Nicolás Bourbakof va a reunirse en Dsoun-Boulak, Asia Central, con el equipo de Hubert de la Boissinière, que construye allí una extraña nave, alimentada por un misterioso propulsor suministrado por un cierto Jacobson. Llega el día del despegue. La dirección: sin importancia, ciertamente fuera del sistema solar. Acelerando a medio g, en 17 días la nave pasa por Plutón. Bourbakof hace amigos a bordo: Fowler, físico tránsfuga de Princeton; y Turyshev, biólogo. Boissinière espera con impaciencia un mensaje de Jacobson con instrucciones para un viaje sin precedentes. Desafortunadamente, una erupción solar interrumpe la recepción. Y he ahí a los expedicionarios "sumergidos en lo desconocido". El comienzo del mensaje le dice algo sólo al francés que habita en la cabeza de Bourbakof: "suficientes conocimientos en matemáticas para pilotear la misión". ¿Cuáles conocimientos?, se pregunta Boissinière. ¿Cómo hurgar en la mente de ese personaje? ¿Qué preguntas hacerle? Boissinière le pide a Bourbakof que imparta seminarios para los tripulantes. Éste hace surgir la ecuación de Lagrange de un problema sobre una pompa de jabón. Turyshev piensa que ha debido hacerse matemático. De repente Picard, astrónomo a bordo, detecta justo en frente de la trayectoria de la nave, que viaja a unos 8000 km/s, un inmenso grupo de bloques de hielo. A esa velocidad cualquier maniobra para evitarlos es imposible. Se trata de los detritos del onceavo planeta, destrozado por los efectos de marea, dirigiéndose hacia la Tierra. Y la misión tiene el último chance de enfrentarlos. Mientras en Tierra Jacobson y "sus amigos" intentarán destruir el enjambre de cometas que no tardará en irrumpir, Boissinière recuerda que Jacobson le dejó un sobre azul "para abrir cuando hayan salido del sistema solar". Lo abre…

Dsoun-Boulak

Nicolás Bourbakof tenía la garganta seca. Había decidido abandonar por fin ese régimen deshonroso. Haciéndole fieros a la policía científica y a los terribles epistemo-vigías que no hacían concesiones, había decidido tratar de unirse "a aquellos que habían decidido alejarse". No soportaba la idea de tener que pensar como si tuviera a toda la policía a sus espaldas, en un mundo que por doquier debía ser "científica y matemáticamente correcto". Un mundo que hacía recordar la película "Brasil", sin vastos horizontes, sin espuma en las crestas de las olas y donde las palabras amor y amistar parecían haber perdido todo significado, habiendo sido reemplazadas por vocablos como "cooptación" o "integración". En ese mundo el porvenir estaba trazado y discurría por "autopistas del conocimiento" que no llevaban a ninguna parte. Era una gran edificación circular construida por el colectivo de los nuevos racionalistas científicos, en el que todo daba vueltas en círculo y no había conocimiento de causa. Incluso de joven, cuando hacía parte de las juventudes científicas, nunca se sintió cómodo en ese mundo. El colectivo se encargaba de controlarlo todo, desde el nacimiento hasta la muerte de los individuos, enseñándoles desde la infancia que eran los pequeños males particulares los que contribuían al gran bienestar general, de manera que cuantos más males particulares hubiese mejor serían las cosas en el mejor de los mundos posibles. La identidad era la garantía de la estabilidad, y la inmovilidad el mejor factor de progreso. Esta línea directriz, fijada por el partido, había terminado por influenciar incluso a los físicos, tanto así que antes de que Bourbakof emprendiera la fuga uno de ellos había escrito una tesis cuyo título era "Evolución de los estados estacionarios".

El viaje había sido terrible. Había tenido que camuflarse en todas partes, y recorrer miles de kilómetros a pie o escondido en vagones de ferrocarril. Tenía en mente una sola cosa: el nombre del lugar.

Un pueblucho perdido, en los confines de Mongolia septentrional. Aparte las yurtas y los corrales de pequeños caballos cuyas crines amarillas ondeaban al viento, había carpas modernas y grandes hangares. Cual hombre que se tambalea, se acercó al poblado de tela. De repente vio a un hombre de gran estatura, con la cabeza pelada, que le dijo:

– ¡Bourbakof, por Dios! ¡Si hubiera sabido que un tipo como usted venía a visitarnos! Venga a refrescarse. Parece cansado.

– Dormiría una semana. ¿Quién es usted?

– Hubert de la Boissinière, responsable del proyecto.

– ¿Proyecto?

– Sí, ya se lo explicaré. Por ahora luce usted muy cansado para una conversación de ese tipo. Venga, nos ocuparemos de usted.

Boissinière llevó a Bourbakof bajo una carpa.

– ¿Tienen whisky aquí?

– No, es kulik, una bebida local. Le hará bien.

– Boissinière… hmm… su nombre me dice algo. ¿No es usted especialista en MHD?

– Exacto.

– Y el proyecto… ¿de qué se trata?

– Es por eso que está usted aquí, ¿no?

– Seguro. Las matemáticas para mí son cosa del pasado. Estoy dispuesto a todo… incluso a hacer física.

– Como prefiera. Pero vamos a necesitar de usted. No deje en este planeta próximo a una guerra bacteriológica sus valiosos conocimientos en geometría.

– ¿Y para qué diablos les serían útiles?

– Aún no sabe a dónde queremos llegar.

– ¿A dónde?

– Tampoco nosotros lo sabemos bien. La geometría es la ciencia de lo imprevisto ¿no es así?

– Hmm…

Se produjo un largo silencio. Boissinière se rió.

– Ya está usted retomando color. ¿Un cigarro?

– ¿Fabricación local?

– No, vienen de La Habana.

Bourbakof degustó la mezcla de humo de La Habana y de falso whisky.

– ¿Entonces vamos a dejar la Tierra?

– Exacto.

– ¿Usando MHD?

– Sí y no. Todo depende de una ayuda que esperamos de un día para otro. El proyecto depende de que Jacobson y el bebé a bordo logren superar las fronteras en el IIyushin.

– ¿El bebé?

– Ya se lo había dicho, es la clave del éxito del operativo. Jacobson no me quiso decir nada más. Es posible que ni él mismo lo sepa.

Bourbakof no replicó. Se había quedado dormido sobre la mesa. Boissinière le hizo instalar una tienda de campaña. Le quitaron los zapatos y durmió durante cuarenta horas seguidas, roncando como una morsa.

El Iliushyn aterrizó en una nube de polvo. Los miembros de la pequeña colonia corrieron hacia la puerta llevando con ellos una sencilla escalera para permitir la bajada de los pasajeros. Jacobson fue el primer en aparecer.

– Formidable, pudo usted pasar – exclamó Boissinière.

Se bajó **l**a rampa trasera del Ilyushin. Los hombres soltaron las eslingas e hicieron descender con gran precaución un gran paquete que ocupaba casi toda la bodega del avión de carga.

– Bueno, aquí tiene todo lo que necesita. En esta carpeta están todos los documentos que le permitirán operar el artefacto.

– ¿Y sabemos cómo funciona?

– No, y nos han pedido que no lo abramos. Hay dos cosas que les pueden interesar. La primera es una salida de potencia eléctrica. Hay de todo: continua, una salida de baja frecuencia, y una de alta frecuencia de tres gigahertz.

– Bien…

– La tobera al final debería asegurar una potencia más que suficiente, pero sólo por fuera de la atmósfera terrestre. Teniendo en cuenta la resistencia estructural de la nave, les aconsejo limitar la aceleración a régimen de crucero. Para el despegue y el atravesado de las capas atmosféricas tendrán que hacer uso del aire con la ayuda de la MHD.

– Si contamos con potencia eléctrica, podremos desprender la nave sin problema.

– Confío en usted para eso. Ahora si me disculpa, debo partir de inmediato. Hasta la vista y buena suerte, “profesor Noé”.

– ¿No se queda usted un momento?

– No, es preciso que vuelva al área 51.

– ¿No me quiere usted decir qué es lo que están haciendo allá?

– Podría, pero sería largo y no tengo tiempo ahora. De todos modos, cuando estén ustedes en camino, comprenderán rápidamente de qué se trata.

– Pues no insistiré. Tenemos que ponernos a trabajar de inmediato. En todo caso, gracias. Y por favor agradezca también a… sus amigos.

– Lo haré. Pero le advierto que no están acostumbrados a ese tipo de manifestaciones.

Jacobson se había ya dado vuelta y regresado al aparato con paso animado. Saliendo de su tienda, Bourbakof vio al Ilyushin despegar al final de la pista. Se reunió con Boissinière, que coordinaba el remolque del enorme artefacto, cubierto por una lona, hacia el hangar principal.

– Ahora es nuestro turno. Ya tenemos el propulsor de crucero.

– ¿Quiere usted decir que gracias a esa cosa vamos a poder dejar la Tierra?

– Con usted a bordo, a menos que haya cambiado de parecer.

– Claro que no.

Las semanas siguientes estuvieron consagradas a la adaptación del conjunto propulsor-generador a la nave MHD discoidal que Boissinière había fabricado con piezas sueltas y llevado a Dsoun-Boulak con el mayor secreto.

– Me recuerda usted a Nemo y a su Nautilus.

– Algo así. Pero en lugar de explorar los mares, nos vamos hacia el Cosmos.

– ¿En qué dirección?

– Hacia la constelación de Virgo, y más allá…

La partida

Luego de este encuentro con Hubert de la Boissinière, Bourbakof volvió a sus cuarteles en el centro, a la espera de la partida. La comodidad era escueta: una simple carpa, pero en ella se sintió bien. El lujo nunca había sido lo suyo. Una mesa, papel y un estilógrafo le bastaban para recrear todo un universo. Un día Boissinière, en cuyo rostro se podía leer la fatiga, vino a buscarlo para mostrarle el contenido del inmenso hangar número 3 que resguardaba la nave. Tuvo que retroceder para poder apreciar su forma exacta. Era enorme. Tal vez unos doscientos metros de diámetro. En su parte inferior algunos técnicos se esforzaban por adaptarle el propulsor traído por Jacobson. A pesar de que éste le había parecido imponente a comparación del avión de carga Ilyushin que lo había transportado, le pareció ridículo comparado con la nave que se suponía iba a propulsar.

– Este será –comentó Boissinière– nuestro propulsor en régimen de crucero, y funcionará sólo fuera de la atmósfera terrestre.

– ¿Cómo hará usted para elevar del suelo esa Arca de Noé?

– Se lo explicaré en cuanto tenga tiempo. Ahora estoy un tanto ocupado…

– Comprendo. ¿Pero cómo pudo obtener financiación para un proyecto semejante? Parece descabellado…

– Todo salió de Jacobson.

– Me pareció entender que su vínculo era con el área 51, ¿no?

– Exacto. El área 51 se halla en Nevada, en los Estados Unidos.

– Un estado dentro del estado, por lo que he oído decir.

– En realidad, es difícil saber quiénes son los verdaderos dueños de ese lugar. No pude sacarle a Sven ni una sola palabra sobre eso.

– Era especialista en láseres de potencia, según me dijeron los técnicos.

– Exacto. Un día Jacobson me dijo: "¿querría usted hacerse partícipe de un proyecto en el que no tendría límites de financiación?". Le respondí: "todo depende de la finalidad de la empresa". Jacobson me puso las manos en los hombros, enfocando su mirada en la mía, y me dijo: "esperaba una respuesta así de su parte". Y pasó a explicarme las líneas generales de una empresa que me pareció completamente loca. Debía haber dos equipos: los que se quedaban, y los que partían.

– Y aquí, claro, están los que vamos a partir.

– Así es. Partir es fácil de decir mas no de hacer. Ya ha visto usted en qué montón de óxido se ha convertido la ISS, la estación espacial internacional, de la que nadie en la actualidad quiere pagar el mantenimiento. Al principio pensé que Jacobson iba a proponer algo así como la implantación de una base de lanzamiento en la Luna. "No es eso lo que tenemos previsto" me contestó con una sonrisa. Personalmente, si me dan la potencia eléctrica necesaria, puedo llegar a levantar lo que quieran de la superficie de la Tierra e incluso hacer que un artefacto de este tipo se libere de la atracción de nuestro planeta. Pero incluso a once kilómetros por segundo no es posible llegar muy lejos.

– Entonces Jacobson quedó en suministrarle el generador eléctrico.

– Sí, y me pidió no hacer preguntas al respecto. Como primera medida, recibimos una enorme e inesperada cantidad de cables superconductores, capaces de resistir temperaturas absolutamente increíbles. Entonces diseñé el aparato, contentándome con prever un emplazamiento en el que esa cosa, de la que él me había proporcionado las dimensiones, pudiera unirse a la estructura y a los conectores eléctricos. Estamos a punto de realizar la integración. Y a una o dos semanas de soltar amarras para poder proceder a los ensayos.

– ¡Pero no me ha dicho nada acerca del financiador de todo esto!

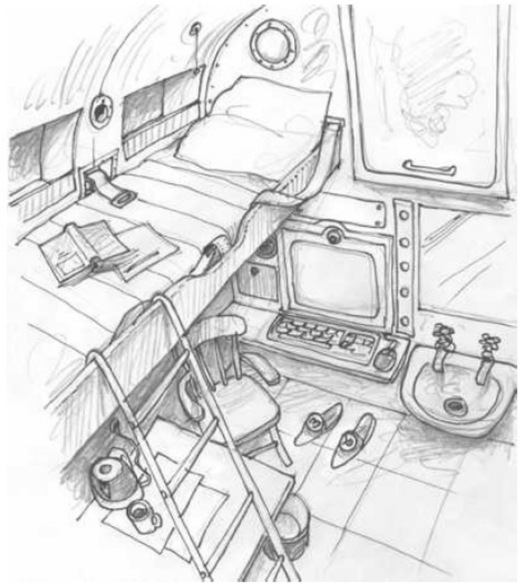
Bourbakof entornó los ojos.

– Nada fue decidido aquí. Jacobson pasaba a recoger los planos cada dos meses. Se iba y al siguiente viaje los Ilyushin traían los elementos para ensamblar. Todo estaba concebido a la manera de un kit. Los elementos más livianos, pero más engorrosos, fueron traídos con mucho trabajo por pesados helicópteros.

– ¿Quiere usted decir que los rusos han ayudado en todo esto?

–Ya se lo dije. Jacobso n me había pedido no hacer preguntas. Y eso fue lo que hice.

Llegó el día de la partida. Los pequeños caballos de crines amarillas fueron dejados sueltos. Algunos técnicos los persiguieron durante un tiempo en un 4x4 para alejarlos lo suficiente del área de lanzamiento. Se desmontaron los elementos del hangar y la nave hizo su aparición. Tenía la apariencia de dos enormes platos de sopa unidos, apoyados sobre tres pies telescópicos. Había un extraño contraste entre el futurismo del objeto y el aspecto de los que iban tomar su lugar en él. Algunos que apenas habían terminado los trabajos tarde en la víspera, no habían tenido tiempo siquiera de afeitarse. Sus equipajes personales eran escasos. Boissinière llevaba una bata blanca. Bourbakof tomó dócilmente su lugar en la columna. Todos estaban en silencio. Se les notaba la gravedad en sus ademanes. No hubo discursos. Ingresaron al artefacto, y punto. A la entrada se verificaban las identificaciones de cada uno y se les daba un pequeño cartón en el que iba escrito un número de cabina. Por un momento todo ello hacía pensar en un gran trasatlántico de la “French Line”, a la antigua.



Todos tenían cabinas individuales, dotadas de un mínimo de confort: litera, escritorio, ducha, baño. Boissinière apareció en la pantalla de video.

– Bueno, les voy a pedir que se acuesten en sus literas y abrochen sus dispositivos de seguridad. Y preferiría que todos estén en su lugar de inmediato. Les avisaremos cuando hayamos partido.

Bourbakof obedeció. Encima del lecho le llegaba aire fresco por un orificio, con un sonido de silbido. La espera se prolongó por más de una hora. Mientras tanto, repasaba en su mente numerosos acontecimientos de los meses y años pasados. Recostado y asegurado a la litera, se sentía presa de una sensación ineluctable cuando fue sacado de su ensueño por la voz de Boissinière:

– Bien. Supongo que todos están listos, Aquí vamos.

Nada de vibración, nada de ruido. Apenas una tenue aceleración constante. Al cabo de una veintena de minutos, Bourbakof tuvo la desagradable impresión de que la nave caía hacia el suelo. Era horrible, como caer dentro de un pozo. Flotando en su arnés encima de colchón, cerró los ojos pensando: "¡se acabó, no funcionó, nos vamos a estrellar!". La nave, de hecho, había ya abandonado la atmósfera terrestre y había seguido durante una interminable decena de segundos una trayectoria balística. Cuando el propulsor en régimen de crucero fue puesto en marcha, Bourbakof cayó sobre su litera de un sopetón. La voz de Boissinière resonó en el altoparlante:

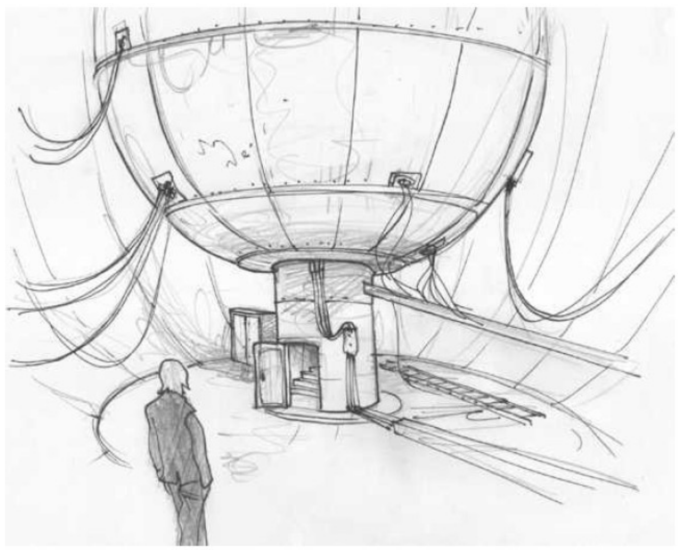
– Lanzamiento exitoso. Pueden desabrocharse.

La impresión era extraña. La aceleración, inferior a un g. Había que acostumbrarse a avanzar con el peso reducido. Lo más difícil fue aprender a bajar por las escaleras sin golpearse. Durante el tiempo que duró la puesta en su trayectoria, la nave se vio poblada de especies de espectros que parecían desplazarse con precaución en puntas de pies. La voz de Boissinière se hizo escuchar en el móvil que Bourbakof, como de resto todos los demás, tenía en el bolsillo de la camisa.

– Pueden alcanzarme en el puente. La vista vale la pena, ya lo verán. Sólo tienen que poner sus altavoces y seguir la dirección de la que parece provenir la voz.

Bourbakof se puso manos a la obra. Instintivamente, giró su cabeza hacia el ingreso de un corredor y se introdujo en él. Cada vez que había que cambiar de dirección, el sistema se lo indicaba: el sonido parecía venir de repente desde la derecha o desde la izquierda. Al final de un último pasillo encontró una especie de salón con una esfera a la que llegaba un gran número de cables que reposaban sobre una especie de pedúnculo cilíndrico con una escalera en espiral en su interior. Bourbakof oyó la voz de Boissinière, que se había vuelto sepulcral a causa del fenómeno de resonancia.

– Acérquese.



La esfera estaba totalmente vacía y tenía unos diez metros de diámetro. Luego de enfilar la escalera en caracol llegaron a un recinto circular plano bordeado por una baranda en el que habrían cabido una docena de personas, Había algunas consolas. Boissinière se acercó a una de ellas. Intrigado, Bourbakof se aproximó a él, sosteniéndose maquinalmente de la baranda. El rostro de Boissinière se iluminó con una sonrisa y oprimió una tecla. En ese preciso momento Bourbakof entró en shock y tuvo la sensación de que los dos se hallaban como pasajeros en esa plataforma circular, proyectados en pleno vacío espacial. El Sol era visible y alumbraba una porción de la superficie terrestre. La altitud debía ser de unos mil kilómetros.

– Bonito panorama, ¿no? No quería que dejara usted la buena y vieja Tierra sin disfrutar de esta última vista.

– ¿Pero dónde estamos?

– ¡Por dios, en la esfera! No es más que una pantalla de visualización. Sobre su pared interna hay todo un sistema de imágenes de cristal líquido unido a “ocelos” externos. Mejor que una escotilla, ¿no cree? Tome este joystick.

Boissinière le ofreció un estuche con una esfera de plástico en su interior, parecido a los sistemas de comando de los antiguos micro ordenadores.

– Al girar la bola cambia usted a su gusto el punto de vista.

Efectivamente, al accionar la esfera la "bóveda celeste" se modificaba, pero no así la pesadez aparente.

– ¡Carambas!..

Bourbakof se sintió mareado.

– Tenga cuidado, compañero, no abuse o nos hará venir a todos el mal de mar – le advirtió Boissinière.

– Claro, las señales visuales no cuadran con la impresión subjetiva debido a la pesadez artificial que experimentamos.

– Sí, sí, eso es típico. Si el decorado cambia y las señales emitidas por su oído interno no concuerdan, pum, mareo.

Bourbakof le devolvió el joystick.

– Ya he tenido suficiente, gracias.

– Tiene usted el mismo sistema en su cabina, con un joystick integrado a su tableta. Si se pone usted en el exterior, la pantalla del ordenador se comportará como una escotilla, y podrá modificarle a voluntad el ángulo de visión. La ventaja es que en su cabina el baño está ahí mismo.

La experiencia fue traumática para Bourbakof, que se sentía como si hubiese montado en un tiovivo. Esa tarde prefirió ir a dormir a su cabina sin cenar. Pero esta vez encontró con facilidad los caminos que llevaban al refectorio y a la biblioteca. Esta última estaba muy bien aprovisionada con obras muy diversas, y él se dejó absorber por la lectura.

El seminario

Boissinière estaba en su cabina. Tres semanas habían transcurrido desde la partida. Había estabilizado la navegación en medio g, y a ese régimen el velocímetro le señalaba que la nave iba a 8640 kilómetros por segundo. A ese ritmo, estaba a punto de cruzar la órbita de Júpiter. El espectáculo era magnífico. En comparación, la Tierra no parecía más que un punto insignificante. Había tratado varias veces desde la partida de ponerse en contacto con Jacobson por radio, pero sin éxito. De repente una luz parpadeó, indicando que había un mensaje nuevo. Activó el sonido con ansias y acercó su silla a la pantalla de plasma de su estudio. Allí apareció la cabeza de Jacobson:

– ¡Por fin! – exclamó Boissinière.

– Mi querido Hubert, veo que va usted por buen camino. Todos sus parámetros de vuelo se ven bien. Sé que le debo algunas explicaciones. Serán las últimas pues por principio, de acuerdo con el plan de vuelo que hemos adoptado, llegará un momento en el que perderemos todo contacto. Todavía no ha salido usted del sistema solar, así que aún no tiene la visual de lo que motiva toda nuestra misión, y que nos obligó a no poner todos los huevos en la misma sartén, de modo que haya dos equipos: ustedes y nosotros. Sé que debe preguntarse en qué debe ocupar su tiempo durante ese viaje de ida que usted se ha ganado con nuestra ayuda. Imagino que ha llevado mazos de cartas y un buen número de documentos diferentes para intentar pasar el tiempo. En realidad, tiene usted una misión muy precisa por realizar y se la voy a explicar. Para nosotros usted es una especie de… célula que ha sido proyectada fuera del sistema solar. Su nave contiene dos tipos de informaciones. Por un lado está todo aquello que se supone usted sabe y comprende, y por el otro aquello que está contenido al final de su "diligencia" espacial en ese cilindro que nos han donado nuestros amigos y que les procura la aceleración constante de medio g. Es inútil tratar de abrirlo. Si lo hace, es muy probable que no llegue a entender el cómo y el por qué de sus componentes.

– Entonces tenemos una especie de "caja negra" en un extremo de la nave – pensó Boissiniêre.

Y oyó el final del mensaje:

Aceptando cooperar, nuestros amigos dicen que en principio han infringido una ley muy estricta. De hecho, están ustedes dotados de medios que, incluso siendo primitivos al lado de los de ellos, les permitirán a priori alcanzar otros sistemas solares en los que podrían, según parece, generar algún desorden. Digamos que su vuelo lejos del nido es un tanto prematuro, dadas las condiciones de madurez de la especie humana, que no es lo que se podría llamar extraordinaria, espero que convenga usted en eso. Y me cuento entre ella. Pero las circunstancias han sido decididas de otra forma. Cuando hayan salido del sistema solar, tendrá que abrir el sobre azul que está en el expediente que acompaña las instrucciones de puesta a punto del aparato que le llevé a bordo del Ilyushin: el conjunto generador-propulsor. Encontrará allí todas las instrucciones adicionales. Puesto que ya están ustedes embarcados en semejante aventura, mis amigos consideraron que había que darles la posibilidad de dar un buen paso adelante en el plano de los conocimientos. Es por eso que dos pasajeros muy especiales hacen parte de la tripulación. El primero es Nicolás Bourbakof, a quien discretamente le facilitamos la huida. Lo que no fue nada fácil dado que, astuto como es, estuvo a punto de hacerse delatar varias veces con sus ingeniosos truquitos cosidos con cable fosforescente. Cuando logró llegar sano y salvo a

Dsoun-Boulak, le aseguro que descansamos. Mis amigos, que han examinado sus conexiones sinápticas por completo, dicen que su cerebro posee los conocimientos suficientes que para que puedan ustedes dar el salto. Pero él no lo sabe, y tal vez es preferible que continúe sin saberlo durante un tiempo. Le explicaré en la segunda parte del mensaje de qué se trata, cómo escarbar en el cerebro del buen muchacho y por qué expedientes comenzar. Hay a bordo otro personaje que también ha sido embarcado para ayudarles. Lo hemos negociado también a sus espaldas. Espero que no me considere mal por ello, pero no quisimos correr ningún riesgo. Como Bourbakof, tampoco sabe por qué está con ustedes y cuál será su futuro trabajo. Su nombre es…

La imagen se distorsionó. Boissinière, impaciente, manipuló algunos botones y trató en vano de activar un programa de restauración de la señal.

– ¡Malditas manchas solares!..

Un desastre, en plena recepción. Esperó un segundo mensaje durante los días que siguieron, pero no hubo más que silencio, a excepción hecha del ruido de fondo causado por las erupciones solares.

– Debieron dar al traste con la antena.

Había previsto todo, menos eso.

– ¡Soy un tonto!

Habría bastado con una antena de reemplazo, guarnecida apropiadamente para protegerla del bombardeo en el momento de la erupción. Había previsto tres antenas parietales alineadas, verdaderas joyas tecnológicas. Con las tres pensaba garantizar todo, pero nunca pensó en la posibilidad de una destrucción simultánea por las bocanadas de plasma emitidas durante las erupciones solares. Por el momento toda comunicación con la Tierra, tanto de entrada como de salida, había quedado cortada.

Boissinière tecleó un número de clave en su teclado y obtuvo como respuesta una imagen del interior de la cabina de Bourbakof. Este estaba tendido sobre su litera y leía un tratado de geometría algebraica al sonido de música de Mozart.

– ¿Qué voy a hacer con este personaje?..

Bourbakof respondió al llamado de Boissinière. Este último tenía un aire cargado. Estaba ante su mesa de trabajo y había sacado uno de esos juegos de niños con los que se hacen pompas de jabón.

– ¿De dónde sacó usted eso?

– Estimado amigo, hay de todo en esta nave menos whisky de verdad. Es una pena porque si lo hubiera ya me habría bebido una botella yo solo.

– ¿Tiene usted un ataque de nostalgia, Boissinière?..

– En realidad no sé cómo le hace usted. Da la impresión de que lo podrían abandonar diez años en una isla desierta con tratados de matemáticas, y no sentiría siquiera el paso del tiempo.

– Amo las matemáticas, no lo puedo ocultar. Me relajan.

– ¡Lee usted esos libros como si fueran historietas!

– Algo así. Si supiera usted que a veces hay algo de humor y de suspenso en ciertas páginas…

Boissinière elevó los ojos al cielo. Había versado en una cubeta el líquido para hacer las pompas de jabón. Había diferentes objetos sobre los cuales podía adherir la película iridiscente. Eligió dos de ellos de forma circular con el mismo radio, fijos al final de un mango. Manipulándolos bien podía crear una película de jabón aproximadamente cilíndrica, apoyada sobre las dos circunferencias.

Bourbakof intervino:

– Eso es un interesante problema variacional. ¿Sabe usted que para un valor dado del radio de las circunferencias existe una distancia de separación máxima más allá de la cual la película no puede mantenerse, y que todo ello puede ser calculado?

Boissinière hizo el experimento. Separó las circunferencias y en efecto hubo un momento en el que la película se rompió, dando paso a dos membranas circulares apoyadas en cada una de las circunferencias.

– ¿Y es usted capaz de realizar ese cálculo?

– ¡Es trivial! Bastan unas pocas líneas de cálculo.

– ¿Puede usted presentarnos eso en un seminario?

– Cuando quieran.

– Bueno… voy a hacer el anuncio. Eso subirá un poco la moral del grupo. Tanto más cuanto que aún nos queda un tiempo largo antes de llegar a las fronteras del sistema solar.

El ambiente del seminario era bastante retro. En efecto, cuando Boissinière construyó la nave, todo aquello que no estaba directamente relacionado con la propulsión había sido comprado en el lugar. Aunque éste no estaba lejos de ser un imperio en vías de descomposición, al pagar en dólares y en efectivo se podía conseguir casi de todo. Así, alguno de los presentes trajo un viejo tablero y una caja de tizas. Y otros trajeron sillas con tablillas. Bourbakof empezó a toda marcha.

Uno de los presentes se inclinó hacia Boissinière y le dijo:

– Hubert, no logro tomar notas. El sujeto va tan rápido que borra con su mano izquierda lo que escribe con su mano derecha.

– Ahí les va otra vez –dijo Bourbakof–, polvillo blanco de tiza.

Boissinièrse se frotó la garganta.

– Muy impresionante. Pero creo que no se da usted cuenta de que no está aquí en un recinto de la Escuela Normal Superior. Frente a usted hay gente diversa, físicos, químicos, y algunos biólogos con una cierta preparación matemática. La demostración fue impresionante, pero me temo que va usted demasiado rápido.

– Tengo mala letra, me lo han dicho. ¡Pero todo esto es absolutamente elemental!

– No lo dudo ni un segundo, pero así mismo creo que la única solución para que salgamos vivos de sus seminarios es que realicemos todos los pasos. Mi preocupación es que todos entiendan. ¡No tenemos su agilidad mental!

– Pero para construir esta nave, Boissinière, ¿no tuvo usted que emplear conocimientos muy sofisticados?

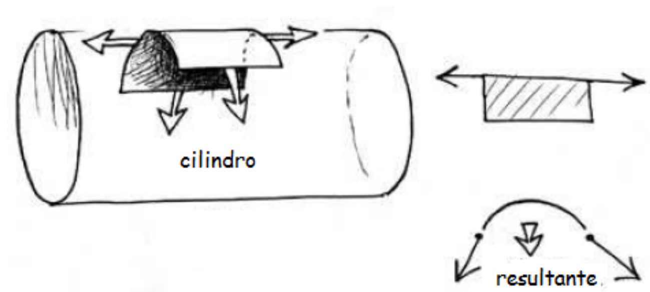
– Sí y no…

Un físico norteamericano de apellido Fowler soltó una risotada:

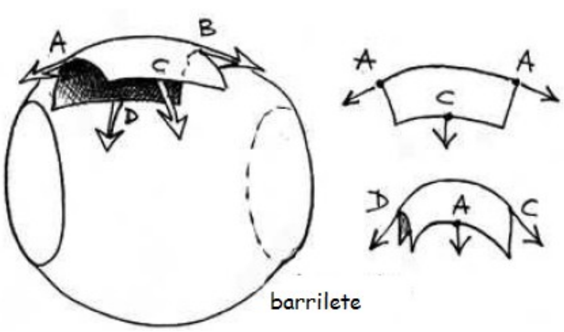
– ¡Ya lo sabe usted, Bourbakof, en física se trata a menudo más de una cuestión de coraje que de inteligencia!

Boissinière pasó al tablero y trató de reconstruir la argumentación.

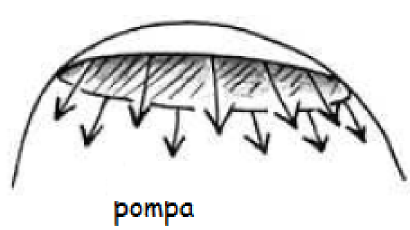
– Bien. Todos vieron, antes de la exposición de Bourbakof, el pequeño y entretenido experimento en el que una película de jabón con simetría de revolución se apoya sobre dos circunferencias coaxiales del mismo radio R. Hemos comprendido todos que en el experimento se conjugan fuerzas de tensión que son tangentes a la película. También hemos comprendido por qué no es posible crear, entre las dos circunferencias de radio R, una película de forma cilíndrica. Si dibujo un elemento de ese cilindro, veo que la resultante de las fuerzas no es nula. En ausencia de otra fuerza, por ejemplo debida a una diferencia de presión entre los dos lados de la película, el cilindro presenta una tendencia a contraerse:



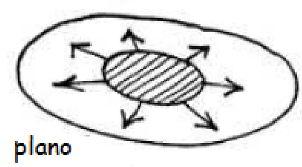
– Imaginamos también que para que la película pueda adoptar una forma de "barril" habría que ejercer una diferencia de presión aún más fuerte:



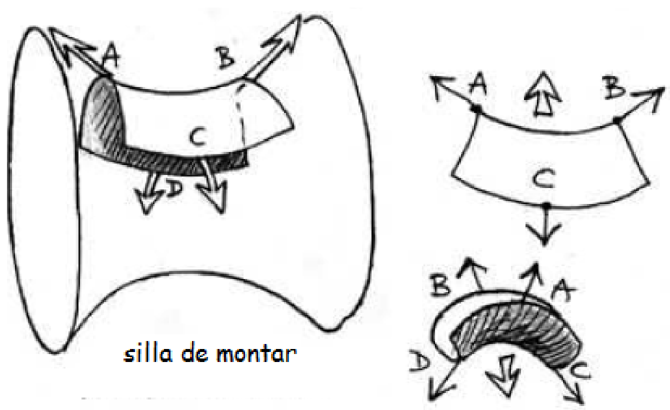
– Si en lugar de imaginar una película apoyada sobre dos contornos rígidos, pensáramos en una pompa simple, en una superficie sin borde cuyo elemento podría representarse por un casquete esférico:



– La diferencia de presión sería igualmente necesaria. Por el contrario, podríamos pensar en una película plana apoyada sobre un círculo. Sencillamente porque la resultante de las fuerzas de tensión aplicadas sobre un elemento es nula:



– Volviendo a nuestra película apoyada sobre las dos circunferencias coaxiales se puede apreciar que sólo una superficie en forma de "silla de montar" permitiría que ella exista en ausencia de cualquier diferencia de presión entre los dos lados de la superficie:



Todo el auditorio asintió.

– Boissinière –dijo Turyshev–, ¡debería dedicarse a las bellas artes!

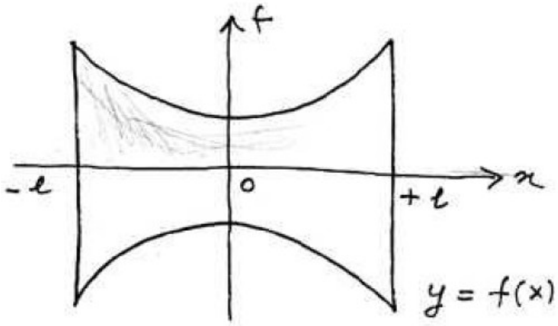
– Se lo agradezco, hago lo que puedo. Con todo, me gustaría poder tomar notas. ¿Alguien se puede hacer cargo?

– Sin problema – dijo Fowler ubicando su computador portátil en frente.

– ¿Va a hacerlo con esa máquina?

– Estoy acostumbrado. En cuanto a sus dibujos, sólo tengo que fotografiarlos con esta mini cámara, y así los puedo integrar al texto. No se preocupe por eso, yo me encargo.

Boissinière retomó el hilo de Bourbakof esforzándose en dar una representación gráfica a todo aquello que éste había enunciado de manera puramente verbal. Y dibujó la figura siguiente:



– Llamo f(x) a la meridiana de esta superficie de revolución. O es el centro de simetría del objeto. Mis círculos coaxiales de radio R están dispuestos en las abscisas +L y –L.

Se volvió hacia Fowler:

– ¿Logra captar todo esto?

– Sí.

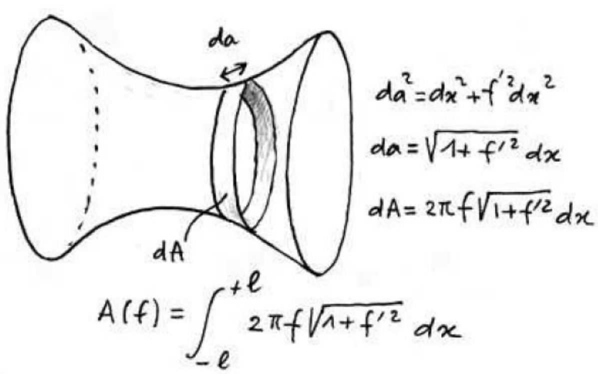
Boissinière se acercó para dar un vistazo.

– ¡Pero ha escrito usted el carácter L en lugar de l!..

– Sí, es que la "l minúscula" se asemeja mucho al número 1. Cuando releamos todo esto, habrá que recordar que en el texto tenemos una L mayúscula que en las figuras corresponde a una l minúscula.

Boissinière continuó:

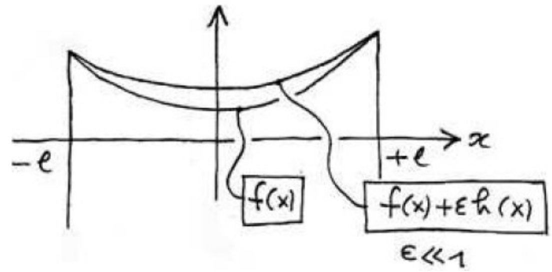
– Puedo entonces calcular el elemento de área de esa superficie:



– Las tensiones que se ejercen sobre la película de jabón hacen que adopte un configuración que corresponde a un área mínima y…

Boissinière había perdido el hilo. Turyshev, el biólogo, dijo:

– Bourbakof introdujo una perturbación en la superficie de modo que esta conserva su simetría de revolución y continúa apoyándose en las dos circunferencias. Dijo además que esta operación equivale a añadir un término de perturbación h(x) a la función f(x) que representa la meridiana:



– Bueno, bien, ya comprendo –dijo Boissinière–. Ahora se calcula la nueva área sobre la base de esta nueva meridiana, vecina de la anterior.

$$A(f+\varepsilon h)=\int_{-\ell}^{+\ell} 2\pi\,(f+\varepsilon h)\sqrt{1+(f'+\varepsilon h')^2}\;dx$$

– Y realiza usted allí un desarrollo en serie conservando sólo los términos de primer orden.

Boissinière se divertía en cantidades. Se sentía proyectado varias décadas atrás, como si estuviera frente a un examen de la preparatoria. Y se esmeraba por presentar todos los detalles del cálculo.

$$A(f+\varepsilon h)=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\sqrt{1+f'^2+2f'h'\varepsilon+\cancel{\varepsilon^2 h'^2}}\;dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\sqrt{1+f'^2}\sqrt{1+\frac{2f'h'\varepsilon}{1+f'^2}}\;dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\sqrt{1+f'^2}\left(1+\frac{f'h'\varepsilon}{1+f'^2}\right)dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\left[\sqrt{1+f'^2}+\frac{f'h'\varepsilon}{\sqrt{1+f'^2}}\right]dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell} f\sqrt{1+f'^2}\,dx+2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}\left\{\varepsilon h\sqrt{1+f'^2}+\frac{\varepsilon f f' h'}{\sqrt{1+f'^2}}+\cancel{\frac{\varepsilon^2 h f' h'}{\sqrt{1+f'^2}}}\right\}dx$$

– Podemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon}=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}\left(h\sqrt{1+f'^2}+\frac{ff'h'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)dx$$

$$I_1=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}h\sqrt{1+f'^2}\,dx \qquad I_2=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{ff'h'}{\sqrt{1+f'^2}}\,dx$$

$$h'dx=dh \qquad I_2=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{ff'dh}{\sqrt{1+f'^2}}$$

integración por partes:

$$\int u\,dv=[uv]-\int v\,du$$

$$I_2=2\pi\left[\frac{ff'h}{\sqrt{1+f'^2}}\right]_{-\ell}^{+\ell}-2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}h\,d\left(\frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)dx$$

cero puesto que $h(\ell)=h(-\ell)=0$

$$d\left(\frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)=\frac{(f'^2+ff'')\sqrt{1+f'^2}-ff'\frac{2f'f''}{2\sqrt{1+f'^2}}}{1+f'^2}$$

$$=\frac{(f'^2+ff'')(1+f'^2)-ff'^2f''}{(1+f'^2)^{3/2}}=\frac{f'^2+ff''+\cancel{ff'^2f''}-\cancel{ff'^2f''}+f'^4}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon}=I_1+I_2=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}h\sqrt{1+f'^2}\,dx-2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}h\,\frac{f'^4+ff''+f'^2}{(1+f'^2)^{3/2}}\,dx$$

$$\frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon}=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{h\left[1+f'^2-ff''\right]}{(1+f'^2)^{3/2}}\,dx$$

Bourbakof estaba satisfecho.

– Muy bien, veo que me han seguido y que están todos en forma. Ahora, ¿qué se requiere para que esta variación del área sea extrema?

Fowler se rascó la cabeza.

– Me parece que si el numerador es nulo en la integral, eso debería bastar. Como hemos hecho un desarrollo en serie, eso significaría que la variación sería de un orden superior. Y así llegaríamos a una configuración de extremo.

$$1+f'^2-ff''=0$$

Boissinière agregó:

– Tenemos entonces una ecuación diferencial que nos da la ecuación de la meridiana correspondiente a un área de membrana extrema. ¿Es fácil de resolver?

– Es un tanto largo (Apéndice 1) –le respondió Bourbakof–, y admito que los detalles no tienen mucho interés. Aquí doy el resultado:

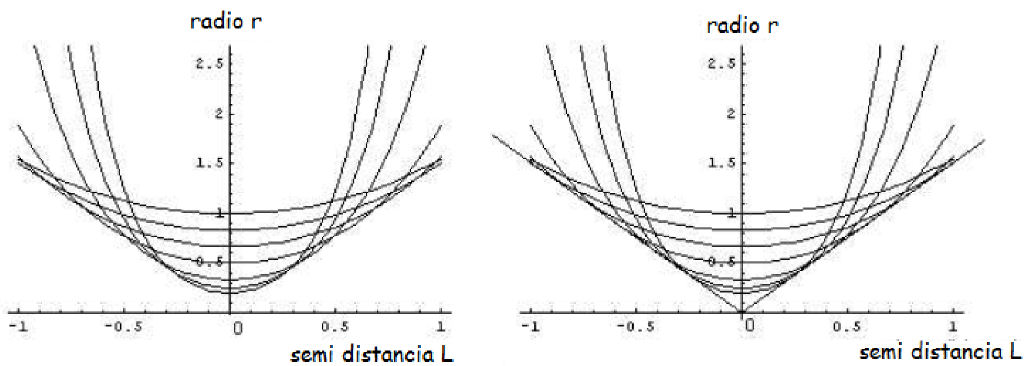
$$\boxed{f(x)=\frac{\mathrm{ch}\,sx}{s}}$$

$$f'=\mathrm{sh}\,sx\qquad f''=s\,\mathrm{ch}\,sx\qquad ff''=\mathrm{ch}^2 sx$$

$$1+\mathrm{sh}^2 sx-\mathrm{ch}^2 sx=0\quad \text{car}\quad \mathrm{ch}^2 sx-\mathrm{sh}^2 sx=1$$

Fowler no abandonaba nunca su portátil:

En un dos por tres produjo la forma general de las curvas.



– La envolvente de esta familia de curvas parece estar formada por dos familias de rectas que pasan por el origen.

– Cuando *x* es cero, el coseno hiperbólico vale 1. La ordenada del mínimo de la curva vale 1/s.

Boissinière miró la figura con atención.

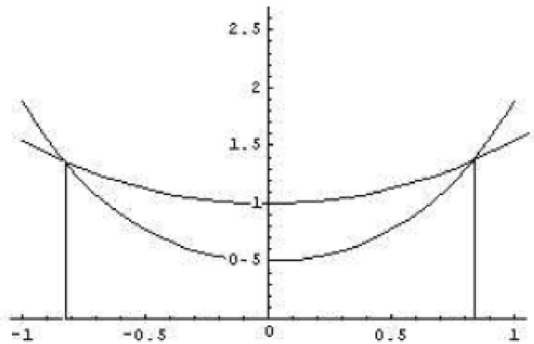
– Algo me dice que esas curvas son… homotéticas.

– Bien dicho –dijo Bourbakof–. Tiene usted ojo de dibujante. La ecuación se puede escribir así:

$$sf(x) = ch(sx)$$

Podemos ver que si f(x) es solución, $\lambda f(\lambda x)$ también lo es.

Turyshev anotó que por los dos círculos pasan dos superficies, correspondientes a las meridianas:



– Bueno –siguió Fowler sin continuar la anotación–, ahora que tenemos la ecuación de la meridiana, basta con ajustar el valor del parámetro s de manera que la superficie se apoye sobre las dos circunferencias de radio R, situadas en +L y –L.

– Sí, pero ya habrá notado usted que eso no es siempre posible – dijo Bourbakof con una sonrisa irónica.

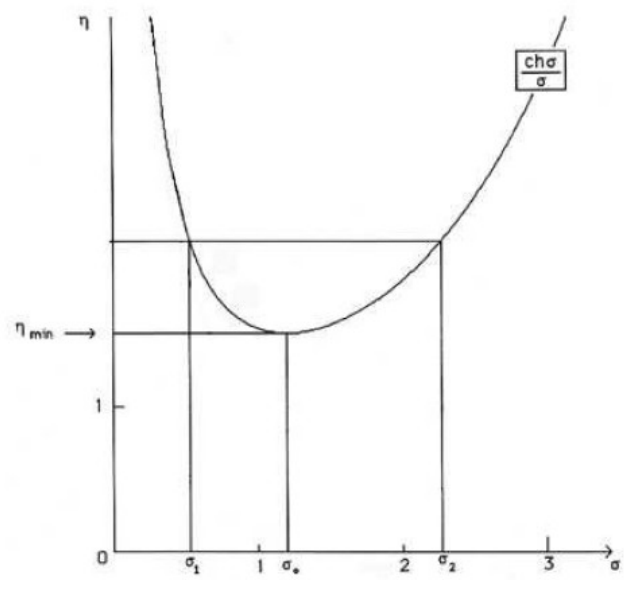
– Bien, puedo escribir entonces:

$$fs = \mathrm{ch}\, sx$$

$$Rs = \mathrm{ch}\, sl \qquad \text{con: } \sigma = sl$$

$$\sigma \frac{R}{l} = \mathrm{ch}\, \sigma \qquad \frac{R}{l} = \frac{\mathrm{ch}\, \sigma}{\sigma} \qquad \text{con: } \eta = \frac{R}{l}$$

Y podemos trazar la curva correspondiente. ¡Aquí está!



Para η = 2 hay dos valores.

– Ya ve usted –exclamó Turyshev–, eso corresponde a las dos soluciones para las meridianas que tracé anteriormente. Si tomamos por ejemplo η, es decir el cociente entre el radio R de las circunferencias, y la semi distancia L que los separa, igual a 2, ¿cuáles serían los dos valores de σ?

Fowler tecleó en su portátil.

– Denme cinco minutos y les daré los valores numéricos. Aquí están…

$\sigma_1 = 0,5894$

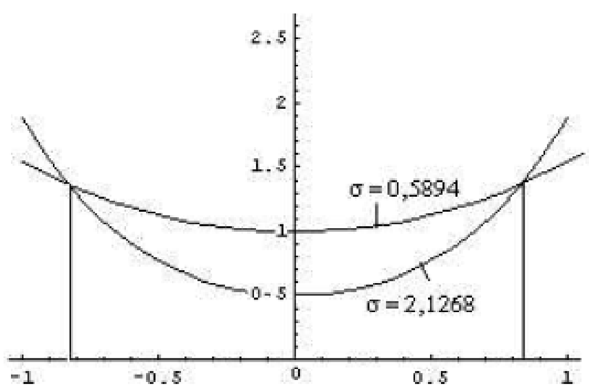
$\sigma_2 = 2,1268$

– Tenemos entonces dos meridianas que son solución de la ecuación diferencial. Veamos cómo varía el radio del círculo de cierre de la meridiana, es decir el círculo de radio mínimo que se ubica en x = 0:

$$f = r = \frac{ch\, s x}{s} = \frac{ch\left(\sigma \frac{x}{L}\right)}{\sigma} L$$

$$x = 0 \longrightarrow r_{min} = \frac{L}{\sigma}$$

Si se obtienen dos meridianas diferentes para un mismo valor de L y de R, el radio menor (círculo de cierre) se obtendrá para el mayor valor de σ (es decir 2,1268).



– La menor área corresponde al menor σ, por lo tanto al círculo de cierre más grande. ¿Pero cuál de las dos superficies de revolución tiene menor área?

Bourbakof recomendó hacer el cálculo.

$$f = \frac{\operatorname{ch} sx}{s} \qquad f' = \operatorname{sh} sx$$

$$A(f) = \int_{-L}^{+L} 2\pi f \sqrt{1+f'^2}\, dx = \int_{-L}^{+L} \frac{2\pi}{s} \operatorname{ch}^2 sx\, dx$$

$$sx = u \qquad dx = \frac{du}{s}$$

$$A(f) = \int_{-sL}^{sL} \frac{2\pi}{s^2} \operatorname{ch}^2 u\, du \qquad \operatorname{ch} u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 u = \frac{e^{2u} + e^{-2u} + 2}{4} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} 2u + 1\right)$$

$$A(f) = \int_{-sL}^{+sL} \frac{\pi}{s^2}\left(\operatorname{ch} 2u + 1\right) du = \frac{\pi}{s^2}\left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2u + u\right]_{-sL}^{+sL}$$

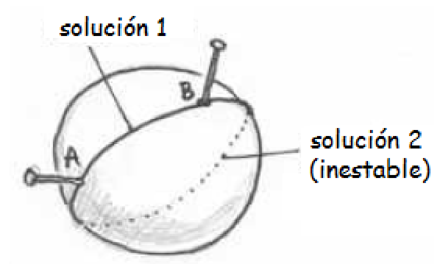
$$A(f) = \frac{\pi}{s^2}\left(\operatorname{sh} 2sL + 2sL\right)$$

ponemos $L = 1$ $\qquad A \sim \dfrac{\operatorname{sh} 2s + 2s}{s^2}$

– Por favor, Fowler, calcúlenos todo eso.

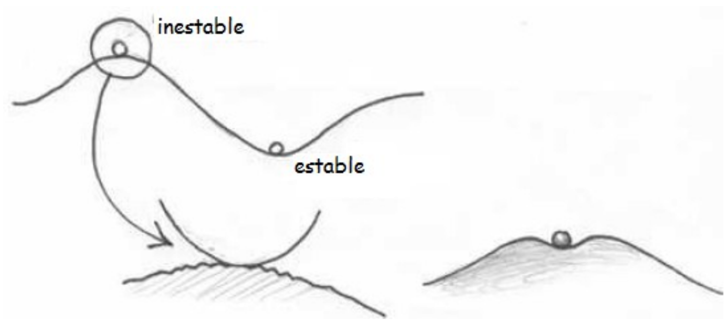
– Listo: la meridiana que posee el mayor radio de cierre es la que tiene la menor área. Pero me cuesta imaginar que pueda haber dos soluciones. Por favor, Bourbakof, sáquenos de este impase, se lo pido.

– Una de las soluciones es simplemente inestable. Para poner en evidencia la inestabilidad de una de las soluciones habría que realizar un desarrollo en serie de segundo orden. Sería un tanto complicado. Consideremos un ejemplo más ilustrativo: imaginen que buscan ustedes la trayectoria mínima que separa dos puntos sobre una esfera. Se podría tratar el problema de manera análoga como un problema de extremos. Encontraremos así dos soluciones:



– Eso parece un elástico uniendo dos alfileres clavados en una naranja.

– Hay dos trayectorias AB. Ambas son trayectorias extremas, pero sólo una de ellas es “estable”, genuinamente más corta. Esa es la diferencia entre las matemáticas y la física. Una solución física es una solución estable, como evoca la figura siguiente:



– La bola en lo alto de la colina, a la izquierda, está en equilibrio inestable

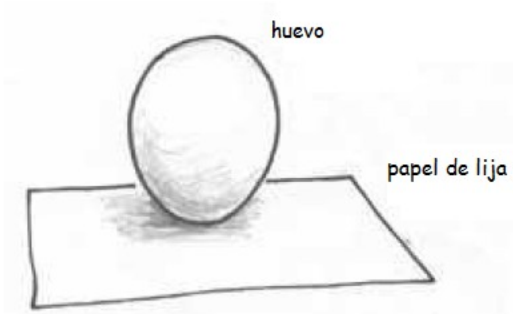
– ¿Y no es posible arreglárselas para ubicarla justo en la cima?..

– No, si se lograra mantenerla en la cima de la colina, eso querría decir que ésta no es perfectamente lisa. La menor rugosidad falsea el problema. Y sería equivalente a poner la bola en una pequeña hondonada.

– Hmm…–dijo Iliouchin–, en esas condiciones debería poder sostenerse un huevo por su punta, a condición de apoyarlo sobre papel de lija de granulado grueso. Boissinière, ¿tiene huevos y papel de lija?

– Sí, pero no aquí. Pero los puedo hacer traer.

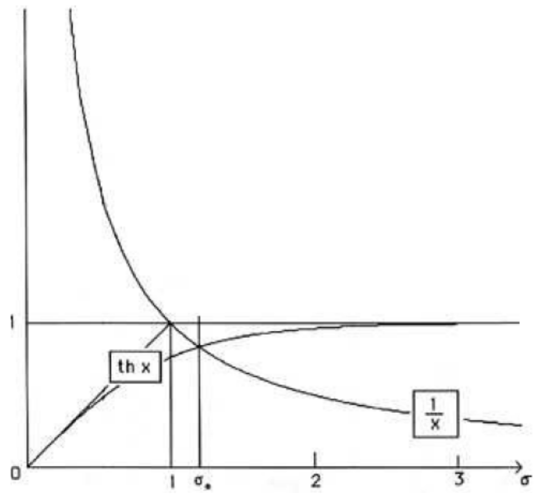
El experimento fue todo un éxito.



– Volvamos a la figura con los dos valores de σ. Pueden ver que una recta horizontal no siempre corta automáticamente la curva. Hay un valor crítico para eso, cercano a $\eta_{cr} = 1{,}5$. Para hallar el valor correspondiente de σ sólo hay que derivar:

$$\left(\frac{ch\,\sigma}{\sigma}\right)' = \frac{\sigma\, sh\,\sigma - ch\,\sigma}{\sigma^2} \quad \text{es cero para} \quad th\,\sigma_0 = \frac{1}{\sigma_0}$$

Con la siguiente representación gráfica:



Eso nos da un valor de σ cercano a 1,2. Ahora hay que insertar ese valor para encontrar la distancia máxima a la que se pueden separar las dos circunferencias coaxiales del mismo radio R.

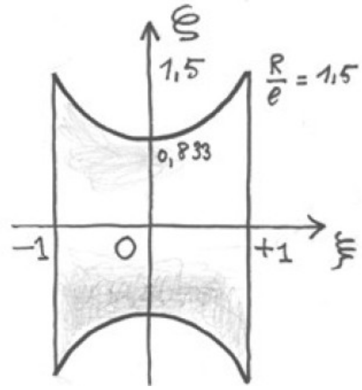
Pongamos $\varsigma = \dfrac{x}{\ell}$

con $\ell = 1$

$s = \ell\sigma = 1{,}2$

$\varsigma = \dfrac{ch\,1{,}2x}{1{,}2}$

$\varsigma_{min} = \dfrac{1}{1{,}2} = 0{,}833$

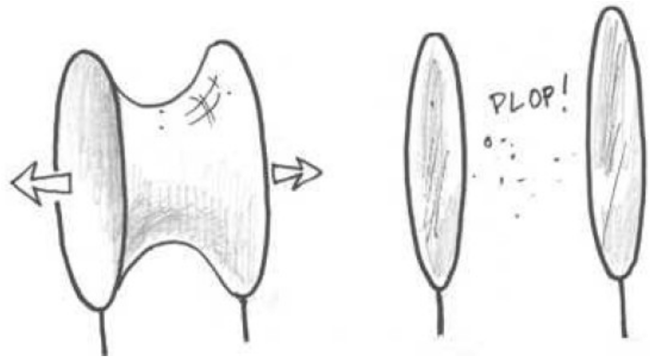


Iliouchin, por haber llegado tarde, no había tenido tiempo de hacer las pruebas con el agua enjabonada.

– ¿Qué ocurre cuando se separan las circunferencias un poco más?

– ¡Haga usted el experimento, estimado!

En un santiamén se puso delante de la mesa con los accesorios y el recipiente con agua enjabonada. Al cabo de unos cuantos ensayos logró obtener la configuración deseada y he aquí lo que constató:



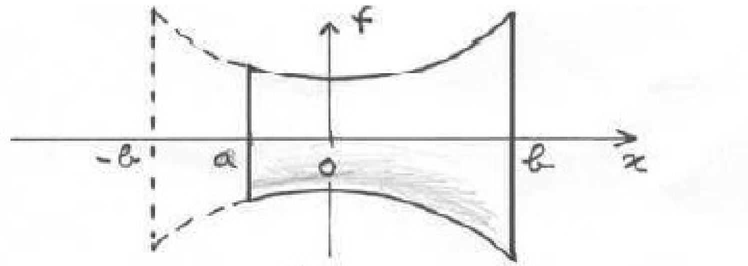
– ¡Muy divertido! La membrana se rompe y se forman dos discos planos.

– Siempre bajo una configuración de superficie de área mínima. Pero en este caso la superficie está constituida por dos discos disyuntos.

Boissinière se divertía de lo lindo.

– Bourbakof, ¿cómo abordar el problema cuando hay dos circunferencias de radios diferentes?

– Retomen el cálculo. Yo elegí dos circunferencias del mismo radio para fijar ideas, pero en realidad no es indispensable. Al final llegará usted a la misma ecuación diferencial, que tendrá la misma solución, con sus dos constantes de integración. La superficie mínima que se apoye sobre las dos circunferencias de radios diferentes será simplemente una porción del tipo de superficie que vimos anteriormente. Haber elegido las dos circunferencias del mismo radio era más fácil para hacer aparecer las condiciones críticas de separación.



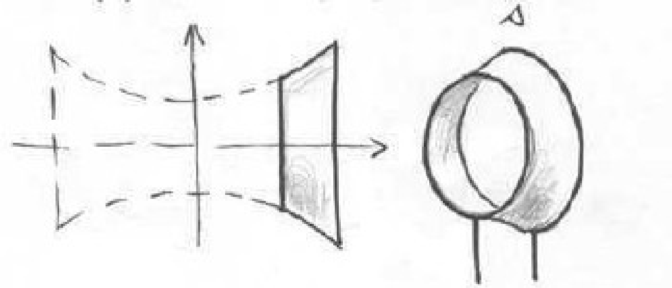
$$A(f) = \int_a^b 2\pi f \sqrt{1+f'^2}\, dx$$

$$A(f+\varepsilon h) = \int_a^b 2\pi (f+\varepsilon h)\sqrt{1+(f'+\varepsilon h')^2}\, dx$$

$$\downarrow$$

$$\left.\frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} = 2\pi \int_a^b \frac{h\left[1+f'^2 - ff''\right]}{(1+f'^2)^{3/2}}\, dx$$

$$1+f'^2 - ff'' = 0 \longrightarrow f(x) = \frac{\mathrm{ch}\, s(x-x_0)}{s}$$



– Perdone usted, pero eso era evidente…

Fowler estaba encantado.

– Ya ve usted, Iliouchin, Bourbakof ha hecho emerger un muy bonito cálculo variacional de una cubeta llena de agua enjabonada. Es usted un mago, querido mío.

Bourbakof era insensible a los elogios.

– Es también una manera de hacer aparecer un Lagrangiano.

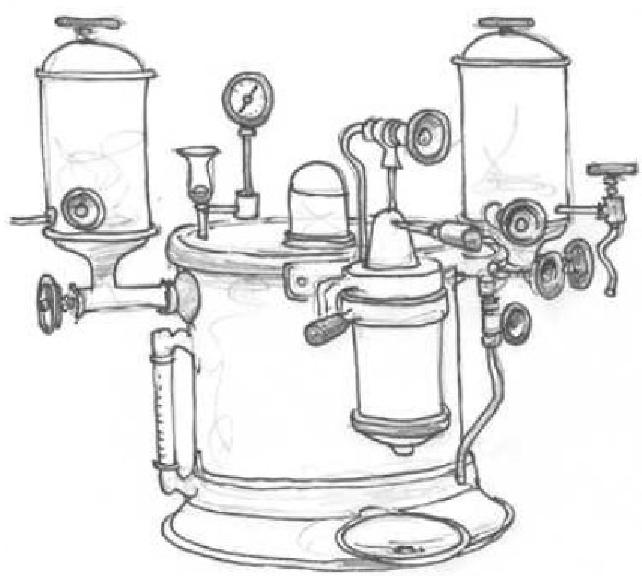
– ¡Un Lagrangiano! –exclamó Iliouchin–. Nunca he visto uno en mi vida. Mis colegas los físicos teóricos los tenían siempre a flor de labios.

– Pues tiene usted uno ante usted – replicó Fowler.

– ¿Dónde? – volvió a exclamar Iliouchin abriendo los ojos de par en par y recorriendo con la mirada los cálculos en el tablero.

Boissinière explotó de risa.

– Propongo que tomemos un café para que, bajo la guía de Bourbakof, nuestro biólogo amigo Turyshev sea iniciado en los secretos del Lagrangiano.



– ¡Por dios, Boissinière! –exclamó Fowler– ¿de dónde ha sacado esa monstruosidad?

– De Checoslovaquia. Pero le garantizo que hace un café excelente. Turyshev la analizó y habla muy bien de ella.

– Pero no crea usted automáticamente todo lo que le pueda decir Boissinière. ¡De hecho, el percolador es de la época del Titanic!

– ¡Lo cual en verdad no me sorprende para nada!

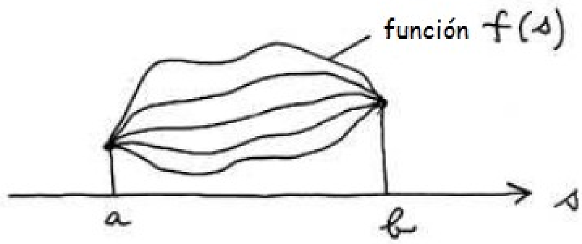
Bebido el café, todos se reencontraron de nuevo en el que de ahora en adelante sería el salón de seminarios, y Turyshev fue pasado al tablero. Bourbakof se dirigió a él:

– ¿Turyshev, podría usted cambiar un tanto la notación? Reemplacemos la variable x por s y pongamos que la derivación con respecto a esta variable se represente con un punto encima. Vamos entonces a considerar una función L que depende a priori de la función f y de su derivada. A esa función la llamaremos un ***Lagrangiano***.

Bajo la guía de Bourbakof, Turyshev escribió:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(f, \dot{f}) \quad \text{donde} \quad \dot{f} = \frac{df}{ds}$$

– Ahora vamos a definir la función f(s) en un cierto intervalo [a, b]. Y vamos a considerar el conjunto infinito de funciones f(s) que toman valores dados en s = a y en s = b.



Enseguida vamos a integrar la función

$$L(f(s), \dot{f}(s))$$

en el intervalo [a, b] y a esta integral la llamaremos integral de acción, o simplemente ***acción***.

$$A(f) = \int_a^b \mathcal{L}(f, \dot{f})\, ds \quad \text{(acción)}$$

Examinemos ahora el problema que formuló Lagrange hace dos siglos:

“Entre todas las funciones f(s) que satisfacen:

$$f(a) = \alpha \qquad \text{y} \qquad f(b) = \beta$$

¿existe una función particular que vuelve mínima la acción?”

A ver, Turyshev.

El biólogo permaneció desconcertado unos instantes.

– Supongo, Turyshev… que eso debe tener que ver con lo que desarrollamos anteriormente.

– Exacto.

– En ese caso, voy a introducir una pequeña perturbación de la función f(s)

$$f(s) \longrightarrow f(s) + \varepsilon\, h(s) \qquad \varepsilon \ll 1$$

con:

$$h(a) = h(b) = 0$$

de modo que cada una de las funciones perturbadas tome los mismos valores que f en los puntos a y b.

Para resolver el problema de minimización voy a considerar el paso al límite del cociente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f+\varepsilon h) - A(f)}{\varepsilon}$$

Y voy a hacer un desarrollo en serie de primer orden de la integral:

$$A(f+\varepsilon h) = \int_a^b \mathcal{L}(f, \dot{f})\,ds + \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} \dot{h} \right] ds + o(\varepsilon)$$

Lo que me permite escribir:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f+\varepsilon h) - A(f)}{\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} \dot{h} \right] ds$$

Aquí tengo dos integrales:

$$I_1 = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} h\,ds \;;\; I_2 = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} \dot{h}\,ds$$

En la segunda, voy a realizar una integración por partes, por analogía con lo que hicimos antes.

– Bien…

– Bastará con escribir:

$$\dot{h}\,ds = dh \qquad\qquad I_2 = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\,dh$$

y como antes en esta integración por partes, con el mismo truco astuto:

$$I_2 = \Big[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} h\Big]_a^b}_{\text{cero}} - \int_a^b h\Big[\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\Big)\Big] ds$$

dado que $h(a) = h(b) = 0$

Lo que resulta del hecho que todas estas funciones f(s) que entran en el Lagrangiano, al igual que sus derivadas, no difieren las unas de las otras más que en una función h(s) tal que h(a) = 0 y h(b) = 0.

– Entonces me queda:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f+\varepsilon h) - A(f)}{\varepsilon} =$$

$$\int_a^b h\Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\Big)\Big] ds$$

– El límite será cero si la cantidad entre corchetes de la integral es nula.

– Lo que resulta en la ecuación de Lagrange “unidimensional”.

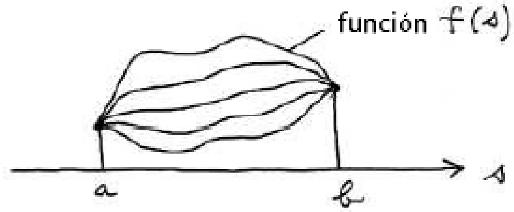
Turyshev escribió:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}} \quad \text{Lagrange}$$

– Ya ve usted, mi querido Turyshev, que la cosa no es más complicada que buscar un pato con tres patas.

– Sorprendente. Siempre había considerado esa misteriosa ecuación con la mayor perplejidad.

– Si volvemos a la figura:



Pueden ver que la ecuación resulta cuando se trata de despejar el “camino” en el que una cierta acción se ve minimizada. Buscamos entonces un camino particular entre el conjunto de caminos que pasan por los dos puntos dados.

– Lo que es curioso es que todo eso haya intervenido en el cálculo del área mínima de una superficie.

– Retomen sus notas. Reemplazando el “prima” de la derivación por el punto, ¿cuál es la integral de acción?

– Hmm, pues me parece que es:

$$A(f) = \int_a^b 2\pi f \sqrt{1+\dot{f}^2}\, dx$$

– ¿Y el Lagrangiano?

– Hmm…

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(f, \dot{f}) = 2\pi f \sqrt{1+\dot{f}^2}\, dx$$

– Y si ahora escriben la ecuación de Lagrange a partir de este Lagrangiano, ¿qué obtienen?

Turyshev parecía estar renovado.

– Voy a quitar el 2π para no cargar con él.

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(f,\dot{f}) = f\sqrt{1+\dot{f}^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \sqrt{1+\dot{f}^2} = \frac{(1+\dot{f}^2)^2}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} = \frac{f\dot{f}}{\sqrt{1+\dot{f}^2}}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{(\dot{f}^2 + f\ddot{f})\sqrt{1+\dot{f}^2} - f\dot{f}\dfrac{\dot{f}\ddot{f}}{\sqrt{1+\dot{f}^2}}}{(1+\dot{f}^2)}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{(\dot{f}^2 + f\ddot{f})(1+\dot{f}^2) - f\dot{f}^2\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{\dot{f}^2 + f\ddot{f} + \dot{f}^4 + \cancel{f\dot{f}^2\ddot{f}} - \cancel{f\dot{f}^2\ddot{f}}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\dot{f}^2 + f\ddot{f} + \cancel{\dot{f}^4}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}} = \frac{\cancel{\dot{f}^4} + 2\dot{f}^2 + 1}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$1 + \dot{f}^2 - f\ddot{f} = 0$$

Y así vuelvo a encontrar la ecuación diferencial de la meridiana de área extrema.

Hubo aplausos en el salón. Fowler chifló con los dedos.

– ¿Sabe usted, Turyshev, que para ser biólogo es usted bastante bueno en esto? Por poco y le propongo ser mi estudiante de tesis.

– No exageremos. Pero es cierto que hoy he aprendido un montón de cosas.

Turyshev sonrió. Boissinière agregó:

– Definitivamente es usted un artista, Bourbakof. Acaba usted de extraer la ecuación de Lagrange de una pompa de jabón. Sin duda es usted un tesoro a bordo.

Bourbakof lo tomó con aire modesto.

– En el medio matemático, tratar de hacerse comprensible puede ser tomado como una traición.

– Entonces es usted un traidor muy bueno.

– Y dado que en esto estamos, ¿por qué no de una vez resolver este asunto de la ecuación de Lagrange para cualquier número de dimensiones?

Turyshev se mostró sorprendido:

– ¿Acaso la ecuación de Lagrange funciona… en un universo de muchas dimensiones?

– Claro que sí, amigo, en treinta y dos si le place. No se siente tan rápido. ¿Cree poder continuar?

– Eeh… sí.

Bourbakof miró su reloj.

– Después cenaremos, lo prometo. Pero ahora que estamos calientes, sigamos.

– Listo – respondió el biólogo.

Todos volvieron a sus lugares. Boissinière interpeló a Bourbakof.

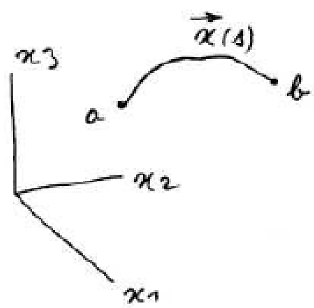
– ¿No cree usted que es demasiado de un solo golpe para un biólogo?

El propio Turyshev se encargó de tranquilizar a la audiencia:

– Es algo nuevo para mí, pero les aseguro que me divierto bastante.

– Bien –continuó Bourbakof–, la ecuación de Lagrange puede construirse considerando un número cualquiera de dimensiones x_1, x_2, …, x_n. Será más cómodo para nosotros imaginar un espacio de tres dimensiones x_1, x_2, x_3, que se apresurarán ustedes a identificar con el espacio tridimensional euclidiano que les es familiar, aunque, para ser más precisos, deberíamos limitarnos a decir que se trata del "espacio R^3". Pero en fin. En este espacio tridimensional podemos imaginar dos puntos a y b y un camino que los una, parametrizado por un parámetro s. Las coordenadas (x_1, x_2, x_3) de un punto son funciones $f^i(s)$. Turyshev, dibuje usted un espacio 3d y una trayectoria uniendo dos puntos cualesquiera a y b.

Turyshev obedeció.



$$\vec{x}(s)\begin{cases} x_1 = f_1(s) \\ x_2 = f_2(s) \\ x_3 = f_3(s) \end{cases}$$

$$\vec{f}\begin{cases} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{cases}$$

– Bien, derive ahora para nosotros esas funciones con respecto al parámetro s.

Turyshev escribió una vez más:

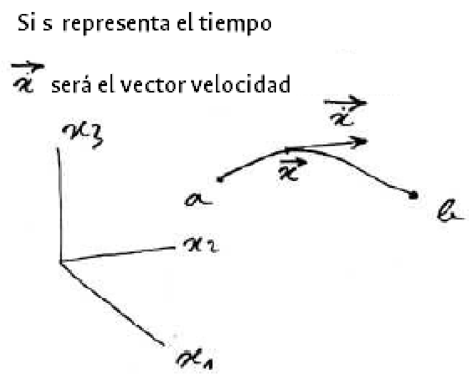
$$\vec{\dot{x}}\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{f}_1 = \dfrac{dx_1}{ds} \\ \dot{x}_2 = \dot{f}_2 = \dfrac{dx_2}{ds} \\ \dot{x}_3 = \dot{f}_3 = \dfrac{dx_3}{ds} \end{cases}$$

Bourbakof se paró, tomó la tiza y agregó:

– Podemos de manera más simple escribir:

$$\vec{\dot{x}}\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases}$$

– El físico puede preguntarse en este momento a qué va todo esto. Responderle que se trata de “mecánica analítica” seguramente no le ayudará mucho. Pero:



– Visto así, todas estas historias de Lagrangiano y de extremos se reducen a un problema de cinemática en un espacio euclidiano 3d. Lo digo sólo para se hagan una imagen mental en sus cabezas. Pues asumo que me considera usted sospechoso de querer hacerle perder contacto con la realidad.

– ¿Yo? Pero si no he dicho nada… – exclamó Turyshev.

– Lo siento reticente, ¿no es así? ¿O es una impresión?

– Le aseguro que me siento muy bien, continúe usted…

–Tenemos entonces un Lagrangiano, que es siempre una cantidad escalar. Anteriormente lo habíamos definido a partir de una función s, que también era un escalar. Ahora hay que imaginar que esta función **f** (o **x**) es una “especie de vector” de n “componentes” f^{i}. Podemos así definir nuestro Lagrangiano a partir de esta función vectorial y de su derivada.

Turyshev escribió:

$$\mathcal{L}(\vec{f},\dot{\vec{f}}) = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3, \dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{f}_3)$$

– ¡Muy bien! Reemplace ahora esas funciones f_i y sus derivadas por funciones x_i y sus derivadas, usando siempre la misma notación.

– A sus órdenes, profesor…

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$$

– Vamos a definir, como antes, una ***acción***.

– ¿Es un escalar?

– Sí, es siempre un escalar:

$$\text{Acción: } A(\vec{x}) = \int_a^b \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x})\, ds$$

– Se trata de una ***integral de acción*** que se calcula a lo largo de una trayectoria que une dos puntos a y b de este espacio 3d, integral definida por medio de esta función a la que denominamos Lagrangiano. Vamos a buscar la trayectoria que vuelve mínima la acción. Básense ustedes en lo que vimos anteriormente.

Turyshev se sintió inspirado:

$$\begin{cases} \text{formamos } \mathcal{L}(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \vec{x} + \varepsilon \vec{h}) \\ (\text{o } \mathcal{L}(\vec{f} + \varepsilon \vec{h}, \vec{f} + \varepsilon \vec{h}) \end{cases}$$

– Hay que entender bien lo que hacemos –comentó Turyshev–, “x flecha” representa una trayectoria ab y es un conjunto de funciones:

$$x_i(s) = f_i(s)$$

tales que, para todas las funciones posibles, es decir para todos los caminos posibles:

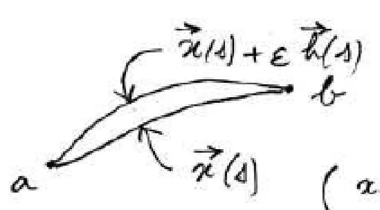
$$f_i(a) = \alpha_i \quad \text{y} \quad f_i(b) = \beta_i$$

– Lo que equivale a decir que todos estos caminos pasan por los puntos a y b del espacio (x_1, x_2, x_3). E implica igualmente que:

$$h_i(a) = h_i(b) = 0$$

– Bien…

– Probemos ahora con una segunda trayectoria, vecina de la primera:



$$\begin{cases} x_1(s) + \varepsilon h_1(s) \\ x_2(s) + \varepsilon h_2(s) \\ x_3(s) + \varepsilon h_3(s) \end{cases}$$

– El valor de la integral de acción, que es un escalar, no será a priori el mismo según sea el camino considerado para realizar la integración sobre s.

$$A(\vec{x}) \neq A(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}).$$

– Es lógico.

– Probemos ahora a buscar, realizando esta “variación”, la curva o las curvas, el o los caminos, que minimizan la acción. Desarrollemos el cálculo como antes.

Turyshev comenzó.

$$\mathcal{L}(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon \dot{\vec{h}}) = \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) + \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{h} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot \dot{\vec{h}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{h} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} h_3$$

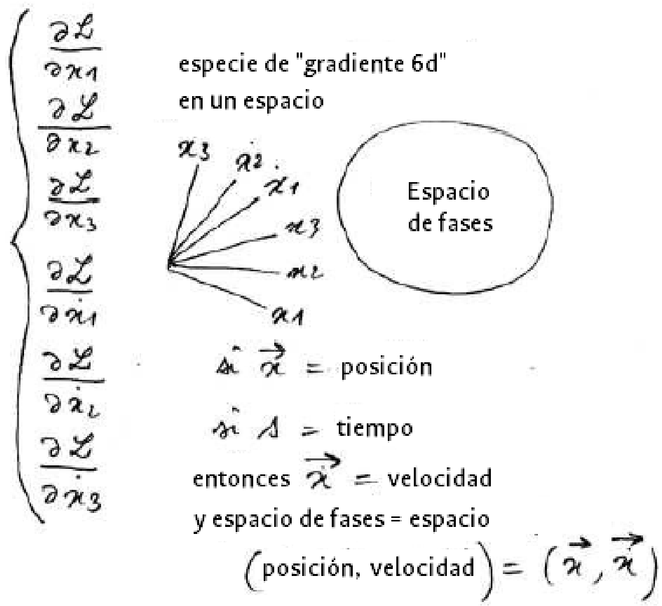
– Muy bien. Ha hecho usted aparecer un producto escalar, simbolizado por el punto.

Bourbakof, encantado con el talento de su alumno, hizo algunos comentarios.

– Un matemático habría escrito y enunciado las cosas de otra forma. Pero matemáticos y físicos (de la vieja escuela) no hablan para nada el mismo idioma. Un físico, por ejemplo, sabe lo que es una función escalar f, definida en un espacio (x, y, z). Puede ser, por ejemplo, un campo de temperatura T(x, y, z) La expresión siguiente:

$$\varphi(x, y, z) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{gradiente}$$

también le es familiar. La llama “gradiente”. De hecho, podemos ver que en nuestro cálculo aparece una especie de “gradiente de seis patas” de la función L, del Lagrangiano.



Gradiente que está definido en el ***espacio de fases***, como la función L, como el Lagrangiano mismo, que es una entidad matemática que ***habita en el espacio de fases***. Como al fin de cuentas hay que obtener un escalar, vamos a multiplicar esta especie de gradiente de seis patas de aquí arriba por otro "6-vector". Comienzo escribiendo:

$$\varepsilon \vec{h} \begin{cases} \varepsilon h_1(s) \\ \varepsilon h_2(s) \\ \varepsilon h_3(s) \end{cases}$$

que representa la perturbación de la "función vectorial", y que no es más que una parte. El 6-vector es:

$$\begin{cases} \varepsilon h_1 \\ \varepsilon h_2 \\ \varepsilon h_3 \\ \varepsilon \dot{h}_1 \\ \varepsilon \dot{h}_2 \\ \varepsilon \dot{h}_3 \end{cases} \quad \text{6-vector} \quad (\varepsilon \vec{h}, \varepsilon \dot{\vec{h}})$$

Era sólo una digresión. Turyshev, termine usted el cálculo en 3d, que ya sabemos que se puede extender evidentemente a cualquier número de dimensiones.

– Bueno –dijo Turyshev–, continúo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\vec{x}+\varepsilon \vec{h}) - A(\vec{x})}{\varepsilon}$$

$$\text{pero } \dot{h}^i = \frac{dh^i}{ds}$$

$$\text{se obtiene: } \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} h^i \, ds + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \, dh^i \right)$$

– Vuelvo a hacer la integración por partes:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \, dh^i = \sum_{i=1}^{n} \left[h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right]_a^b - \sum_{1}^{n} \int_a^b h^i \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \, ds$$

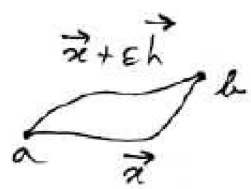
– Muy bien.

– El término entre corchetes es cero dado que la función h es nula en los extremos del camino ab.

$$\text{punto a } (s=a) \begin{cases} x1(a) \\ x2(a) \\ x3(a) \end{cases} \qquad \text{punto b } (s=b) \begin{cases} x_1(b) \\ x_2(b) \\ x3(b) \end{cases}$$

$$h^i(a) = h^i(b) = 0$$

$$\vec{h}(a) = \vec{h}(b) = 0$$



– En efecto.

– Sólo queda finalizar:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\vec{x}+\varepsilon \vec{h}) - A(\vec{x})}{\varepsilon} \quad \text{tiende a (a primer orden)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{b} h^{i}\, ds\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{i}} - \frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{i}}\right]$$

– Para que el camino **x**(s) seguido en este espacio entre dos puntos fijos a y b corresponda a un extremo de la acción A, es necesario y suficiente que la cantidad entre corchetes sea cero, lo que nos da n ecuaciones de Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{i}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{i}}}$$

Lagrange

Turyshev estaba pensativo:

– Me gustaría volver a lo que dijimos antes sobre el número de dimensiones para ver si entendí bien.

– Adelante, amigo mío…

– Partimos de un espacio de n dimensiones que denominamos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Es un espacio vectorial.

– Ciertamente.

– Puedo entonces representar cualquier punto de ese espacio por un “vector **x**”, escribiendo:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

En este espacio puedo ubicar dos puntos A y B (que antes llamamos a y b, pero no importa). Una curva Γ de este espacio es una familia de funciones:

$$(x_1(s), x_2(s), \cdots, x_n(s))$$

que dependen de un solo parámetro *s*. Las ecuaciones de Lagrange escritas arriba forman un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Hay n funciones desconocidas por determinar, para lo que necesitaré n ecuaciones, y noto que es justamente eso lo que me proporciona “la ecuación de Lagrange” del recuadro. Puedo escribir el sistema de ecuaciones diferenciales como:

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ldots, \ddot{x}_n) = 0 \\ \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ldots, \ddot{x}_n) = 0 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ldots, \ddot{x}_n) = 0 \end{cases}$$

– Una acotación con respecto al sistema de ecuaciones diferenciales más general es que s no aparece explícitamente.

Bourbakof estalló de risa.

– ¿Sabe lo que es usted, Turyshev?

– No…

– Es usted un matemático frustrado.

– No bromee. Estoy a punto de tirar la toalla.

– Bueno, no lo molestaré más. Continúe…

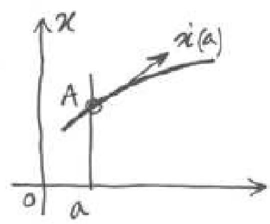
– Lo que me desconcierta un tanto es que clásicamente había aprendido que las soluciones de tales sistemas dependían de las “condiciones iniciales”. Si tomo una ecuación diferencial de segundo orden que se refiera a una función x(s), tendría:

$$\phi(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

Si decido partir de un punto A tal que s = a, entonces mis condiciones iniciales serían:

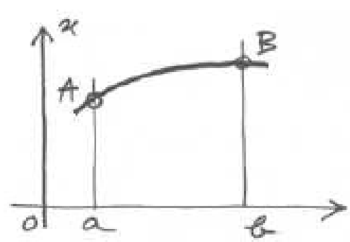
$$x(a) \quad \text{y} \quad \dot{x}(a)$$

lo que corresponde, gráficamente, a:



– Lo que lo desconcierta es que trata usted de determinar ahora la solución imponiéndole el paso por dos puntos, lo que lleva exactamente a lo mismo. En el caso unidimensional impondríamos que la curva pase por dos puntos A y B, lo que su vez impone fijar x(a) y x(b).

Gráficamente:



– Sí, tiene razón, es equivalente. La solución de una ecuación diferencial escalar de segundo orden depende de dos parámetros. Se pueden determinar esos dos parámetros con la ayuda de las ***condiciones iniciales*** x(a) y x’(a), o bien usando las ***condiciones límite*** x(a) y x(b).

– Entonces será similar en n dimensiones.

– Sí. Sólo necesito acostumbrarme a la idea de determinar la solución imponiendo a la curva x(s) el paso por dos puntos A y B, es decir que se tienen 2n valores:

$$\left(x_1(a), x_2(a), \cdots, x_n(a)\right) \quad \text{y} \quad \left(x_1(b), x_2(b), \cdots, x_n(b)\right)$$

– Me gustaría ahora volver al espacio que usted denominó ***espacio de fases***. Si entendí bien, es el espacio de 2n dimensiones:

$$\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\right)$$

– Si lo prefiere, puede poner simplemente:

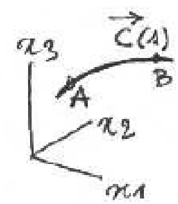
$$\begin{cases} y_1 = \dot{x}_1 \\ y_2 = \dot{x}_2 \\ \dots \\ y_n = \dot{x}_n \end{cases} \rightarrow (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n}_{\text{2n dimensiones}})$$

– Eso le permite reubicar su Lagrangiano en ese espacio:

$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\right)$$
$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\right)$$

– Las acciones se podrán escribir indistintamente como:

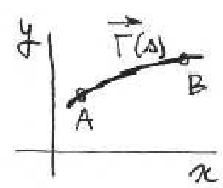
$$A(\vec{C}) = \int_A^B \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\, ds$$



– Asociándoles una representación mental bajo la forma de una trayectoria **C**(s) en el espacio **x**.

– O bien:

$$A(\vec{\Gamma}) = \int_A^B \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y})\, ds$$



Asociándoles la imagen mental de una “trayectoria” **Γ**(s) en el espacio de fases.

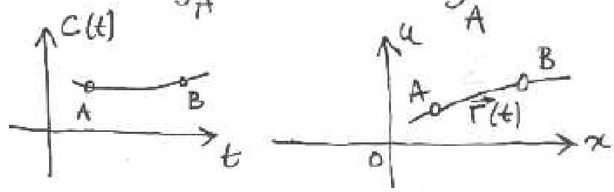
– Creo que vuelvo a comprender, a condición de considerar a s como un tiempo.

– Entonces convierte usted la dinámica en la cinemática de un punto.

– Puedo entonces escribir:

$$A = t \ (\text{tiempo}) \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = u$$

$$A(C) = \int_A^B \mathcal{L}(x, \dot{x})\, dt = \int_A^B \mathcal{L}(x, u)\, dt$$



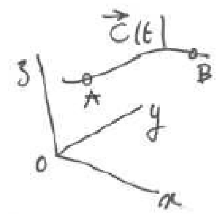
– A la izquierda tengo la trayectoria **C**(t) en un espacio-tiempo (x, t). A la derecha tengo mi trayectoria **Γ**(t) en un espacio de fases bidimensional (x, u), parametrizado por mi tiempo t. Pero por qué limitarme a una dimensión del espacio. Podría pasar a tres. Si llamo (x, y, z) a mis coordenadas de espacio, y si parametrizo con s = t (tiempo), tendría:

$$A = t = \text{tiempo} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} = w \end{cases}$$

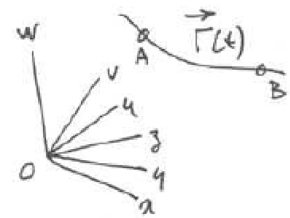
– donde (u, v, w) representa mi velocidad **V**. Y, como antes, puedo figurar la acción de dos maneras diferentes (aunque, de cualquier forma, no hay sino una variable de integración s ó t):

$$A(\vec{C}(x,y,z)) = \int_A^B \mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})\,dt$$

$$A(\vec{\Gamma}(x,y,z,u,v,w)) = \int_A^B \mathcal{L}(x,y,z,u,v,w)\,dt$$



trayectoria en el espacio (x, y, z)



trayectoria en el espacio de fases

– Podría hacerme como imagen mental de mi trayectoria indistintamente a C o G, estando la primera inscrita en el espacio:

$$(x, y, z)$$

de tres dimensiones, y la segunda en mi espacio de fases

$$(x, y, z, u, v, w)$$

de seis dimensiones. Las ecuaciones de Lagrange forman un sistema diferencial de segundo orden en el espacio (x, y, z) dado que en ellas intervienen segundas derivadas, y un sistema de primer orden si se las considera como sistema diferencial en el espacio de fases (x, y, z, u, v, w).

Todo esto suscita una cuestión.

– ¿Cuál?

– ¿Cómo es el universo mental de un murciélago?

– ¿Cómo así?

– Ustedes saben que el murciélago es prácticamente ciego: “ve” con sus oídos. Emite ultrasonidos con la ayuda de su nariz y capta el eco con sus grandes pabellones auriculares, construidos como las antenas de radar o los radiotelescopios. Sus tímpanos, más sofisticados que los nuestros, le sirven de retinas. Tienen una visión “biauricular”.

– En resumen, “ve” como alguien que se desplazara en la oscuridad y se guiara con la ayuda de una linterna. Pero en lugar de emitir luz y de captar la señal de retorno, emite ultrasonidos.

– Sí, pero noten la diferencia: el murciélago es capaz de medir el efecto Doppler (Apéndice 2) en tiempo real. Como posee dos orejas, eso le permite no solamente tener una percepción 3d de las posiciones de los objetos que “ilumina”, sino también conocer su vector velocidad. Por lo tanto, su espacio mental es un espacio de seis dimensiones, un espacio de fases.

– Ah sí…

– He pensado a menudo en lo que sentiría si fuera un murciélago. Podría uno entretenerse figurando el propio universo perceptual con falsos colores. Si se supone que emite en una cierta banda de frecuencias, eso se puede asimilar a los colores: azul para las altas frecuencias, y rojo para las bajas. Un objeto liso y muy reflectivo aparecería como una “superficie blanca”, como por ejemplo un vidrio. A la inversa, un abrigo de piel posado sobre un sofá sería “negro”. El poder reflectivo de los diferentes objetos les conferirá diferentes “colores”. Estos serían enseguida modificados a causa del efecto Doppler. Todo cuanto se aleje será “algo más rojo” y todo lo que se acerque estará “desplazado hacia el azul”. De hecho, lo que no podemos imaginar es esta concepción en tiempo real del conjunto posición-velocidad. El murciélago tiene un espacio de representación del mundo que es hexadimensional.

– Vive en un espacio euclidiano de seis dimensiones.

– Eso es muy importante para la búsqueda de sus presas favoritas: las mariposas nocturnas. ¿Saben cómo hacen ellas para escapar de él?

– Están recubiertas de un material absorbente, de vellos y escamas en sus alas.

– Así es. Pero cuando se sienten “iluminadas” por el murciélago que se acerca, como un avión que advierte que ha sido detectado por el radar de un misil, pueden dejarse caer para simular que son hojas muertas. Y a veces el murciélago cae en la trampa. Pero la cosa es más fascinante. Algunas mariposas nocturnas están equipadas de órganos que les permiten operar contramedidas: emiten ultrasonidos de manera anárquica, lo que perturba completamente la imagen mental del murciélago, la posición y la velocidad.

– Le hacen interferencia.

– Exacto. Además el murciélago debe abrir al máximo su boca para poderlas aferrar. Al hacerlo, sus orejas se mueven hacia atrás.

– Dicho en breve, cuando atrapa, se vuelve ciego.

– Si se ha equivocado sobre la posición exacta y sobre el rumbo seguido por la mariposa, la embiste y la pierde. Pero en realidad es aún más complejo. La mariposa nocturna puede tratar de modificar artificialmente esta firma ultrasónica.

– ¿Camuflaje?

– Enviando ultrasonidos ad hoc puede tratar de hacerse pasar por una especie no comestible.

– Si la velocidad de la luz fuese, digamos, de diez o veinte metros por segundo, percibiríamos igualmente el mundo como un espacio de seis dimensiones.

– Aterrador. ¿Pero quién nos dice que especies inteligentes, de hábitos nocturnos, no han podido desarrollar sentidos de este tipo?

– ¿Piensa usted en humanoides funcionando como murciélagos, con enormes orejas y una nariz complicada?

– ¿Por qué no?

– Nacerían con el espacio de fases grabado en sus neuronas. Tiene usted una imaginación desbordada, Turyshev.

– No, trato simplemente de prever una eventualidad, eso es todo.

– Bueno, volvamos a lo nuestro. Habíamos dicho que el Lagrangiano "habitaba" en el espacio de fases, y que era una función diferenciable en ese espacio.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Les propongo ahora considerar, a priori, otra función definida en ese espacio y construida a partir de nuestra función L. Pongamos:

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = E(x, y)$$

$$E(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$$

$$E = \sum_i y_i \frac{\partial L}{\partial y_i} - L = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

– Vamos a ver que esta nueva función tiene propiedades notables.

– Les recuerdo que nuestra función L, el Lagrangiano, nos permitió construir una trayectoria particular AB en el espacio de todas las curvas que unen dos puntos cualesquiera en el espacio $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Esta curva particular es la que minimiza la acción, que es sencillamente la integral del Lagrangiano:

$$\text{Acción} \quad A(\vec{x}) = \int_a^b \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\, ds$$

Les propongo que mostremos ahora que esta función E es constante a lo largo de este camino extremo. El matemático habla así de una ***integral primera***. Vamos, es fácil.

– Bien. Entonces escribo:

$$\frac{dE}{ds} = \sum_i \ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_i \dot{x}_i \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{dL}{ds}$$

$$\frac{dL}{ds} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \right]$$

$$\frac{dE}{ds} = \sum_i \cancel{\ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}} + \sum_i \dot{x}_i \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_i \cancel{\ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}$$

$$\frac{dE}{ds} = \sum_i \dot{x}_i \underbrace{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right)}_{\text{Lagrange} \rightarrow 0} \Big]$$

$$\frac{dE}{ds} = 0 \qquad E \text{ es constante}$$

– Tiene razón, no es nada complicado.

– ¿Sabe usted lo que representa esta función?

– No.

– La energía.

– ¡Vaya!

– Para concluir, sepan que esta ecuación, construida a finales del siglo… dieciocho por el matemático Lagrange, es el breviario del físico, del físico teórico y del geómetra. Nunca acabaremos de descubrir todos los conejos que podemos sacar de ese sombrero.

Boissinière levantó la sesión.

– Pues qué coincidencia, porque me parece que justamente tenemos conejo, congelado claro está, para la cena. Creo que es hora de reunirse con los demás en el comedor.

Después de la cena Bourbakof decidió “ir a tomar el fresco en el puente”, lo que no era más que una metáfora pues el puente estaba dentro de la nave. Tomó la escalera de caracol y desembocó en una bóveda tapizada de estrellas en lo alto. Alguien lo había precedido y había puesto la vista “exterior”. Dejó que sus ojos se acostumbraran a la oscuridad y descubrió a Turyshev acomodado en una hamaca.

– ¿Estupendo, no? Por un momento creería uno estar a bordo de una unidad de la French Line. Si Boissinière hubiese puesto un ventilador, con un poco de imaginación parecería estar uno en plena mar.

– Es cierto. Es un “puente superior” poco común. ¿Júpiter está detrás?

– Sí, he orientado el panorama de manera tal que ese planeta no nos deslumbre. Pero si desea usted verlo…

– No, ya lo vi ayer en primer plano. Prefiero la quietud de este techo de estrellas.

– El vientre de la diosa Nut.

– Nos confiamos a ella. ¿Sabe usted a dónde vamos?

– No. Fowler tampoco. Supongo que Boissinière debe saberlo, pero finalmente ¿qué importa? Hemos partido, y eso basta…

– ¿Lo hice sufrir mucho esta tarde en el seminario?

– No, al contrario, me volveré asiduo a todos los seminarios que quiera usted impartir. Me pareció divertido calcular los gradientes en un espacio de seis dimensiones. Aunque soy biólogo, tal vez me habría gustado ser físico. ¡Qué herramientas maravillosas! Un Lagrangiano, un poco de cálculo variacional y de pronto tenemos el control sobre el problema de las pompas de jabón.

– El mundo no está hecho sólo de pompas de jabón.

– En primer lugar, estoy seguro que con un Lagrangiano se deben poder hacer más cosas que calcular esas formas; y en segundo, no estoy de acuerdo con usted. Las pompas de jabón son muy importantes. Todo aquello que afecta de cerca o de lejos al sueño es importante.

– Turyshev, ¿por qué decidió usted unirse al grupo?

– Al comienzo trabajaba sobre el SIDA. Queríamos ver si era posible obtener resultados usando microondas.

– ¿Quiere decir calentando los tejidos?

– No precisamente. El virus del SIDA tiene una particularidad que lo hace muy peligroso. Se refugia, por decirlo así, en “comisarías de policía” pues su hábitat es el interior de los linfocitos. Pensamos que usando altas frecuencias, en la banda de los gigahertz, las células habrían sido relativamente transparentes sometidas a dichas frecuencias.

– ¿Y entonces?

– ¿Sabía usted que el ADN y el ARN son cuatrocientas veces más absorbentes que el agua, cuando se los somete a alta frecuencia modulada a muy baja frecuencia?

– No lo sabía, pero comprendo la idea. Los citoplasmas de las células son transparentes frente a esas altas frecuencias. Pero las moléculas largas, como el ARN de ese retrovirus, hacen el papel de antenas y son sensibles a las bajas frecuencias. Imagino que trataba usted de descomponer el ARN del virus actuando con energías relativamente bajas…

– Esa era la idea. Pero las investigaciones atrajeron una gran cantidad de gente indeseable. ¿Recuerda usted la frase de la Biblia, en el Génesis, con la que Dios prohíbe a Adán y a Eva tocar el árbol de la vida?

– Existía el árbol del conocimiento del bien y del mal, del que tomaron los frutos, y de hecho el árbol de la vida estaba custodiado por querubines que impedían el acceso. Siempre me pregunté el por qué.

– La genética, hombre, la genética. Estamos próximos a tocar el árbol de la vida, como perfectos ignorantes. Con microondas pulsadas no sólo podemos romper los virus, sino que podemos hacerlos mutar.

– ¿Por qué la genética es tan poco conocida?

– ¿No será que hemos intentado actuar muy pronto con esos medios? Puede ser simplemente una cuestión de tiempo.

– Somos completamente ignorantes en la materia. ¿Sabía usted que si una determinada secuencia está presente en el genoma de un niño, éste será víctima de un glaucoma y se volverá ciego, y que si esa secuencia está presente dos veces, no contraerá la enfermedad? ¿Tiene una explicación para semejante cosa?

– Ciertamente no.

– Pues bien, cuando no comprendemos algo, nos abstenemos de tocarlo, así de sencillo, sobre todo cuando se porta un uniforme e insignias y se sueña con poseer nuevas armas biológicas, o virus modificados artificialmente.

– ¿Es por eso que abandonó usted el Colectivo?

– Lo ha comprendido bien. Están en todas partes y en todos los campos el Colectivo les sirve de ayuda.

– ¿Cree usted que en esta nave podremos evitar tales cosas?

– Eso espero, de lo contrario pediré que me dejen en el primer planeta que encontremos en el camino.

– En ese caso, seremos dos.

– Y me impartirá usted cursos de matemática…

Lagrange y Newton

Fowler se unió al grupo en el salón de seminarios.

– Sabe usted, Bourbakof, sus seminarios son muy apreciados. La última vez Boissinière puso una cámara web. Así que todos pudieron verlo, incluso si estaban de turno en sus respectivos puestos.

– Es usted muy gentil.

– Estos pequeños divertimentos matemáticos, bastante formales, son bienvenidos para mantener la moral mientras nos dirigimos a quién sabe qué destino a bordo de esta carcacha propulsada por quién sabe qué.

Boissinière intervino:

– No subestime usted la presencia del propulsor. Sin él tendríamos aceleración cero y flotaríamos en los corredores como vulgares cosmonautas.

– ¡Dios nos libre! –protestó Fowler– . En el momento de nuestra partida, cuando cortó usted la MHD después de que saliéramos de la atmósfera y que pasamos a ingravidez durante algunas decenas de segundos, no logré volver a armar el sánduche que me estaba comiendo antes de ingresar a la nave.

Boissinière, muy ceremonioso, se volvió hacia Bourbakof.

– Estimado, como director del juego ¿no podría usted mostrarnos un Lagrangiano sacado de su sombrero para que podamos aplicar todas esas maravillas que nos evocó la última vez?

– Precisamente en eso pensaba.

Bourbakof, midiendo sus pasos, ocupó su lugar en el tablero, tomó la tiza y escribió:

$$L\left(r, \dot{r}, \cancel{\theta}, \dot{\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{A}{r}$$

Agregando: “A es una constante”.

Boissinière había tomado el lugar de Turyshev:

– No hay razón para que sean siempre los mismos quienes se divierten. Es mi turno de jugar esta carrera de obstáculos.

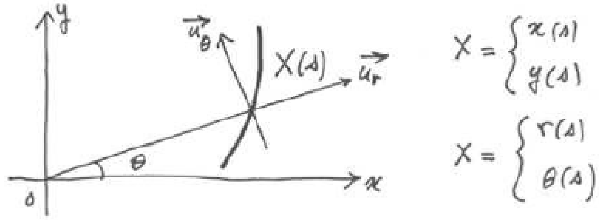
– ¿Qué dice usted? – anotó Bourbakof.

– Que su Lagrangiano corresponde a un espacio de dos dimensiones r y θ, y no depende de θ.

– ¿Y eso qué significa?

– Veamos, su jueguito parece estar jugándose ahora en coordenadas polares.

– Sí, se puede decir…



– El problema consistirá en construir dos funciones solución r(s) y θ(s). Pero asumo que trataremos de poner la solución bajo la forma de una función r(θ), o de su inversa θ(r). Si θ no está presente en su Lagrangiano, eso querrá decir que si dispongo de una solución r(θ), entonces toda otra función r(θ + α) también será solución.

– Es decir, tendremos una simetría.

– ¿Simetría con respecto a qué?..

– ¡Ah, siempre el mismo problema con los físicos! Para ustedes y para nosotros la palabra simetría no quiere decir lo mismo. Un físico sólo conoce las simetrías con respecto a una recta, a un plano, a un punto. Los matemáticos, en cambio, incluyen en la simetría otras cosas, como el simple hecho de ser invariante con respecto a una cierta acción.

– ¿Está usted refiriéndose a… la acción de girar?

– Así es. Se trata de una simetría de rotación.

– No comprendo muy bien…

Fowler intervino:

– Pero claro, mi estimado Hubert, el hecho de que algo se conserve por rotación es para un matemático una simetría. Ocurre lo mismo con las translaciones.

– ¿Ah sí?

– Los matemáticos tienen el toque para desviar las palabras de su sentido original. Para ellos es todo un deporte. Si Bourbakof continúa iniciándonos en su arte, ya se podrá usted dar cuenta de ello. ¿Por qué lo hacen? Podemos hacer sólo suposiciones. Es posible que de esa manera hayan querido establecer entre ellos y el resto de la humanidad una barrera de ininteligibilidad con el fin de proteger sus conocimientos, como lo hicieron los alquimistas de la Edad Media. En cualquier caso, es notablemente eficaz. Hasta pareciera que ni entre ellos mismos se entienden. Mi esposa Sarah, psiquiatra, decía que eran todos unos esquizofrénicos. Oh, perdone usted, Bourbakof, evidentemente no me refería a su caso.

Afortunadamente nadie pudo contenerse ante la risa de Fowler. Era un sujeto desprovisto de maldad. Y continuó diciendo en el mismo tono:

– ¿Bourbakof? Es un buen tipo, eso se nota enseguida. ¿La prueba? Todos hemos entendido lo que nos contó.

– ¡Hasta yo, biólogo, lo he comprendido! – agregó Turyshev.

Fowler levantó el índice, amenazante:

– No puedo decir lo mismo de los físicos teóricos. Esos rayan en el autismo. Y además son malvados y mal intencionados.

Se volvió hacia Boissinière:

– Puesto que es usted francés, ¿conoció alguna vez a Souriau?

– ¿No es el que publicó una obra llamada "Estructura de los sistemas dinámicos"? Creo que fue en el año 74. Nunca pude pasar de la primera página.

– Para eso es necesario entender el "souriano". Qué personaje ese. No solamente es un matemático, sino que además se fabricó un lenguaje matemático propio, como si las cosas no fuesen ya suficientemente complicadas.

Bourbakof se sintió obligado a intervenir.

– Es uno de los raros ejemplos de un matemático que abordó problemas de la física y aportó bastantes cosas novedosas. De hecho, repensó los fundamentos de la mecánica teórica.

– ¿La física teórica? – dijo Turyshev.

– No, nada que ver –protestó Fowler–. Siempre me encantó la definición que de ella daba Souriau.

– ¿Su definición de la física teórica?

– Sí. Decía que era la intersección de dos conjuntos: las matemáticas sin el rigor, y la física sin el experimento.

– Pero entonces –dijo intrigado Turyshev– ¿qué es la físico-matemática?

– Bourbakof nos lo explicará. Tenemos años-luz ante nosotros para abordar la cuestión.

Bourbakof sonrió.

– Propongo que volvamos al Lagrangiano.

Boissinière, retomando sus ideas sobre coordenadas polares, había escrito:

$$V_r = \dot{r} \qquad L = \frac{1}{2} V^2 + \frac{A}{r}$$
$$V_\theta = r\dot{\theta}$$

– El primer término de su Lagrangiano evoca la energía cinética de una partícula de masa unitaria.

– Continúe, escriba las ecuaciones de Lagrange…

Boissinière se dio a la tarea.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \dot r \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = r\dot\theta^2 - \frac{A}{r^2}$$

$$(1) \qquad \ddot r = r\dot\theta^2 - \frac{A}{r^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = r^2\dot\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right) = 0$$

$$(2) \qquad r^2\dot\theta = h$$

Bourbakof intervino.

– Vamos a resolver este sistema de manera más elegante utilizando la propiedad que establecimos al final de nuestra sesión anterior, según la cual existe una función E que permanece constante a lo largo del camino solución. Su turno, Boissinière.

– Retomo la definición de la función E, definida en el espacio de fases

$$E = \sum_i \dot x_i \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} - L$$

– Lo que me da:

$$E = \dot r \frac{\partial L}{\partial \dot r} + \dot\theta \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - L \quad \text{es constante}$$

$$= \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - \frac{A}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - \frac{A}{r} = \text{constante}$$

– Segundo truco. Vamos a pasar de r a su inverso u:

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

– Adelante, Boissinière.

– Bien, ahora reemplazo e integro:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

pero $r^2\dot{\theta} = h \longrightarrow \dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{\dot{r}}{h}$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = \frac{A}{r} + E$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + h^2u^2\right) = Au + E$$

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta} = -hu'$$

$$\dot{r}^2 = h^2u'^2$$

$$\frac{1}{2}\left(h^2u'^2 + h^2u^2\right) = Au + E$$

$$u'^2 + u^2 = \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}$$

$$u' = \pm\sqrt{-u^2 + \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}}$$

– Lo que nos da finalmente:

$$d\theta = \frac{\pm\, du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}}}$$

$$\theta = \pm\int\frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}}}$$

Boissinière retrocedió, contempló su cálculo y cruzó los brazos:

– ¿Y ahora qué hago?

– Haga un cambio de variable de modo que aparezca

$$\sqrt{-x^2+1}$$

– Eso le dará al integrar, recuérdelo usted, un arcocoseno.

– ¡Bourbakof, hace por lo menos veinticinco años que no hago cálculo integral!..

Bourbakof suspiró.

– Créame entonces y siga.

– Bueno… escribimos:

$$-u^2+\frac{2Au}{\hbar^2}+\frac{2E}{\hbar^2}=-\left(u-\frac{A}{\hbar^2}\right)^2+\frac{A^2}{\hbar^4}+\frac{2E}{\hbar^2}$$

– Lo que nos lleva a poner:

$$x=u-\frac{A}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad c^2=\frac{A^2}{\hbar^4}+\frac{E}{\hbar^2}$$

– Lo que convierte nuestra integral en:

$$\theta=\pm\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+c}}$$

– Un segundo cambio de variable:

$$v=\frac{x}{c} \qquad dx=c\,dv$$

– Nos da finalmente:

$$\theta=\pm\int\frac{dv}{\sqrt{-v^2+1}}$$

$$\theta=\mathrm{Arcos}(v)=\mathrm{Arcos}\left(\frac{u}{c}\right)$$

– Sea por último:

$$\cos\theta = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{r} - \frac{A}{h^2}\right)$$

– ¿Y eso qué es?

– Es la representación de una cónica, en coordenadas polares.

– Ah sí, lo recuerdo vagamente. Así que le creo una vez más.

Y llegó la hora del café, que llevó al grupo alrededor de la inefable máquina en la nave. Estaban todos, salvo dos: Turyshev, que quería saberlo todo y se hizo explicar por qué (Apéndice 3) esa ecuación representaba una cónica. Cuando todos se hubieron reacomodado, fue él quien hizo la pregunta clave:

– Bien. Bourbakof nos ha sacado, como conejo del sombrero, un Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{A}{r}$$

La variable es el tiempo t. Se trata entonces de la mecánica, de la dinámica de un punto material. El cálculo nos da trayectorias en forma de cónicas. Pregunta: ¿cuál es la “dinámica subyacente?”.

– Ya voy a eso –dijo Bourbakof–, ya voy. Reconsideremos la primera de las dos ecuaciones de Lagrange:

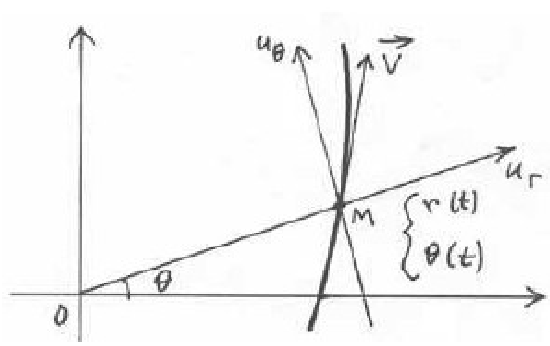
$$(1) \qquad \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{A}{r^2}$$

– Que vamos a escribir más bien de esta manera:

$$(1) \qquad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{A}{r^2}$$

Esto quiere decir algo. Nos queda por saber qué. El problema es encontrar el significado del primer miembro.

Tracemos la trayectoria en coordenadas polares:



– $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_q$ son vectores unitarios (radial y “perpendicular”). **V** es el vector velocidad.

$$\vec{V}\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\,\dot{\theta} \end{cases} \qquad \vec{u_r}\begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{u_\theta}\begin{cases} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

– Calculemos el vector aceleración:

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\,\frac{d\vec{u_r}}{dt} + (r\,\ddot{\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{u_\theta} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u_r}}{d\theta} = \vec{u_\theta} \qquad \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = -\vec{u_r}$$

$$\vec{\Gamma} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + (r\,\ddot{\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{u_\theta} - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

$$\vec{\Gamma} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

– Tenemos una componente radial y una componente "perpendicular". Y es aquí donde hacemos intervenir la segunda ecuación de Lagrange, derivada:

$$(2)\ r^2\,\dot{\theta} = h \ \rightarrow\ r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = 0$$

– Se trata entonces de un movimiento con aceleración central. Se sabe que los movimientos con aceleración central se sitúan en planos, que para el caso son cónicas que corresponden a ***trayectorias keplerianas***. La cantidad:

$$r^2\dot{\theta}$$

no es más que la componente del momento cinético ortogonal al plano de la trayectoria, y en un movimiento con aceleración central se conserva:

– Eso nos permite también hallar una expresión para la constante A:

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{A}{r^2}\,\vec{u_r} = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{u_r}$$

y reescribir el Lagrangiano en la forma:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) + \frac{GM}{r}$$

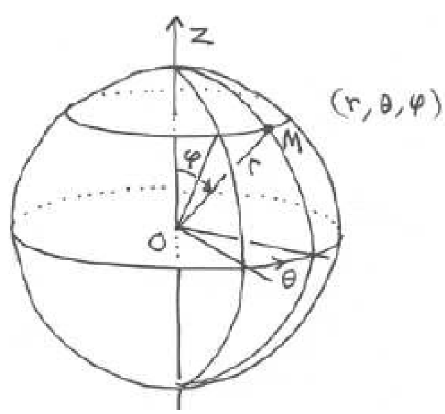
– Ahora vayamos a la expresión de la energía E:

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{A}{r} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r}$$

De acuerdo con la definición de la energía potencial, podemos ver que en estos problemas de mecánica, el escalar E representa:

E = Energía cinética + Energía potencial

– Vemos así que un problema de mecánica ha sido formulado por entero en términos de un Lagrangiano. Dicho esto, hemos permanecido en 2d. Pero Kepler es 3d. Así que reformulemos todo con una tercera dimensión. Tendremos una tercera coordenada φ correspondiente a las coordenadas esféricas clásicas:



– Escribimos entonces el Lagrangiano en 3d y las ecuaciones de Lagrange que se desprenden:

$$L = \frac{1}{2}v^2 + \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{GM}{r}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\dot{r}\right) = r\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\sin^2\varphi\,\dot{\theta}\right) = r^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2$$

– ¿Cómo mostrar ahora que las trayectorias se inscriben en planos? Para eso, vamos a partir de una solución particular:

$$\left\{\begin{matrix} \dot{\varphi} = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right. \longrightarrow \left\{\begin{matrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right. \left\{ r(\theta) \right.$$

– La solución es en todo idéntica a la que acabamos de construir. Pero podemos considerar a los valores de la izquierda como condiciones iniciales del problema para la resolución del sistema de dos ecuaciones diferenciales. Desembocaremos entonces en la misma solución gracias al concepto de unicidad: la solución de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales está completamente determinada por la elección de las condiciones iniciales. La solución construida con la ayuda de esa elección de condiciones iniciales no diferirá en nada de la de la derecha. Por lo tanto, la trayectoria es plana. Se obtiene así una familia de cónicas que tienen todas como origen uno de sus focos. La simetría esférica del problema hace que el conjunto de todas las soluciones posibles se deduzca de ella. Todas las trayectorias se situarán en planos que contienen al punto O en el que se encuentra localizada la masa M.

Viraje en curva cerrada

Los seminarios tuvieron que interrumpirse durante varios días. La nave experimentó dificultades técnicas que tuvieron preocupado a Boissinière todo el tiempo. Ciertamente, la nave era un gran bricolaje, una mezcla de alta tecnología con elementos reciclados. Una de las cosas que hizo perder mayor tiempo a todos fue la tubería. Muchos de los tripulantes tenían, entre otros, los baños de sus cabinas taponados. También el sistema de aire acondicionado dio bastante trabajo a los técnicos.

En medio de todos esos problemas nadie se había percatado realmente que ya habían dejado atrás el sistema solar, con una velocidad creciente debida al hecho de que el artefacto continuaba su rumbo hacia las profundidades del cosmos con una aceleración de medio g producida por su misterioso propulsor. Se pasó por Plutón a los diecisiete días de la partida, y para entonces la nave había desarrollado una fantástica velocidad de 7800 km/s.

Bourbakof, que no veía cómo habría podido ser de ayuda durante todo ese tiempo, se sumergió en las obras completas de Alexandre Grothendieck, uno de los fundadores de la geometría algebraica. No se cruzaba con Boissinière más que a la hora de la comida, pero no osaba interrumpirlo cuando estaba conversaba con sus técnicos. Ese día fue él quien vino a sentarse a la mesa del matemático.

– Tenemos un problema.

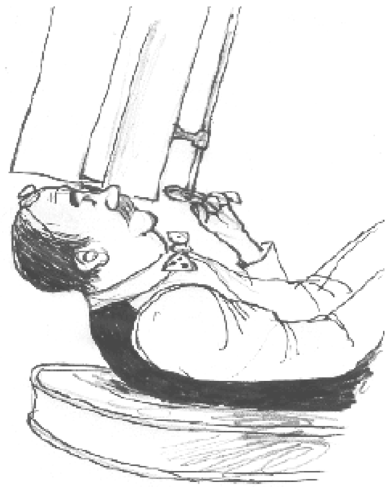
– ¿Otra vez la tubería?

– No, es algo mucho más serio. Le voy a mostrar.

Habiendo aprobado el excelente café producido por la percoladora a bordo, Bourbakof siguió a Boissinière. Entre laberintos de corredores y escaleras, se dirigieron a la parte frontal de la nave. Allí se había dispuesto de una escotilla que permitía realizar observaciones con la ayuda de un telescopio equipado de un espejo.

– Le presento a mi amigo Picard, Bertrand Picard.

El sujeto estaba recostado en un colchón, echado hacia atrás.



Se retiró de su puesto, saludó a Bourbakof y lo invitó a tomar su lugar. Este acercó su ojo al ocular.

–Entonces –dijo Boissinière–, ¿qué es lo que ve?

– Diría que es nieve.

– Casi.

Intrigado, Bourbakof se apartó de su puesto.

– Pues si no es nieve, ¿entonces qué es?

Picard terminó de limpiar sus lentes con una lentitud calculada.

– Amigo mío, eso es lo que queda del onceavo planeta.

– Explíquese usted.

– Todo eso nos remite al origen del sistema solar. Durante mucho tiempo hemos creído que el sistema de planetas que orbitan alrededor del Sol correspondía a lo que podíamos observar. Es divertido constatar cómo el ser humano no tiene más remedio que aferrarse a sus conocimientos del momento. No vemos hoy día más que planetas que tienen, a excepción de Mercurio, trayectorias cuasi circulares. Los astrofísicos dedujeron entonces que se trataba de una ley general de evolución.

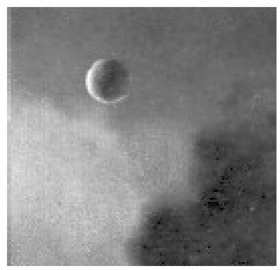
– ¿Cómo se formó el sistema solar?

– Es difícil decirlo, y es un tema de por sí apasionante. El descubrimiento de los primeros exoplanetas hizo explotar en fragmentos las ideas preconcebidas por los astrofísicos, que pecaban de “heliocentrismo”. Se descubrieron así sistemas, centrados en otras estrellas, en los que un exoplaneta orbita siguiendo una trayectoria elíptica con una fuerte excentricidad. Se trata de planetas muy masivos, de “grandes Júpiteres”, de lo contrario habría sido muy difícil poner en evidencia su existencia. Pero hasta ahora nadie esperaba en absoluto que un planeta siguiera una trayectoria “cuasi cometaria”. De hecho, cuando los planetas se forman, constituyen lo que se denomina un “sistema colisional”.

– ¿Esos planetas entran en colisión?

– Sin duda eso debe ocurrir. Los grandes planetas pueden así incrementar su masa, recogiendo todo lo que está a la deriva y "haciendo limpieza". Pero por "colisión" también hay que entender la interacción binaria, por "efecto de honda". Bien saben ustedes que nos servimos de este efecto para acelerar las sondas espaciales y darles velocidad suficiente para que puedan abandonar el sistema solar. Ahora bien, lo que es válido para una sonda puede serlo también para un planeta. Cuando se forma un sistema planetario, todo puede ocurrir. Algunos protoplanetas pueden devorar a otros. Y miniplanetas pueden verse acelerados por efecto de honda hasta el punto de superar la velocidad de escape con respecto a su estrella. Entonces simplemente abandonan el sistema, y continúan viviendo su vida así, solos en la inmensidad.

– ¿Acaso no se han descubierto recientemente planetas solitarios que parecen "flotar en el espacio", lejos de cualquier estrella?



– Exacto. En mi opinión, se trata de planetas que se han visto eyectados de su sistema solar de origen por efecto de honda. Pero si el efecto de aceleración es moderado, el sistema, a causa del efecto de honda, puede tener uno o más objetos cuyas trayectorias pueden presentar grandes excentricidades. En lugar de participar en el concierto general y de venir a tomar sabiamente su posición en una órbita correspondiente a una resonancia alrededor de la estrella, esos objetos pasan la mayor parte de su tiempo lejos de ella, en los "grandes suburbios". Periódicamente irrumpen con velocidades comparables a las de los cometas, unos 40 km/s. A ese ritmo no permanecen mucho tiempo en los sistemas planetarios como para intercambiar energía con los planetas ya "domesticados" y posicionados en órbitas "regulares", cuasi circulares, situadas cerca del plano de la eclíptica. Durante muchos años nos preguntamos si nuestro sistema solar pudo poseer un objeto así. Si el periodo de esos planetas es de miles de años es posible que en el momento de su último paso la astronomía haya estado aún en su primera infancia, y que los humanos no hayan podido advertir la diferencia entre la intrusión de un planeta adicional y el paso de un cometa. Pero lo que acaba de ver parece aportarnos una respuesta inesperada.

– ¿En qué forma?

– Supongamos que un planeta haya sido eyectado en el momento del nacimiento del sistema solar, hacia una trayectoria muy excéntrica. Periódicamente suele volver a él, a gran velocidad. Lo que acaba usted de observar constituye, en mi opinión, los restos de un planeta que habría sobrepasado el "límite de Roche" de uno de los grandes objetos presentes en nuestro sistema.

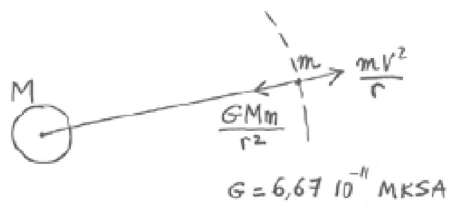
– ¿Qué entiende usted por límite de Roche?

– Es un concepto muy simple, pero fundamental en astronomía. Bien sabe usted que los objetos del cosmos nos parecen "sólidos", y empleo la palabra en el sentido de "resistentes". De hecho, su cohesión se debe mayormente a la fuerza de gravedad. Gracias a ella las masas que forman un planeta se mantienen unidas.

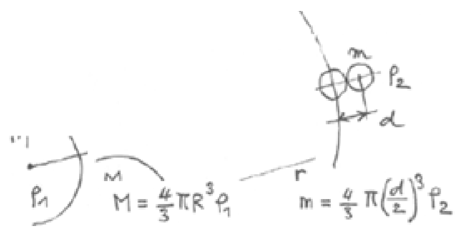
Tomemos por ejemplo un cometa. Se emplea a menudo la expresión “bola de nieve sucia”. Como la fuerza de gravedad que asegura su integridad es débil, es verosímil pensar que el primer sujeto que pusiera su pie sobre dicho objeto tendría la impresión de marchar sobre una pista de esquí recubierta de nieve en polvo. Los planetas pueden parecernos más compactos, pero esa compacidad es relativa. ¿Compacta con respecto a qué? Ser compacto quiere decir poder resistir a una fuerza de desprendimiento o de cizalla.

– ¿Pero de dónde viene, por ejemplo, esa fuerza de cizalla?

– Cuando un objeto orbita alrededor de una masa M, su velocidad orbital depende la distancia a su centro geométrico. En una órbita circular de radio r, la fuerza centrífuga equilibra la fuerza de gravedad. Es decir que:



– Imaginemos ahora que ponemos en órbita alrededor de un planeta de masa M bolas de petanca de masa m. Estas van a atraerse mutuamente. Pero si se las supone en contacto, es decir si sus centros están a una distancia d igual al doble de sus radios, y dispuestas como se indica en la figura, no podrán estar todas en equilibrio en una órbita estable:



– Supongamos que una de las dos bolas se mueve en una órbita estable a una distancia r del planeta. ¿Podrá retener a una segunda bola, situada en una órbita r’ = r + δr = r + d bajo el efecto de su propia fuerza de gravedad? Sea ρ_1 la densidad del planeta y ρ_2 la de las bolas de petanca. Diferenciamos y obtenemos:

$$\delta\left(\frac{GMm}{r^2}\right) = \frac{2\cancel{G}M\cancel{m}}{r^3}\,d \simeq \frac{\cancel{G}m^{\cancel{2}}}{d^2}$$

$$\frac{2}{r^3}\left(\cancel{\frac{4}{3}\pi}\right)R^3\rho_1 \gtrsim \cancel{\frac{4}{3}}\pi\ \frac{\rho_2}{8} \qquad \frac{r^3}{R^3} \gtrsim 16\,\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

De donde se sigue:

$$\boxed{r_{Roche} \simeq 2,52\,R\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}}$$

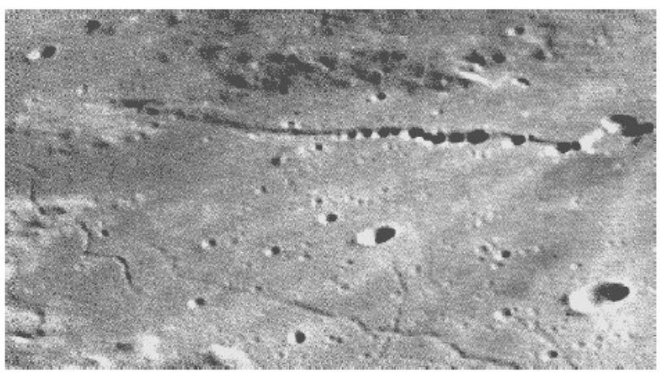
– El radio ecuatorial de Saturno es de 60.000 km. Su densidad es de 0,69. Sus anillos están formados de hielo de densidad 1. El límite de Roche de Saturno se sitúa a 180.000 km. de su centro. Los anillos corresponden a distancias que van de 121.000 a 141.000 km (éste último fue descubierto por la sonda Pioneer 11).

– Por lo tanto se ubican al interior del límite de Roche de Saturno.

– Exacto.

– Así, esos anillos podrían corresponder a los restos de un satélite que habría penetrado en una zona en la que los efectos de marea habrían dado al traste con todo el conjunto de masas, cuya coherencia estaba asegurada únicamente por la fuerza de gravitación.

– Es muy posible que así haya sido. Tenemos en principio “ante nuestros ojos” un ejemplo de fragmentación de un objeto a su paso por el interior del límite de Roche de un planeta: el famoso cometa de Schumaker-Lévy, que se precipitó hacia Júpiter en julio de 1994. Se había descubierto en 1993 una serie de objetos en órbita elíptica muy alongada, muy cerca del apogeo, que correspondían aparentemente a un objeto capturado por el campo gravitacional del planeta gigante. El análisis de su trayectoria indicaba que en el perihelio el objeto había pasado muy cerca de aquél y había sido, lógicamente, fragmentado en numerosos detritos por efecto de marea y por efecto de la cizalla. Estos detritos habrían continuado su curso y cuando los astrónomos Schumaker y Lévy los detectaron, los cálculos mostraron que los fragmentos iban a impactar al planeta en julio del año siguiente. Eso me hace pensar en una muy brillante idea que tuvo una de mis asistentes. La Luna está salpicada de sucesiones de cráteres, como se puede apreciar en esta foto:



– Nadie ha podido interpretar jamás esas formaciones. Se ha sugerido que podrían corresponder a la captura de un cometa que se habría fragmentado durante su ingreso al límite de Roche de la Luna, y que durante un primer paso los detritos, impactando enseguida la superficie lunar, habrían producido esas marcas en forma de rosario. Es sorprendente que generaciones enteras de astrónomos hayan tenido durante más de un siglo esas fotos ante sus ojos sin que la idea se le haya ocurrido a ninguno de ellos, incluyéndome a mí, lo admito.

– Volvamos a Saturno. Todos sus satélites están entonces situados necesariamente por fuera de su límite de Roche, siendo el más próximo Encelado, que está a 238.000 km del centro del planeta. Titán, el más conocido por ser el más masivo y por poseer una atmósfera, está cinco veces más lejos.

– Volviendo a lo que acabo de ver con su telescopio, eso significaría que esas pequeñas motas serían los restos de un onceavo planeta del sistema solar que se habría desintegrado en una miríada de fragmentos durante su paso por el interior de la esfera de Roche de alguno de los otros planetas.

– Puede ser. Se puede pensar también en otro escenario: que no haya existido nunca un onceavo planeta.

– ¿Qué quiere usted decir?

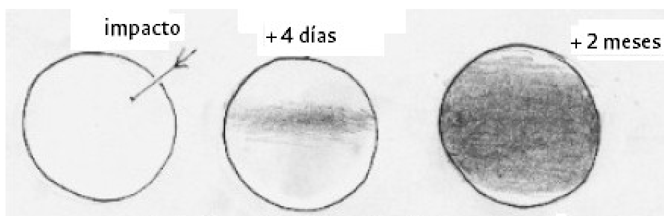
- Pues bien, que el posicionamiento de esa masa en una órbita de gran excentricidad y su fragmentación en una multitud de detritos hayan sido fenómenos simultáneos.

– Es por eso que este "onceavo planeta" no habría sido detectado por los astrónomos. No es más que un enjambre de objetos semejantes a cometas.

– Que actualmente se dirigen hacia el centro del sistema solar.

– Un momento, Picard, ¿pero esas cosas son extremadamente peligrosas, no?

– ¡Ya lo creo! Los bloques más grandes tienen unos veinte kilómetros de envergadura. Piense en el cometa de Halley. Si una sola de esas cosas llega a impactar la Tierra, hay dos opciones. Lo que cuenta no es la masa del objeto sino su energía cinética. Cuando penetra en la atmósfera terrestre a unos cuarenta kilómetros por segundo, delante suyo se forma una onda de choque. El aire es llevado a alta temperatura. En el momento del impacto, si éste se produce con el suelo, la velocidad es tal que el soporte de tierra o de roca se transforma al instante en polvo de una micra de diámetro. Toda la energía cinética del cometa se transforma en calor. Se produce entonces un ascenso que lleva esos miles de millones de toneladas de polvo hacia la atmósfera. Las corrientes en chorro los dispersarán convirtiéndolos en un enorme velo opaco.



invierno nuclear (duración: 18 meses)

– ¿Cómo así opaco?

– Piense usted que luz durante una luna llena es suficiente para hacer marchitar los vegetales y provocar un descenso de la temperatura promedio entre veinte y treinta grados. El descenso puede llegar a ser más importante en las zonas continentales que están lejos de los océanos, que son reguladores térmicos. Es el "invierno nuclear", término acuñado por el meteorólogo ruso Vladimir Alexandrov a comienzos de los años ochenta. La velocidad de descenso de los granos de polvo es tan pequeña que el retorno a la normalidad podría tomar, como calculó Alexandrov, entre un año y dieciocho meses. Tiempo suficiente para provocar un drástico retroceso en la biósfera, matando la mayor parte de las especies vegetales y animales. Es probable que eso se haya producido varias veces después de la aparición de la vida sobre la Tierra, de manera más o menos pronunciada.

– ¿Y cuál es la segunda opción?

– En esa ni siquiera pensamos. Es el impacto en toda la mitad del océano. En esas condiciones el aporte de energía provoca el ascenso hacia la alta atmósfera de vapor de agua que vuele a caer enseguida en forma de cristales de hielo, o en lluvia según la latitud. Globalmente se trataría de un verdadero diluvio.

– Durante… cuarenta días y cuarenta noches.

– Con grandes ascensos del nivel de las aguas en muchos lugares.

– El diluvio bíblico pudo producirse como consecuencia del impacto de un cometa en el océano. Apasionante. Y a propósito, ¿cómo está nuestra trayectoria con respecto al enjambre de cometas?

– ¡Por desgracia, amigo mío, vienen directo hacia nosotros!

– A más de siete mil kilómetros por segundo. ¿Boissinière, podemos virar para evitar esos granizos?

– No, ni siquiera si orientamos nuestro propulsor transversalmente. Vamos demasiado rápido y estamos demasiado cerca. Picard me previno cuando detectó esos objetos justo en el eje de nuestra trayectoria. No teníamos cómo embarcar a bordo el telescopio Hubble. Este pequeño telescopio era mejor que nada. En condiciones normales, Jacobson podría darnos indicaciones para eventuales correcciones de la trayectoria. Debería estar al tanto del percance. Si hubiéramos sido avisados hace una semana, habría sido posible evitarlo. Pero ahora vamos directo hacia el enjambre de cometas.

– ¿Y tenemos chance de poder pasar incólumes a través de ellos?

Picard le mostró una foto a Bourbakof.

– La tomé cuando estaba en posición. Se puede ver que hay decenas de miles de bloques, de todos los tamaños. A través del ocular no vimos más que los más grandes, que deben tener algunas decenas de kilómetros, pero los hay de tamaños más modestos, evidentemente mucho más numerosos. A la velocidad a la que vamos, si llegamos a toparnos con un granizo del tamaño de un puño, atravesará la nave de lado a lado.

– ¡Auch!..

– Cuando pasamos por Júpiter, tuve un último contacto con Jacobson – comentó Boissinière.

– ¿Pudo usted discutir con él?

– ¡Bromea usted! A la altura de Júpiter, la Tierra está a casi dos años-luz.

– Ah sí, es cierto…

– En ese momento recibí un mensaje de Jacobson dándome instrucciones, pero la comunicación se interrumpió. Nuestras antenas exteriores fueron puestas fuera de servicio por una erupción solar. Ese fue el asunto que no previmos.

– ¿No logró usted repararlas?

– Se requerían salidas fuera de la nave. Adquirimos algunas viejas escafandras en el museo de Baïkonour, pero no logramos ponerlas a punto.

– En suma, estamos fritos. ¿Qué hacer entonces? ¿Jugamos una partida de cartas antes de la granizada?

Boissinière se puso el dedo índice en la frente.

– En mi despacho hay un sobre azul que acompaña las instrucciones de montaje del propulsor que Jacobson trajo en el Ilyushin. En él se lee: "para abrir cuando hayan salido del sistema solar".

– ¡Pero si ya salimos del sistema solar!

– ¡Entonces vamos a abrirlo!

El despacho de Boissiniêre estaba lleno cuando abrió el sobre. Todos estaban en silencio. Los que no habían encontrado puesto esperaban en el corredor. No tenía sentido esconder el contenido a los miembros de la tripulación. En principio, todos lo que habían abordado la nave estaban dotados de sangre fría, y entrar en pánico no les habría servido de gran cosa. Se pudo haber oído el sonido de una mosca volando cuando el francés pidió la palabra. Se rascó la garganta.

– Esto es lo que dice:

Estimado Boissinière,

Si les sugerimos construir esta nave y abandonar el sistema solar con voluntarios, no fue para pasar medio siglo encerrados en el artefacto antes de poder alcanzar el sistema más próximo. Cuando construimos los sectores correspondientes a sus planos estructurales, modificamos a sus espaldas los elementos parietales. No me juzgue por haber actuado así, pero es que los problemas habrían sido tales que preferimos tomar el máximo de precauciones. Así que lo que se halla en el recubrimiento exterior de la nave es lo que les va a ayudar. Todo ello demanda una alimentación de energía consecuente. En el anexo encontrarán los detalles del procedimiento de conexión de un condensador, solidario con el generador y con los nuevos elementos. Cuando hayan realizado todas las conexiones, corten la propulsión durante algunos segundos antes de iniciar la operación, luego la pueden volver a conectar. En cuanto a lo que sucederá en ese momento, los remito a mi anterior mensaje de radio. No será otra cosa que la aplicación práctica de lo que les expliqué en ese entonces. Gracias a las correcciones de la trayectoria que les pedimos realizar, deben ustedes ver por los costados muchos paquetes de bloques de hielo que se dirigen hacia nosotros. Ahora *comprenderán por qué quisimos jugarnos dos cartas a la vez: darles la ocasión de superarlos, y tratar de neutralizar, con la ayuda de nuestros amigos, los bloques de hielo que eventualmente cruzarán la trayectoria de la Tierra. Ánimo y buena suerte.*

Sven

Se produjo un cierto alboroto.

– ¿Qué mensaje de radio?.. ¿Qué es esa historia de corrección de la trayectoria… y de bloques de hielo?

Boissinière pidió silencio.

– El mensaje del que habla es el que comencé a captar y que fue interrumpido por la maldita erupción solar. Los bloques de hielo corresponden a los restos de un planeta que van en picada hacia el corazón del sistema solar. Picard les explicará todo eso por el intercom. El problema es que como no pudimos realizar a tiempo la corrección de trayectoria, vamos directo hacia esa nube de granizos que se mueven a siete mil kilómetros por segundo. En cuanto al resto, no sé más que ustedes. Quiero a doce mecánicos voluntarios en la sala de máquinas dentro de diez minutos. Los otros, a su posición o a sus cabinas. ¡Y abróchense los cinturones!

Bourbakof miró a Fowler.

– Amigo mío, son los gajes de la astrofísica. Y eso que estamos en un periodo solar de calma. Así que simplemente asumo que hoy no es nuestro día…

Salvo los doce que acompañaron a Boissinière, todos volvieron a sus respectivas cabinas. Se tendieron en sus literas y se abrocharon sus cinturones. En la sala de máquinas, Boissinière daba órdenes a los mecánicos. Estos usaban varios aparejos para posicionar un conector formado por miles de cables superconductores frente a la toma de conexión que descubrieron después de quitar una tapa atornillada que la cubría. Cuatro horas más tarde todo estaba listo. Boissinière alcanzó el corredor seguido de un mínimo de gente.

– ¿Me escucha, Picard?

– Sí.

– Me gustaría que tome usted posición en el telescopio.

Y pasó al intercomunicador general:

– Bien, todos escuchen. Voy a cortar el propulsor y vamos a estar en estado de ingravidez durante un tiempo breve. Después de eso, que sea lo que Dios quiera.

A Fowler esta forma de expresarse, que había visto en las grandes revistas de Nueva York cuando era niño, le pareció un tanto desagradable. Bourbakof, por su parte, trató de concentrarse en un teorema al azar. En el corazón de la nave, sobre el puente, Boissinière puso en marcha el operativo. Tuvo la impresión de que todo se apagaba de repente.

¿Era posible que hubiese algo mal?

– Picard ¿me oye usted?

– Sí. Hay algo extraño. No le he quitado el ojo al ocular de mi telescopio. Pues bien, los bloques han desaparecido…

– ¿Cómo que han desaparecido?

– Se volatilizaron. No veo ninguno. Pero lo más sorprendente es que las estrellas parecen haberse apagado también. No veo a ninguna brillar.

– ¿Qué?

– Boissinière se había habituado a la oscuridad. Tuvo la sensación de estar siendo víctima de alucinaciones y se frotó los ojos. Quería estar seguro de lo que veía.

– Bourbakof ¿me oye?

– Sí, le oigo.

– Usted, que no es tan sensible a la ingravidez, ¿podría tratar de venir al puente?

– Lo intentaré.

– ¿Tiene usted corriente en su cabina?

– Sí, hay luz. Todo parece normal, el aire acondicionado y el resto también.

– Bien…

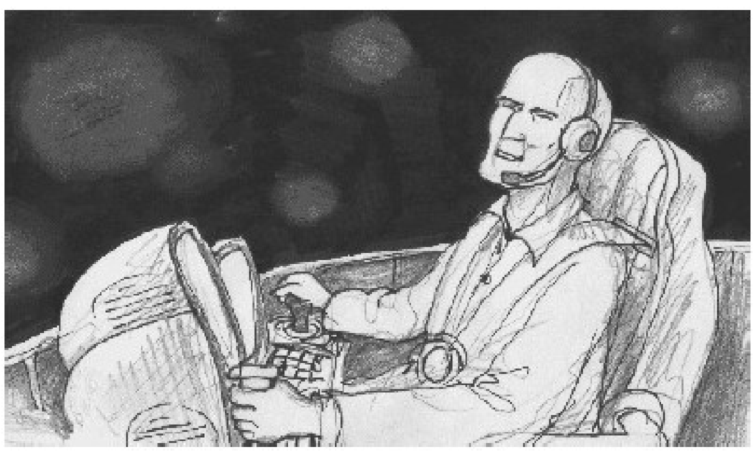
Bourbakof atravesó volando los corredores. Finalmente era fácil. Bastaba con apoyarse a las paredes, apuntar correctamente y lanzarse.

Logró atrapar la puerta de ingreso que llevaba al puente. Tomar una escalera en forma de caracol en estado de ingravidez le pareció una operación singular, pero lo logró aferrando los peldaños con las manos. Su rostro estaba un tanto congestionado por el flujo de sangre. Finalmente alcanzó a Boissinière, del que adivinó la silueta, aferrado y atado a su silla, frente a su consola.

– Bien. Puede usted sentarse allá.

Bourbakof se sentó y se aseguró.

– Ahora dígame, ¿qué es lo que ve?



– Especies de nubes rojizas, aproximadamente esféricas. Se diría que navegamos en un inmenso banco de medusas color sangre de vaca.

– ¿Así que también usted las ves?

– Sí, ¿y entonces?

– ¡Bourbakof, las estrellas han desaparecido! Lo que vemos es lo que hay en el exterior de la nave.

– ¿Estamos ahora en el interior de la nube de bloques de hielo?

– No, eso debe estar aún lejos y adelante. Picard, ¿nos escucha?

– Desde el comienzo. También yo veo esos objetos.

– Demonios, ¿qué es eso?

– Sé lo mismo que usted, pero creo que en relación a lo que veía hace unas horas hay un gran avance, ¿no es así? Ya no vamos directo hacia el enjambre de cometas y personalmente no puedo más que alegrarme por ello.

– ¿Cree usted que el sistema instalado por Jacobson nos pudo haber permitido un viraje en ángulo recto?

– Si así fuera, y si lograra usted apuntar en la dirección correcta, debería yo volver a tener los bloques en la visual. De cualquier modo, tome usted un punto de referencia: tenemos el enjambre delante y el Sol detrás.

Boissinière aferró la palanca y dio vuelta a la imagen esférica, tratando de ubicar la imagen del Sol.

– Picard, hay algo que no cuadra. No logro encontrar el Sol. No sé cuál es nuestro rumbo. No veo más que esas especies de medusas gigantes. Y el sistema de visualización parece estar funcionando bien.

Para su sorpresa, había olvidado restablecer la propulsión. Apenas lo hizo, Fowler volvió a caer sobre su colchón. Boissinière convocó a una docena de personas en el puente, en el que ya no cabía ni una más.

– Bueno, ¿ven ustedes lo que yo veo? Estamos navegando en un banco de medusas.

Manipuló esta vez con suavidad la palanca de mando y todos pudieron explorar la nueva bóveda celeste. Algo inquietó a Fowler.

– Mire, Boissinière, por una parte el color no es uniforme, y por la otra hay dos manchas oscuras que parecen ocupar posiciones diametralmente opuestas.

Boissinière hizo dar vuelta al decorado. Fowler apuntó con el dedo a una región de ese extraño cielo.

– ¡Miren allá! El color rojo se ensombrece en el borde de ese gran sector oscuro, de forma casi circular. ¿Puede usted ahora, Boissinière, mostrarnos la imagen diametralmente opuesta?

Con una presión del dedo la nueva región apareció, organizada también alrededor de una mancha oscura.

– Observen cómo cambia el color de las nebulosidades que parecer bordear ese abismo allá. El color sube en el espectro, hasta el violeta. Luego todo desaparece.

– ¿Qué quiere usted decir? ¿Acaso estamos dentro de un agujero negro, o qué? – dijo uno de los técnicos.

Fowler enfatizó sus palabras pausadamente.

– No sé ni dónde estamos, ni a través de qué navegamos, pero pienso que esas variaciones de color se deben al <u>efecto Doppler</u> (Apéndice 2).

Boissinière abrió los ojos.

– ¿Es consciente de lo que dice? Si así fuera, entonces la parte irisada que cambia al violeta bordea una región hacia la cual nos dirigimos a velocidad relativista. Nuestro rumbo es hacia el centro de ese gran vacío.

Dibujó esa región con una cruz luminosa y la posicionó con la ayuda de un joystick.

– Y la región diametralmente opuesta es la que dejamos atrás. Al menos sabemos a dónde vamos. Picard, con su espectrómetro debería usted poder decirnos a qué velocidad vamos.

– Sí señores, nuestro "Mach lumínico" es de 0,87.

Se produjo conmoción entre los presentes.

– Quiere decir que el sistema de Jacobson nos hizo pasar de 7800 a 260.000 kilómetros por segundo. Pero incluso en esas condiciones, hay algo que no comprendo: ¿dónde están las estrellas? ¿Dónde está la Vía Láctea? No tenemos el menor punto de referencia, como si de pronto hubiésemos tomado un corredor del espacio-tiempo. ¿Qué piensa usted, Bourbakof?

– Todo es evidentemente desconcertante y sólo podemos aventurar especulaciones. A fines de los años sesenta Andrei Sakharov sugirió que el universo podía ser "doble" y poseer dos "caras". Incluso a fines de los años ochenta un francés escribió unos trabajos. Si recuerdo bien su singular obra, hemos pasado a una especie de "universo gemelo", estructurado de manera diferente y sin estrellas.

– En todo caso, enhorabuena. La maniobra nos permitió escapar de ese condenado enjambre de cometas. Estamos ahora como "sumergidos".

– Se puede decir así…

– ¿Pero por qué a semejante velocidad, sin la menor impresión de aceleración?

– Lo ignoro.

Boissinière intentaba ser pragmático.

– Resumamos la situación. Jacobson nos dejó equipar nuestra nave con un propulsor que nos permitió salir del sistema solar en menos de tres semanas. De cualquier forma, incluso con el propulsor más poderoso que podamos imaginar, nos habríamos enfrentado a la barrera que representa la velocidad de la luz. Cuanto más nos acercásemos a la velocidad c, más habría aumentado la masa inercial de la nave. Nuestra velocidad habría terminado por alcanzar casi los trescientos mil kilómetros por segundo. Considerando que el sistema más próximo a nosotros, Alfa Centauro, está a 4,2 años-luz del Sol, nos habríamos visto embarcados en un viaje de unos diez o quince años, algo más si se quiere. Ahora bien, en nuestras conversaciones preliminares, Jacobson evocó tiempos de viaje mucho más cortos, que habrían implicado que superáramos la velocidad de la luz. Eludió las cuestiones que le formulé por problemas técnicos más terrenales diciendo sin cesar: "Llegado el momento, se lo explicaré".

– Y cuando el momento llegó –intervino Turyshev–, la erupción solar dio al traste con la comunicación…

Fowler tomó la palabra:

– Bueno. Imaginemos que el suntuoso dispositivo con el que Jacobson, a nuestras espaldas, dotó a la nave, nos permite ahora realizar un crucero relativista a través de este… universo gemelo.

Se volvió hacia Bourbakof.

– ¿Es así que lo llamaba Sakharov?

– Sí, universo gemelo. Es el nombre que le dio.

– Asumo entonces que lo que vemos, a distancias que no podemos estimar, son inmensos conglomerados de materia gemelar que, de acuerdo con su color, deben estar a una temperatura del orden de mil grados.

– Sí, podemos suponerlo.

– En todo caso, ese dispositivo nos permitió salvarnos de un mal paso. Si suponemos que este asunto no modifica nuestro rumbo, entonces estamos a punto de atravesar sin problemas el enjambre de cometas.

Se volvió hacia Boissinière:

– Asumo que Jacobson ha previsto un modo de poder volver a la superficie. ¿O estamos condenados a vagar eternamente por estas catacumbas del universo?

– Para volver a nuestro universo de partida, basta con poner en marcha el sistema por segunda vez.

– ¡Tengan cuidado! Incluso a 260.000 km/s puede pasar que aún estemos en plena mitad de ese condenado montón de granizo. Mejor valdría esperar antes de reemerger a nuestro universo, ¿no creen? ¿Qué piensa usted, Picard?

El astrónomo se concentró.

– Tengo la impresión de estar en un submarino tratando de hacer una estimación puntual. Aparentemente más allá de esos restos de planeta, y dándonos un buen margen para poder dejar atrás el cinturón de Kuiper y la nube de Oort, eventual "reservorio de cometas" aunque menos denso que este enjambre, pienso que estaría bien si esperamos unas cuatro o cinco horas.

– 0k –dijo Boissinière–. ¿Qué tal si vamos a desayunar mientras tanto?

Siguiendo los consejos de Picard, Boissinière activó el procedimiento inverso, siempre luego de haber interrumpido el propulsor. Para la satisfacción de todos, las estrellas y la Vía Láctea reaparecieron de nuevo. Boissinière hizo girar la pesada nave de manera que Picard pudiera apuntar bien su telescopio desde su silla.

– ¿Ve usted el enjambre?

– No veo nada. Debimos cubrir un gran trayecto. De hecho, veo muy bien las estrellas, pero admito que no logro identificarlas.

– ¿Estamos perdidos?

– Es posible.

Boissinière volvió a poner la nave en posición, reactivó la propulsión y pasó a una vista frontal. En ese momento se oyó salir de la boca de todos los ocupantes del puente un “0k” generalizado.

– ¿Demonios, pero qué es eso?

– Una supergigante – dijo Picard a través de los altavoces.

– ¡Vamos directo hacia ella!

– Bueno, la solución es sencilla –comentó Turyshev–. Basta con reutilizar el dispositivo de Jacobson y pfff… listo. Sortearemos este segundo escollo sumergiéndonos por segunda vez.

Boissiniére miró sus instrumentos.

– Imposible, el condensador aún no está recargado. Es necesario que el generador lo recargue hasta que la aguja pase la línea roja.

– ¿Y entonces?

– ¿Cómo quieren que lo sepa? Ni siquiera sé cómo funciona todo esto…

Se oyó la voz de Picard:

– A dos horas de camino adelante parece estar algo muy parecido a una estrella de neutrones. Es la compañera de la gigante.

– ¿Qué propone usted? ¿Aterrizar en la estrella de neutrones y hacer un picnic?

– No, pero podríamos usar su campo de gravedad para “virar en u”. Eso nos evitaría ir directo a las entrañas de su majestuosa compañera.

A Boissinière la idea le pareció excelente. Sólo había que establecer los parámetros de la trayectoria.

– Picard, calcúlenos eso, por favor.

– Bromea usted. ¡Esas cosas son relativistas!

– ¿O sea?

– No sé nada de relatividad general.

– ¿Pero acaso no escribió usted artículos sobre agujeros negros gigantes?

– Lo hacen todos. Partiendo de mediciones de la velocidad de masas gaseosas en los centros de las galaxias, se deduce la masa M que permite contrabalancear la fuerza centrífuga; y como no se detecta nada, se concluye sobre la presencia de “agujeros negros gigantes” de una o de diez millones de masas solares en el centro. Pero hasta ahí llega mi conocimiento. Soy estrictamente incapaz de calcular una trayectoria que no sea newtoniana.

– Demonios, a bordo no hay más astrónomos que usted. Yo pensaba que…

– Lo siento.

Boissinière se volvió hacia Fowler:

– Fowler, tiene usted dos horas para averiguarlo todo sobre relatividad general.

– Espere un momento, antes de lanzarme a una “misión imposible”, ¿no será que Bourbakof tiene un Lagrangiano salvavidas en su sombrero pasa sacarnos de esta?

– Tiene razón. ¡Busquen a Bourbakof!

Bourbakof dormía. El llamado de Bossinière lo despertó de un sobresalto. Todos se reunieron en el salón de seminarios. Boissinière insistió en la urgencia de la situación. Bourbakof entendió de inmediato y pasó al tablero.

– Construimos las trayectorias keplerianas partiendo de un “Lagrangiano kepleriano”:

$$L_K = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Este Lagrangiano fue definido en un espacio (r, θ, φ) y consideramos al tiempo t como parámetro. Luego intentamos un desplazamiento en el “espacio 3d”. Cuando pasamos al mundo de la relatividad, dejamos de desplazarnos en el espacio de tres dimensiones y pasamos a cuatro: el “espacio-tiempo” (t, r, θ, φ). Las curvas solución deben estar inscritas entonces en este espacio cuadri-dimensional, y serán recorridas siguiendo un parámetro s. Esas curvas serán del tipo:

$$\begin{gathered} t(s) \\ r(s) \\ \theta(s) \\ \varphi(s) \end{gathered}$$

– Y las derivadas –sugirió Turyshev– indicadas con un punto encima, serán tomadas con respecto a esta variable s.

– Así es. Teniendo en cuenta eso, escribo el Lagrangiano:

$$L = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2\left(\dot{\theta}^2 + \cancel{\sin^2\theta}\,\dot{\varphi}^2\right)$$

– Más adelante explicaremos a qué corresponden los términos. Sé que tiene una apariencia terriblemente artificial, pero en vista de que tenemos prisa… G es la constante de gravitación, M la masa de la estrella de neutrones, c la velocidad de la luz. Podría demostrar que las trayectorias son planas, es decir que por medio de un cambio de variable se las puede situar en un plano $\theta = \pi/2$.

– Eso lo vimos al estudiar las trayectorias newtonianas. Acá es similar.

Boissinière se sentía como caminando sobre carbones ardiendo.

– Estamos dispuestos a creerle ciegamente eso. Pero por favor dese prisa. Estamos a punto de precipitarnos hacia esa estrella de neutrones a ocho mil kilómetros por segundo y más vale que tengamos pronto los parámetros de la trayectoria a seguir.

– Entendido. ¿Recuerdan ustedes la definición de la “función E”, que era constante a lo largo de una curva-trayectoria? ¿Turyshev, puede usted escribirnos eso?

Turyshev escribió:

$$E = \sum_i \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L = cte$$

– ¿Y entonces?

– El Lagrangiano L es una forma cuadrática en las variables

$$\dot{x}^i$$

Fowler miró el tablero con interés.

– Una forma cuadrática no contiene más que términos del tipo:

$$\dot{x}^{i2} \quad \text{y} \quad \dot{x}^i \dot{x}^j$$

Al derivar y hacer uso de todo esto para calcular la fórmula de arriba se obtiene E = 2L – L = L.

– Por lo tanto E = L. Consecuencia:

$$L = cte \text{ a lo largo de la trayectoria}$$

– Escriba ahora las ecuaciones de Lagrange.

– 0k.

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2\dot{t}\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (2)$$

Se integra rápidamente introduciendo dos constantes de integración γ y H:

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2\dot{t} = \frac{c}{\gamma}$$

$$r^2\dot{\theta} = H \qquad \dot{\theta} = \frac{H}{r^2}$$

– Vamos ahora a introducir una variable τ, de la que más adelante daremos el significado, tal que:

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} \qquad s = c\tau \qquad ds = c\,d\tau$$

Pongamos además:

$$\frac{2GM}{c^2} = R_s$$

– ¿Y eso por qué?

– Esta magnitud tiene dimensiones de longitud. Y nos permite escribir:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} \qquad r \gg R_s : \frac{dt}{d\tau} \to \frac{1}{\gamma}$$

t es nuestra variable tiempo. Aún no les he dicho a qué correspondería la nueva variable τ, pero resulta que cuando se desplaza uno lejos del centro geométrico del objeto, o en otros términos, cuando la distancia al centro geométrico es grande comparada con R_s, el tiempo t “variará como el tiempo τ”.

– Puedo entonces escribir, por ejemplo, L = 1.

– Así es.

Turyshev escribió:

$$1=\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}}-r^2\dot{\theta}^2$$

– Ahora, Turyshev, reemplace usted.

– Reemplazo…

$$1=\cancel{\left(1-\frac{R_s}{r}\right)}\frac{\cancel{c^2}}{\gamma^2\cancel{c^2}}\frac{1}{\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{\cancel{2}}}-\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{R_s}{r}}-\frac{H^2}{r^2}$$

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{1}{\gamma^2}-1+\frac{H^2}{r^2}+\frac{R_s H^2}{r^3}}$$

$$r \text{ grande} \quad \frac{dr}{ds}\to\sqrt{\frac{1}{\gamma^2}-1} \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)_{r\to\infty}\to c\gamma$$

Bien, c es la velocidad de la luz, ¿pero cuál es el significado físico del parámetro γ?

– Es simple:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad v^2=c^2\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\gamma^2$$

Y obtengo:

$$\gamma=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ (\text{Lorentz})$$

$$v_\infty=0 \quad \gamma=1 \quad \rightarrow \quad v=c \rightarrow \gamma=0$$

Es decir que γ es el factor de contracción de Lorentz.

– ¿El qué?

Boissinière elevó los brazos al cielo:

– Por favor, Turyshev, no desconcentre a nuestro amigo con sus preguntas. Tenemos otras urgencias. Por el momento nuestra prioridad es otra: obtener pronto los parámetros de un cambio de trayectoria para el delicado giro en u. Cuando hayamos puesto en marcha nuestro cambio de rumbo le prometo que tendrá usted todo el tiempo para satisfacer su curiosidad.

Bourbakof continuó:

– Necesitamos del valor de γ para efectuar el cálculo de la trayectoria. Es uno de los parámetros. El segundo es la dirección de nuestra trayectoria, que es prácticamente lo único con lo que podemos jugar. Al aplicar un empuje transversal, la modificación de la trayectoria no alterará el módulo v de nuestra velocidad. Podemos entonces calcular γ.

c vale 300.000 km/s

v vale actualmente 8000 km/s

por lo tanto $\gamma = 0{,}986$

– ¡Casi uno!

– Es normal. Ocho mil kilómetros por segundo nos parece rápido pero es apenas poco más de dos centésimos del valor de la velocidad de la luz.

– ¿Y qué es lo que es ese radio característico R_s?

– No es el radio de la estrella de neutrones, sino que caracteriza el orden de magnitud de dicho radio, que es mayor. De cualquier forma, ahí donde estamos, estamos situados a una distancia muy grande comparada con ese valor. Físicamente hablando eso significa que vamos a una velocidad pequeña y que estamos situados lejos del campo de gravedad de la estrella de neutrones.

Boissinière imploró:

– ¡Por favor, continúe!..

– Estamos casi al final de nuestro viacrucis:

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1 + \frac{H^2}{r^2} + \frac{R_s H^2}{r^3}} \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{H}{r^2}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dr} = \frac{H}{r^2\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1 + \frac{H^2}{r^2} + \frac{R_s H^2}{r^3}}}$$

La trayectoria θ(r) se obtiene mediante una simple cuadratura:

$$\boxed{\theta = \int \frac{H\,dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1 + \frac{H^2}{r^2} + \frac{R_s H^2}{r^3}}}}$$

Fowler estaba encantado:

– ¡He ahí un nuevo conejo salido del sombrero del señor Bourbakof! Estimado, ya sabe, terminará usted por hacerme querer las matemáticas.

Boissinière, pragmático, dijo:

– Hmm… no estamos aquí para divertirnos. ¿Bourbakof, puede usted revelarnos por favor el significado físico de la constante H?

– Claro que sí. Tenemos:

$$H = r^2\,\dot{\theta} \qquad H^2 = r^4\,\dot{\theta}^2$$

– En esta figura trazo un círculo de radio R_s, un radio vector y un elemento de la trayectoria que lo corta en un cierto ángulo α:

$$tg\,\alpha = -\frac{r\,d\theta}{dr}$$

– Puedo entonces escribir:

$$H^2 = r^4\left(\frac{d\theta}{dr}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right)^2 \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\gamma\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}$$

– Al hacer intervenir el ángulo α, la velocidad v y el parámetro de Lorentz γ antes calculado, se obtiene:

$$H^2 = \frac{r^2\,tg^2\alpha\,v^2}{c\gamma}$$

Boissinière se distensionó.

– Fowler, ¿nos puede calcular diferentes opciones de rumbo con la ayuda de su portátil?

– Estoy en proceso de programar todo eso.

Los minutos pasaron. Turyshev llevó a Boissinière aparte, y le habló a media voz.

– Se puede oír una mosca volar.

– En esta nave no hay moscas, Turyshev.

– ¿Ni una sola?

– Hasta dónde sé, no. De cualquier modo, tampoco las había en la estación espacial internacional.

– ¿Entonces en esa estación no había más que humanos?

– Más algunos ácaros que tienen la manía de aferrarse a los cables eléctricos. Pero hemos previsto todo eso.

– Me tranquiliza usted.

La mini impresora de Fowler sonó y se retiró la hoja.

– Aquí están los parámetros. 0,5 g durante ciento ocho segundos con el vector de impulso situado en el plano formado por la nave, la supergigante y la estrella de neutrones.

– ¿En qué dirección?

– De tal forma que nos acerque a la estrella de neutrones. Así deberíamos separarnos de la supergigante lo suficiente como para que su radiación no nos queme. A la inversa, pasaremos suficientemente lejos del pequeño monstruo para que los efectos de marea no hagan estallar nuestra nave.

– Fowler, es usted un campeón. Iré al puente para dar las órdenes.

A Turyshev lo devoraba la curiosidad. Tomó a Boissinière de un brazo.

– ¿Y cómo será la trayectoria? ¿Cuál será el ángulo de deflexión, y cuál nuestra velocidad máxima?

– Oiga, Turyshev, entiendo que su interés científico sea de los más despiertos, pero comencemos por salir del apuro implorando al cielo para que Fowler haya programado todo el asunto de manera correcta. Sé que es un as en eso, pero nunca se sabe. Luego tendrá usted todos los seminarios que desee. Perdone usted pero esta historia del enjambre de bloques de hielo y de la colisión con una supergigante me ha puesto un tanto nervioso.

Apéndices

1. *Solución de la ecuación*

Aquí tienen cómo se puede resolver la ecuación que nos interesa:

$$yy''+1-y^2=0$$

Para comenzar, notemos que si *f* representa una solución de dicha ecuación, *f '* no puede anularse en ningún intervalo. Si así fuera, *f ''* sería igualmente nula en ese intervalo, lo que conduciría a la contradicción:

$$1=0.$$

Dicho esto, sea *f* una solución de la ecuación. Se puede entonces definir localmente la función inversa f^{-1}:

$$y=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x=f^{-1}(y)$$

Y poner

$$z(y)=f'\circ f^{-1}(y)$$

Derivando ahora esta función *z*, se obtiene:

$$z'=\frac{f''\circ f^{-1}}{f'\circ f^{-1}}$$

O incluso, teniendo en cuenta que:

$$z'=f'\circ f^{-1}$$

Se tiene:

$$zz'=f''\circ f^{-1}$$

Usando la ecuación resulta:

$$f''\circ f^{-1}=\frac{\left(f'\circ f^{-1}\right)^2+1}{f\circ f^{-1}}=\frac{z^2+1}{y}$$

De donde:

$$yzz'=z^2+1$$

Lo que se puede escribir como:

$$\frac{z\,dz}{z^2+1}=\frac{dy}{y}$$

y se integra fácilmente para dar:

$$z^2+1=ay^2$$

Sea:

$$f'=\sqrt{af^2-1}$$

Esta ecuación se integra de nuevo, y para simplificar se pone:

$$a=s^2$$

Se obtiene

$$s\,f(x)=ch\left(s(x+c)\right)$$

Hay dos constantes de integración, s y c, pero si nos limitamos a soluciones pares, es decir que satisfacen:

$$f(-x)=f(x)$$

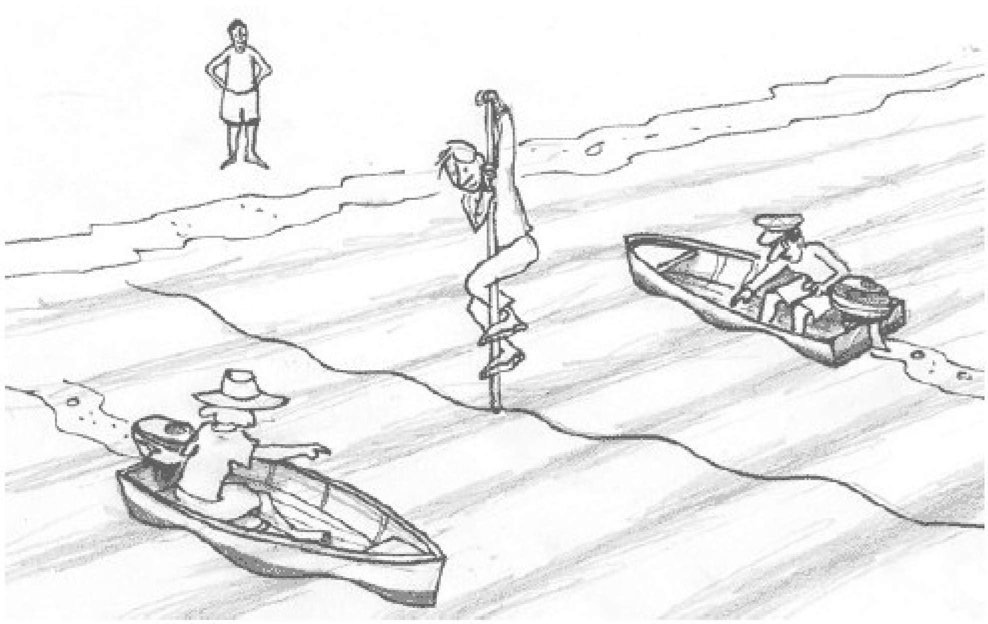
la constante c obligatoriamente es cero y obtenemos una familia uniparamétrica de soluciones:

$$f(x)=\frac{ch(sx)}{s}$$

2. ***Efecto Doppler***

El sonido de un vehículo que se acerca es más agudo que el sonido de un vehículo que se aleja. Este es un ejemplo de efecto Doppler que todos hemos podido percibir. El "efecto Doppler" se halla un poco en todas partes, por ejemplo en imágenes médicas o en astrofísica, donde se habla de "corrimiento al rojo". El efecto Doppler, de hecho, es un fenómeno universal: se trata de la modificación de la frecuencia de una señal periódica entre el emisor de la señal y el receptor de la misma cuando existe movimiento relativo entre los dos.

Seamos más precisos y consideremos un ejemplo. Imaginen una playa a la que llegan olas desde lejos. Adentro en el mar hay un palo y sobre el palo un desafortunado observador que cuenta el número de crestas de onda que pasan ante él. Designaremos por ν el número de crestas observadas por unidad de tiempo. Y a ese número le llamaremos frecuencia. A lado y lado de nuestro primer observador hay dos lanchas. La una se aleja de la playa mientras que la otra se acerca a ella. Los timoneles de las dos embarcaciones también cuentan el número de crestas que ven. El que se aleja cuenta el número de crestas que llegan a romper sobre su proa, mientras que el que se acerca a la playa cuenta el número de ondas que llegan a su popa. Para éste último, la ondas siguen intentando alcanzarlo, y el número de olas que alcanzan su lancha por unidad de tiempo, ν', es menor que el número de olas que alcanzan la vara. Para la lancha que se aleja, al contrario, el efecto es inverso: el número de olas que alcanzan su proa por unidad de tiempo es mayor que la frecuencia observada por nuestro pobre observador en el palo.



Examinemos la situación. Llamemos c a la velocidad de las olas. El observador en el palo observa una serie de N crestas que llegan al palo durante un intervalo de tiempo Δt. Si la distancia entre dos crestas, la denominada longitud de onda, es L, entonces la longitud de un tren de onda observado durante el tiempo Δt es NL. Se tiene:

$$NL = c\Delta t \quad \text{y} \quad N = \nu\Delta t$$

Para el timonel de la lancha que se acerca a la playa, el tiempo Δt’ que le toma a ese tren de onda alcanzar la popa de su embarcación es un poco más largo. La velocidad a la cual llegan las olas a su lancha es menor que la velocidad a la que las olas llegan al palo, siendo ésta *c–u*, donde u designa la velocidad de las lanchas, y se tiene:

$$NL = (c-u)\Delta t' \quad \text{y} \quad N = \nu'\Delta t'$$

Todo esto nos da:

$$NL = (c-u)\Delta t' = c\Delta t \quad \text{y} \quad N = \nu\Delta t = \nu'\Delta t'$$

Lo que se traduce en:

$$\nu' = \frac{\Delta t}{\Delta t'}\nu = \left(1 - \frac{u}{c}\right)\nu$$

Designando con $\Delta\nu = \nu - \nu'$ la diferencia entre las frecuencias, se tiene finalmente:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{u}{c}$$

En este ejemplo hay tres referentes: el del observador en el palo, que es igualmente el de la fuente, quedando la velocidad de las olas medida con respecto al fondo del mar, y estando el palo inmóvil con respecto a ese fondo. Está también el referente del timonel en la lancha que se acerca a la playa (observador que se aleja de la fuente), y el de la lancha que se aleja de la playa (¡y que se acerca a la fuente!).

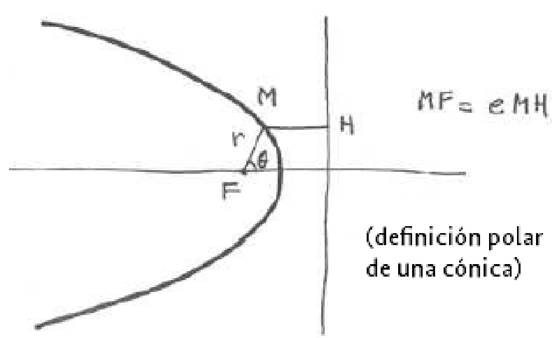
La frecuencia nominal N de las olas es la que determina el sujeto en el palo. Se puede considerar a *u*, la velocidad de las lanchas, como la velocidad relativa entre el emisor (el palo) y el receptor (la embarcación), es decir como la diferencia entre la velocidad del tren de ondas medida por el emisor y aquella medida por el receptor. Preferimos llamar a esa diferencia Δc y escribir:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta c}{c}$$

A esto le llamamos corrimiento de las frecuencias, del inglés "shift". Si Δc es positivo (caso de la lancha que se acerca a la playa y se desplaza en el mismo sentido de la señal y que el tren de ondas), entonces el corrimiento de frecuencias es negativo. La frecuencia de recepción es menor que la frecuencia de emisión. Es el caso del sonido del vehículo que se aleja y es más grave; o de la luz de la galaxia "que se aleja" y se corre hacia el rojo, de ahí la expresión "corrimiento al rojo" tan querida por los astrofísicos. Por el contrario, si Δc es negativo (caso de la lancha que se aleja desplazándose en contra de las olas y "aproximándose a la fuente"), entonces la frecuencia observada es menor. Es el caso el sonido del vehículo que se acerca y es más agudo.

3. Repaso sobre cónicas

Aquí tienen la definición polar de una cónica:

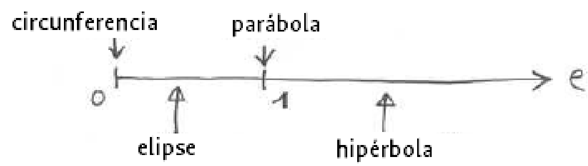


(definición polar de una cónica)

$$MH = h - r\cos\theta \qquad eh = p$$

$$r^2 = e^2(h - r\cos\theta)^2 \qquad r = \frac{eh}{1 + e\cos\theta}$$

e es la excentricidad de la cónica. Las diferentes cónicas corresponden a los valores siguientes:



Aquí se pueden apreciar las diferentes curvas para h = 1 y e variable.