \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z & E \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} M & -P \\ {}^tP & 0 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Visto desde ese ángulo, el recorte es lógico

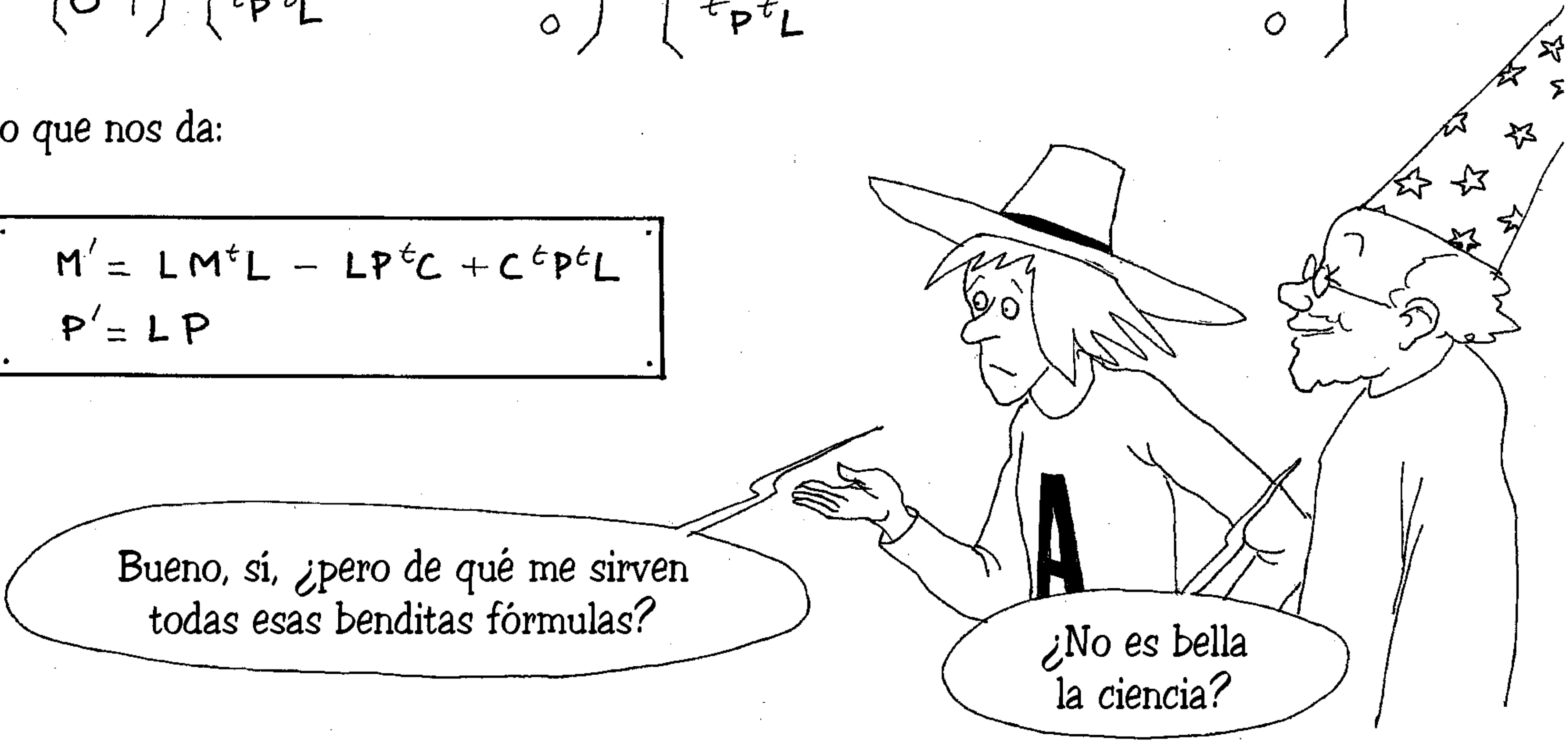
Sólo queda por explicitar el cálculo $J' = g \times J \times {}^tg$

$$ {}^t g = \begin{pmatrix} {}^tL & 0 \\ {}^tC & 1 \end{pmatrix} \qquad J' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & -P \\ {}^tP & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^tL & 0 \\ {}^tC & 1 \end{pmatrix} $$

$$ J' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M\,{}^tL - P\,{}^tC & -P \\ {}^tP\,{}^tL & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L M\,{}^tL - L P\,{}^tC + C\,{}^tP\,{}^tL & -LP \\ {}^tP\,{}^tL & 0 \end{pmatrix} $$

Lo que nos da:

$$ \boxed{\begin{aligned} M' &= L M\,{}^tL - L P\,{}^tC + C\,{}^tP\,{}^tL \\ P' &= L P \end{aligned}} $$




Adoptando la mirada del físico, vamos a dar a las componentes del **MOMENTO** una **INTERPRETACIÓN FÍSICA**. En el cuadrivector **P**, E es la energía y $p = \{p_x, p_y, p_z\}$ es el impulso
¿Y la matriz antisimétrica **M**, qué es lo que representa?
¡Es una

La matriz **S** *se escribe entonces:*

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -S & 0 \\ \hline S & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

El método de **CUANTIFICACIÓN GEOMÉTRICA** que él inventó permitió mostrar que este espín **S** no podía ser sino un múltiplo de una cantidad fija: ħ. Hemos visto que el hecho de que una partícula esté dotada de una carga eléctrica era equivalente a decir que ella evolucionaba en un espacio dotado de una **QUINTA DIMENSIÓN**, la dimensión de **KALUZA**. El hecho de que esta dimensión se cierre sobre sí misma implica que la carga eléctrica está cuantificada. En el espacio-tiempo existe una "forma de cerramiento" que hace que un objeto sea idéntico a sí mismo bajo la acción de una rotación de 360°. La cuantificación del Espín, en cierta medida, se deriva de esa propiedad. Existe una relación estrecha entre cuantificación y cerramiento de una dimensión. Explotando la noción de grupo y el cerramiento de la quinta dimensión, Souriau hizo brotar la ecuación de Klein-Gordon a partir del grupo de Poincaré (y la ecuación de Schrödinger a partir del grupo de Galileo, grupo dinámico que genera el movimiento del punto material no relativista).

(*) Structure of dynamical systems. Birkhauser ed. y en el sitio de J.M.Souriau http://www.jmsouriau.com

LA INVERSIÓN DEL TIEMPO IMPLICA LA INVERSIÓN DE LA ENERGÍA

Hemos visto antes, en la página 142, que el elemento del grupo de Lorentz podía ser escrito en la forma:

$$L = \mu L_o \qquad \mu = \pm 1$$

donde $\mathbf{L}_o$ representa el elemento del subgrupo ortocrono (que no invierte el tiempo). Bajo esta forma la acción se escribe:

$$M' = L_o M \, {}^tL_o - \mu L_o P \, {}^tC + \mu C \, {}^tP L_o$$

$$P' = \mu L_o P$$

Consideremos la acción más sencilla posible en la que haya inversión del tiempo ($\mu = -1$). Dentro del grupo ortocrono $\mathbf{L}_o$, escojamos la matriz unidad **I**. Anulemos la translación espacio-temporal ***C***. El elemento del grupo se escribe:

$$g = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

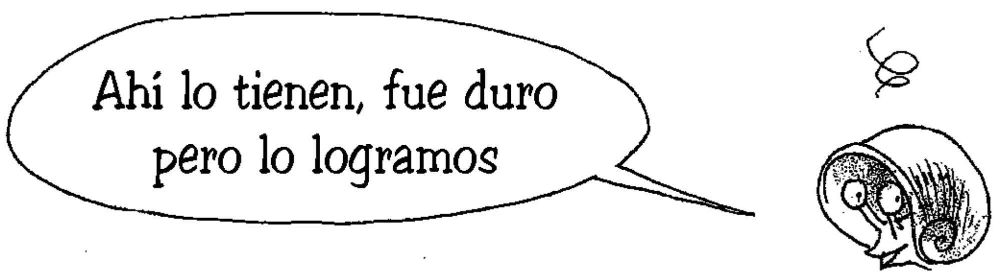
La acción sobre el espacio-tiempo, el espacio de trayectorias, se reduce a:

$$\xi' = -\xi \quad \Rightarrow \quad t \Rightarrow -t$$

Esto es, inversión del sentido del tiempo a lo largo de la trayectoria.
La acción sobre el momento es:

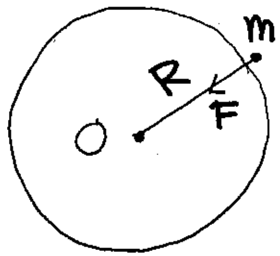
$$M' = M \quad \Rightarrow \quad \text{el espín S no cambia}$$

$$P' = -P \; : \quad E \to -E$$



ANEXO 3
SOLUCIONES NEWTONIANAS

En 1934, Milne y Mac Crea crearon un inmenso estupor haciendo emerger la ecuación de Friedmann, que da la ley de evolución de la dimensión característica **R** del universo, con tres veces menos cálculo y la ley de Newton. El método consiste en considerar una porción de universo contenida en una esfera de radio **R** y centro en O, siendo ρ la densidad de la materia en el medio. Se busca entonces cuál es la aceleración **R"** a la que está sometida una masa suponiendo



que el punto O es fijo. Se puede demostrar que la fuerza radial a la cual la masa **m** está sujeta se limita a la de una masa $\mathbf{M} = 4/3\,\pi \mathbf{R}^3 \rho$, la que estaría concentrada en O y representa la masa contenida en la esfera de radio **R**.

$$F = \frac{-Gm}{R^2}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = m R''$$

Se obtiene la ecuación diferencial:

$$R'' = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{4\pi G \rho R^3}{3}\right)$$

Si la masa se conserva, $\rho R^3 = C^{te}$, se obtiene la ecuación de Friedmann:

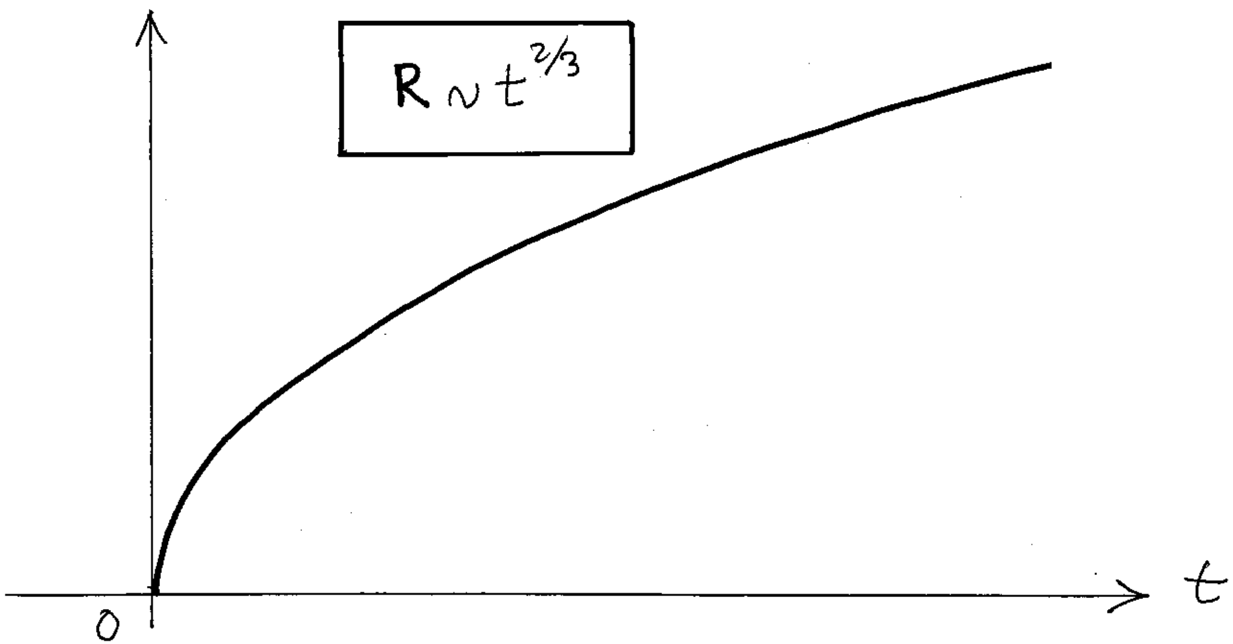
$$R'' = -\frac{a^2}{R^2}$$

la cual tiene tres tipos de soluciones que corresponden todas ellas a condiciones de desaceleración, infinita para **R** = 0 y luego decreciente a lo largo de la expansión **R**(t) con el tiempo.
Nosotros buscamos una ley del tipo:

$$R \sim t^n$$

$$R' = n a^2 t^{n-1} \quad ; \quad R'' = n(n-1) a^2 t^{n-2} \quad ; \quad R^2 R'' = n(n-1) a^6 t^{3n-2}$$

lo que lleva a una solución parabólica:



Imaginemos ahora que la evolución del Universo esté gobernada por dos contenidos, el uno que representa las masas positivas m^+ y el otro las masas negativas m^-. Además, como nos hemos esforzado en hacerlo comprensible en esta historieta, esta expansión se juega por medio de dos **FACTORES DE ESCALA R^+** y **R^-** (*warp factors*).

Consideremos una masa positiva m^+ situada en una esfera de radio R^+ cuyo centro se supone fijo. En el marco de una aproximación newtoniana, calculemos la aceleración $R^{+''}$ que experimenta la masa positiva. Esta puede ser calculada considerando, como lo hicimos anteriormente, la cantidad de masa positiva contenida en dicha esfera (concentrada en su centro):

$$\frac{4}{3}\pi \rho^+ R^{+3}$$

Necesitamos ahora tener en cuenta la **MASA APARENTE** de la masa negativa contenida en esta esfera, la cual es:

$$\frac{4}{3}\pi \rho^- R^{+3} \qquad \text{con} \qquad \frac{\rho^-}{\rho^+} = \frac{R^{+3}}{R^{-3}}$$

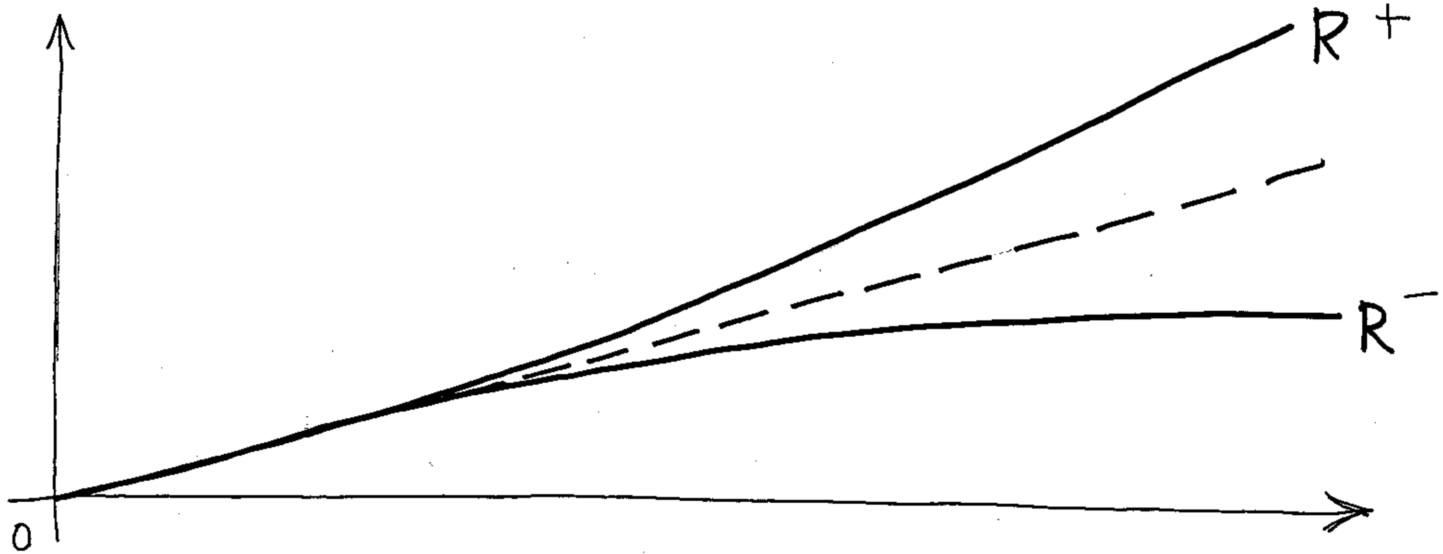
La ecuación diferencial para $R^+(t)$ es entonces:

$$R^{+''} = -\frac{Gm^+}{R^{+2}} \times \frac{4\pi R^{+3}}{3}\left(\rho^+ - \rho^-\right) = \frac{-a^2}{R^{+2}}\left(1 - \frac{R^{+3}}{R^{-3}}\right)$$

Haciendo el mismo razonamiento y utilizando ahora la aceleración $\mathbf{R}^{-\prime\prime}$ que experimenta una masa m^- y poniendo la constante (arbitraria) "a" igual a 1, tendremos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{cases} R^{+\prime\prime} = -\dfrac{1}{(R^+)^2}\left(1 - \dfrac{(R^+)^3}{(R^-)^3}\right) \\ R^{-\prime\prime} = -\dfrac{1}{(R^-)^3}\left(1 - \dfrac{(R^-)^3}{(R^+)^3}\right) \end{cases}$$

el cual admite la solución lineal (inestable): $R^+ = R^- \sim t$



La inestabilidad de la solución, suponiendo que las masas positivas experimentan una aceleración tardía, producirá la ilusión de la acción de una **ENERGÍA NEGRA.**

Estos dos mundos constituidos de energías y de masas de signos opuestos interactúan. En el caso representado en la página anterior, las masas negativas, más densas, aceleran el fenómeno de expansión de las masas positivas, asociadas con el factor de escala $\mathbf{R}^{+}(t)$. Un fenómeno inverso ocurre en el "negamundo" en el que observadores constituidos de masas negativas y que reciben señales transportadas por **FOTONES DE ENERGÍA NEGATIVA**, constatarían, por el contrario, una desaceleración del fenómeno de expansión.

El comienzo de la curva, en el que la expansión parece lineal, puede parecer incompatible con las observaciones. Entonces intervienen una **RUPTURA DE SIMETRÍA** y una **VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES**, en particular de la velocidad de la luz, sin la cual la gran homogeneidad del universo primitivo no es explicable. Todo esto es materia del álbum:

MÁS RÁPIDO QUE LA LUZ

ANEXO 4
LA ANTIMATERIA

En la página 40 evocamos la idea según la cual para que un punto material relativista esté dotado de una carga eléctrica **e** hacía falta concebir su desplazamiento no en un espacio de cuatro dimensiones, sino en un espacio de cinco:

$$\{t, x, y, z, \zeta\}.$$

ζ es la quinta dimensión, o **DIMENSIÓN DE KALUZA**.
En la página 137 introdujimos asimismo la **MÉTRICA DE MINKOWSKI**:

$$\boxed{ds^2 = {}^t d\boldsymbol{\xi}\, \mathbf{G}\, d\boldsymbol{\xi} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Vamos ahora a partir de un **ESPACIO DE KALUZA**, riemanniano e hiperbólico, definido por su signatura (+ − − − −) y con matriz de Gram:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La métrica del espacio de Kaluza es:

$$d\Sigma^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\zeta^2$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \zeta \end{pmatrix}$$

$$d\Sigma^2 = {}^t d\boldsymbol{\Omega}\, \Gamma\, d\boldsymbol{\Omega}$$

Se puede entonces buscar el grupo de isometría de este espacio de Kaluza. Encontraremos un grupo cuya representación matricial se parece trazo por trazo a la del grupo de Poincaré, con una dimensión adicional:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad {}^t\Lambda\, \Gamma\, \Lambda = \Gamma$$

Este grupo actúa sobre los puntos del espacio de Kaluza:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \boldsymbol{\Omega} + C \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector $\mathbf{C}$ representa en este caso una translación en cinco dimensiones:

$$C = \begin{bmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \xi \end{bmatrix}$$

Las translaciones según la dimensión ξ representan un subgrupo de este grupo:

Su representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta\xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \xi + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es un subgrupo de 1 parámetro.

El teorema de Noether nos dice que habrá un nuevo escalar que será invariante bajo la acción de este subgrupo, y ese escalar es:

$$\boxed{\textbf{LA CARGA ELÉCTRICA } e}$$

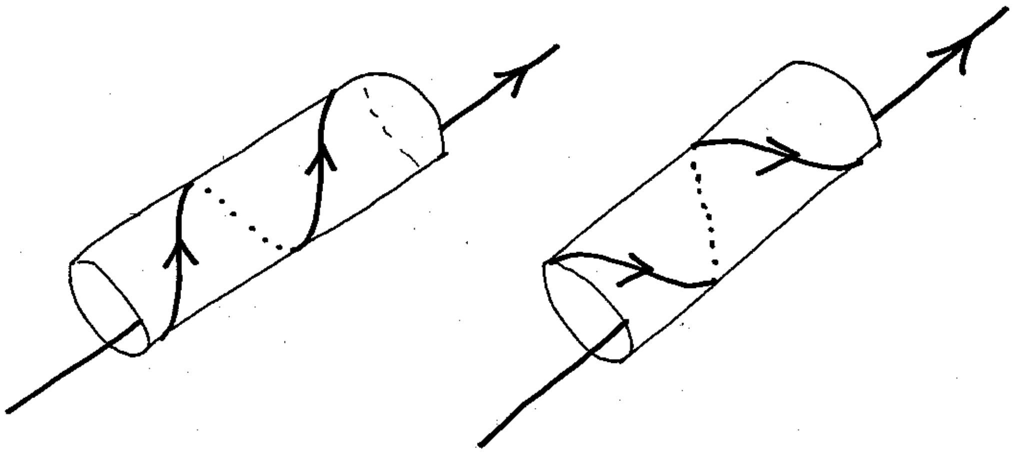
El grupo de Kaluza se construye a partir de un grupo Λ.
El grupo de Lorentz es uno de sus subgrupos:

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí está otro subgrupo del grupo de Kaluza:

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \zeta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\boldsymbol{\xi} \\ \mu\zeta \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \mu = \pm 1$$

Los elementos ($\mu = -1$) de este grupo invierten la quinta dimensión. Retomando el dibujo de la página 42: (la quinta dimensión está encerrada)



El sentido del enrollamiento del movimiento de la partícula se invierte. Se puede demostrar (...) que esto implica la inversión de la carga eléctrica **e**.

Esto no bastaría para representar una definición geométrica de la antimateria. Una partícula posee **CARGAS CUÁNTICAS**, y la carga eléctrica **e** no es más que una de ellas. Pero se ve anunciarse la idea: "El estatuto de la antimateria indica un tipo de movimiento en un espacio de dimensión superior".

SUBGRUPOS DE LORENTZ ORTOCRONO Y ANTICRONO

El **GRUPO DE LORENTZ** **L** tiene cuatro componentes:
L_n (neutro), L_s (inversión de espacio), L_t (inversión de tiempo), L_{st} (inversión de espacio y tiempo). La "componente neutra" es un subgrupo que contiene al elemento neutro (a diferencia de los otros tres conjuntos), y que no invierte... ni el espacio ni el tiempo. Enseguida presentamos algunas matrices que pertenecen a esos conjuntos ($\in$ significa "pertenece a" y { } indica "conjunto"):

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \in \{L_n\} \; ; \; \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix} \in \{L_s\} \; ; \; \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \in \{L_t\} \; ; \; \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix} \in \{L_{st}\}$$

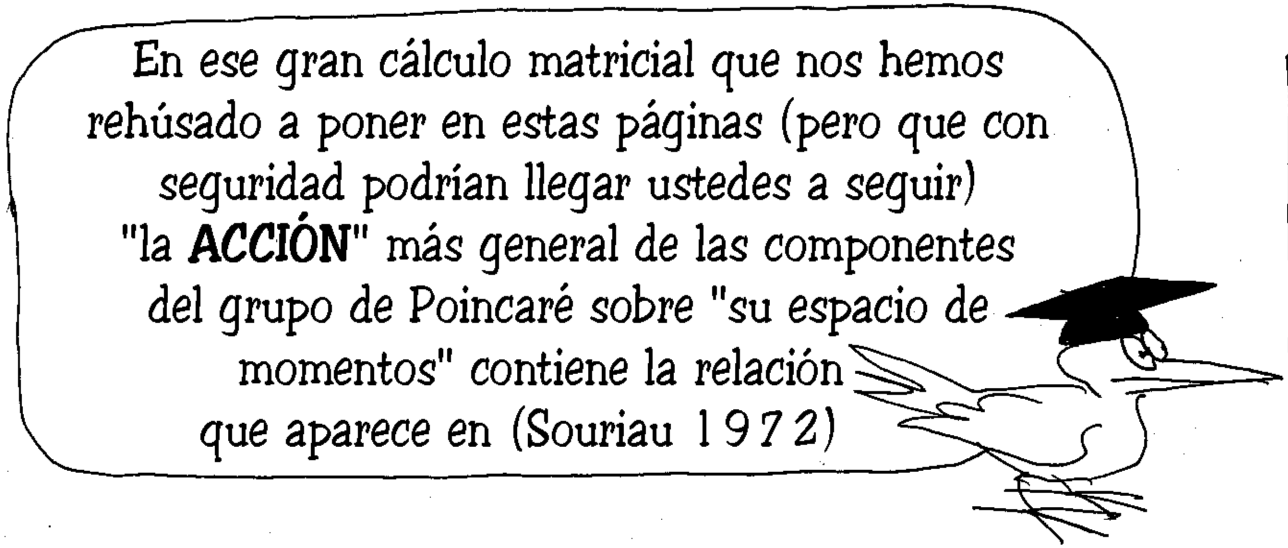
ANEXO 5
GRUPO GEMELAR

Podemos agrupar estos cuatro conjuntos de matrices en dos subconjuntos:

$$L_o \,(\text{ortocrono}) = \{L_n , L_s\} \qquad L_a = \{L_t ; L_{st}\}$$

El primer subconjunto es un subgrupo del grupo de Lorentz. Este reagrupamiento permite escribir:

$$L = \mu L_o \quad \text{con} \quad \mu = \pm 1 \quad \text{puesto que} \quad L_t = -L_s \quad ; \quad L_{st} = -L_n$$



$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = L \times \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \mu L_o \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Los elementos $\mu = -1$ corresponden a las transformaciones **ANTICRONAS** que invierten el tiempo. La matriz unidad (4,4) **I** hace parte del grupo de Lorentz. Cuando nos limitamos a invertir el tiempo, se ve que esa operación invierte la energía, pero también el impulso **p** :

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \qquad \boxed{E' = -E \qquad p' = -p}$$

Si se considera el grupo de Kaluza: $\begin{pmatrix} \Lambda & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

todos los cálculos pueden ser reconstruidos en 5d y se obtendrá en particular con:

$$\pi = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ e \end{pmatrix} \qquad \pi' = \Lambda \, \pi$$

El grupo Λ se puede descomponer en dos componentes, una ortocrona y la otra anticrona, y escribir:

$$\Lambda = \mu \, \Lambda_o \quad \text{con} \quad \mu = \pm 1$$

Las componentes **ANTICRONAS** ($\mu = -1$) invierten:

- La energía **E**
- El impulso **p**
- La carga eléctrica **e**

Λ se puede expresar utilizando el subconjunto ortocrono L_0 del grupo de Lorentz y, añadiendo ($\lambda = \pm 1$), introducir (en las dos hojas) la dualidad materia - antimateria.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mu L_0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

El subgrupo del grupo de Kaluza por el que hemos optado se escribe:

$$\begin{pmatrix} \mu L & 0 & \Delta \xi \\ 0 & \lambda & \Delta \xi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix}$$

ANEXO 6
ESPACIOS IMAGINARIOS, ¿TENÉIS ALMA?

Recuerden que al hacer interactuar los dos subconjuntos cósmicos, de energías y masas opuestas, habíamos representado esas dos hojas como el recubrimiento de una proyección, la cual, en el caso de dos dimensiones (t,x) se convertía en una **SUPERFICIE DE BOY** (*).

De la misma manera, habíamos visto que los dos "polos", uno representando el **BIG BANG** y el otro el **BIG CRUNCH**, en lugar de identificarse, corresponden a un pasaje, a un punto que une las dos hojas, Eso hacía desaparecer la singularidad, y por otro lado, en 2d, le confería al objeto universo la topología de un **TORO T2** resultado de un recubrimiento de dos hojas de una botella de Klein **K**2 (más ampliamente legible en **EL TOPOLOGICÓN**).

El espacio-frontera es entonces un círculo S1.

(*) Abundantemente descrita en **EL TOPOLOGICÓN**.

Si pasamos ahora a 5d es necesario asumir que se puede construir una solución con dos métricas del tipo:

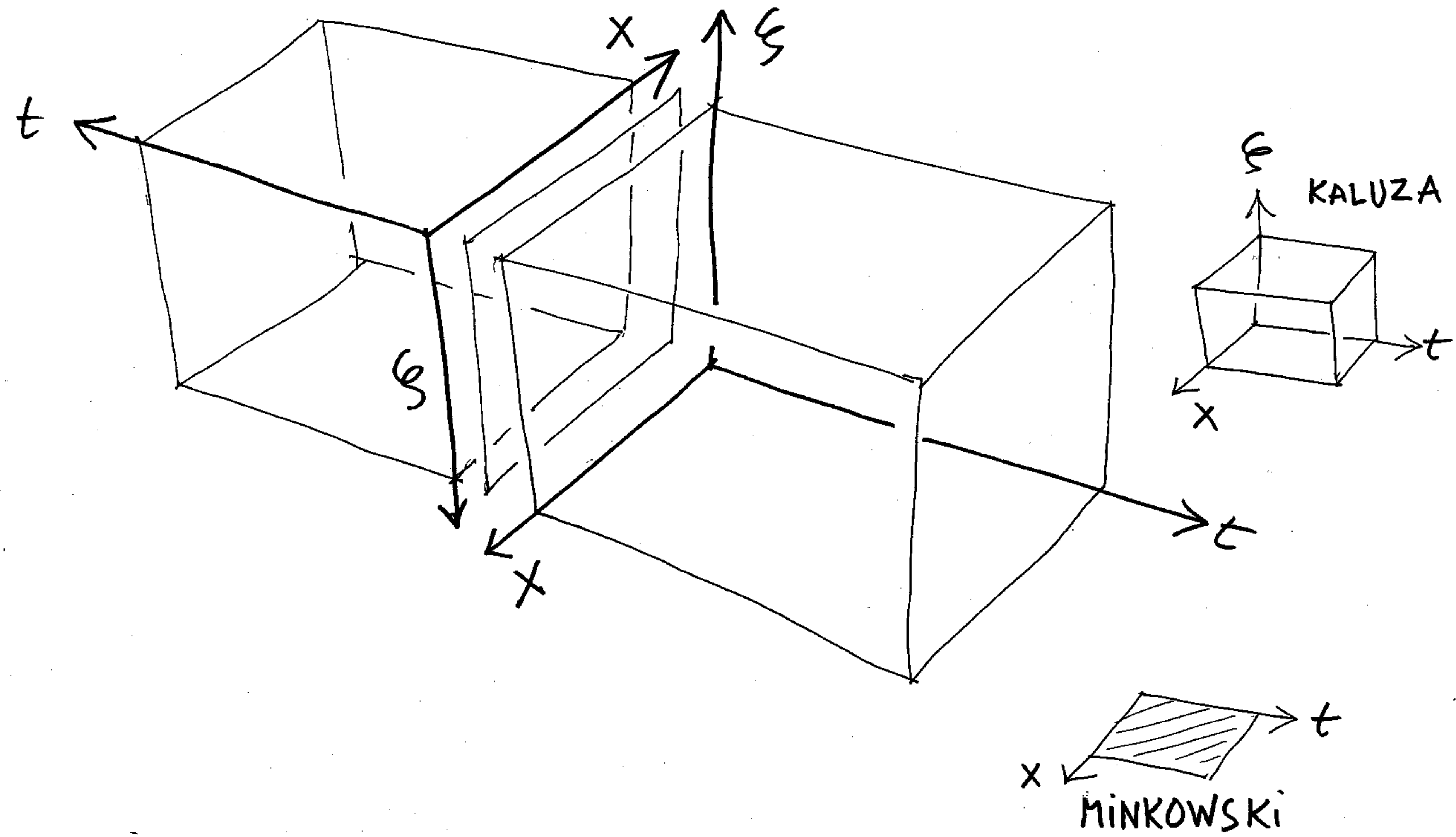
$$\boxed{d\Sigma^2 = R^2 \left[dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\zeta^2 \right]}$$

En el Universo primitivo (ver **MÁS RÁPIDO QUE LA LUZ**), antes de la **RUPTURA DE SIMETRÍA**, los dos factores de escala (*Warp factors*) se suponen iguales. En el momento de la unión hay degeneramiento dimensional. La métrica del espacio-frontera se vuelve entonces:

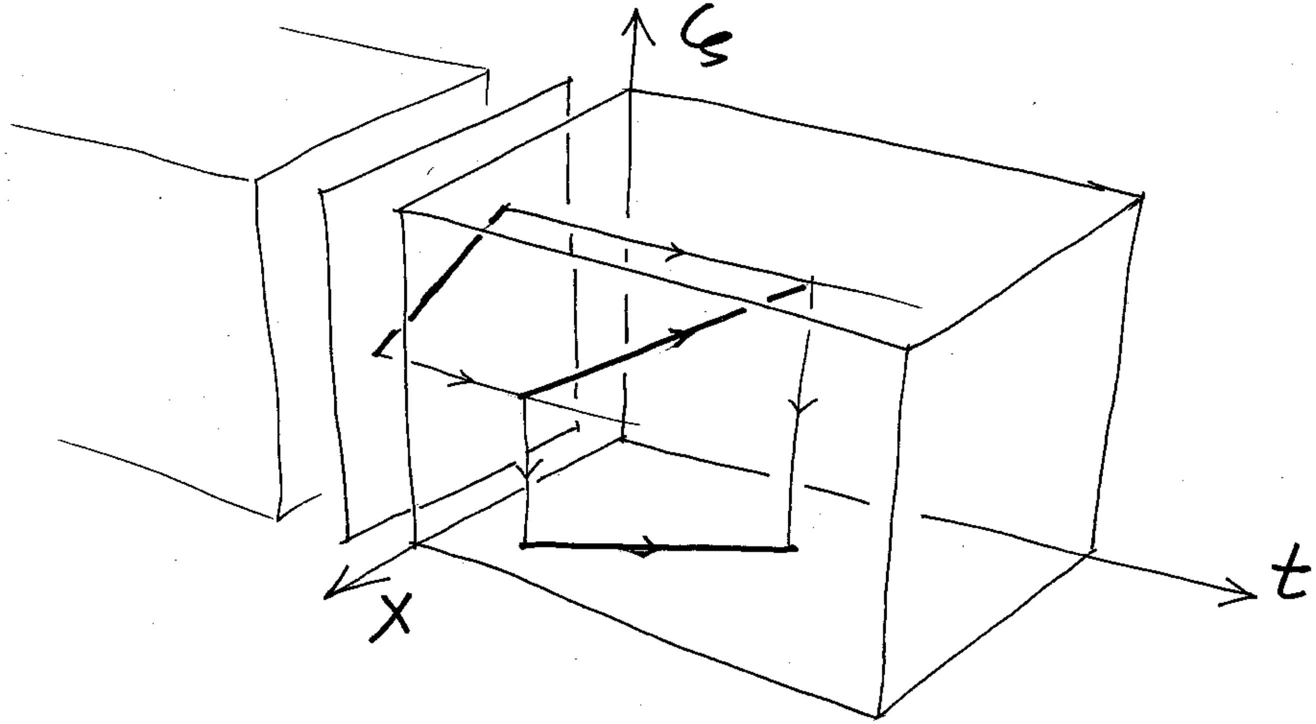
$$\boxed{d\sigma^2 = R_{min}^2 \left[- dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\zeta^2 \right] < 0}$$

EN ESTE ESPACIO-FRONTERA LA LONGITUD ES IMAGINARIA PURA. ¿PUEDE SER ASIMILADA A UN TIEMPO IMAGINARIO?

EN TODOS LOS CASOS DE LAS FIGURAS, ¿QUE SIGNIFICADO (META)FÍSICO SE LE PUEDE DAR A ESTA ESTRUCTURA GEOMÉTRICA?



El "MODELO DE JUGUETE" ("TOY MODEL")



Nadie se ha atrevido jamás a proponer un modelo cualquiera de lo que podría ser la **CONSCIENCIA,** junto con su corolario: la **ELECCIÓN**. Arriba tenemos una imagen divertida en la que una "línea de destino", ácrona e inscrita en el espacio-frontera (**x**,y,z,ζ) de signatura (– – – –), puede proyectarse en una infinidad de formas posibles sobre una de las dos hojas de espacio-tiempo (**x**,t), representando la elección de tal o cual proyección un **GRADO DE LIBERTAD**.