Nicolas Bourbakof wird sich dem Team von Hubert de la Boissinière in Dsoun-Boulak in Zentralasien anschließen, die dort ein seltsames Kirchenschiff bauen, das von einem mysteriösen Treibstoff angetrieben wird, der von einem gewissen Jacobson geliefert wird. Alle heben ab.

Richtung: Irgendwo außerhalb des Sonnensystems. Mit einer Beschleunigung auf ein halbes Gramm verdoppelt das Kirchenschiff in 17 Tagen den Pluto. Bourbakof schließt Freundschaften an Bord. Fowler, ein Physiker, übergelaufen aus Princeton, Turyshev, ein Biologe... Boissinière erwartet sehnsüchtig eine Nachricht von Jacobson, der ihr Anweisungen für diese beispiellose Reise geben soll. Leider unterbricht eine Sonneneruption den Empfang. Hier sind die Expeditionen, die "im Nebel" segeln. Der Anfang der Botschaft lehrt den Franzosen nur, dass in Bourbakofs Kopf "genug mathematisches Wissen vorhanden ist, um die Mission zu steuern".

Aber welches Wissen? fragt Boissinière. Wie gelangt man in den Kopf dieses Tieres? Welche Fragen müssen ihm gestellt werden? Boissinière bat Bourbakof, Seminare für die Besatzung abzuhalten. Diese lässt die Lagrangesche Gleichung aus einem Seifenblasenproblem hervortreten. Turyschew meint, er hätte Mathematiker werden sollen. Plötzlich entdeckt Picard, der Astronom an Bord, einen riesigen Schwarm von Eisblöcken direkt in der Flugbahn des Schiffes, das bereits mit 8.000 km/sec unterwegs ist. Bei dieser Geschwindigkeit war es unmöglich, ein Ausweichmanöver zu versuchen.

Es sind die Trümmer des 11. Planeten, die durch die Gezeiteneinwirkung zertrümmert wurden und auf die Erde zurasen. Daher diese Mission der letzten Chance, während Jacobson und "seine Freunde" auf der Erde versuchen werden, diesen Kometenschwarm, der sich bald auflösen wird, zu zerstören, erinnert sich Boissinière daran, dass Jacobson ihr einen blauen Umschlag hinterlassen hat, "der geöffnet werden soll, wenn Sie das Sonnensystem verlassen haben". Er öffnet ihn ....

Dsoun - Boulak

Nicolas Bourbakof hatte eine trockene Kehle. Er hatte beschlossen, dieses in Ungnade gefallene Regime für immer zu verlassen. Er hatte der forensischen Polizei, den schrecklichen Erkenntnistheoretikern, die keine Geschenke machten, getrotzt und beschlossen, sich "denen anzuschließen, die beschlossen hatten, zu gehen". Er konnte es nicht länger ertragen, so denken zu müssen, als hätte er die gesamte wissenschaftliche Polizei im Nacken, ohne anzuhalten, in einer Welt, die überall "wissenschaftlich korrekt", "mathematisch korrekt" sein musste. Eine Welt, die an den Film "Brasilien" erinnerte, ohne weite Horizonte, ohne Schaumkronen auf den Wellen, wo die Worte Liebe, Freundschaft jede Bedeutung verloren zu haben schienen. Worte, die durch "Kooptierung", "Integration" ersetzt worden waren.

Dort war die Zukunft vorgezeichnet, auf "Autobahnen des Wissens", die nirgendwohin führten. Ein riesiges kreisförmiges Ensemble, gebaut vom Kollektiv der neuen wissenschaftlichen Rationalisten, wo man übrigens in voller Kenntnis der Tatsachen im Kreis herumging. Schon als Kind, als er ein junger Wissenschaftler war, hatte er sich in dieser Welt nie wohl gefühlt.

Das Kollektiv verwaltete alles von der Geburt bis zum Tod des Individuums und lehrte von Kindheit an, dass es die kleinen besonderen Unglücksfälle waren, die zum großen Allgemeinwohl beitrugen, so dass je mehr kleine besondere Unglücksfälle es gab, desto besser war es in den bestmöglichen wissenschaftlichen Welten. Identität war die Garantie für Stabilität und Immobilität der beste Faktor des Fortschritts. Diese von der Partei vorgegebene Leitlinie hatte sogar Physiker betroffen, da einer von ihnen vor Bourbakofs Flucht eine These verteidigt hatte, deren Titel "Evolution stationärer Zustände" lautete.

Es war eine schreckliche Reise gewesen. Er hatte sich überall verstecken müssen, Tausende von Kilometern zu Fuß oder unter Eisenbahnwaggons hängend. Er wusste nur eines: den Namen des Ortes.

Es ist eine gottverdammte Stadt an der Grenze zur Äußeren Mongolei. Abgesehen von Jurten und Parks mit kleinen Pferden mit blonden Mähnen, die sich im Wind erheben, sah er moderne Zelte und riesige Schuppen. Wie ein schwankender Mann näherte er sich diesem Leinwanddorf.

Plötzlich sah er einen Mann von gewaltiger Statur mit einer Glatze, der ihn begrüßte:

- Bourbakof! Verdammt! Hätte ich gedacht, ein Mann wie Sie würde zu uns kommen... Kommen Sie und trinken Sie etwas. Sie sehen erschöpft aus.

- Ich könnte eine Woche lang schlafen. Wer zum Teufel sind Sie?

- Hubert de la Boissinière, verantwortlich für das Projekt.

- Ein Projekt?

- Ja, ich werde es erklären. Aber im Moment scheinen Sie zu müde zu sein, um ein Gespräch zu führen, das es wert ist, geführt zu werden. Kommen Sie, wir kümmern uns um Sie.

De Boissinière trainierte Bourbakof in einem Zelt.

- Haben Sie Whiskey hier?

- Nein! Es ist Kulik, etwas Lokales. Aber es wird Ihnen gut tun.

- Trink-Mädchen... kommt mir bekannt vor. Sie sind ein MHD-Spezialist, glaube ich, richtig?

- Das ist richtig.

- Und was ist das... Projekt?

- Deshalb sind Sie gekommen, nicht wahr?

- Natürlich haben Sie das getan. Für mich gehört Mathe der Vergangenheit an. Ich mache alles... sogar Physik.

- Wie Sie gehen! Wir werden Sie brauchen. Lassen Sie Ihr wertvolles Vermessungswissen nicht auf diesem Planeten liegen, der sich in naher Zukunft der Verbreitung der biologischen Kriegsführung widmen wird.

- Wie um alles in der Welt können diese für Sie von Nutzen sein?

- Sie wissen nicht, wo wir hingehen.

- Wo?

- Das wissen wir auch nicht. Geometrie ist die Wissenschaft vom Unerwarteten, nicht wahr?

- Mm-hmm...

Es herrschte langes Schweigen. Boissinière hat gelacht.

- Sie sind im Nu wieder bei Farbe. Zigarre?

- Etwas Lokales?

- Nein, die sind aus Havanna.

Bourbakof schätzte die Mischung aus Havanna-Rauch und gefälschtem Whisky.

- Wie auch immer, wir werden die Erde verlassen.

- Das ist richtig.

- Mit dem MHD?

- Ja und nein. Es hängt alles davon ab, wie viel Hilfe wir jeden Tag erwarten. Das Projekt hängt davon ab, ob es Jacobson gelingt, die Linien mit dem Iljuschin und dem Baby darin zu überschreiten.

- Und was ist das?

- Ich sagte Ihnen, das ist der Schlüssel zum Erfolg der Operation. Aber Jacobson wollte mir nicht mehr sagen. Vielleicht kennt er sich selbst nicht.

Bourbakof antwortete nicht, er war eingeschlafen, auf dem Tisch zusammengesackt.

Boissinière ließ ihn auf einem Kinderbett installieren. Sie zogen ihm die Schuhe aus, und er schlief achtundvierzig Stunden durchgehend und schnarchte wie ein echter Slawe.

Die Ilyushin landete in einer Staubwolke. Die Mitglieder der kleinen Kolonie rannten zur Tür und schleppten eine einfache Leiter mit, damit die Passagiere aussteigen konnten. Jacobson erschien zuerst.

- Toll, Sie haben bestanden", rief Boissinière aus.

Die Heckrampe des Ilyushin wurde abgesenkt. Die Männer lösten die Schlingen und ließen mit unendlicher Vorsicht ein großes Paket herunter, das fast den gesamten Frachtraum des Frachters füllte.

- Nun, jetzt haben Sie alles, was Sie brauchen. In dieser Aktentasche habe ich alle Dokumente untergebracht, die es Ihnen ermöglichen, dieses Ding zu benutzen.

- Wissen wir, wie es funktioniert?

- Nein, und sie baten uns, ihn nicht zu öffnen. Es gibt zwei Dinge, die Sie interessieren. Die erste ist ein elektrischer Leistungsausgang. Es hat alles, kontinuierlich, NF-Ausgang und HF-Ausgang, in drei Gigahertz.

- Nun... (seufzt)

- Am Ende, die Düse. Es sollte Ihnen mehr als genug Schub geben, aber nur aus der Erdatmosphäre heraus. Angesichts der strukturellen Stärke des Kirchenschiffs würde ich immer noch empfehlen, die Beschleunigung während der Fahrt zu begrenzen. Für den Start und die Durchquerung der Luftschicht müssen Sie sich mit dem MHD auf die Luft stützen.

- Wenn es Strom gibt, reißen wir das Kirchenschiff heraus, kein Problem.

- Dafür vertraue ich Ihnen. Entschuldigen Sie mich, ich muss sofort gehen. "Professor Noah", auf Wiedersehen und viel Glück.

- Bleiben Sie nicht für eine Weile?

- Nein, ich muss zurück nach Area 51.

- Wollen Sie mir nicht sagen, was Sie dort tun?

- Ich könnte, aber das würde lange dauern, und ich habe nicht die Zeit dazu. Auf jeden Fall werden Sie, wenn Sie ein bisschen gefahren sind, sofort verstehen, worum es geht.

- Nun, ich bestehe nicht darauf. Wir müssen uns sofort an die Arbeit machen. Jedenfalls danke ich Ihnen. Jedenfalls... Danken Sie auch Ihren... Freunden.

- Ich werde es tun. Aber das sind Ereignisse, an die sie nicht gewöhnt sind.

Schon Jacobson hatte die Fersen gedreht und mit einem schnellen Schritt den Apparat gewonnen. Als Bourbakof aus seinem Zelt kam, sah er, wie sich der Iljuschin am Ende der Startbahn vom Boden riss. Er erreichte Boissinière, der das Schleppen der riesigen, mit einer Plane bedeckten Maschine zum Haupthangar koordinierte.

- Da haben Sie es, jetzt liegt es an uns. Cruise Thruster, wir haben es.

- Sie meinen, dieses Ding wird uns von der Erde wegbringen.

- Mit Ihnen, es sei denn, Sie haben Ihre Meinung geändert.

- Sicherlich nicht.

Die folgenden Wochen waren der Anpassung der Antriebs-Generator-Einheit an das scheibenförmige MHD-Schiff gewidmet, das Boissinière in Teilen gebaut und unter strengster Geheimhaltung nach Dsoun-Boulak gebracht hatte.

- Sie erinnern mich an Nemo, mit seiner Nautilus.

- Es gibt einiges davon. Aber anstatt die Meere zu erforschen, wenden wir uns dem Kosmos zu.

- Verwaltung?

- Das Sternbild der Jungfrau Maria ...

Abreise

Nach diesem Kontakt mit Hubert de la Boissinière ließ sich Bourbakof im Zentrum nieder und wartete darauf, dass das Kirchenschiff abhebt. Der Komfort war einfach: ein einfaches Zelt, aber er begnügte sich damit. Luxus war nie seine Stärke gewesen. Ein Tisch, ein Papier und ein Stift genügten ihm, um ein ganzes Universum für sich selbst zu erschaffen. Eines Tages kam Boissinière, der die Müdigkeit im Gesicht ablesen konnte, auf der Suche nach ihm, um ihm den Inhalt des riesigen Hangars Nummer 3 zu zeigen, in dem sich das Hauptschiff befand. Ihm fehlte die Distanz, um seine genaue Form zu erkennen. Sie schien immens zu sein. Vielleicht zweihundert Meter im Durchmesser. An seinem unteren Teil arbeiteten Techniker an der Anpassung der von Jacobson mitgebrachten Schubdüse. Obwohl es im Vergleich zu dem Iljuschin-Frachtflugzeug, das es gebracht hatte, so imposant erschienen war, sah es im Vergleich zu dem Schiff, das es antreiben sollte, lächerlich aus.

- Es wird", so Boissinière, "unser Cruise Thruster sein, der nur für den Betrieb außerhalb der Erdatmosphäre ausgelegt ist.

- Wie wollen Sie die Arche Noah aus dem Boden holen?

- Ich werde es erklären, aber erst, wenn wir Zeit haben. Im Moment bin ich so beschäftigt...

- Ich hab's verstanden. Ich hab's verstanden. Aber wie waren Sie in der Lage, eine Finanzierung für ein solches Projekt zu erhalten? Es klingt verrückt...

- Alles begann mit Jacobson.

- Soviel ich weiß, ist seine Heimatbasis Area 51, richtig?

- Das ist richtig. Area 51 liegt in Nevada, in den Vereinigten Staaten.

- Ein Staat innerhalb eines Staates, wie ich höre.

- In Wahrheit sehr clever, wer sagen könnte, wer die wahren Herren des Ortes sind. Dazu konnte ich kein Wort aus Sven herausbekommen.

- Nach dem, was mir die Techniker sagten, war er ein Spezialist für Hochleistungslaser.

- Das ist richtig. Jacobson sagte einmal zu mir: "Wären Sie bereit für ein Projekt, bei dem es keine Finanzierungsbeschränkungen gibt? Ich sagte: "Das hängt vom Zweck des Unternehmens ab". Jacobson nahm mich dann bei den Schultern, legte seinen Blick in meinen und sagte: "Ich habe eine solche Antwort von Ihnen erwartet". Dann erklärte er mir die Grundzüge eines Unternehmens, das mir völlig verrückt erschien. Es sollte zwei Teams geben: diejenigen, die bleiben würden, und diejenigen, die gehen würden.

- Und dies ist das Team von Menschen, die gehen sollen.

- Das ist richtig. Aber weggehen ist leichter gesagt als getan. Sie haben den lächerlichen Rosthaufen gesehen, zu dem die ISS, die internationale Raumstation, geworden ist, und niemand will mehr für ihre Instandhaltung bezahlen. Ursprünglich dachte ich, dass Jacobson so etwas wie eine Basis auf dem Mond vorschlagen würde. "Das ist nicht das, was geplant war", sagte er lächelnd. Persönlich würde ich, wenn ich mit der notwendigen elektrischen Energie versorgt wäre, alles von der Erdoberfläche abreißen und sogar dafür sorgen, dass sich so etwas von der Anziehungskraft unseres Planeten wegzieht. Aber selbst mit 11 Kilometern pro Sekunde kommt man nicht sehr weit.

- Also bot Jacobson an, Ihnen den Stromgenerator zur Verfügung zu stellen.

- Ja, indem Sie mich einfach bitten, ihn nicht danach zu fragen. Als Bonus erhielten wir sogar so viel supraleitenden Draht, wie wir wollten, der absolut unanständige Temperaturen aushalten kann. Also entwarf ich das Gerät, und alles, was ich tat, war, einen Ort für diesen Schrott bereitzustellen, dessen Abmessungen er mir zur Verfügung gestellt hatte, der schließlich mit der Struktur und den elektrischen Anschlüssen verbunden werden sollte. Wir sind gerade dabei, diese Integration zu vollziehen. Wenn wir die Tests durchführen, sollten wir in der Lage sein, innerhalb von ein oder zwei Wochen ablegen zu können.

- Steht da nicht, wer das alles finanziert hat?

Bourbakof hatte einen weiten kreisförmigen Blick.

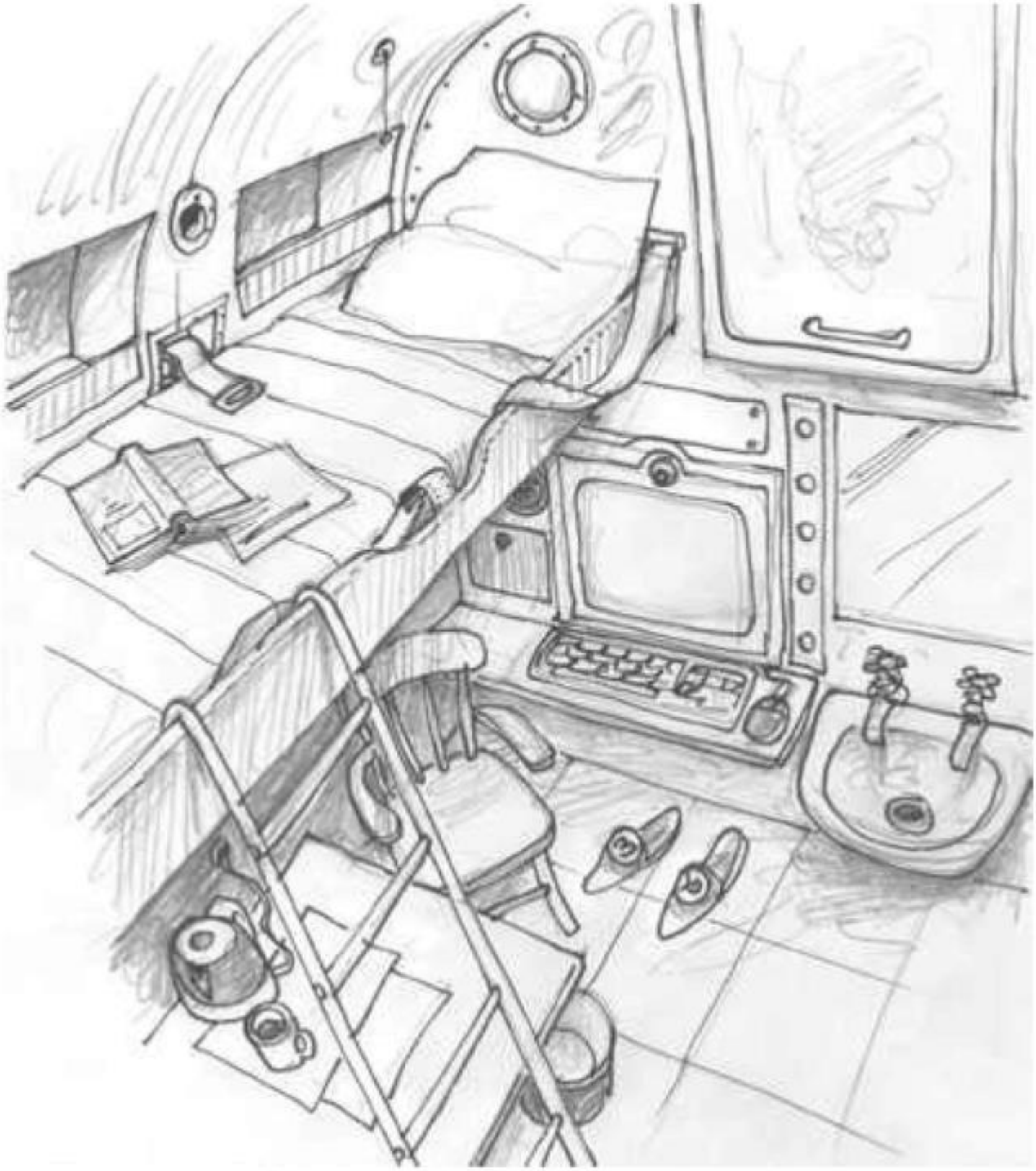
- Hier ist nichts getan worden. Jacobson kam alle paar Monate vorbei, um die Pläne abzuholen. Dann würde er wieder abreisen, und bei der nächsten Reise würde der Iljuschin die zusammenzufügenden Elemente mitbringen. Alles musste als Bausatz konzipiert werden. Leichtere, aber sperrigere Elemente wurden mit schweren Hubschraubern eingebracht.

- Sie meinen, die Russen haben die ganze Zeit geholfen?

- Ich sage Ihnen, Jacobson bat mich, keine Fragen zu stellen. Ich habe keine Fragen gestellt.

Der Tag der Abreise kam. Die kleinen Pferde mit blonden Mähnen wurden freigelassen. Die Techniker verfolgten sie eine Zeit lang mit einem 4x4, um sie weit genug vom Startbereich wegzubekommen. Die Elemente des Schuppens wurden demontiert und das Kirchenschiff erschien. Es sah aus wie zwei riesige Suppenteller, die auf dem Kopf standen und von drei Teleskopbeinen getragen wurden. Es bestand ein merkwürdiger Kontrast zwischen dem futuristischen Aussehen dieses Objekts und dem Aussehen derer, die darauf sitzen sollten. Einige, die am Vortag sehr spät mit der Arbeit fertig werden mussten, hatten keine Zeit gehabt, sich zu rasieren. Ihr persönliches Gepäck war sehr klein. Boissinière trug einen weißen Kittel. Bourbakof nahm gehorsam seinen Platz in der Kolonne ein. Die Menschen schwiegen. Wir hatten das Gefühl, dass sie von einer Art Schwerkraft bewohnt sind. Es gab keine Rede. Sie gingen in die Maschine, das ist alles. Am Eingang wurden die Ausweise kontrolliert und eine einfache Karte ausgehändigt, auf der eine

Kabinennummer vermerkt war. Sie war wie ein altmodisches Linienschiff, die French Line.



Alle hatten Einzelkabinen, die mit minimalem Komfort ausgestattet waren: Bett, Schreibtisch, Dusche, Toilette. Boissinière erschien auf der Videoleinwand.

- Okay, ich werde Sie bitten, sich auf Ihre Betten zu legen und Ihre Sicherheitsgurte anzulegen. Ich würde es vorziehen, wenn jeder auf seinem Platz wäre, und zwar sofort. Wir sagen Ihnen Bescheid, wann wir abreisen.

Bourbakof kam dem nach. Über dem Bett kam durch ein einfaches Loch frische Luft herein, mit einem zischenden Geräusch. Das Warten dauerte eine gute Stunde. Er wiederholte in Gedanken viele Ereignisse der vergangenen Monate und Jahre. Liegend und ans Bett geschnallt, fühlte er ein Gefühl der Unvermeidbarkeit und wurde von Boissinières Stimme aus seiner Träumerei gerissen:

- Also gut. Ich denke, alle sind bereit. Lassen Sie uns anfangen.

Keine Vibrationen, kein Lärm, nichts. Kaum merkliche Beschleunigung, konstant. Nach etwa zwanzig Minuten hatte Bourbakof den sehr unangenehmen Eindruck, dass das Kirchenschiff wieder zu Boden fiel. Es war schrecklich, wie in einen Brunnen zu fallen. In seinem Geschirr über der Matratze schwebend, schloss er die Augen und dachte: "Es ist ruiniert, es hat nicht funktioniert, wir werden abstürzen". Tatsächlich hatte das Kirchenschiff die Erdatmosphäre bereits verlassen und war einfach einer ballistischen Flugbahn für etwa zehn Sekunden endlos gefolgt. Als das Kreuzfahrtstrahlruder eingeschaltet wurde, fiel Bourbakof plötzlich wieder in seine Schicht zurück. Boissinières Stimme hallte durch den Lautsprecher wider:

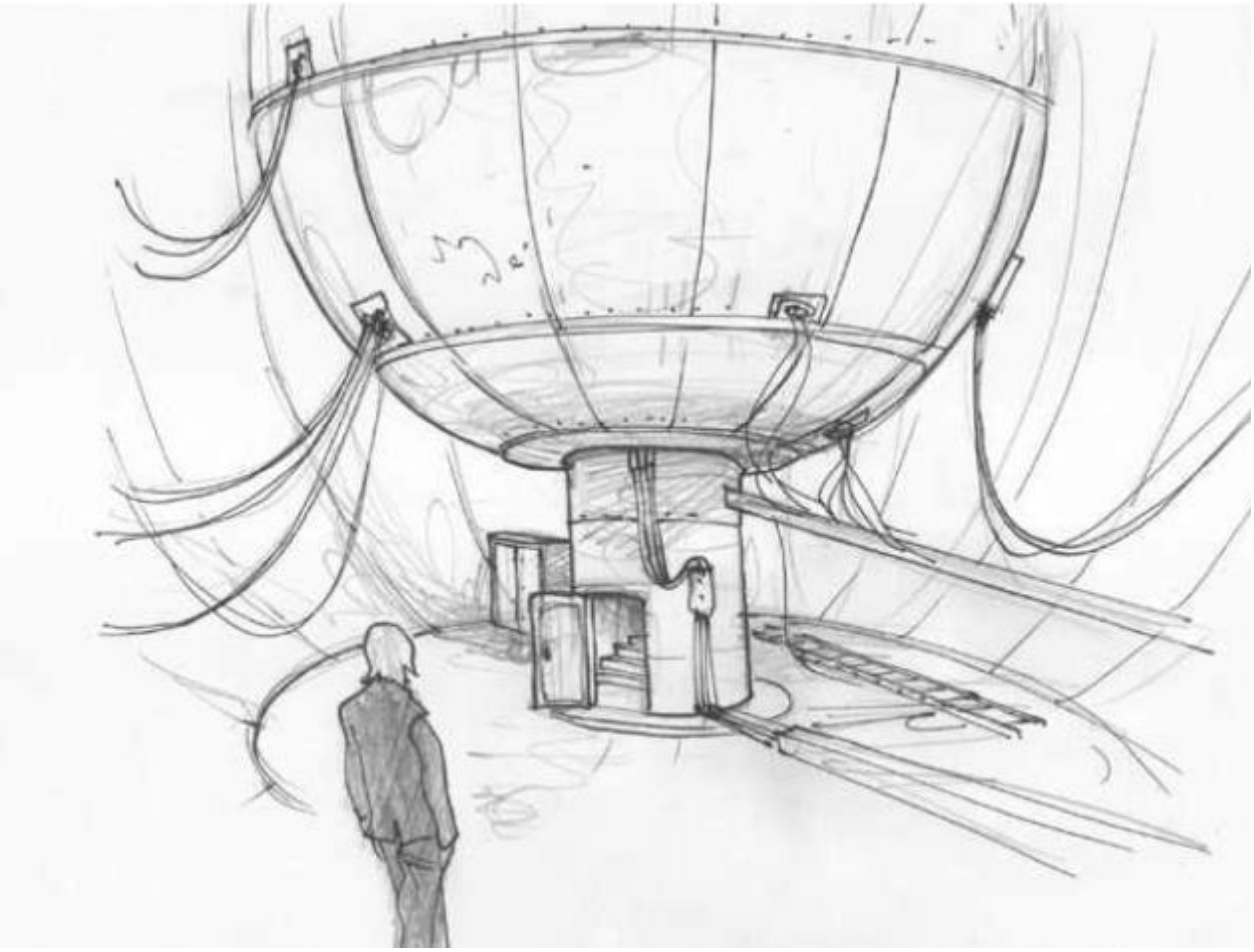
- Erfolgreicher Start. Sie können sich abschnallen.

Es fühlte sich seltsam an. Die Beschleunigung betrug weniger als ein g. Wir mussten lernen, mit dieser reduzierten Schwerkraft zu gehen. Das Schwierigste war zu lernen, wie man die Treppe hinuntergeht, ohne sich das Gesicht zu zerschlagen. Während der Zeit, die auf die Flugbahninjektion folgte, wurde das Schiff von Geistern bevölkert, die sich vorsichtig auf Zehenspitzen zu bewegen schienen. Boissinières Stimme war in dem Mobiltelefon zu hören, das Bourbakof, wie alle anderen, in seine Hemdtasche gehängt hatte.

- Sie könnten mich auf der Brücke begleiten. Es ist einen Blick wert, wissen Sie. Setzen Sie einfach Ihre Kopfhörer auf, und dann folgen Sie der Richtung, aus der das Geräusch Ihrer Meinung nach kommt.

Bourbakof hat sich selbst hingerichtet. Instinktiv wandte er seinen Kopf zum Eingang eines Korridors und betrat diesen. Wann immer ein Richtungswechsel notwendig war, signalisierte ihm das System: Das Geräusch schien plötzlich von rechts oder links zu kommen. Am Ende eines letzten Korridors erreichte er eine Art Raum, in dem sich eine Kugel mit einer großen Anzahl von Fäden befand, die auf einer Art zylindrischem Stiel ruhte, in Wirklichkeit eine Wendeltreppe. Bourbakof hörte die Stimme Boissinières, die durch das Phänomen der Resonanz zu einer Grabstimme geworden war:

- Komm schon. Komm schon.



Die Kugel war völlig hohl und hatte einen Durchmesser von etwa zehn Metern. Nachdem sie die Wendeltreppe genommen hatten, kamen sie auf eine kreisförmige Plattform, auf der ein Dutzend Personen hätten sitzen können, die von einem Geländer begrenzt war. Es gab ein paar Konsolen. Boissinière saß bei einem von ihnen. Neugierig näherte sich Bourbakof, der mechanisch auf dem Geländer stand. Boissinières Gesicht erhellte sich mit einem Lächeln und drückte einen Knopf. In diesem Moment erlebte Bourbakof den Schock seines Lebens und hatte den Eindruck, dass sie beide wie Passagiere auf dieser kreisförmigen Plattform waren, die in die Leere des Raums projiziert wurde. Die Sonne war sichtbar und beleuchtete einen Teil der Erdoberfläche. Die Höhe muss tausend Kilometer betragen haben.

- Nette Vorstellung, hm? Ich wollte nicht, dass Sie die gute alte Erde verlassen, ohne diesen letzten Blick zu genießen.

- Aber, wo stehen wir?

- In der Sphäre, natürlich! Es ist nur ein Bildschirm. An seiner Innenwand befindet sich ein ganzes Flüssigkristall-Abbildungssystem, das mit externen "Okularen" verbunden ist. Das ist besser als ein Bullauge, oder? Hier, nehmen Sie diesen Trackball.

Boissinière überreichte ihm einen Koffer mit einer Kunststoffkugel, ähnlich den Steuerungssystemen alter Mikrocomputer.

- Wenn Sie den Ball drehen, ändern Sie Ihren Standpunkt nach Belieben.

Durch die Einwirkung auf die Kugel wurde zwar das "Himmelsgewölbe" modifiziert, nicht aber die scheinbare Schwerkraft.

- Oh, na, na!...

Bourbakof fühlte sich sehr schlecht.

- Vorsicht, meine Liebe, übertreiben Sie es nicht, sonst werden Sie seekrank", warnt Boissinière.

- Natürlich passen die visuellen Signale aufgrund der künstlichen Schwerkraft, die wir erleben, nicht zu dem subjektiven Eindruck.

- Das ist richtig, klassisch. Wenn sich die Szenerie ändert und die Signale aus dem Innenohr nicht übereinstimmen, knistert es, wird man seekrank.

Bourbakof übergab ihm den Trackball.

- Ich komme schon zurecht, danke.

- Sie haben dasselbe in Ihrer Kabine, mit einem in das Regal eingebauten Trackball. Wenn Sie nach draußen gehen, fungiert der Computerbildschirm als Bullauge, durch das Sie den Blickwinkel nach Belieben verändern können. Der Vorteil ist, dass Sie in Ihrer Kabine eine Toilette in der Nähe haben.

Das Seminar

Die Erfahrung war für Bourbakof immer noch traumatisch, er fühlte sich wie auf einem Karussell. In dieser Nacht zog er es vor, zurück in seine Kabine zu gehen und ohne Abendessen zu schlafen. Danach fand er ganz leicht den Weg zum Refektorium und zur Bibliothek. Die Bibliothek war mit einer Vielzahl von Büchern sehr gut bestückt, und er vertiefte sich in das Lesen.

Boissinière war in ihrer Kabine. Seit der Abreise waren drei Wochen vergangen. Er hatte die Beschleunigung bei einem halben g stabilisiert, und bei dieser Geschwindigkeit zeigte der Geschwindigkeitsmesser an, dass das Kirchenschiff mit 8640 Kilometern pro Sekunde durchquert wurde. Bei diesem Tempo kreuzte das Kirchenschiff die Umlaufbahn des Jupiters. Das Spektakel war großartig. Im Vergleich dazu war die Erde bereits ein lächerlicher Punkt. Er hatte von Anfang an viele Male versucht, Funkkontakt mit Jacobson aufzunehmen, ohne Erfolg. Jetzt, fünf Lichtstunden von der Erde entfernt, war ein direktes Gespräch unmöglich. Plötzlich leuchtete eine Lampe auf und signalisierte damit, dass er eine Nachricht im Empfang hatte. Fieberhaft zapfte er das Radio an und schwenkte seinen Sitz auf den Plasmabildschirm in seinem Büro. Jacobsons Kopf erschien.

- Endlich", rief Boissinière.

- Mein lieber Hubert, wie ich sehe, machen Sie gute Fortschritte. Ihre Parameter scheinen mir in Ordnung zu sein. Nun bin ich Ihnen einige Erklärungen schuldig. Dies könnten die letzten sein, denn im Prinzip wird nach dem von uns angenommenen Flugplan bald eine Zeit kommen, in der wir den Kontakt verlieren werden. Sie sind noch nicht aus dem Sonnensystem heraus, also können Sie sich mit diesem Etwas, das unsere ganze Mission motiviert, nicht ein Bild machen, also wollten wir nicht alle Eier in einen Korb legen, es gab zwei Teams: Sie und wir. Sie müssen sich fragen, was Sie mit Ihren Tagen während dieser Einweg-Reise, dieser Einweg-Reise, die Sie sich mit unserer Hilfe anbieten, anfangen könnten. Ich kann mir vorstellen, dass Sie ein Kartenspiel und genügend vielfältiges und abwechslungsreiches Material mitgebracht haben, um zu versuchen, die Zeit totzuschlagen. Sie haben in der Tat eine sehr spezifische Aufgabe zu erfüllen, und ich werde Ihnen sagen, worum es dabei geht. Für uns sind Sie wie eine Art... Zelle, die aus dem Sonnensystem herausgesprengt wurde. Ihr Kirchenschiff enthält zwei Arten von Informationen. Das eine ist das, was Sie wissen und verstehen sollten, und das andere ist das, was in dem Zylinder enthalten ist, den unsere Freunde uns gegeben haben und der, wenn man ihn hinten in die Postkutsche legt, ihm diese konstante Beschleunigung von einem halben Gramm verleiht. Es ist sinnlos zu versuchen, ihn zu öffnen, selbst wenn man es täte, scheint es, dass man nicht in der Lage wäre, das Warum und Wie seiner Bestandteile zu verstehen.

- Wir haben sozusagen eine "Black Box" im Arsch", dachte Boissinière.

Er hörte sich den Rest der Botschaft an.

Mit ihrer Zustimmung sagen unsere Freunde, dass sie von einem Gesetz abgewichen sind, das im Prinzip sehr streng ist. Sie sind in der Tat mit Mitteln ausgestattet, die es Ihnen, auch wenn sie im Vergleich zu den ihren primitiv sind, a priori erlauben, andere Systeme als das Sonnensystem zu erreichen, wo Sie, wie es scheint, eine gewisse Unordnung schaffen könnten. Lassen Sie uns sagen, dass Ihre Flucht aus dem Nest ein wenig verfrüht ist, angesichts des Reifezustands der menschlichen Spezies, der nicht das ist, was man als außergewöhnlich bezeichnen könnte, werden Sie mir zustimmen. Und ich zähle mich selbst zu den vielen. Doch die Umstände haben anders entschieden. Wenn Sie das Sonnensystem verlassen haben, müssen Sie den blauen Umschlag öffnen, der sich in der Akte befindet, die den Anweisungen für den Basar beilag, den ich Ihnen mit dem Iljuschin, dem Antriebsaggregat, mitgebracht habe. Dort finden Sie zusätzliche Anweisungen. Da Sie sich auf ein solches Abenteuer einlassen, waren meine Freunde der Meinung, dass man Ihnen die Möglichkeit geben sollte, im Bereich des Wissens einen guten Schritt nach vorn zu machen. Zu diesem Zweck gehören zwei ganz besondere Passagiere zu Ihrer Besatzung. Der erste ist Nicolas Bourbakof, dessen Flucht wir diskret erleichtert haben. Es war nicht leicht, da er, so schlau er auch ist, mit seinen mit phosphoreszierendem Kabel genähten Sioux-Tricks fast zehnmal erwischt wurde. Als er wohlbehalten in Dsoun-Boulak ankam, waren wir etwas erleichtert, das versichere ich Ihnen. Meine Freunde sagen, dass dieser Kerl in seinem Gehirn, von dem sie alle synaptischen Verbindungen analysiert haben, genug Wissen hat, um Ihnen den Sprung zu ermöglichen. Aber das weiß er nicht, und es ist vielleicht am besten, wenn er es zunächst weiterhin ignoriert. Ich werde im zweiten Teil der Botschaft erklären, wo das liegt, wie man durch das Gehirn dieses tapferen Jungen blättert, welche Dateien am Anfang stehen. An Bord gibt es einen zweiten Mann, der ebenfalls an Bord gebracht wurde, um Ihnen Hilfe zu leisten. Auch das haben wir ohne Ihr Wissen ausgehandelt. Ich hoffe, Sie haben nichts dagegen, aber wir wollten kein Risiko eingehen. Wie Bourbakof weiß er nicht, warum er bei Ihnen ist und wie seine zukünftige Arbeit aussehen wird. Sein Name ist...

Das Bild wird unscharf. Betrunken, fiebrig, manipulierte ein paar Knöpfe, versuchte vergeblich, ein Signalwiederherstellungsprogramm zu aktivieren.

- Verdammte Sonnenflecken!...

Das war der Ziegel, genau in der Mitte des Fangs. Er wartete in den nächsten Tagen auf eine zweite Botschaft, aber es herrschte nichts als Stille, abgesehen vom Hintergrundrauschen der Sonneneruptionen.

- Muss die Antenne komplett verschraubt haben.

Er hatte alles geplant, nur das nicht.

- Ich bin ein Arschloch!

Alles, was erforderlich gewesen wäre, wäre eine Notantenne gewesen, die in eine Behausung eingezogen worden wäre, die zum Zeitpunkt des Ausbruchs vor Bombardierung geschützt gewesen wäre. Dort hatte er alles auf drei Parietalantennen zentriert, wahre kleine technische Juwelen. Mit drei Antennen hatte er die Zuverlässigkeit angestrebt, aber nicht an die Möglichkeit ihrer gleichzeitigen Zerstörung durch die bei Sonneneruptionen emittierten Plasmablitze gedacht. Nun waren sie für eine ganze Weile von der Erde abgeschnitten, sowohl beim Empfang als auch beim Senden.

Boissiniere pianographierte eine Codenummer auf ihrer Klaviatur und erhielt auf ihrem Zielfernrohr ein Bild des Inneren von Bourbakofs Kabine. Letzterer lag auf seinem Bett und las eine Abhandlung über algebraische Geometrie, während er Mozart hörte.

- Was soll ich mit diesem Tier machen? ...

Bourbakof antwortete auf die Vorladung Boissinières. Letztere sahen überwältigt aus. Er saß an seinem Arbeitstisch und hatte ein Kinderspiel herausgenommen, etwas, um Seifenblasen zu machen.

- Wo bekommt man so etwas?

- Meine Liebe, in diesem Kirchenschiff gibt es von allem etwas, außer echtem Whisky, leider, sonst hätte ich sofort eine Flasche davon allein getrunken.

- Haben Sie einen "bout de blues", Boissinière?

- Ich weiß nicht, wie Sie das machen. Man hat das Gefühl, man könnte auf einer einsamen Insel zehn Jahre lang mit Mathebüchern allein gelassen werden und würde die Zeit nicht vergehen sehen.

- Ich mag Mathe, es entspannt mich, was wollen Sie?

- Sie lesen das wie einen Comic!

- Das ist irgendwie wahr. Sie wissen, dass es manchmal ein bisschen Humor oder Spannung auf einigen der Seiten gibt...

Boissinière blickte in den Himmel. Er hatte die Flüssigkeit, mit der die Seifenblasen erzeugt wurden, in ein Tablett gegossen. Er hatte verschiedene Gegenstände, an denen er einen irisierenden Film anbringen konnte. Er wählte zwei davon aus, bei denen es sich um Kreise mit gleichem Radius handelte, die am Ende einer Stange befestigt waren. Wenn er es richtig gemacht hat, könnte er aus den beiden Kreisen einen annähernd zylindrischen Film herstellen.

Bourbakof interveniert:

- Es ist ein interessantes Variationsproblem. Wussten Sie, dass es für einen bestimmten Wert des Radius der Kreise einen maximalen Trennungsabstand gibt, über den hinaus der Film nicht gehalten werden kann, und dass sich all dies berechnen lässt?

Boissinière führte das Experiment durch. Er bewegte die Kreise auseinander, und tatsächlich gab es einen Moment, in dem der Film auseinander riss und auf jedem der Kreise zwei kreisförmige Membranen zurückblieb.

- Und Sie sind in der Lage, so etwas zu berechnen?

- Kindisch! Es gibt nur einige wenige Berechnungszeilen.

- Sie könnten uns das vorlegen, indem... Seminar?

- Wann immer Sie bereit sind.

- Nun... Ich werde eine Anzeige aufgeben. Das wird die Truppen ein wenig aufmuntern. Zumal es noch eine Weile dauern wird, bis wir den Rand des Sonnensystems erreichen werden.

Die Atmosphäre des Seminars war ziemlich retro. Als Boissinière das Kirchenschiff gebaut hatte, war nämlich alles, was nicht direkt mit dem Antrieb zu tun hatte, an Ort und Stelle gefunden worden. Nicht weit entfernt von einem Imperium, das sich im Zerfallsprozess befindet, und durch Barzahlung in Dollar konnte man so ziemlich alles bekommen. Jemand brachte eine alte Tafel und eine Schachtel Kreidestifte mit. Andere holten Sitze mit Regalen zurück. Bourbakof hat einen fliegenden Start hingelegt.

Einer der Anwesenden neigte zu Boissinière:

- Hubert, ich kann nicht einmal Notizen machen. Es ist, als würde er mit dem linken Ärmel das ausradieren, was er mit der rechten Hand schreibt.

- Da haben wir es", sagte Bourbakof, weiß mit Kreidestaub.

Boissinière räusperte sich.

- Sehr beeindruckend. Aber ich glaube nicht, dass Ihnen klar ist, dass Sie sich hier nicht in einem Hörsaal der Normale Sup befinden. Vor Ihnen: verschiedene Personen, Physiker, Chemiker, ein paar Biologen mit mathematischem Hintergrund. Ihre Demonstration war beeindruckend, aber Sie gehen viel zu schnell.

- Ich bin ein schrecklicher Schriftsteller, ich weiß, das hat man mir immer gesagt. Aber es ist alles absolut elementar!

- Ich zweifle nicht eine Sekunde daran, aber ich glaube, dass wir nur dann lebend aus einem Ihrer Seminare herauskommen, wenn wir alles Schritt für Schritt tun. Mein Problem ist, dass es jeder versteht. Wir haben nicht Ihre geistige Beweglichkeit!

- Aber um ein solches Schiff zu bauen, Boissinière, mussten Sie doch noch ziemlich ausgefeilte Kenntnisse anwenden, nicht wahr?

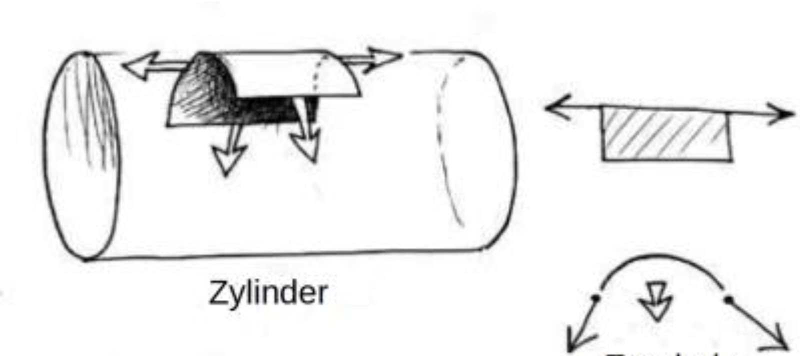
- Ja und nein...

Ein amerikanischer Physiker namens Fowler lachte laut auf:

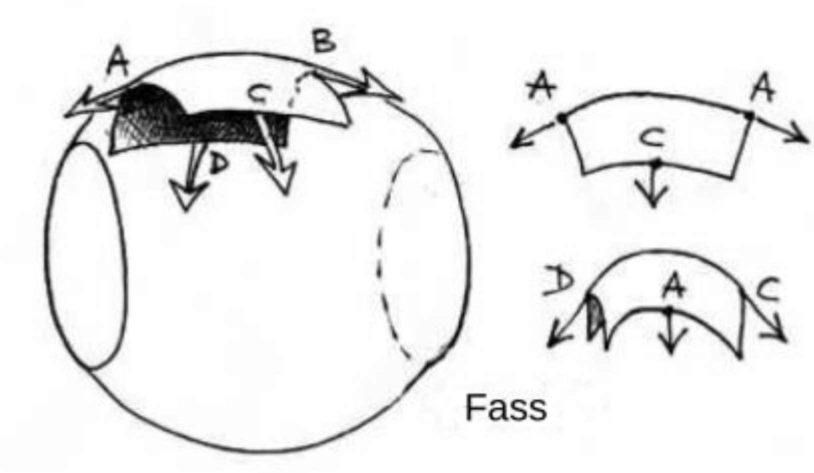
- Wissen Sie, mein lieber Bourbakof, in der Physik ist es oft mehr eine Frage des Mutes als der Intelligenz!

Boissinière ging zum Vorstand und versuchte, das Argument zu rekonstruieren.

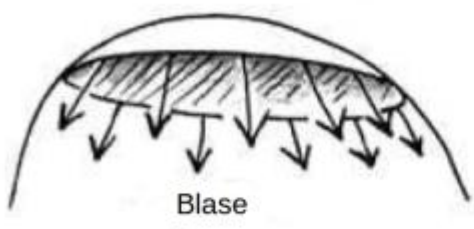
- Also gut. Jeder hat vor dem Bourbakof-Vortrag das lustige kleine Experiment gesehen, bei dem ein rotationssymmetrischer Seifenfilm auf zwei koaxialen Kreisen mit dem gleichen Radius R ruht. Wir haben alle verstanden, dass in diesem kombinierte Spannungskräfte vorhanden sind, die den Film tangieren. Wir verstanden auch, warum wir zwischen den beiden Kreisen mit dem Radius R keinen Film von zylindrischer Form erzeugen konnten. Wenn ich ein Element dieses Zylinders zeichne, sehe ich, dass die Resultierende der Kräfte nicht Null ist. In Ermangelung einer anderen Kraft, z.B. in Verbindung mit einer Druckdifferenz zwischen den beiden Seiten der Folie, neigt dieser Zylinder dazu, sich zusammenzuziehen:



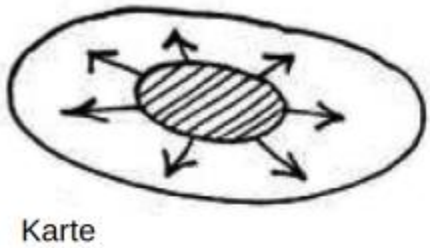
- Denkbar ist auch, dass, damit der Film die Form eines "Fasses" annimmt, ein noch größerer Druckunterschied ausgeübt werden müsste:



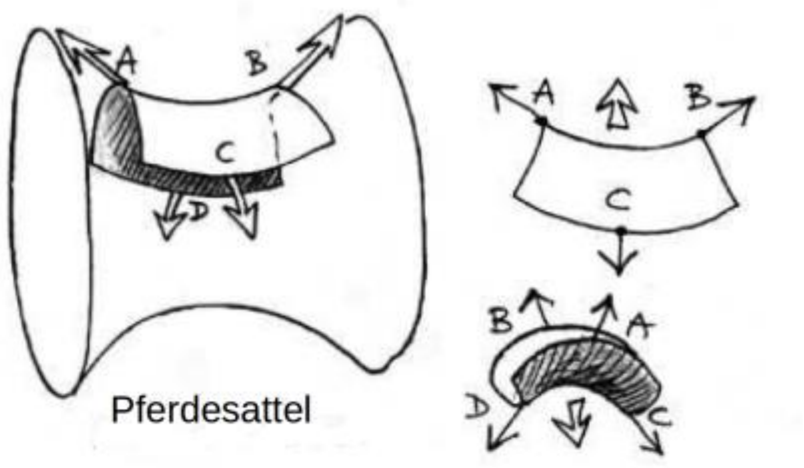
- Wenn wir statt an einen Film mit starren Konturen an eine einfache Blase dachten, an eine Fläche ohne Kanten, deren Element durch eine Kugelkappe dargestellt werden könnte:



Die Notwendigkeit einer Druckdifferenz wäre ebenfalls notwendig. Auf der anderen Seite könnte man sich eine Filmaufnahme vorstellen, die auf einem Kreis basiert. Einfach deshalb, weil die Resultierende der auf ein Element einwirkenden Zugkräfte gleich Null ist:



- Um auf unseren Film zurückzukommen, der auf den beiden koaxialen Kreisen basiert, wird deutlich, dass nur die Form eines "Pferdesattels" ohne Druckdifferenz zwischen den beiden Seiten der Oberfläche existieren kann.



Der ganze Raum nickte.

- Boissiniere", sagte Turyschew, "Sie hätten zur Kunstschule gehen sollen!

- Danke, ich gebe mein Bestes. Nach diesen Vorbemerkungen möchte ich, dass wir uns Notizen machen.

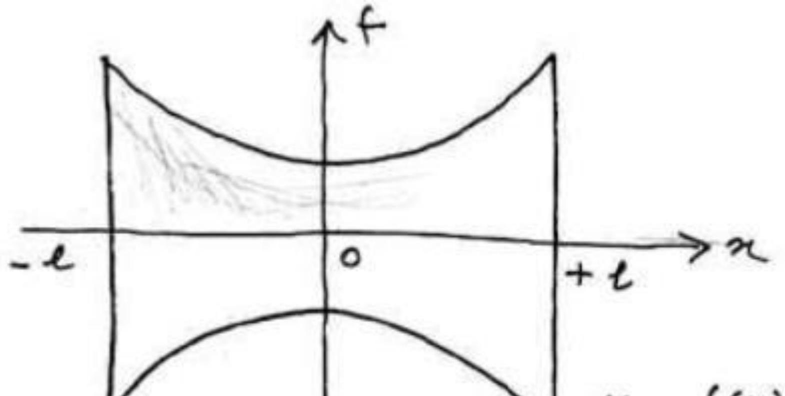
Könnte sich jemand darum kümmern?

- Kein Problem", sagte Fowler, der ihm seinen Laptop vor die Nase gestellt hatte.

- Wie wollen Sie das machen, mit Ihrer Maschine?

- Ich bin daran gewöhnt. Was Ihre Zeichnungen betrifft, so brauche ich sie nur mit dieser Minikamera zu blitzen, damit ich sie in den Text integrieren kann. Machen Sie sich um mich keine Sorgen, ich schaffe das schon.

Boissinière griff Bourbakofs Ansatz auf, indem er versuchte, alles, was der andere gesagt hatte, rein verbal anschaulich darzustellen. Dann zeichnete er die folgende Abbildung:



- Ich nenne f (x) den Meridian dieser Oberfläche der Revolution. O ist das Symmetriezentrum dieses Objekts. Meine Kreise mit Radius R, koaxial, sind an der Abszisse + L und - L angeordnet.

Er wandte sich an Fowler:

- Können Sie das alles begreifen?

- Ja.

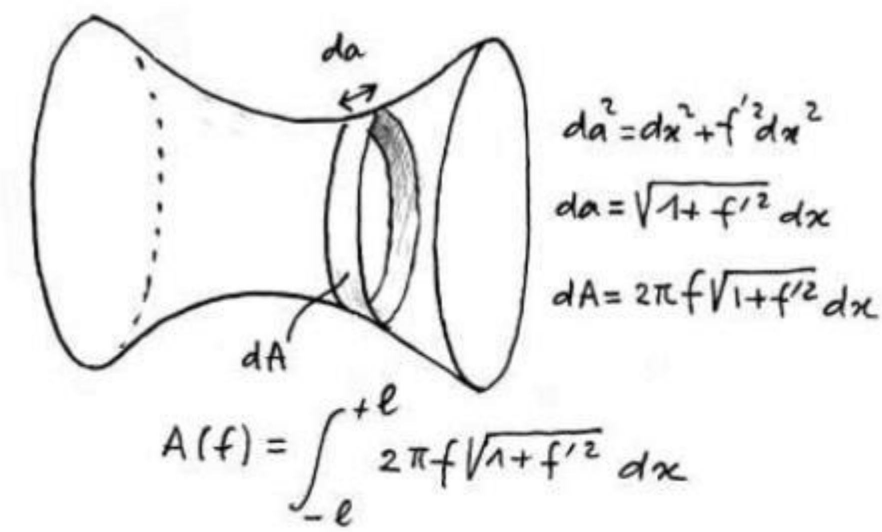
Boissinière näherte sich, um einen Blick darauf zu werfen.

- Aber Sie setzen ein L? Zeichen ...

- Ja, denn das "kleine l" sieht der Zahl 1 furchtbar ähnlich. Nehmen wir an, wenn wir das alles noch einmal lesen, sollten wir daran denken, dass wir im Text ein großes L haben, das auf Ihren Zahlen einem Kleinbuchstaben entspricht.

Boissinière wieder aufgenommen:

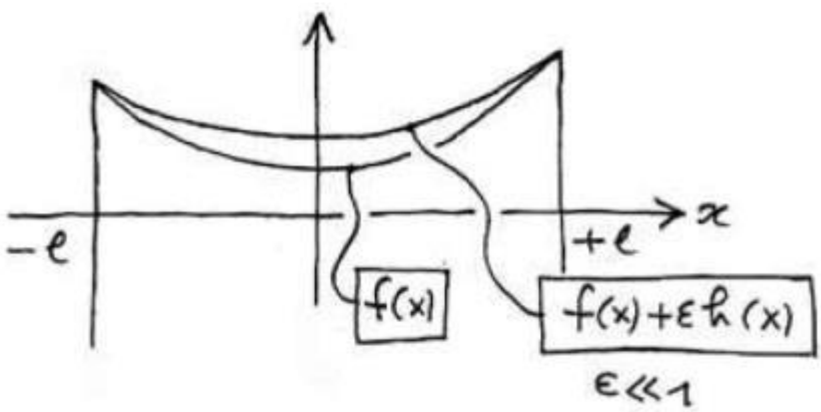
- Ich kann dann das Flächenelement dieser Fläche berechnen:



Die Spannungen in diesem Film führen dazu, dass er eine Konfiguration annimmt, die einem minimalen Bereich entspricht und ...

Boissinière hatte sich ein wenig verirrt. Turyshev, ein Biologe:

- Und dort hat Bourbakof diese Oberfläche ein wenig gestört, und zwar so, dass sie immer noch eine revolutionäre Symmetrie bewahrt und offensichtlich weiterhin auf den beiden Kreisen ruht. Er sagte, dies liefe darauf hinaus, der Funktion f(x), die den Meridian darstellt, einen Störungsterm h(x) hinzuzufügen:



- Okay, okay, ich bin dabei", fuhr Boissinière fort. Jetzt berechnen wir das neue Gebiet, basierend auf diesem Meridian, der dem vorherigen nahe liegt.

$$A(f+\varepsilon h)=\int_{-\ell}^{+\ell} 2\pi\,(f+\varepsilon h)\sqrt{1+(f'+\varepsilon h')^2}\;dx$$

- Und dann machen Sie eine Serienentwicklung, wobei Sie nur die Bedingungen der ersten Ordnung einhalten.

Boissinière hatte viel Spaß. Er hätte gedacht, er sei Jahrzehnte in der Zeit zurückgeworfen worden und in einer Art "Vorbereitungsschule" herumgestolpert. Er bestand darauf, alle Details der Berechnungen einzubeziehen.

$$A(f+\varepsilon h)=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\sqrt{1+f'^2+2f'h'\varepsilon+\cancel{\varepsilon^2 h'^2}}\;dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\sqrt{1+f'^2}\sqrt{1+\frac{2f'h'\varepsilon}{1+f'^2}}\;dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\sqrt{1+f'^2}\left(1+\frac{f'h'\varepsilon}{1+f'^2}\right)dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}(f+\varepsilon h)\left[\sqrt{1+f'^2}+\frac{f'h'\varepsilon}{\sqrt{1+f'^2}}\right]dx$$

$$=2\pi\int_{-\ell}^{+\ell} f\sqrt{1+f'^2}\,dx+2\pi\int_{-\ell}^{+\ell}\left\{\varepsilon h\sqrt{1+f'^2}+\frac{\varepsilon f f' h'}{\sqrt{1+f'^2}}+\cancel{\frac{\varepsilon^2 h f' h'}{\sqrt{1+f'^2}}}\right\}dx$$

- Dies wird das Thema :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon} = 2\pi \int_{-\ell}^{+\ell} \left(h\sqrt{1+f'^2} + \frac{f f' h'}{\sqrt{1+f'^2}} \right) dx$$

$$I_1 = 2\pi \int_{-\ell}^{+\ell} h\sqrt{1+f'^2}\, dx \qquad I_2 = 2\pi \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{f f' h'}{\sqrt{1+f'^2}}\, dx$$

$$h'dx = dh \qquad I_2 = 2\pi \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{f f' dh}{\sqrt{1+f'^2}}$$

Integration
in Teilen :

$$\int u\, dv = [uv] - \int v\, du$$

$$I_2 = 2\pi \left[\frac{f f' h}{\sqrt{1+f'^2}} \right]_{-\ell}^{+\ell} - 2\pi \int_{-\ell}^{+\ell} h\, d\left(\frac{f f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right) dx$$

$\downarrow$

ungültig, weil $h(\ell) = h(-\ell) = 0$

$$d\left(\frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)=\frac{(f'^2+ff'')\sqrt{1+f'^2}-ff'\frac{2f'f''}{2\sqrt{1+f'^2}}}{1+f'^2}$$

$$=\frac{(f'^2+ff'')(1+f'^2)-ff'^2f''}{(1+f'^2)^{3/2}}=\frac{f'^2+ff''+\cancel{ff'^2f''}-\cancel{ff'^2f''}+f'^4}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon}=I_1+I_2=2\pi\int_{-e}^{+e}h\sqrt{1+f'^2}\,dx-2\pi\int_{-e}^{+e}h\,\frac{f'^4+ff''+f'^2}{(1+f'^2)^{3/2}}\,dx$$

$$\frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon}=2\pi\int_{-e}^{+e}\frac{h\left[1+f'^2-ff''\right]}{(1+f'^2)^{3/2}}\,dx$$

Bourbakof war erfreut.

- In Ordnung, ich sehe, dass Sie alle nicht außer Form sind. Nun, was braucht es nun, damit diese Variation im Bereich extrem wird?

Fowler kratzte sich am Kopf.

- Es scheint mir, dass, wenn der Zähler gesaugt hat, es sich summieren sollte. Da sie seriell entwickelt wurde, würde dies bedeuten, dass die Variation von höherer Ordnung wäre. Wir befänden uns also in einer extremen Konfiguration.

$$1+f'^2-ff''=0$$

Boissinière fuhr fort:

- Das ist also eine Differentialgleichung, die uns die Meridiangleichung für einen Bereich der Extremalmembranen liefert. Ist es leicht zu lösen?

- Es ist ein bisschen taupinal", antwortete Bourbakof, "und ich gestehe, dass es ein bisschen sinnlos ist. Ich werde Ihnen das Ergebnis mitteilen:

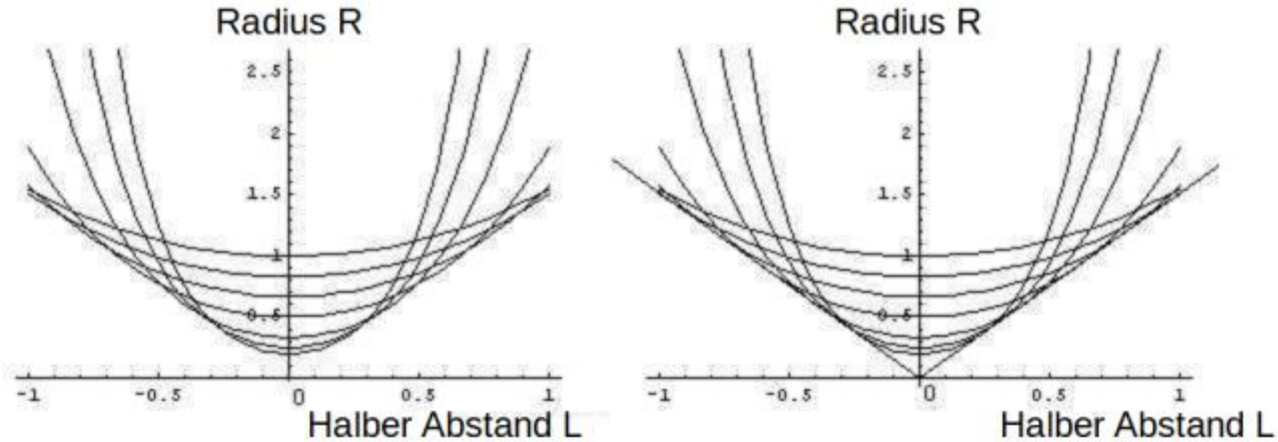
$$\boxed{f(x)=\frac{\operatorname{ch} sx}{s}}$$

$$f'=\operatorname{sh} sx \qquad f''=s\operatorname{ch} sx \qquad ff''=\operatorname{ch}^2 sx$$

$$1+\operatorname{sh}^2 sx-\operatorname{ch}^2 sx=0 \text{ weil } \operatorname{ch}^2 sx-\operatorname{sh}^2 sx=1$$

Fowler hat sein Handy nie verlassen.

In zwei Strichen eines Topflöffels stellte er die allgemeine Form der Kurven her.



- Die Einhüllende dieser Kurvenfamilie besteht offenbar aus zwei Geraden, die durch den Ursprung verlaufen.

- Wenn x gleich Null ist, ist der hyperbolische Kosinus gleich Eins. Die Ordinate des Minimums der Kurve ist 1/s.

Boissinière betrachtete die Figur aufmerksam.

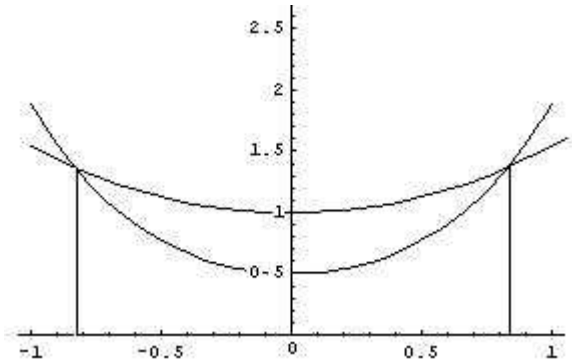
- Irgendetwas sagt mir, dass diese Kurven... homothetisch.

- Gut gemacht", bemerkte Bourbakof. Sie haben das Auge eines Karikaturisten. Die Gleichung kann geschrieben werden:

$$sf(x) = ch(sx)$$

Wir sehen: Wenn f (x) eine Lösung ist, dann ist f (x) auch eine Lösung.

Turyshev bemerkte, dass durch zwei Kreise gingen zwei Flächen, entsprechend den Meridianen:



- Nun", fuhr Fowler fort, ohne seine Bemerkung zu wiederholen, "nun, da wir die Gleichung für diesen Meridian haben, müssen wir nur noch den Wert des Parameters s so anpassen, dass diese Fläche auf den beiden koaxialen Kreisen mit Radius R, die sich in + L und - L befinden, zu liegen kommt.

- Ja, aber Sie werden sehen, dass das nicht immer möglich ist", sagte Bourbakof mit einem Grinsen im Gesicht.

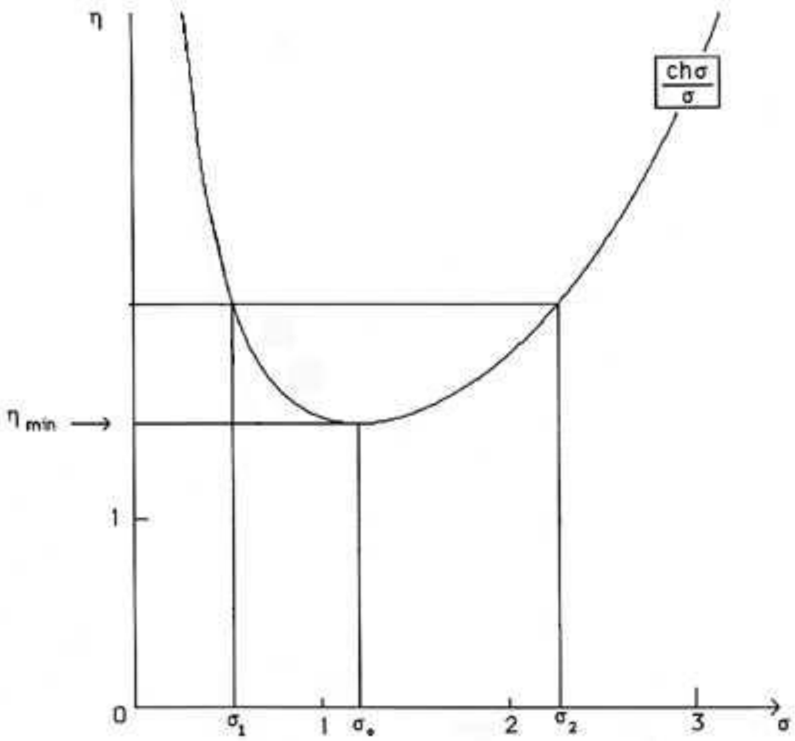
- Nun... Ich kann immer schreiben:

$$f_s = \operatorname{ch} s x$$

$$R s = \operatorname{ch} s \ell \quad \text{wir stellen uns:} \quad \sigma = s \ell$$

$$\sigma \frac{R}{\ell} = \operatorname{ch} \sigma \qquad \frac{R}{\ell} = \frac{\operatorname{ch} \sigma}{\sigma} \quad \text{wir stellen uns:} \ \eta = \frac{R}{\ell}$$

Es gibt eine Kurve zu zeichnen. Ah, tatsächlich!



Für = 2 haben wir zwei Werte.

- Sehen Sie", rief Turyschew, "das entspricht den beiden Meridianlösungen, die ich oben gezeichnet hatte. Wenn wir zum Beispiel ein Verhältnis zwischen dem Radius R der Kreise und dem halben Abstand L zwischen ihnen nehmen würden, das gleich 2 wäre, was wären dann die beiden Werte von ?

Fowler spielte auf seinem Handy Klavier.

- Geben Sie mir fünf Minuten, und ich berechne die Zahlenwerte für Sie. Bitte sehr ..:

1 = 0,5894

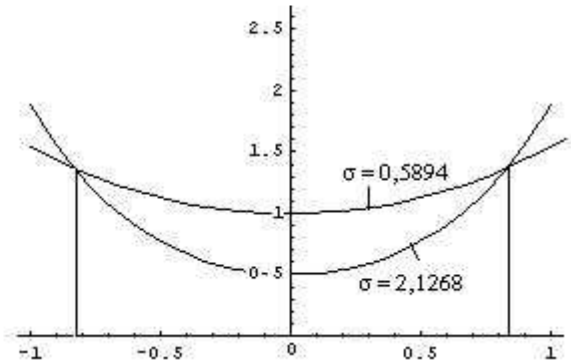
2 = 2,1268

- Wir haben also zwei Meridianlösungen der Differentialgleichungen. Sehen wir uns an, wie der Radius des Halskreises des Meridians variiert, d.h. des Kreises mit dem kleinsten Radius, der in x = 0 liegt:

$$f = r = \frac{\operatorname{ch} s x}{s} = \frac{\operatorname{ch}\left(\sigma \frac{x}{L}\right)}{\sigma} L$$

$$x = 0 \longrightarrow r_{min} = \frac{L}{\sigma}$$

Wenn zwei verschiedene Meridiane für den gleichen Wert von L und R erhalten werden, erhält man den kleineren Radius (Halskreis) für den größeren Wert von (d.h. 2,1268).



- Die kleinste Fläche entspricht dem kleinsten s, d.h. dem grössten Halskreis. Aber welche dieser beiden Revolutionsflächen hat die kleinere Fläche?

Bourbakof empfahl, nachzudenken.

$$f = \frac{\operatorname{ch} ax}{a} \qquad f' = \operatorname{sh} ax$$

$$A(f) = \int_{-L}^{+L} 2\pi f \sqrt{1+f'^2}\, dx = \int_{-L}^{+L} \frac{2\pi}{a} \operatorname{ch}^2 ax \, dx$$

$$ax = u \qquad dx = \frac{du}{a}$$

$$A(f) = \int_{-aL}^{aL} \frac{2\pi}{a^2} \operatorname{ch}^2 u \, du \qquad \operatorname{ch} u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 u = \frac{e^{2u} + e^{-2u} + 2}{4} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} 2u + 1\right)$$

$$A(f) = \int_{-aL}^{+aL} \frac{\pi}{a^2}\left(\operatorname{ch} 2u + 1\right) du = \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2u + u\right]_{-aL}^{+aL}$$

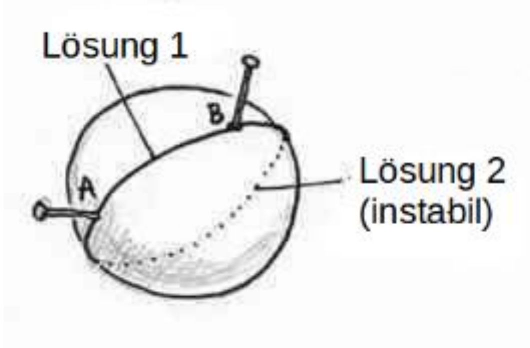
$$A(f) = \frac{\pi}{a^2}\left(\operatorname{sh} 2aL + 2aL\right)$$

Wir tun es: $L = 1$ $\qquad A \sim \dfrac{\operatorname{sh} 2a + 2a}{a^2}$

- Fowler, rechnen Sie sich das mal aus.

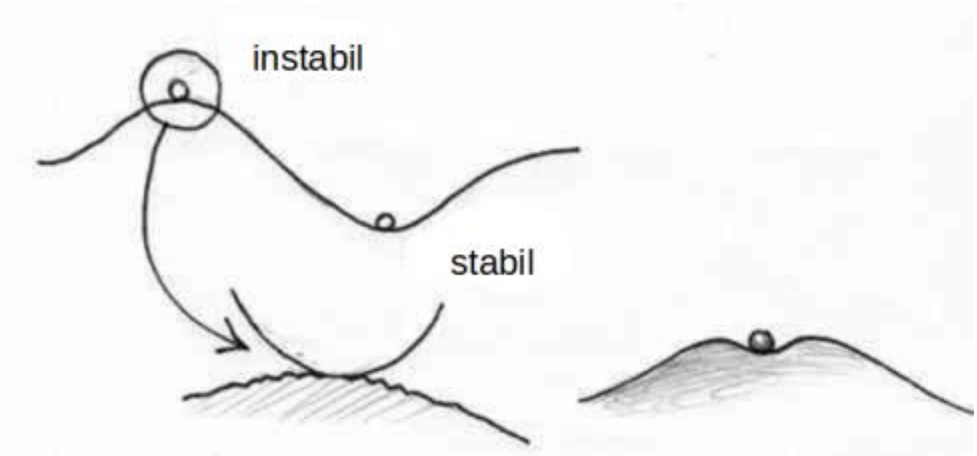
- Es ist geschafft: Der Meridian mit dem größten Halsradius ist der Meridian mit der kleinsten Fläche. Aber ich kann mir trotzdem nicht vorstellen, dass es zwei Lösungen gibt. Bourbakof, bringen Sie uns bitte aus dieser Sackgasse heraus.

- Eine dieser Lösungen ist einfach instabil. Um die Instabilität einer dieser Lösungen aufzuzeigen, wäre eine Serienentwicklung in der Reihenfolge zwei erforderlich. Das wäre ein bisschen kompliziert. Lassen Sie uns ein aussagekräftigeres Beispiel nehmen. Stellen Sie sich vor, Sie suchen nach dem minimalen Weg zwischen zwei Punkten auf einer Kugel. Wir könnten dies auf ähnliche Weise behandeln, indem wir es als ein extremes Problem behandeln. Wir würden dann zwei Lösungen finden:



- Es sieht aus wie ein Gummiband, das zwei auf einer Orange gepflanzte Stifte verbindet.

- Es gibt also zwei AB-Strecken. Beide sind extreme Routen, aber nur eine ist "stabil", authentisch kürzer. Das ist der Unterschied zwischen Mathematik und Physik. Eine physikalische Lösung ist eine stabile Lösung, wie in der Abbildung unten dargestellt:



Der Ball auf der Spitze des Hügels, auf der linken Seite, befindet sich in einem instabilen Gleichgewicht.

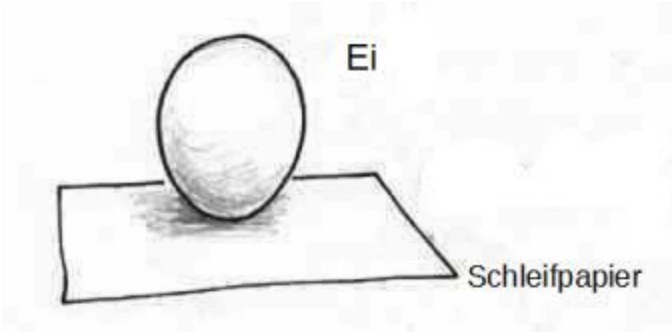
- Könnten wir es nicht schaffen, es ganz nach oben zu bringen? ...

- Nein, wenn man es schafft, es auf den Hügel zu bringen, ist es nicht ganz glatt. Die geringste Rauhigkeit verzerrt das Problem. Es ist dann gleichbedeutend damit, den Stamm in eine kleine Schüssel zu legen.

- Hm mm, sagt Iljuschin, unter diesen Bedingungen sollte es möglich sein, ein Ei auf seiner Spitze im Gleichgewicht zu halten, vorausgesetzt, es wird auf grobes Schleifpapier gelegt. Boissinière, haben Sie Eier und Schleifpapier?

- Ja, aber nicht an der gleichen Stelle. Ich werde das alles für Sie besorgen.

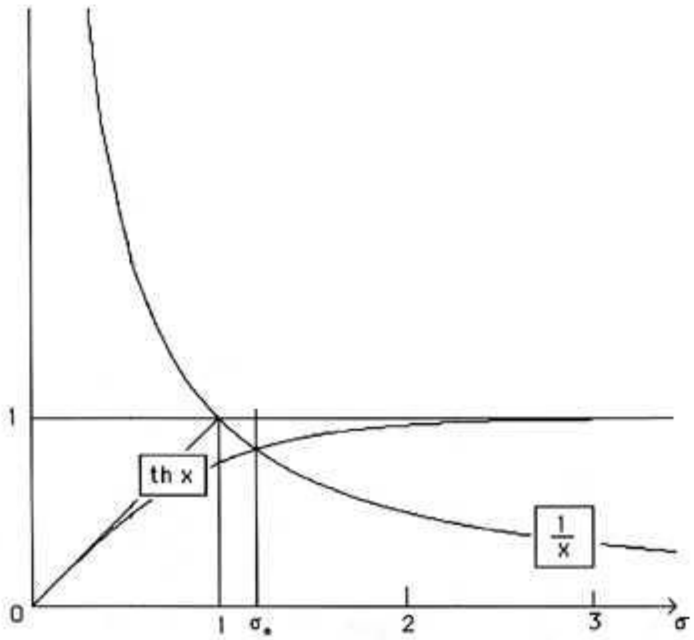
Das Experiment war ein Erfolg.



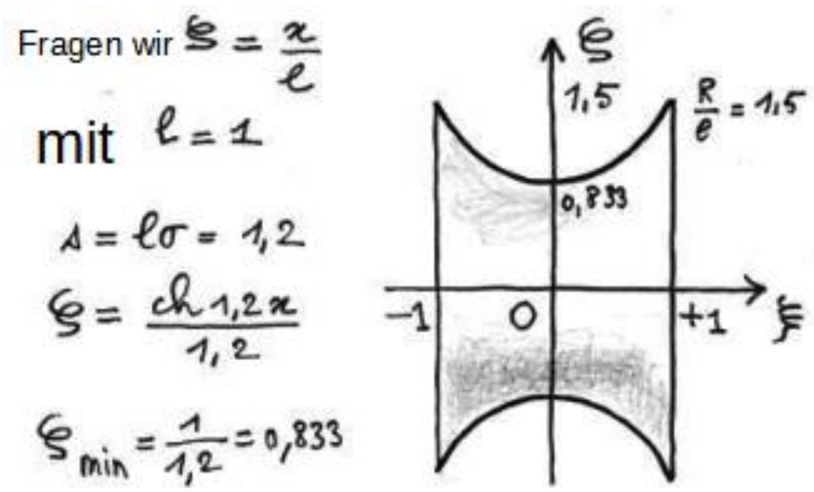
- Lassen Sie uns zu der Zahl zurückkehren, die uns zwei Werte gegeben hat: . Sie können sehen, dass eine horizontale Linie diese Kurve nicht automatisch schneidet. Für niedrige Werte von , gibt es keine Lösung. Es gibt einen kritischen Wert, der nahe bei cr = 1,5 liegt. Um den entsprechenden Wert von zu finden, müssen Sie nur den Wert von ableiten:

$$\left(\frac{ch\,\sigma}{\sigma}\right)' = \frac{\sigma\, sh\,\sigma - ch\,\sigma}{\sigma^2} \quad \text{ungültig für} \quad th\,\sigma_0 = \frac{1}{\sigma_0}$$

Mit der folgenden grafischen Darstellung :



Damit haben wir einen Wert nahe 1,2. Wir müssen diesen Wert nur injizieren, um den maximalen Abstand zu finden, von dem wir zwei koaxiale Kreise mit dem gleichen Radius R trennen können.

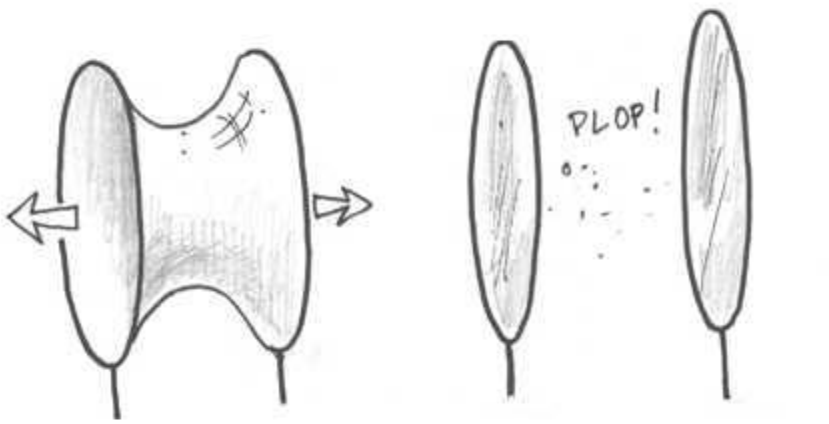


Iljuschin war verspätet eingetroffen und konnte mit dem Seifenwasser nicht umgehen.

- Was passiert, wenn Sie die Kreise etwas weiter ausdehnen?

- Erleben Sie es, meine Liebe!

Blitzschnell saß er vor dem Tisch, den Accessoires und der Wanne mit Seifenwasser zugewandt. Nach einigen Versuchen gelang es ihm, die gewünschte Konfiguration zu erhalten, und hier ist, was er gefunden hat:



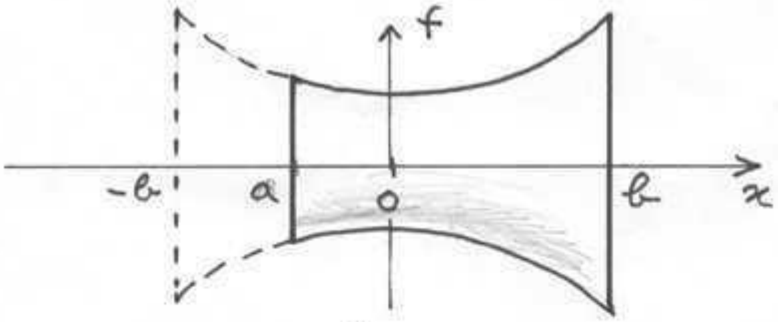
- Sehr witzig! Das Zwerchfell reißt und bildet zwei flache Scheiben.

- Immer in einer Oberflächenkonfiguration mit minimaler Fläche. Aber diese Oberfläche besteht dann aus zwei Scheiben, die unzusammenhängend sind.

Boissinière amüsierte sich prächtig.

- Bourbakof, wie würden wir mit dem Problem umgehen, wenn wir es mit zwei Kreisen mit unterschiedlichen Radien zu tun hätten?

- Rechnen Sie noch einmal nach. Dort hatte ich zwei Kreise mit gleichem Radius genommen, um die Ideen zu fixieren, aber das ist keineswegs unabdingbar. Sie werden also am Ende die gleiche Differentialgleichung haben, die die gleiche Lösung mit ihren beiden Integrationskonstanten haben wird. Die Mindestfläche, die auf zwei Kreisen mit unterschiedlichen Radien basiert, wird einfach ein Teil der Art der Oberfläche sein, die wir zuvor gefunden haben. Zwei Kreise mit dem gleichen Wert zu nehmen, war einfach einfacher, um die kritischen Abstandsbedingungen zu zeigen.



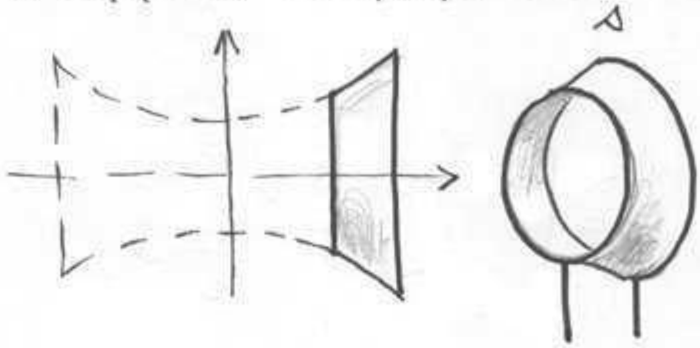
$$A(f) = \int_a^b 2\pi f\sqrt{1+f'^2}\,dx$$

$$A(f+\varepsilon h) = \int_a^b 2\pi(f+\varepsilon h)\sqrt{1+(f'+\varepsilon h')^2}\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\frac{A(f+\varepsilon h)-A(f)}{\varepsilon}} = 2\pi\int_a^b \frac{h\left[1+f'^2-ff''\right]}{(1+f'^2)^{3/2}}\,dx$$

$$1+f'^2-ff''=0 \longrightarrow f(x)=\frac{\operatorname{ch} s(x-x_0)}{s}$$



- Verzeihung, es war offensichtlich...

Fowler war begeistert.

- Sehen Sie, Ilyushin, Bourbakof hat aus einer mit Seifenwasser gefüllten Schale ein sehr schönes Variationskalkül herausgebracht. Sie sind ein Magier, meine Liebe.

Bourbakof war unempfindlich gegenüber Lob.

- Es ist auch eine Möglichkeit, einen Lagrangianer erscheinen zu lassen.

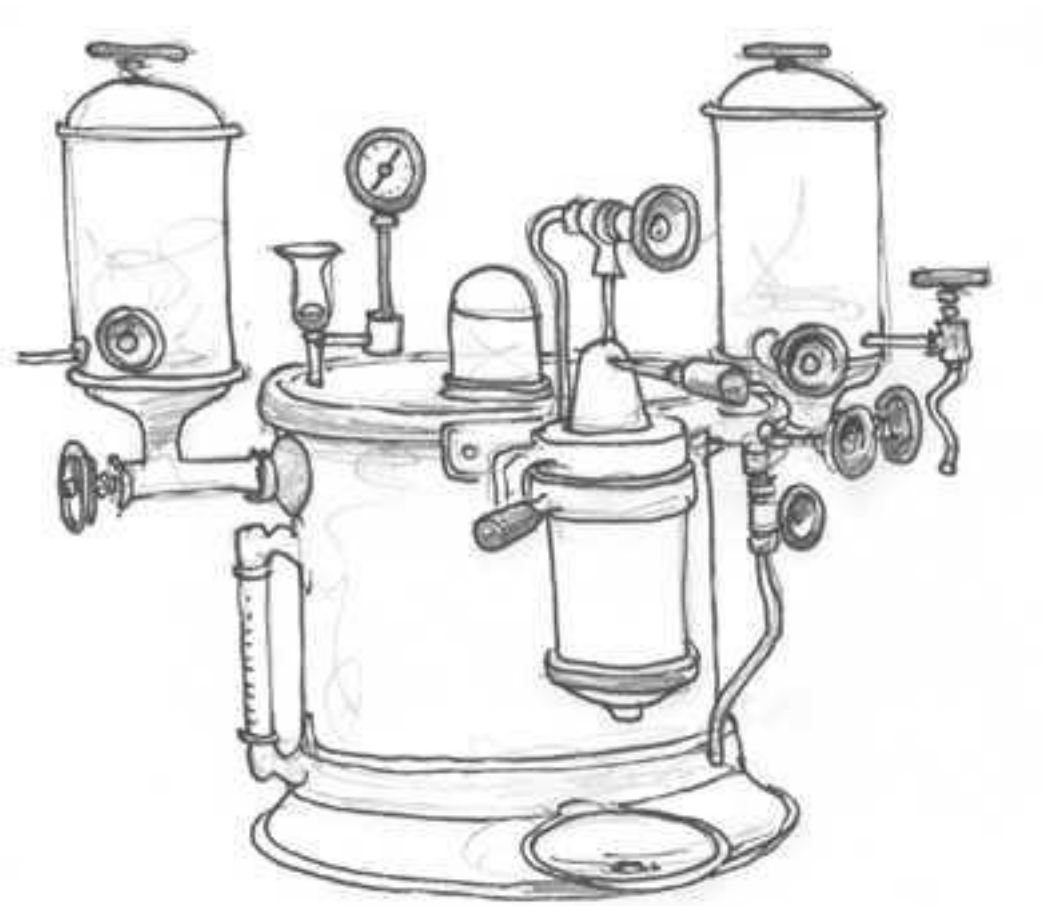
- Ein Lagrangeaner, rief Iljuschin! Ich habe noch nie in meinem Leben einen gesehen. Und doch hatten meine Kollegen theoretischer Physiker nur dieses Wort im Mund.

- Sie haben einen direkt vor sich", antwortete Fowler.

- Wo? rief Iljuschin, die Augen weit aufgerissen, als er durch die Steine auf dem Brett blickte.

Boissinière brach in Gelächter aus.

- Ich schlage vor, dass wir einen kleinen Kaffee trinken gehen und dann, unter der Leitung von Bourbakof, unseren Freund, den Biologen Turyschew, in die Geheimnisse des Lagrangianers einweihen.



- Guter Gott", rief Fowler, "Boissinière, woher kommt diese Ungeheuerlichkeit?

- Aus der Tschechoslowakei. Aber ich kann Ihnen garantieren, dass sie ausgezeichneten Kaffee kocht. Turyschew, der es analysiert hat, sagt, es sei sehr gut.

- Glauben Sie nicht automatisch alles, was Boissinière Ihnen erzählt. Tatsächlich stammt diese Kaffeemaschine direkt aus dem Wrack der Titanic!

- Das wäre überhaupt nicht überraschend!

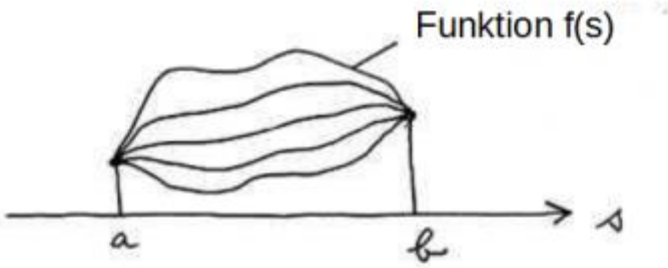
Der Kaffee wurde getrunken, alle versammelten sich wieder in dem, was als Seminarraum dienen sollte, und Turyschew wurde an den Vorstand geschickt. Bourbakof wandte sich an ihn:

- Turyschew, würde es Ihnen etwas ausmachen, die Bewertungen ein wenig zu ändern? Ersetzen wir die Variable x durch s und beschließen, dass die Ableitung von dieser Variable durch einen Punkt, der darüber gesetzt wird, vermerkt wird. Wir werden dann eine Funktion L betrachten, die a priori von der Funktion f und ihrer Ableitung abhängt. Wir werden diese Funktion dann als Lagrange-Funktion bezeichnen.

Unter der Führung von Bourbakof richtete Turyschew sich selbst hin.

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(f, \dot{f}) \quad \text{où} \quad \dot{f} = \frac{df}{ds}$$

- Gut. Die Funktion f (s) wird auf ein bestimmtes Intervall (a, b) gesetzt. Wir werden die unendliche Menge von Funktionen f (s) betrachten, die die in s = a und in s = b angegebenen Werte annehmen:



Wir werden dann die

$$L(f(s), \dot{f}(s))$$

auf das Intervall, und wir werden dieses Integral ein Integral der Aktion oder, einfacher gesagt, eine Aktion nennen.

$$A(f) = \int_a^b \mathcal{L}(f, \dot{f})\, ds \quad \text{(Aktion)}$$

Lassen Sie uns nun noch einmal die Frage aufgreifen, die sich Lagrange vor zwei Jahrhunderten gestellt hat:

"Gibt es unter all den Funktionen f(s), die prüfen:

$$f(a) = \alpha \qquad et \qquad f(b) = \beta$$

eine bestimmte Funktion, die diese Aktion extrem macht?"

Turyschew, fahren Sie fort.

Der Biologe blieb einen Moment lang verblüfft.

- Ich nehme an, Turyschew... das muss in der Nähe dessen liegen, was wir vorhin getan haben.

- Völlig richtig.

- Nun, dann führe ich eine leichte Störung in dieser Funktion f(s) ein:

$$f(s) \longrightarrow f(s) + \varepsilon\, h(s) \qquad \varepsilon \ll 1$$

Mit:

$$h(a)=h(b)=0$$

so dass jede der gestörten Funktionen die gleichen Werte wie f an den Terminals a und b annimmt.

Um dieses Problem der Extreme zu lösen, werde ich erwägen, an die Grenzen des Berichts zu gehen:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f+\varepsilon h) - A(f)}{\varepsilon}$$

Ich werde eine Entwicklung erster Ordnung meines Integrals durchführen.

$$A(f+\varepsilon h) = \int_a^b \mathcal{L}(f, \dot{f})\,ds + \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} \dot{h} \right] ds + o(\varepsilon)$$

Das erlaubt mir zu schreiben:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f+\varepsilon h) - A(f)}{\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} \dot{h} \right] ds$$

Hier habe ich zwei Integrale:

$$I_1 = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} h\,ds \; ; \; I_2 = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} \dot{h}\,ds$$

Im zweiten Teil werde ich über eine teilweise Integration verhandeln, in Analogie zu dem, was wir früher getan haben.

- Nun... (seufzt)

- Ich brauche nur zu schreiben:

$$\dot{h}\, ds = dh \qquad\qquad I_2 = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\, dh$$

und diese Integration in Teilen vorantreiben, mit dem gleichen Trick wie bisher:

$$I_2 = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\, h\right]_a^b - \int_a^b h\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right)\right] ds$$

nichtig

Ursache $h(a) = h(b) = 0$

Die sich daraus ergibt, dass sich alle diese Funktionen f (s), die in das Lagrange'sche System eingehen, sowie ihre Ableitungen nur durch eine Funktion h (s) voneinander unterscheiden, so dass h(a) =0 und h(b) =0 ist.

- Bleibt also nur noch ich:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(f+\varepsilon h) - A(f)}{\varepsilon} =$$

$$\int_a^b h\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right)\right] ds$$

- Dieses Verhältnis ist Null, wenn die Menge in eckigen Klammern gleich Null ist.

- Damit erhalten Sie die Lagrange-Gleichung in eindimensionaler Form:

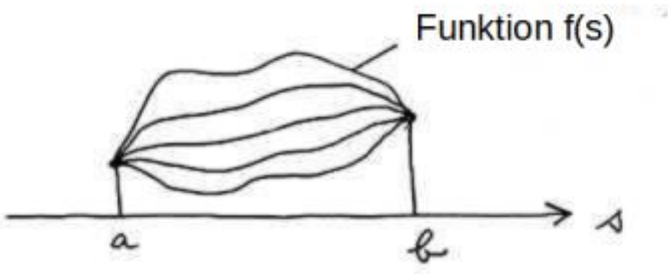
Turyshev hingerichtet:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}} \quad \text{Lagrange}$$

Sehen Sie, mein lieber Turyschew, am Ende bricht es nicht drei Beine einer Ente.

- Es ist erstaunlich. Ich hatte diese mysteriöse Gleichung immer mit größter Ratlosigkeit betrachtet.

- Wenn wir zu der Zahl zurückkehren:



Man kann sehen, dass diese Gleichung auftaucht, sobald man versucht, den "Weg" frei zu machen, auf dem eine bestimmte "Aktion" extrem ist. Wir suchen nach einem bestimmten Weg aus der Menge der Pfade, die durch zwei gegebene Punkte führen.

- Merkwürdig ist, dass dies in die Berechnung der Mindestfläche einer Fläche eingegriffen hat.

- Gehen Sie zurück zu Ihren Notizen. Indem Sie die "Prämie" der Ableitung durch den Punkt ersetzen, was ist Ihr Handlungsintegral?

- Hm mm, so scheint es mir:

$$A(f) = \int_a^b 2\pi f \sqrt{1+\dot{f}^2}\, dx$$

- Und der Lagrangeaner?

- Hm mm mm...

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(f,\dot{f}) = 2\pi\sqrt{1+\dot{f}^2}$$

- Und wenn Sie nun die Lagrange-Gleichung aus diesem Lagrange-Gleichung schreiben, erhalten Sie...?

Turyschew schien im Wandel begriffen zu sein.

- Ich nehme die 2 ab, damit ich sie nicht mit mir herumtragen muss.

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(f,\dot{f}) = f\sqrt{1+\dot{f}^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \sqrt{1+\dot{f}^2} = \frac{(1+\dot{f}^2)^2}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} = \frac{f\dot{f}}{\sqrt{1+\dot{f}^2}}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{(\dot{f}^2 + f\ddot{f})\sqrt{1+\dot{f}^2} - f\dot{f}\frac{\dot{f}\ddot{f}}{\sqrt{1+\dot{f}^2}}}{(1+\dot{f}^2)}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{(\dot{f}^2 + f\ddot{f})(1+\dot{f}^2) - f\dot{f}^2\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{\dot{f}^2 + f\ddot{f} + \dot{f}^4 + \cancel{f\dot{f}^2\ddot{f}} - \cancel{f\dot{f}^2 f''}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\dot{f}^2 + f\ddot{f} + \cancel{\dot{f}^4}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}} = \frac{\cancel{\dot{f}^4} + 2\dot{f}^2 + 1}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$

$$1 + \dot{f}^2 - f\ddot{f} = 0$$

Und ich finde die Differentialgleichung des extremen Flächenmeridians.

Applaus aus dem Publikum. Fowler pfiff in die Finger.

- Wissen Sie, Turyshev, Sie sind sehr gut, für einen Biologen. Für eine Weile würde ich Sie für eine Doktorarbeit nehmen.

- Übertreiben Sie nicht. Aber es stimmt, dass ich heute viel gelernt habe.

Turyschew lächelte. "Die Dame mit dem Muffin ging immer weiter und weiter:

- Entschieden, Bourbakof, Sie sind ein Künstler. Sie haben gerade die Lagrange-Gleichung aus einer Seifenblase gezogen. An Bord bist du ein Schatz, meine Liebe.

Bourbakof wirkte bescheiden.

- In der Gemeinschaft der Mathematiker kann das Bemühen um Verständlichkeit grenzwertig als Verrat empfunden werden.

- Dann sind Sie ein sehr erfolgreicher Verräter.

- Wenn wir schon dabei sind, warum klären wir diese Frage der Lagrange-Gleichung nicht in einer beliebigen Anzahl von Dimensionen?

Turyschew schaute überrascht:

- Weil die Lagrangesche Gleichung... auch in einem mehrdimensionalen Universum funktioniert?

- Ja, meine Liebe, zweiunddreißig, wenn Sie wollen. Setzen Sie sich nicht so früh hin. Haben Sie Lust weiterzumachen?

- Äh... ja.

Bourbakof konsultierte seine Wache.

- Danach werden wir zu Abend essen, das verspreche ich. Aber solange das Eisen heiß ist, lasst es uns schlagen.

- In Ordnung", antwortete der Biologe.

Sie alle nahmen ihre Plätze ein. Boissinière forderte Bourbakof heraus:

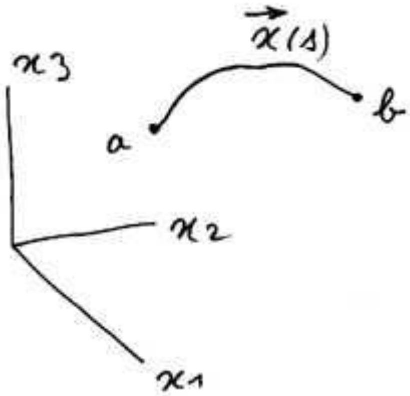
- Sind Sie sicher, dass dies kein zu großer Coup für einen Biologen ist?

Es war Turyschew, der das Publikum beruhigte:

- Es ist ein bisschen neu für mich, aber ich versichere Ihnen, dass ich viel Spaß habe.

- Nun", so Bourbakof weiter, "die Lagrange-Gleichung kann unter Berücksichtigung einer beliebigen Anzahl von Dimensionen konstruiert werden. Es wird bequemer sein, sich einen dreidimensionalen Raum vorzustellen, den Sie natürlich in aller Eile mit dem dreidimensionalen, euklidischen Raum identifizieren werden, mit dem Sie vertraut sind, während man sich, um es richtig zu machen, darauf beschränken sollte, zu sagen, dass es "Raum" ist. Aber ... egal. In diesem dreidimensionalen Raum stellen wir uns zwei Punkte a und b sowie einen Weg vor, der diese beiden Punkte verbindet und durch einen Parameter s festgelegt wird. Die Koordinaten des Punktes sind Funktionen. Turyschew, zeichnen Sie uns einen 3D-Raum und einen Pfad, der zwei beliebige Punkte a und b verbindet.

Turyschew hat das getan.



$$\vec{x}(s)\begin{cases} x_1 = f_1(s) \\ x_2 = f_2(s) \\ x_3 = f_3(s) \end{cases}$$

$$\vec{f}\begin{cases} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{cases}$$

- Nun, leiten Sie diese Funktionen aus dem Parameter s ab.

Und Turyshev wieder zu schreiben:

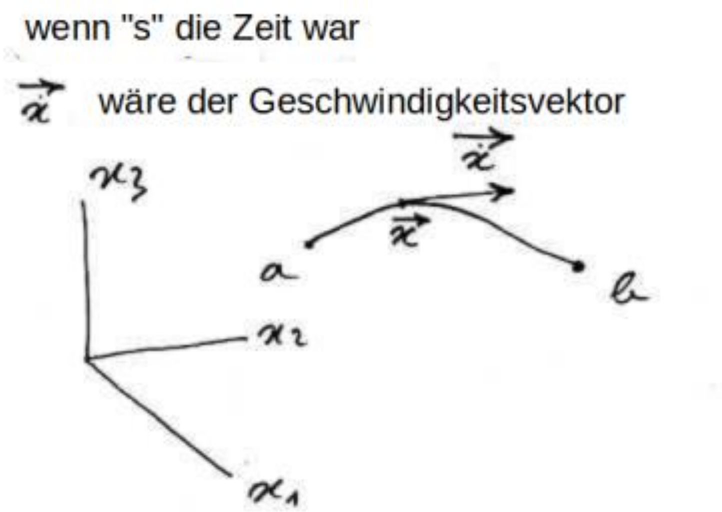
$$\dot{\vec{x}}\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{f}_1 = \dfrac{dx_1}{ds} \\ \dot{x}_2 = \dot{f}_2 = \dfrac{dx_2}{ds} \\ \dot{x}_3 = \dot{f}_3 = \dfrac{dx_3}{ds} \end{cases}$$

Bourbakof stand auf, griff nach der Kreide und sagte:

- Sie können einfacher schreiben:

$$\dot{\vec{x}}\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases}$$

- Der Physiker mag sich an dieser Stelle fragen, was wir hier spielen. Ihm zu antworten, dass es sich um eine Frage der "analytischen Mechanik" handelt, könnte ihm nicht viel helfen. Aber andererseits..:



- Doch all diese Geschichten von Lagrange und Extremum sind nicht auf ein albernes Kinematikproblem im euklidischen 3D-Raum reduziert. Einfache Bemerkung, um sich ein geistiges Bild in den Kopf zu hängen. Ich spüre, dass Sie mich verdächtigen, den Bezug zur Realität verlieren zu wollen.

- Ich? Ich habe nichts gesagt", rief Turyshev aus...

- Ich spüre, dass Sie zögern. Nein ? Ist das ein Gefühl?

- Ich versichere Ihnen, ich fühle mich sehr gut, fahren Sie fort...

- Wir können uns dann einen Lagrangianer geben, der immer noch ein Skalar ist. Früher wurde diese aus einer Funktion s definiert, die ebenfalls ein Skalar war. Nun müssen wir uns nur noch vorstellen, dass diese Funktion f (oder x) "eine Art Vektor" mit n "Komponenten" fi ist. Aus dieser vektoriellen Funktion und ihrer Ableitung können wir dann unsere Lagrange-Funktion definieren.

Turyschew schrieb:

$$\mathcal{L}(\vec{f},\dot{\vec{f}}) = \mathcal{L}(f_1,f_2,f_3,\dot{f}_1,\dot{f}_2,\dot{f}_3)$$

- Also gut! Ersetzen Sie diese fi-Funktionen und ihre Ableitungen durch xi-Funktionen und ihre Ableitungen, immer mit den gleichen Notationen.

- Aye, aye, Professor...

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \mathcal{L}(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)$$

- Wir werden, wie bisher, eine Aktion definieren.

- Ist das ein Skalar?

- Ja, es ist immer noch ein Skalar:

$$\text{Aktion} \qquad A(\vec{x}) = \int_a^b \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x})\, ds$$

- Es handelt sich um ein Integral der Aktion, das entlang einer Bahn berechnet wird, die zwei Punkte a und b dieses 3D-Raums verbindet, ein Integral, das durch die Daten dieser Funktion definiert ist, die als Lagrange-Funktion bezeichnet wird. Wir werden nach dem Weg suchen, der diese Aktion extrem macht. Lassen Sie sich von dem inspirieren, was wir früher getan haben.

Turyschew fühlte sich inspiriert.

$$\begin{cases} \text{man bildet } \mathcal{L}(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \vec{x} + \varepsilon \vec{h}) \\ \left(\text{oder } \mathcal{L}(\vec{f} + \varepsilon \vec{h}, \vec{f} + \varepsilon \vec{h}) \right) \end{cases}$$

- Man muss verstehen, was man tut", kommentierte Turyschew, "der 'x-Pfeil' stellt einen ab-Pfad dar, es ist eine Reihe von Funktionen:

$$x_i(s) = f_i(s)$$

z.B. für alle diese möglichen Funktionen, d.h. für alle diese möglichen Wege:

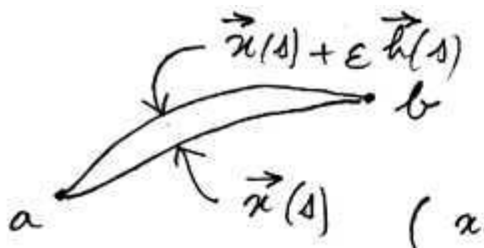
$$f_i(a) = \alpha_i \quad et \quad f_i(b) = \beta_i$$

- Das bedeutet, dass alle diese Pfade durch die Punkte a und b des Raums (x1, x2, x3) verlaufen. Dies impliziert auch, dass :

$$h_i(a) = h_i(b) = 0$$

- Es ist okay...

- Lassen Sie uns eine zweite Route in Betracht ziehen, die der ersten nahe kommt:



$$\begin{cases} x_1(s) + \varepsilon h_1(s) \\ x_2(s) + \varepsilon h_2(s) \\ x_3(s) + \varepsilon h_3(s) \end{cases}$$

- Der Wert des Handlungsintegrals, das ein Skalar ist, wird a priori nicht derselbe sein, je nach dem Weg, der zur Durchführung dieser Integration in s eingeschlagen wird.

$$A(\vec{x}) \neq A(\vec{x} + \varepsilon \vec{h})$$

- Ergibt Sinn.

- Entscheiden wir uns, bei dieser "Variation" nach der Kurve oder den Kurven, dem Weg oder den Wegen zu suchen, die diese Aktion extrem machen. Führen Sie daher die Berechnung wie zuvor durch.

Turyschew entrollte.

$$\mathcal{L}(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon \dot{\vec{h}}) = \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) + \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{h} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot \dot{\vec{h}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{h} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} h_3$$

- Schon gut. Schon gut. Sie haben ein Skalarprodukt erscheinen lassen, dargestellt durch diesen Punkt.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{h} = \text{" Skalarprodukt "} \left(\overrightarrow{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}} \right) \quad \vec{h}$$

Bourbakof, erfreut über das Talent seines Schülers, gab einige Bemerkungen ab.

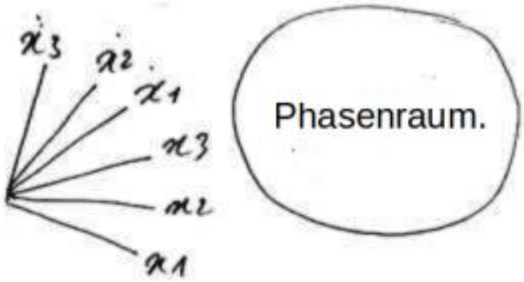
- Ein Mathematiker hätte die Dinge anders geschrieben und formuliert. Aber Mathematiker und Physiker (der alten Schule) haben überhaupt nicht die gleiche Sprache. Ein Physiker weiß, was eine Skalarfunktion ist, die z.B. in einem Raum (x, y, z) definiert ist. Es kann zum Beispiel ein Temperaturfeld T(x, y, z) sein. Der folgende Ausdruck :

$$\varphi(x, y, z) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \text{ Steigung}$$

ist auch ihm vertraut. Er wird es einen "Gradienten" nennen. Tatsächlich können wir sehen, dass in unserer Berechnung eine Art "sechsbeiniger Gradient", der Lagrange'schen L-Funktion, auftaucht.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} \end{cases}$$

eine Art '6d-Gradient' in einem Raum



wenn $\vec{x}$ = Stellung

wenn s = Zeit

dann $\dot{\vec{x}}$ = Geschwindigkeit und

Phasenraum = Raum

(Position, Geschwindigkeit) = $(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$

Ein Gradient, der im Phasenraum als Funktion L definiert ist, wie der Lagrange'sche selbst, der ein mathematisches Wesen ist, das im Phasenraum verweilt. Da wir letztlich einen Skalar erhalten müssen, werden wir diese Art von sechsbeinigem Gradienten oben mit einem weiteren "6-Vektor" multiplizieren. Ich schreibe zuerst:

$$\varepsilon \vec{h} \begin{cases} \varepsilon h_1(s) \\ \varepsilon h_2(s) \\ \varepsilon h_3(s) \end{cases}$$

die die Störung der "Vektorfunktion" darstellt und nur ein Teil davon ist. Dieser 6-Vektor ist :

$$\begin{cases} \varepsilon h_1 \\ \varepsilon h_2 \\ \varepsilon h_3 \\ \varepsilon \dot{h}_1 \\ \varepsilon \dot{h}_2 \\ \varepsilon \dot{h}_3 \end{cases} \quad \text{G-Vektor} \qquad (\varepsilon \vec{h}, \varepsilon \vec{\dot{h}})$$

Ein einfacher Exkurs. Turyschew, beenden Sie diese Berechnung in 3d, aber sie könnte sich offensichtlich auf eine beliebige Anzahl von Dimensionen erstrecken.

- In Ordnung, sagt Turyshev, ich rechne:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}) - A(\vec{x})}{\varepsilon}$$

$$\text{aber} \quad \dot{h}^i = \frac{dh^i}{ds}$$

$$\text{bekommen Sie:} \quad \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} h^i ds + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} dh^i \right)$$

- Ich überarbeite die Integration in Teilen:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} dh^i = \sum_{i=1}^{n} \left[h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right]_a^b - \sum_{1}^{n} \int_a^b h^i \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} ds$$

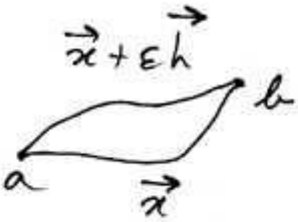
- Schon gut. Schon gut.

- Die Maschine in eckigen Klammern ergibt Null, wobei die Funktion h an den Enden der Bahn ab gleich Null ist.

$$\text{Punkt a} \; (s=a) \begin{cases} x1(a) \\ x2(a) \\ x3(a) \end{cases} \qquad \text{Punkt b} \; (s=b) \begin{cases} x_1(b) \\ x_2(b) \\ x_3(b) \end{cases}$$

$$h^i(a) = h^i(b) = 0$$

$$\vec{h}(a) = \vec{h}(b) = 0$$



- Das ist richtig.

- Jetzt muss ich nur noch abschließen:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}) - A(\vec{x})}{\varepsilon} \quad \text{tendiert zu (1. Ordnung)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b h^i \, ds \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right]$$

- Damit der in diesem Raum verfolgte Weg x(s) zwischen diesen beiden Fixpunkten a und b einem Extremal der Aktion A entspricht, ist es notwendig und ausreichend, dass die Menge zwischen den Klammern Null ist, was uns dann n Lagrangesche Gleichungen ergibt:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}}$$

Lagrange

Turyschew war nachdenklich:

- Ich möchte auf das zurückkommen, was vorhin bezüglich der Anzahl der Dimensionen gesagt wurde, um zu überprüfen, ob ich richtig verstanden habe.

- Tun Sie, lieber Freund...

- Wir gehen von einem Raum mit n Dimensionen aus, den wir benennen (x1, x2, ..., xn). Es ist ein Vektorraum.

- Das ist richtig.

- Ich kann dann jeden Punkt in diesem Raum durch einen "Vektor x" darstellen, indem ich schreibe :

$$x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

In diesem Raum kann ich zwei Punkte A und B positionieren (sie wurden früher a und b genannt, das spielt keine Rolle). Eine Kurve in diesem Raum ist ein Satz von Funktionen:

$$\left(x_1(s), x_2(s), \cdots, x_n(s)\right)$$

in Abhängigkeit von einem einzigen Parameter s. Die oben beschriebenen Lagrange-Gleichungen stellen eine Reihe von Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Es gibt n unbekannte Funktionen, die bestimmt werden müssen, also brauche ich n Gleichungen, und ich sehe, dass die "Lagrange-Gleichung" im Kasten mir genau das liefert. Ich kann dieses System von Differentialgleichungen schreiben:

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n) = 0 \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n) = 0 \\ - - - - - \\ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n) = 0 \end{cases}$$

- Eine Bemerkung zum allgemeinsten System von Differentialgleichungen ist, dass s nicht explizit erscheint.

Bourbakof brach in Gelächter aus:

- Turyshev, wissen Sie, was Sie sind?

- Nein... (seufzt)

- Sie sind ein verärgerter Mathematiker.

- Machen Sie keine Witze. Ich bin immer noch am Rande des Stillstands.

- Ich höre auf, Sie zu ärgern. Fahren Sie fort.

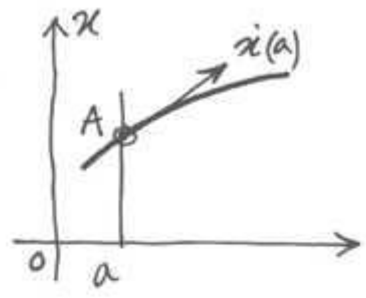
- Was mich ein wenig verwirrt, ist, dass ich klassischerweise gelernt hatte, dass die Lösungen solcher Systeme von "Ausgangsbedingungen" abhängen. Wenn ich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung nehme, die sich auf eine Funktion x(s) bezieht, hätte ich :

$$\phi(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

Wenn ich mich dazu entschließe, von Punkt A auszugehen, so dass s = a, dann sind meine Ausgangsbedingungen :

$$x(a) \quad \text{et} \quad \dot{x}(a)$$

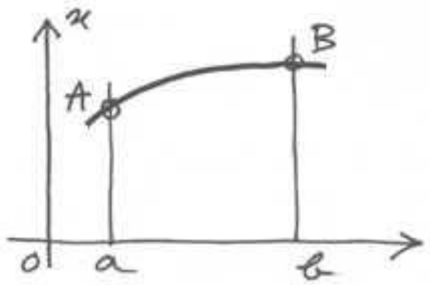
was grafisch gesehen dem entspricht:



- Was Sie vor ein Rätsel stellt, ist, dass Sie Ihre Lösung dieses Mal dadurch bestimmen, dass Sie sie zwingen, zwei Punkte zu durchlaufen, was auf genau dasselbe hinausläuft. Im eindimensionalen Fall wäre die Kurve gezwungen, durch zwei Punkte A und B zu gehen, was Sie zwingt, :

x(a) - und- - x(b)

und, grafisch gesprochen:



- Ja, Sie haben Recht, das ist gleichwertig. Die Lösung einer skalaren Differentialgleichung zweiter Ordnung hängt von zwei Parametern ab. Sie können diese beiden Parameter über die Anfangsbedingungen x(a) und x'(a) oder über die Randbedingungen x(a) und x(b) bestimmen.

- Dann wird es dasselbe sein wie n Dimensionen.

- Ja, ich muss mich nur an den Gedanken gewöhnen, dass wir die Lösung bestimmen, indem wir die Kurve x(s) durch zwei Punkte A und B zwingen, d.h. wir geben uns die 2n-Werte:

$$\left(x_1(a), x_2(a), \cdots, x_n(a)\right) \quad et \quad \left(x_1(b), x_2(b), \cdots, x_n(b)\right)$$

- Nun möchte ich noch einmal auf den Raum zurückkommen, den Sie Phasenraum genannt haben. Nun, so wie ich es verstehe, ist das der 2n-dimensionale Raum:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$$

- Wenn es Sie stört, können Sie einfach fragen:

$$\begin{cases} y_1 = \dot{x}_1 \\ y_2 = \dot{x}_2 \\ \dots \\ y_n = \dot{x}_n \end{cases} \rightarrow \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)}_{\text{2n-Dimensionen}}$$

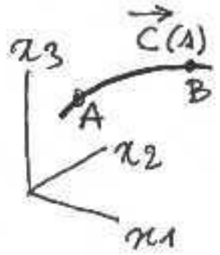
- Dies ermöglicht Ihnen, Ihren Lagrangianer in diesem Raum zu platzieren:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

- Sie können die Aktionen nach Belieben aufschreiben:

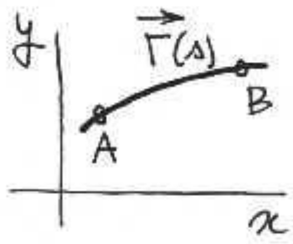
$$A(\vec{C}) = \int_A^B \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\, ds$$



- Indem man ihr eine mentale Repräsentation in Form einer "Flugbahn" C(s) im x-Raum zuordnet.

- Oder aber:

$$A(\vec{\Gamma}) = \int_A^B \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y})\, ds$$



indem man ihm das mentale Bild einer "Flugbahn" (Trajektorie) im Phasenraum zuordnet.

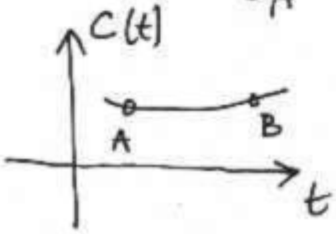
- Ich glaube, ich bekomme langsam den Dreh raus, wenn man es als eine Zeit betrachtet.

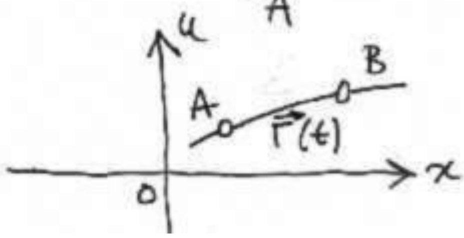
- Sie machen also Dynamik, Kinematik eines Punktes.

- Dann kann ich schreiben:

$A = t$ Zeit $\qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = u$

$$A(C) = \int_A^B \mathcal{L}(x, \dot{x})\, dt = \int_A^B \mathcal{L}(x, u)\, dt$$





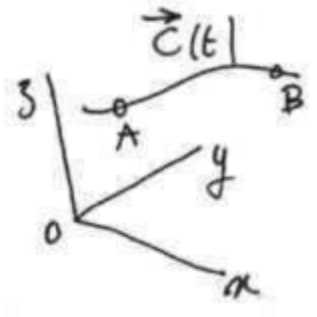
- Links habe ich die Flugbahn C(t) in einer (x,t)-Raumzeit. Rechts habe ich meine Trajektorie (t) in einem zweidimensionalen Phasenraum (x, u), parametrisiert durch meine Zeit t. Aber warum beschränke ich mich auf eine Dimension des Raumes. Ich könnte bis drei gehen. Wenn ich (x , y , z) meine Raumkoordinaten aufrufe und wenn ich mit s = t (Zeit) parametrisiere, dann habe ich :

$$s = t = \text{Zeit} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} = w \end{cases}$$

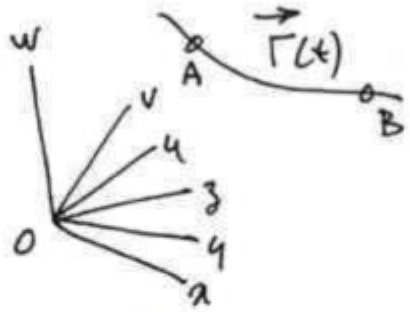
- wobei (u, v, w) meine Geschwindigkeit V darstellt. Und wie bisher kann ich die Aktion auf zwei verschiedene Arten darstellen (aber es gibt ohnehin nur eine Integrationsvariable s oder t) :

$$A(\vec{C}(x,y,z)) = \int_A^B \mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})\,dt$$

$$A(\vec{\Gamma}(x,y,z,u,v,w)) = \int_A^B \mathcal{L}(x,y,z,u,v,w)\,dt$$



Flugbahn im Raum (x,y,z)



Flugbahn im Phasenraum

- Ich werde in der Lage sein, mich selbst als mentales Bild meiner Flugbahn gleichgültig C oder G zu geben, wobei das erste in den Raum eingeschrieben ist.

$$(x, y, z)$$

in drei Dimensionen und die zweite in meinem Phasenraum...

(x, y, z, u, v, w)

in sechs Dimensionen. Die Lagrange-Gleichungen bilden ein Differential-System der zweiten Ordnung im Raum (x,y,z), da sie zweite Ableitungen und ein System der ersten Ordnung, wenn sie als ein Differential-System über Phase Raum (x , y , z , u , v , w).

All dies wirft ein Problem auf.

- Welche?

- Was ist das mentale Universum einer Fledermaus?

- Was meinen Sie damit?

- Sie wissen, dass die Fledermaus praktisch blind ist: Sie "sieht" nur mit ihren Ohren. Er sendet Ultraschall durch seine Nase aus und nimmt das Echo dann mit seinen großen Ohrläppchen auf, die wie Radar- oder Radioteleskopantennen gebaut sind. Seine Trommelfelle, die höher entwickelt sind als unsere, fungieren als Netzhaut. Sie hat ein "biaurikuläres" Sehvermögen.

- Kurz gesagt, sie "sieht" als jemand, der sich im Dunkeln bewegt, geführt von einer Lampe. Anstatt jedoch Licht auszusenden und das Rücksignal aufzufangen, sendet sie Ultraschall aus.

- Ja, aber Sie sehen den Unterschied: Die Fledermaus ist in der Lage, den Dopplereffekt in Echtzeit zu messen. Da er zwei Ohren hat, hat er nicht nur eine 3D-Wahrnehmung der Positionen der Objekte, die er "beleuchtet", sondern kennt auch deren Geschwindigkeitsvektor. Ihr mentaler Raum ist also ein sechsdimensionaler Raum, ein Phasenraum.

- Ach ja...

- Ich habe oft darüber nachgedacht, wie ich mich fühlen würde, wenn ich eine Fledermaus wäre. Wir könnten Spaß daran haben, sein Wahrnehmungsuniversum mit Falschfarben herauszufinden. Wenn wir davon ausgehen, dass er in einem bestimmten Frequenzband strahlt, können wir ihn uns als Farben vorstellen: blau für die hohen Frequenzen, rot für die niedrigen Frequenzen. Ein glatter, stark reflektierender Gegenstand erscheint ihr als "weiße Fläche", wie z.B. eine Glasscheibe. Umgekehrt wird ein Pelzmantel, der auf ein Sofa gelegt wird, "schwarz" sein. Das Reflexionsvermögen der verschiedenen Objekte verleiht ihnen unterschiedliche "Farben". Diese werden dann durch den Dopplereffekt subtil modifiziert. Alles, was sich entfernt, wird "etwas röter" und alles, was sich nähert, wird "ins Blaue verschoben". Was wir uns in der Tat nicht vorstellen können, ist dieses Echtzeit-Design der eingestellten Geschwindigkeitsposition. Die Fledermaus hat einen hexa-dimensionalen Weltdarstellungsraum.

- Sie lebt in einem sechsdimensionalen euklidischen Raum.

- Dies ist sehr wichtig für seine Suche nach seiner Lieblingsbeute: Motten. Wissen Sie, wie sie versuchen, ihm zu entkommen?

- Sie sind mit absorbierendem Material bedeckt, Haare, Schuppen auf ihren Flügeln.

- Schon jetzt. Aber wenn sie sich von einer sich nähernden Fledermaus "erleuchtet" fühlen, wie ein Flugzeug, das erkennt, dass es vom Radar einer Rakete erfasst wurde, können sie sich fallen lassen und versuchen, wie totes Laub auszusehen. Der Schläger wird manchmal auf frischer Tat ertappt. Aber es gibt etwas Faszinierenderes. Einige Motten sind mit Organen ausgestattet, die es ihnen ermöglichen, Gegenmaßnahmen zu ergreifen: Sie senden dann auf anarchische Weise Ultraschall aus, was das geistige Bild der Fledermaus sowohl in Bezug auf Position als auch Geschwindigkeit völlig stört.

- Sie klemmen sich ein.

- Exakt, genau. Außerdem muss der Schläger das Maul weit öffnen, um an sie heranzukommen. Wenn er das tut, kippen seine Ohren nach hinten.

- Jedenfalls erblindet sie, während sie danach greift.

- Wenn sie sich über die genaue Position und den Kurs des Schmetterlings täuscht, rempelt sie den Schmetterling an und vergrößert ihn. Aber in Wirklichkeit ist es sogar noch komplexer. Möglicherweise versucht die Motte, ihre Ultraschallsignatur künstlich zu verändern.

- Tarnung?

- Durch das Zurücksenden von Ad-hoc-Ultraschall kann er versuchen, sich als einkommensstarke Spezies auszugeben.

- Wenn die Lichtgeschwindigkeit beispielsweise zehn oder zwanzig Meter pro Sekunde betragen würde, würden wir die Welt auch als sechsdimensionalen Raum wahrnehmen.

- Erschreckend. Aber wer kann schon sagen, dass intelligente, nachtaktive Arten nicht solche Sinne entwickelt hätten?

- Können Sie sich Humanoide vorstellen, die wie Fledermäuse funktionieren, mit riesigen Ohren und einer etwas komplizierten Nase?

- Warum nicht?

- Sie würden dann mit dem Raum der in ihre Neuronen eingravierten Phasen geboren werden.

Turyshev, Sie haben eine lebhafte Fantasie.

- Nein, ich versuche nur, für einen Notfall zu planen, das ist alles.

- Nun, zurück zur Sache selbst. Wir hatten gesagt, dass die Lagrange'schen im Phasenraum "lebten", dass es eine differenzierbare Funktion in diesem Raum war.

L (x1 , x2 , ..., xn , y1 , y2 , ..., yn)

Ich schlage nun vor, a priori eine andere Funktion zu betrachten, die in diesem Raum definiert und aus unserer Funktion L aufgebaut ist:

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = E(x, y)$$

$$E(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$$

$$E = \sum_i y_i \frac{\partial L}{\partial y_i} - L = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

- Wir werden sehen, dass diese neue Funktion bemerkenswerte Eigenschaften hat.

- Ich erinnere Sie daran, dass unsere Funktion L, die Lagrange-Funktion, es uns erlaubt hat, eine bestimmte Bahn AB im Raum aller Kurven zu konstruieren, die zwei gegebene Punkte im Raum (x1 , x2 , ..., xn) verbinden. Diese besondere Kurve ist diejenige, die eine Aktion extrem macht, die einfach das Integral dieses Lagrangien ist:

Aktion $$A(\vec{x}) = \int_a^b \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x})\, ds$$

Ich schlage vor, jetzt zu zeigen, dass diese E-Funktion auf diesem extremen Weg konstant ist. Der Mathematiker spricht dann von einem ersten Integral. Nur zu, es ist sehr einfach.

- Okay, nun... Dann schreibe ich:

$$\frac{dE}{ds} = \sum_i \ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_i \dot{x}_i \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{dL}{ds}$$

$$\frac{dL}{ds} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \right]$$

$$\frac{dE}{ds} = \sum_i \cancel{\ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}} + \sum_i \dot{x}_i \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_i \cancel{\ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}$$

$$\frac{dE}{ds} = \sum_i \dot{x}_i \underbrace{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right)]}_{\text{Lagrange} \to 0}$$

$$\frac{dE}{ds} = 0$$

E ist konstant

- Sie hatten Recht, es ist nicht so kompliziert.

- Wissen Sie, was diese Funktion darstellt?

- Nein. Nein, nein, nein, nein, nein, nein, nein, nein, nein, nein, nein.

- Energie.

- Was sagt man dazu!

- Zum Abschluss, wissen, dass diese Gleichung, gebaut am Ende des ... achtzehnten Jahrhunderts von dem Mathematiker Lagrange ist das Brevier des Physikers, der theoretischen Physiker, der Vermesser. Wir werden nie aufhören, all die Kaninchen zu entdecken, die man aus diesem Hut herausnehmen kann.

Boissinière sprach die Sitzung an.

- Zufällig glaube ich, wir haben Kaninchen, natürlich tiefgefroren, zum Abendessen. Ich denke, es ist an der Zeit, zu den anderen in die Kantine zu gehen.

Nach dem Abendessen beschloss Bourbakof, "sich auf der Brücke frisch zu machen", was nur fiktiv sein konnte, da es sich im Inneren des Schiffes befand. Er nahm die Wendeltreppe. Oben angekommen, kam er unter einem sternenklaren Gewölbe heraus. Jemand war ihm vorausgegangen und hatte ihn auf die "Außenseite" gestellt. Er ließ seine Augen sich an die Dunkelheit gewöhnen und machte dann Turyschew ausfindig, der auf einem Liegestuhl saß.

- Ist das nicht großartig? Es ist, als wäre man auf dem Deck einer Einheit der französischen Linie. Hätte Boissinière einen Ventilator aufgesetzt, würde man mit ein wenig Fantasie denken, man wäre auf hoher See.

- Das ist richtig. Es ist ein ungewöhnliches "Oberdeck". Steckt Jupiter dahinter?

- Ja, ich habe die Ansicht so ausgerichtet, dass dieser Planet uns nicht blendet. Aber wenn Sie es sehen wollen...

- Nein, ich habe sie schon gestern gesehen, in Nahaufnahme. Ich ziehe die Stille dieser Sternenhimmel vor.

- Der Bauch der Göttin August.

- Wir vertrauen uns ihr jetzt an. Wissen Sie, wo wir hingehen?

- Nein, Fowler auch nicht. Ich nehme an, Boissinière muss wissen, wohin er geht, aber was spielt das wirklich für eine Rolle? Wir sind weg, das ist alles...

- Ich habe Sie heute Nachmittag mit dieser Klasse nicht allzu sehr verletzt, oder?

- Im Gegenteil, von jetzt an werde ich an allen Seminaren teilnehmen, die Sie uns geben wollen. Das Berechnen von Gradienten in einem sechsdimensionalen Raum fand ich sehr amüsant. Ich bin Biologe, aber vielleicht wäre ich doch gerne Physiker geworden. Was für fantastische Werkzeuge! Ein Lagrange, ein bisschen Variationsrechnung und plötzlich haben wir ein Seifenblasenproblem erwischt.

- Die Welt besteht nicht nur aus Seifenblasen.

- Erstens glaube ich, dass man mit einem Lagranger viele andere Dinge tun können sollte, als diese Formen zu berechnen, zweitens stimme ich nicht mit Ihnen überein. Seifenblasen sind sehr wichtig. Alles, was mit Träumen zu tun hat, ist wichtig.

- Turyschew, warum sind Sie der Gruppe beigetreten?

- Ursprünglich habe ich mich mit AIDS beschäftigt. Wir wollten sehen, ob wir mit Mikrowellen Ergebnisse erzielen können.

- Sie meinen durch Erwärmung des Gewebes?

- Das ist es ja, nein. Das AIDS-Virus hat eine Besonderheit, die es so gefährlich macht: Es versteckt sich sozusagen in Polizeistationen, da sein Lebensraum das Innere der Lymphozyten ist. Man ging davon aus, dass bei Verwendung von HF im Gigahertz-Band die Zellen relativ transparent wären, wenn sie diesen Frequenzen ausgesetzt würden.

- Was ist dann der Sinn?

- Wussten Sie, dass DNA und RNA 400-mal absorbierender als Wasser waren, wenn sie einer sehr niederfrequent modulierten HF ausgesetzt waren?

- Das wusste ich nicht, aber ich verstehe die Idee. Die Zytoplasmen der Zellen sind für diese hohen Frequenzen transparent. Aber lange Moleküle, wie die RNA dieses Retrovirus, fungieren als Antennen und sind empfindlich für niedrige Frequenzen. Ich kann mir vorstellen, dass Sie vorhatten, die RNA des Virus zu schädigen, während Sie mit relativ niedrigen Energien handelten?

- Das ist die Idee. Aber diese Forschung hat eine Menge unerwünschter Menschen angezogen. Erinnern Sie sich an den Satz in der Bibel, in der Genesis, wo Gott Adam und Eva verbietet, den Baum des Lebens zu berühren?

- Es gibt den Baum der Erkenntnis von Gut und Böse, dessen Früchte sie kauten, und dann gibt es tatsächlich diesen Baum des Lebens, der von Cherubim bewacht wird, die den Zugang zu ihm verbieten. Ich habe mich immer gefragt, was das ist.

- Genetik, meine Liebe, Genetik. Wir berühren den Baum des Lebens, in völliger Unwissenheit. Mit gepulsten Mikrowellen brechen wir Viren nicht nur, wir können sie auch mutieren.

- Warum wird die Genetik so schlecht verstanden?

- Haben wir nicht versucht, auf diese Weise zu früh zu handeln? Vielleicht ist es nur eine Frage der Zeit.

- Wir sind in diesem Bereich völlig unwissend. Wissen Sie, dass ein Kind, wenn eine bestimmte Sequenz im Genom vorhanden ist, ein Glaukom bekommt und erblindet, und wissen Sie, dass es die Krankheit nicht bekommt, wenn diese Sequenz zweimal vorhanden ist? Haben Sie eine Erklärung für so etwas?

- Sicherlich nicht.

- Nun, wenn man etwas nicht versteht, berührt man es einfach nicht, vor allem wenn man eine Uniform und Streifen trägt und davon träumt, neue biologische Waffen, künstlich mutierte Viren, zu besitzen.

- Haben Sie damals das Kollektiv verlassen?

- Sie haben alles durchschaut. Sie sind überall und in allen Bereichen das Kollektiv dient ihnen als Diener.

- Glauben Sie, dass wir in diesem Kirchenschiff solche Fehler vermeiden werden?

- Das kann ich nur hoffen, sonst bitte ich um eine Fahrt zum ersten Planeten, auf den ich unterwegs treffe.

- Wenn das der Fall ist, sind wir schon zu zweit.

<#488-DE>- Und du wirst mir Mathe-Nachhilfe geben...

Lagrange und Newton

Fowler schloss sich der Gruppe im Seminarraum an.

- Wissen Sie, Bourbakof, Ihre Seminare werden sehr geschätzt. Letztes Mal hatte Boissinière eine Webcam aufgestellt. Es war sehr gut besucht, auch wenn viele Leute auf ihren Posten in Bereitschaft waren.

- Sie sind zu freundlich.

- Diese kleinen mathematischen Amusetten, sehr formell, sind willkommen, um die Moral aufrecht zu erhalten, während wir an Bord dieses Camemberts, der von dem einen oder anderen angetrieben wird, auf das eine oder andere Ziel zusteuern.

Boissinière intervenierte:

- Fahren Sie die Schubdüse nicht aus. Ohne sie wären wir bei null Beschleunigung und würden wie gewöhnliche Kosmonauten durch die Korridore schweben.

- Gott bewahre", protestierte Fowler! Als wir abflogen, als Sie den MHD ausschalteten, nachdem wir aus der Atmosphäre kamen und für einige Dutzend Sekunden schwerelos waren, hätte ich Ihnen fast das Sandwich zurückgegeben, das ich verschluckt hatte, bevor ich ins Flugzeug stieg.

Ein sehr zeremonieller Trinker, der sich an Bourbakof wandte:

- Meine Liebe, Sie sind der Meister des Spiels. Sie sind dran. Könnten Sie nicht einen Lagranger aus dem Hut zaubern und uns all die Wunder, die Sie letztes Mal erwähnt haben, anwenden lassen?

- Darüber habe ich gerade nachgedacht.

Bourbakof gewann seinen Platz auf der Kreidetafel mit gemessenen Schritten, dann, den Kreidestock nehmend, schrieb er:

$$L(r, \dot{r}, \cancel{\theta}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) + \frac{A}{r}$$

und fügen Sie hinzu: "A ist eine Konstante".

Boissinière hatte den Platz Turyschews eingenommen:

- Es gibt keinen Grund, warum immer die gleichen Leute Spaß haben sollten. Es ist meine Aufgabe, der Maulwurf zu sein, der inhaftiert wird.

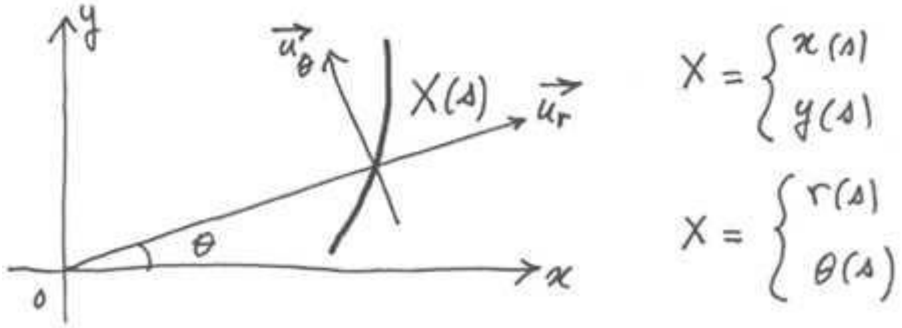
- Was fällt Ihnen auf, fragte Bourbakof ihn.

- Dass Ihr Lagrange'scher, der einem zweidimensionalen Raum r und entspricht, nicht von .

- Was bedeutet das?

- Kommen Sie, Ihr kleines Spielchen sieht aus wie ein Fall, der in Polarkoordinaten gespielt wird.

- Man kann sagen...



- Dieses Problem wird darin bestehen, zwei Lösungsfunktionen r (s) und (s) zu konstruieren. Aber ich nehme an, wir werden versuchen, diese Lösung als eine Funktion r () oder das Gegenteil (r) zu formulieren. Wenn sie in Ihrem Lagrangeschen Wort nicht vorhanden ist, bedeutet dies, dass wenn ich eine Lösungsfunktion r () habe, dann ist jede andere Funktion r () ebenfalls eine Lösung.

- Wie auch immer, wir werden Symmetrie haben.

- Symmetrie zu was? ...

- Ah, immer das gleiche Problem mit Physikern! Für Sie und für uns umfasst das Wort Symmetrie nicht die gleichen Begriffe. Ein Physiker kennt nur Symmetrien in Bezug auf eine gerade Linie, eine Ebene, einen Punkt. Mathematiker verwenden das Wort Symmetrie für viele andere Dinge: für die einfache Tatsache, dass sie für eine bestimmte Handlung invariant ist.

- Sie möchten hier ... die Handlung des Filmens diskutieren?

- Das ist richtig. Es ist rotationssymmetrisch.

- Ich verstehe nicht ganz...

Fowler griff ein:

- Aber ja, mein lieber Hubert, die Tatsache, dass durch Rotation etwas erhalten bleibt, ist für einen Mathematiker Symmetrie. Bei einer Übersetzung wäre es dasselbe.

- Ah! ...

- Mathematiker haben ein Händchen dafür, Wörter von ihrer primitiven Bedeutung abzulenken. Es ist ein echter Sport mit ihnen. Wenn Bourbakof uns weiterhin in seine Kunst einführt, werden Sie erstaunt sein. Warum tun sie das? Wir können nur raten. Es ist möglich, dass sie eine unverständliche Barriere zwischen sich und dem Rest der Menschheit errichten wollten, um ihr Wissen zu schützen, wie es die Alchemisten des Mittelalters taten. In jedem Fall ist es bemerkenswert effektiv. Es scheint sogar, dass sie einander nicht verstehen. Meine Frau Sarah, die Psychiaterin war, sagte, sie seien alle schizophren. Oh, entschuldigen Sie, Bourbakof, ich habe offensichtlich nicht von Ihnen gesprochen.

Glücklicherweise konnte niemand Fowlers Lachen widerstehen. Er war ein Mann ohne Böswilligkeit. Er fuhr in der gleichen Weise fort:

- Bourbakof? Er hat einen guten Hintergrund, das merkt man sofort. Beweise? Wir haben alle verstanden, wovon er gesprochen hat.

- Sogar der Biologe, der ich bin, hat es verstanden! fügt Turyshev hinzu.

Fowler hob einen wütenden Zeigefinger:

- Dasselbe würde ich von theoretischen Physikern nicht sagen. Diese sind grenzwertig autistisch. Sie sind auch wirklich böse und böswillig.

Er wandte sich an Boissinière:

- Vielleicht haben Sie Souriau gekannt, Sie, der Sie Franzose sind?

- Ist er nicht derjenige, der ein Buch mit dem Titel "Struktur dynamischer Systeme" veröffentlicht hat? Das war '74, glaube ich. Ich habe es nie über die erste Seite hinaus geschafft.

- Sie hätten "Sourien" sprechen sollen. Dieser hier ist ein Fall. Er ist nicht nur Mathematiker, sondern er hat auch eine mathematische Sprache für seinen eigenen Gebrauch erfunden, als ob die Dinge nicht schon kompliziert genug wären.

Bourbakof sah sich zum Eingreifen gezwungen.

- Es ist eines der wenigen Beispiele für einen Mathematiker, der sich mit physikalischen Problemen beschäftigt und eine Menge sehr neuer Dinge mitgebracht hat. Tatsächlich hat er die Theoretische Mechanik grundlegend überdacht.

- Theoretische Physik? Sagt Turyschew

- Darum geht es nicht, eructa Fowler. Die Definition eines Smiley-Gesichts hat mir schon immer gefallen.

- Seine Definition der theoretischen Physik?

- Ja, er sagte, es sei die Schnittmenge von zwei Gruppen: Mathematik minus Strenge und Physik minus Erfahrung.

- Aber dann", fuhr Turyschew fort, fasziniert, "was ist mathematische Physik?

- Bourbakof wird uns dies erläutern. Wir haben alle Lichtjahre vor uns, um dieses Problem anzugehen.

Bourbakof lächelt.

- Ich schlage vor, wir gehen noch einmal auf diesen Lagrangianer zurück.

Boissinière, die ihre Idee der Polarkoordinaten aufgriff, hatte geschrieben:

$$V_r = \dot{r} \qquad V_\theta = r\dot{\theta} \qquad L = \frac{1}{2}V^2 + \frac{A}{r}$$

- Der erste Begriff in Ihrem Lagrangeschen Wort evoziert die kinetische Energie eines Teilchens von Einheitsmasse.

- Na los, schreiben Sie Ihre Lagrange-Gleichungen auf...

Boissinière hingerichtet.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \dot r \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = r\dot\theta^2 - \frac{A}{r^2}$$

$$(1) \qquad \ddot r = r\dot\theta^2 - \frac{A}{r^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = r^2\dot\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right) = 0$$

$$(2) \quad r^2\dot\theta = h$$

Bourbakof ging auf die Zinnen.

- Wir werden dieses System eleganter lösen, indem wir die Eigenschaft nutzen, die wir am Ende der letzten Sitzung festgestellt haben, dass es eine Funktion E gibt, die auf dem Lösungsweg konstant bleibt. Boissinière, Ende.

- Ich nehme die Definition dieser Funktion E wieder auf, definiert auf dem Raum der Sätze

$$E = \sum_i \dot x_i \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} - L$$

- Ce qui me donne :

$$E = \dot r\frac{\partial L}{\partial \dot r} + \dot\theta\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - L \quad \text{ist konstant}$$

$$= \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - \frac{A}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - \frac{A}{r} = \text{Konstante}$$

- Hier, zweiter Trick, gehen wir von der Größenordnung r zu ihrem Kehrwert u über:

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

- Fahren Sie fort, Boissinière

- Okay, jetzt fülle ich aus und integriere.

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

aber $r^2\dot{\theta} = h \longrightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{h}$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = \frac{A}{r} + E$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + h^2 u^2\right) = Au + E$$

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta} = -hu'$$

$$\dot{r}^2 = h^2 u'^2$$

$$\frac{1}{2}\left(h^2 u'^2 + h^2 u^2\right) = Au + E$$

$$u'^2 + u^2 = \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}$$

$$u' = \pm\sqrt{-u^2 + \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}}$$

- Was uns schließlich gibt:

$$d\theta = \frac{\pm\, du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}}}$$

$$\theta = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2}}}$$

Boissinière trat zurück, betrachtete ihre Berechnung und verschränkte die Arme.

- Okay, was soll ich jetzt tun?

- Sie ändern die Variable, um Folgendes anzuzeigen

$$\sqrt{-x^2 + 1}$$

- Was Ihnen, wenn Sie, denken Sie daran, einen Arcuscosinus...
- Bourbakof, es ist fünfundzwanzig Jahre her, dass ich eine Integralrechnung gemacht habe! ...

Bourbakof seufzte.

- Dann nehmen Sie mich beim Wort und lassen Sie uns gehen.

- Nun..., lass uns schreiben:

$$-u^2 + \frac{2Au}{h^2} + \frac{2E}{h^2} = -\left(u - \frac{A}{h^2}\right)^2 + \frac{A^2}{h^4} + \frac{2E}{h^2}$$

- Was uns zur Pose bringt:

$$x = u - \frac{A}{h^2} \quad et \quad c^2 = \frac{A^2}{h^4} + \frac{E}{h^2}$$

- Womit wir wieder bei unserem Integral wären:

$$\theta = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + c}}$$

- Eine zweite Änderung der Variable:

$$\nu = \frac{x}{c} \qquad dx = c\, d\nu$$

- Schließlich gibt uns:

$$\theta = \pm \int \frac{d\nu}{\sqrt{-\nu^2+1}}$$

$$\theta = \operatorname{Arcos}(\nu) = \operatorname{Arcos}\left(\frac{u}{c}\right)$$

- So soll es sein:

$$\cos\theta = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{r} - \frac{A}{h^2}\right)$$

- Und was zum Teufel ist das?

- Es ist eine Darstellung eines Kegels, in polar.

- Oh, ja, ich erinnere mich vage. Aber andererseits nehme ich Sie beim Wort.

Es war Zeit für einen Kaffee, der die Gruppe um die unaussprechliche Maschine im Kirchenschiff herumführte. Alle bis auf zwei: Turyschew, der alles wissen wollte, wurde erklärt, warum diese Gleichung einen Kegel beschreibt. Als sich alle wieder eingelebt hatten, war er es, der die Schlüsselfrage stellte:

- Gut. Bourbakof warf einen Lagrangianer auf uns wie ein Kaninchen aus dem Hut:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{A}{r}$$

Die Variable ist die Zeit t . Es ist also Mechanik, Dynamik eines materiellen Punktes. Die Berechnung liefert dann Trajektorien in Form von Kegeln. Frage: Was ist diese "zugrundeliegende Dynamik"?

- Ich komme zur Sache, sagt Bourbakof, ich komme zur Sache. Lassen Sie uns die erste der beiden Lagrange-Gleichungen aufgreifen:

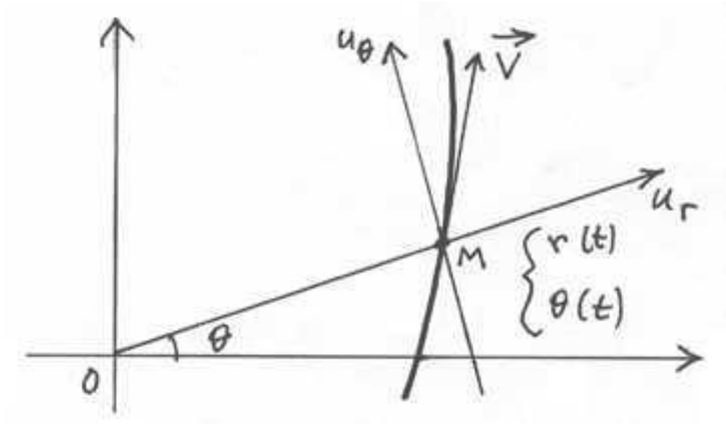
$$(1) \qquad \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{A}{r^2}$$

- Die wir stattdessen schreiben werden:

$$(1) \qquad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{A}{r^2}$$

Sie bedeutet uns etwas. Es bleibt abzuwarten, was. Das Problem besteht darin, die Bedeutung des ersten Mitglieds zu finden.

Zeichnen wir die Flugbahn in Polarkoordinaten auf:



- ur er u sind Einheitsvektoren (radial und "senkrecht"). V ist der Geschwindigkeitsvektor.

$$\vec{V}\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \qquad \vec{u_r}\begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{u_\theta}\begin{cases} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

- Lassen Sie uns den Beschleunigungsvektor berechnen:

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\,\frac{d\vec{u_r}}{dt} + \left(r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u_r}}{d\theta} = \vec{u_\theta} \qquad \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = -\vec{u_r}$$

$$\vec{\Gamma} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \left(r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

$$\vec{\Gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u_\theta}$$

- Wir haben eine radiale Komponente und eine "senkrechte" Komponente. Aber hier verwenden wir die zweite Lagrange-Gleichung, die wir ableiten:

$$(2)\ r^2 \dot{\theta} = h \rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

- Es handelt sich also um eine zentral beschleunigte Bewegung. Wir wissen, dass die Bewegungen mit zentraler Beschleunigung in Ebenen liegen, dass es sich in diesem Fall um konische Bewegungen handelt, die den Kepler'schen Flugbahnen entsprechen. Die Menge

$$r^2\dot{\theta}$$

ist nichts anderes als die Komponente des kinetischen Moments orthogonal zur Ebene der Flugbahn, und diese Größe wird in einer zentral beschleunigten Bewegung aufrechterhalten.

- Dies erlaubt uns sofort, die Konstante A auszudrücken:

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{A}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$$

und schreiben Sie das Lagrangesche in der Form um:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{GM}{r}$$

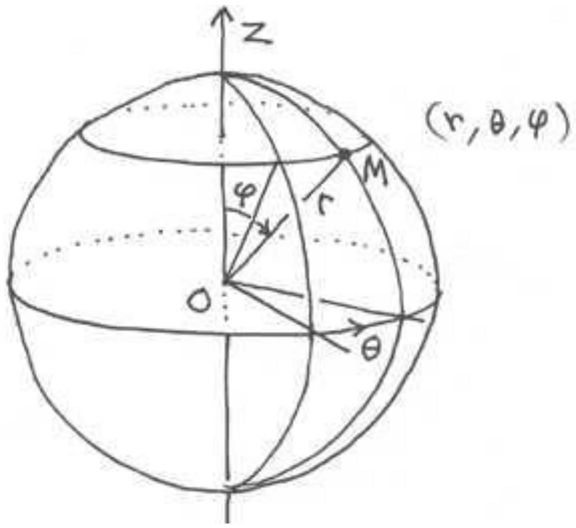
- Übrigens, lassen Sie uns zum Ausdruck der E-Energie zurückkehren:

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{A}{r} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{r}$$

Aus der Definition der potentiellen Energie können wir sehen, dass in diesen mechanischen Problemen die Skalare E darstellt:

E = Kinetische Energie + Potenzielle Energie

- Wir können sehen, dass ein mechanisches Problem vollständig in Lagrangeschen Begriffen formuliert wurde. Dennoch blieben wir in 2d. Kepler ist 3d. Lassen Sie uns das mit einer dritten Dimension neu formulieren. Wir werden eine dritte Koordinate haben, die den klassischen sphärischen Koordinaten entspricht.



- Anschließend werden das Lagrangesche in 3d und die resultierenden Lagrange-Gleichungen geschrieben:

$$L = \frac{1}{2} v^2 + \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right) + \frac{GM}{r}$$

$$\frac{d}{ds}(\dot{r}) = r \sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \dot{\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \sin^2\varphi\, \dot{\theta}\right) = r^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \dot{\theta}^2$$

- Wie können wir zeigen, dass die Flugbahnen in Flugzeugen liegen? Wir werden von einer bestimmten Lösung ausgehen:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \left\{ r(\theta) \right.$$

- Die Lösung identifiziert sich dann mit der Lösung, die wir gerade gebaut haben. Aber wir können die Werte auf der linken Seite als die Anfangsbedingungen des Problems der Lösung des Systems der beiden Differentialgleichungen betrachten. Wir werden dann aufgrund des Konzepts der Eindeutigkeit zu derselben Lösung kommen: Die Lösung einer Differentialgleichung oder eines Systems von Differentialgleichungen wird vollständig durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Lösung, die mit dieser Wahl der Ausgangsbedingungen konstruiert würde, kann sich nicht von der Lösung auf der rechten Seite unterscheiden. Der Weg ist also eben. Wir erhalten dann eine Familie von Zapfen, die alle den Ursprung für eines ihrer Häuser haben. Die sphärische Symmetrie des Problems bedeutet, dass sich daraus alle möglichen Lösungen ableiten lassen. Alle diese Flugbahnen befinden sich in Ebenen, die den Punkt O enthalten, in dem sich die Masse M befindet.

Das Tauziehen wenden

Die Seminare müssen für mehrere Tage unterbrochen werden. Das Kirchenschiff stieß auf technische Schwierigkeiten, die Boissinière während dieser ganzen Zeit beschäftigten. Tatsächlich war diese Maschine nichts weiter als ein unaussprechliches Do-it-yourself, eine Hightech-Mischung aus Verbundwerkstoff und Bergungselementen. Eines der Dinge, die jedermanns Zeit verschwendet haben, war einfach die Klempnerarbeit. Viele Passagiere hatten u.a. die Toiletten in ihren Kabinen verstopft. Auch die Klimaanlage machte den technischen Teams das Leben schwer.

Bei all diesen Problemen wurde nicht wirklich erkannt, dass wir das Sonnensystem mit immer höherer Geschwindigkeit verließen, da die Maschine ihren Kurs in Richtung der Tiefen des Kosmos mit einer Beschleunigung von einem halben Gramm, die von ihrem mysteriösen Propeller erzeugt wurde, fortsetzte. Pluto wurde siebzehn Tage nach dem Start überholt, und das Schiff erreichte die fantastische Geschwindigkeit von 7800 km/s.

Bourbakof, der kaum sehen konnte, wie er sich während all dieser Zeit nützlich gemacht haben könnte, tauchte in das Gesamtwerk von Alexandre Grothendieck, einem der Begründer der algebraischen Geometrie, ein. Er erhaschte nur während der Mahlzeiten einen Blick auf Boissinière, wagte es aber nicht, ihn zu stören, wenn er sich mit seinen Technikern unterhielt. Doch an diesem Tag war er es, der kam, um am Tisch des Mathematikers zu sitzen.

- Wir haben ein Problem.

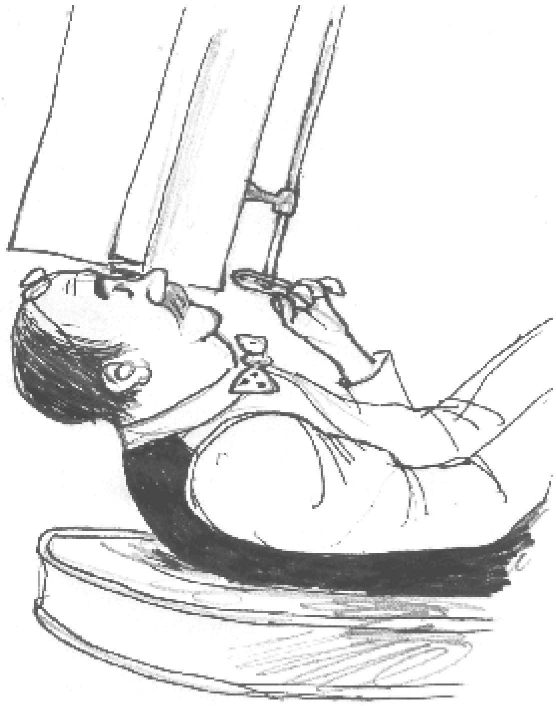
- Schon wieder Klempnerei?

- Nein, es ist viel ernster als das. Ich werde es Ihnen zeigen.

Nach dem Schlucken des ausgezeichneten Kaffees, der von der Kaffeemaschine des Bourbakof-Bordes produziert wurde, folgte Boissinière. Das Labyrinth von Korridoren und Treppen führte sie zur Vorderseite des Schiffes. Dort war ein Bullauge installiert worden, um Beobachtungen durch ein mit einem Spiegel ausgestattetes Teleskop zu ermöglichen.

- Ich möchte Ihnen meinen Freund Bertrand Picard vorstellen.

Der Mann lehnte an einem Stuhl, nach hinten gekippt.



Er erhob sich von seinem Platz, begrüßte Bourbakof und bot an, seinen Platz einzunehmen. Er klebte sein Auge an das Okular.

- Also", so Boissinière, "was sehen Sie?

- Sieht aus wie Schnee.

- Es hat fast geschneit.

Bourbakof kam fasziniert von seiner Sitzstange herunter.

- Ich vermute, es ist kein Schnee, aber was ist es?

Picard wischt seine Brille mit einer kalkulierten Langsamkeit zu Ende.

- Meine Liebe, das ist das, was vom 11. Planeten übrig geblieben ist.

- Erklären Sie sich.

- Das alles geht bis zu den Ursprüngen des Sonnensystems zurück. Sehr lange Zeit glaubten wir, dass das System der Planeten, die die Sonne umkreisen, das ist, was wir beobachten können. Es ist schon komisch, wie schwer es für einen Menschen ist, mit dem, was er zu diesem Zeitpunkt weiß, aus der Mitte zu geraten. Heute sehen wir nur noch Planeten, die, mit Ausnahme des Merkurs, fast kreisförmige Bahnen haben. Astrophysiker haben daraus abgeleitet, dass dies ein Gesetz der allgemeinen Evolution ist.

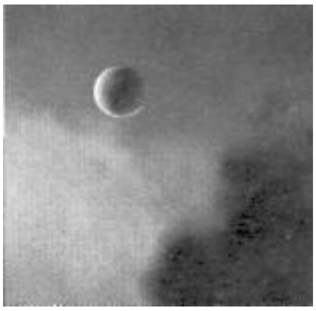
- Wie ist das Sonnensystem entstanden?

- Das ist schwer zu sagen. An sich ist es ein faszinierendes Thema. Die Entdeckung der ersten Exo-Planeten erschütterte alle vorgefassten Ideen der Astrophysiker, die sich am "Heliozentrismus" versündigten. Sie entdeckten ein auf einen Stern zentriertes System, in dem ein Exo-Planet in einer elliptischen Flugbahn mit einer sehr starken Exzentrizität umkreiste. Dies sind immer noch recht massive Planeten, "großer Jupiter", sonst könnten wir nicht auf ihre Existenz hinweisen. Aber bis dahin hatten die Menschen überhaupt nicht erwartet, dass ein Planet eine "quasi-cometarische" Flugbahn einschlagen würde. Tatsächlich bilden die Planeten, wenn sie sich bilden, ein so genanntes "Kollisionssystem".

- Diese Planeten kollidieren?

- Das muss auf jeden Fall geschehen. So können große Planeten ihre Masse vergrößern, alles aufnehmen, was herumliegt, "aufräumen". Aber "Kollision" bedeutet auch binäre Interaktion, mit "Schleuder-Effekt". Sie wissen, dass dieser Effekt genutzt wird, um Raumsonden zu beschleunigen und ihnen genug Geschwindigkeit zu geben, um das Sonnensystem zu verlassen. Aber was für eine Sonde gilt, kann auch für einen Planeten gelten. Wenn sich ein Planetensystem bildet, kann alles passieren. Protoplaneten können andere Planeten verschlucken. Mini-Planeten können durch Schleuder-Effekte bis zu dem Punkt beschleunigt werden, an dem sie relativ zum Stern über die Auslösegeschwindigkeit hinaus beschleunigt werden. Dann verlassen sie das System einfach ganz und gar. So leben sie ihr Leben weiter, allein in der Weite.

- Wurden nicht kürzlich isolierte Planeten entdeckt, die "im Raum zu schweben" schienen, weit entfernt von irgendwelchen Sternen?



- Richtig, und meiner Meinung nach handelt es sich dabei um Planeten, die durch den Schleudereffekt aus ihren Heimatsystemen herausgeschleudert wurden. Wenn der Beschleunigungseffekt jedoch moderat bleibt, kann das System aufgrund dieses Schleudereffekts ein oder mehrere Objekte haben, deren Flugbahnen starke Exzentrizitäten aufweisen können. Anstatt am allgemeinen Konzert teilzunehmen und ihre Position weise auf einer Umlaufbahn einzunehmen, die einer Resonanz um den Stern entspricht, verbringen diese Objekte die meiste Zeit außerhalb des Sterns, in den "großen Vorstädten". Periodisch kommen sie mit Geschwindigkeiten heraus, die mit denen von Kometen vergleichbar sind: innerhalb von 40 km/s. Bei einer solchen Geschwindigkeit bleiben sie nicht lange genug im Planetensystem, um Energie mit den bereits "sesshaften" Planeten auszutauschen, die sich auf "reglementierten", quasi kreisförmigen Bahnen befinden und sehr nahe an der Ekliptikebene liegen. Seit Jahren wird die Frage gestellt, ob unser Sonnensystem ein solches Objekt gehabt haben könnte. Diejenigen, die dagegen waren, sagten, dass wir sie beobachtet hätten. Es gibt Vor- und Nachteile. Wenn die Periode solcher Planeten in Tausenden von Jahren lag, ist es möglich, dass während eines letzten Durchgangs die Astronomie noch in den Kinderschuhen steckte und die Menschen nicht in der Lage waren, zwischen dem Eindringen eines weiteren Planeten und einem Kometendurchgang zu unterscheiden. Aber was Sie gerade gesehen haben, scheint uns eine unerwartete Antwort zu geben.

- In welcher Form?

- Angenommen, ein Planet wurde bei der Geburt des Sonnensystems auf einer sehr außermittigen Flugbahn ausgestoßen. Periodisch tritt es mit hoher Geschwindigkeit in das Sonnensystem ein. Was Sie gerade beobachtet haben, stellt meiner Meinung nach die Überreste eines Planeten dar, der innerhalb der "felsigen Kante" eines der großen Objekte unseres Systems vorbeigegangen wäre.

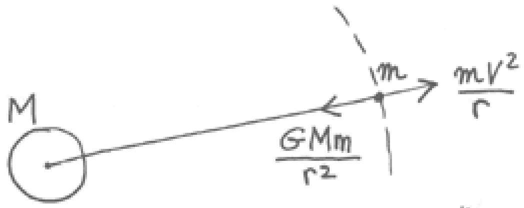
- Wie nennen Sie die Roche-Grenze?

- Es ist ein sehr einfaches Konzept, aber grundlegend für die Astronomie. Wissen Sie, Objekte im Kosmos erscheinen uns "fest", und ich verwende dieses Wort im Sinne von "widerstandsfähig". Tatsächlich ist der größte Teil ihres Zusammenhalts nur auf die Schwerkraft zurückzuführen. Es ist diese Kraft, die die Massen, aus denen ein Planet besteht, zusammenhält.

Nehmen wir als Beispiel einen Kometen. Wir verwenden oft den Ausdruck "schmutziger Schneeball". Da die Schwerkraft, die sie zusammenhält, ziemlich schwach ist, ist es wahrscheinlich, dass der erste Mensch, der einen Fuß auf ein solches Objekt setzt, das Gefühl hat, er bewege sich auf einer mit Pulver bedeckten Skipiste. Planeten mögen uns kompakter erscheinen, aber diese Kompaktheit ist relativ. Bezogen auf was? Kompakt zu sein bedeutet, in der Lage zu sein, einer Reiß- oder Scherkraft standzuhalten.

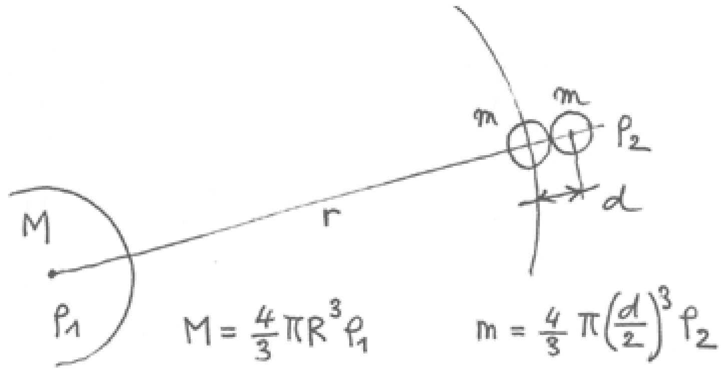
- Aber woher kommt zum Beispiel diese Scherkraft?

- Wenn ein Objekt um eine Masse M kreist, hängt seine Bahngeschwindigkeit von seinem Abstand von seinem geometrischen Zentrum ab. Auf einer Kreisbahn mit dem Radius r gleicht die Zentrifugalkraft die Schwerkraft aus. Das heißt:



$$G = 6{,}67\ 10^{-11}\ \text{MKSA}$$

- Stellen wir uns nun vor, wir platzieren auf einer Umlaufbahn um einen Planeten der Masse M zwei Pétanque-Kugeln der Masse M. Diese werden sich gegenseitig anziehen. Nehmen wir jedoch an, dass sie sich berühren, so dass ihre Mittelpunkte einen Abstand d haben, der dem doppelten Radius entspricht, dann werden diese beiden Kugeln, die wie angegeben angeordnet sind, nicht beide im Gleichgewicht sein, auf einer stabilisierten Umlaufbahn.



-Nehmen wir an, dass sich eine der beiden Kugeln in einer stabilisierten Umlaufbahn in einer Entfernung r vom Planeten bewegt. Wird sie in der Lage sein, eine zweite Kugel, die sich auf einer Umlaufbahn r' = r + r = r + d befindet, unter der Wirkung ihrer eigenen Schwerkraft zurückzuhalten? Abends 1 die Dichte des Planeten und 2 die der Petanque-Kugeln. Wir differenzieren und wir erhalten :

$$\delta\left(\frac{GMm}{r^2}\right) = \frac{2\cancel{G}M\cancel{m}}{r^3}\,d \simeq \frac{\cancel{G}m^{\cancel{2}}}{d^2}$$

$$\frac{2}{r^3}\left(\cancel{\frac{4}{3}\pi}\right)R^3\rho_1 \gtrsim \cancel{\frac{4}{3}\pi}\ \frac{\rho_2}{8} \qquad \frac{r^3}{R^3} \gtrsim 16\,\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Daher:

$$\boxed{r_{Roche} \simeq 2{,}52\, R \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}}$$

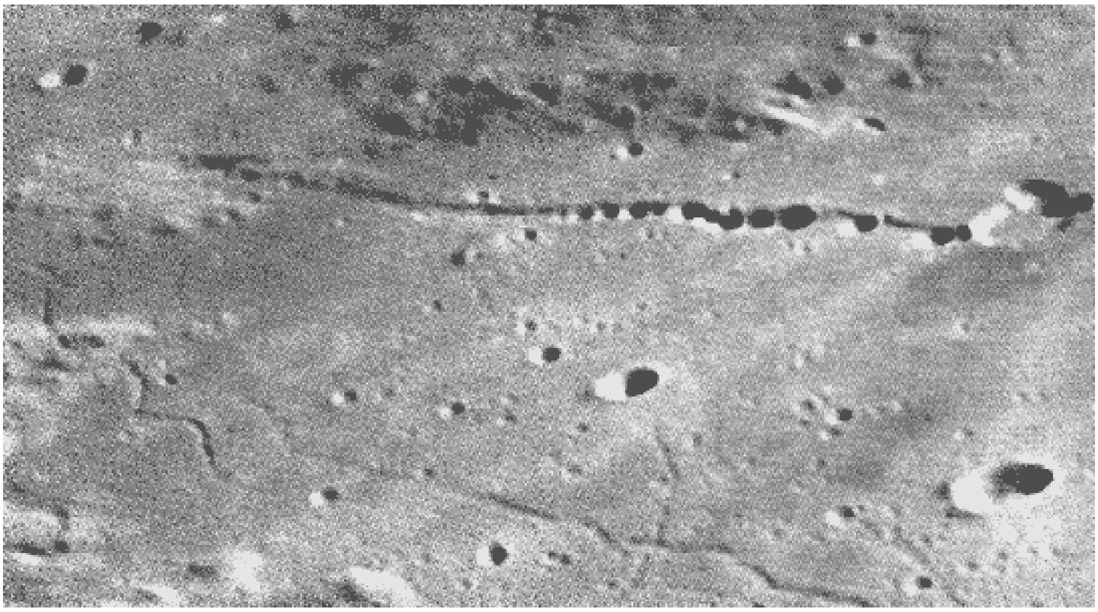
- Der äquatoriale Radius des Saturn beträgt 60.000 km. Seine Dichte beträgt 0,69. Seine Ringe bestehen aus Eis, Dichte 1. Die felsige Grenze des Saturn liegt etwa 180.000 km von seinem Zentrum entfernt. Die Ringe entsprechen Entfernungen zwischen 121.000 und 141.000 km (dieser letzte Ring wurde von der Sonde Pioneer 11 entdeckt).

- Sie befinden sich also innerhalb der felsigen Saturn-Grenze.

- Exakt, genau.

- Somit könnten diese Ringe den Überresten eines Satelliten entsprechen, der in diese Zone eingedrungen wäre, in der Gezeiteneffekte eine beliebige Menge von Massen verschieben, deren Kohärenz nur durch die Schwerkraft gewährleistet ist.

- Das ist in der Tat durchaus möglich. Wir hatten ein Beispiel, im Prinzip "vor unseren Augen", für die Fragmentierung eines Objekts während seines Durchgangs innerhalb der felsigen Grenze eines Planeten: der berühmte Komet von Schumaker-Lévy, der im Juli 94 auf den Jupiter fiel. Anfang 1993 war eine Reihe von Objekten auf einer sehr langgestreckten elliptischen Umlaufbahn in der Nähe des Apogäums gesichtet worden, die offenbar einem Objekt entsprachen, das vom Gravitationsfeld des Riesenplaneten eingefangen worden war. Die Analyse der Flugbahn deutete darauf hin, dass das Objekt am Perihel sehr nahe an ihm vorbeigeflogen wäre und somit logischerweise durch Gezeiten- und Scherwirkung in mehrere Trümmerstücke zersplittert worden wäre. Diese hätten dann ihren Kurs fortgesetzt, und als die Astronomen Schumaker und Lévy sie entdeckten, zeigten Berechnungen, dass diese Objekte den Planeten im Juli des folgenden Jahres treffen sollten. Das erinnert mich an eine sehr brillante Idee, die einer meiner Assistenten hatte. Der Mond ist mit einer Reihe von Kratern übersät, wie Sie auf diesem Bild sehen können:



- Niemand war je in der Lage, solche Formationen zu interpretieren. Sie schlug vor, dass dies dem Einfangen eines Kometen entsprechen könnte, der während eines ersten Durchgangs beim Eintritt in die felsige Grenze des Mondes fragmentiert worden wäre, wobei diese Trümmer dann auf die Mondoberfläche aufschlugen, nachdem sie diese Einschläge in Schnüren abgegeben hatten. Es ist bemerkenswert, dass Generationen von Astronomen diese Bilder seit gut einem Jahrhundert vor Augen haben, ohne dass einem von ihnen, einschließlich mir, wie ich zugebe, diese Idee in den Sinn gekommen wäre.

- Gehen wir zurück zum Saturn. Alle seine Satelliten befinden sich daher notwendigerweise außerhalb seiner felsigen Grenze, der nächste ist Enceladus, der 238.000 km vom Zentrum des Planeten entfernt ist. Titan, am bekanntesten, weil er massiv genug ist, um eine Atmosphäre zu haben, ist fünfmal weiter weg.

- Wenn ich auf das zurückkomme, was ich gerade in Ihrem Teleskop gesehen habe, würde dies bedeuten, dass diese kleinen Flecken den Überresten eines elften Planeten im Sonnensystem entsprechen, der bei einem Durchgang innerhalb der Gesteinskugel eines der anderen Planeten in unzählige Fragmente verschoben worden wäre.

- Ich denke schon. Wir können ein anderes Szenario in Betracht ziehen: dass es nie einen 11. Planeten gegeben hat.

- Was meinen Sie damit?

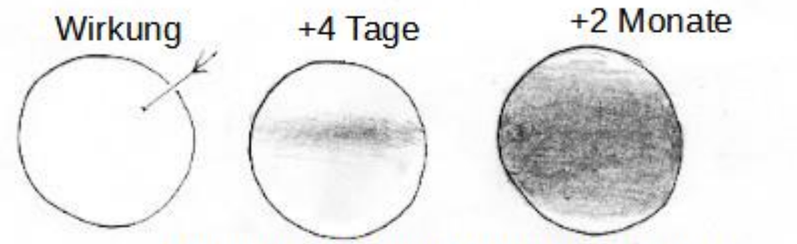
- Obwohl die Positionierung dieser Masse auf einer hochgradig exzentrischen Umlaufbahn und ihre Zersplitterung in eine Vielzahl von Trümmern gleichzeitige Phänomene waren.

- Dies ist der Grund, warum dieser "elfte Planet" von den Astronomen nicht entdeckt worden wäre. Jetzt ist es nur noch ein Schwarm kometenartiger Objekte.

- die jetzt auf das Zentrum des Sonnensystems zusteuert.

- Warten Sie, Picard, ist das Zeug nicht beängstigend gefährlich?

- Ich hab's kapiert! Die größten Felsbrocken befinden sich im Umkreis von 20 Kilometern voneinander. Stellen Sie sich den Halleyschen Kometen vor. Wenn nur eines dieser Dinger auf die Erde trifft, gibt es zwei Möglichkeiten. Es ist nicht die Masse des Objekts, die zählt, sondern seine kinetische Energie. Wenn es mit etwa 40 Kilometern pro Sekunde in die Erdatmosphäre eintritt, bildet sich vor ihm eine Schockwelle. Die Luft wird auf eine hohe Temperatur erwärmt. Wenn dies im Moment des Aufpralls am Boden geschieht, ist die Geschwindigkeit so hoch, dass die Erd- oder Felsstütze sofort in Staub von einem Mikrometer Durchmesser verwandelt wird. Die gesamte kinetische Energie des Kometen wird in Wärme umgewandelt. Dann wird ein Aufwind erzeugt, der diese Milliarde Tonnen Staub in die Stratosphäre trägt. Die Strahlströme werden sie zerstreuen, indem sie diese Auswürfe in einen undurchsichtigen Schleier verwandeln.



Atomarer Winter (Dauer: 18 Monate)

- Wie undurchsichtig?

- Stellen Sie sich das Licht bei Vollmond vor. Es reicht aus, alle Pflanzen verwelken zu lassen und die Durchschnittstemperatur um zwanzig bis dreißig Grad sinken zu lassen. Der Rückgang könnte in kontinentalen Gebieten, die weit von den Wärmeregulatoren der Ozeane entfernt sind, größer sein. Dies ist der "nukleare Winter", den der russische Meteorologe Vladimir Alexandrov Anfang der 1980er Jahre erfunden hat. Die Geschwindigkeit, mit der die Sturmböen absinken, ist so langsam, dass es zwischen einem Jahr und achtzehn Monaten dauern kann, bis sie sich wieder normalisieren, wie er damals berechnete. Genug, um einen fantastischen Rückschritt in der Biosphäre zu bewirken, der die Mehrheit der Pflanzen- und Tierarten tötet. Dies ist seit dem Auftreten von Leben auf der Erde wahrscheinlich mehrmals mehr oder weniger häufig geschehen.

- Und was ist die zweite Option?

- Über diese denken wir nicht so viel nach. Es ist der Einschlag mitten im Ozean. Unter diesen Bedingungen führt der Energieeintrag dazu, dass Wasserdampf aufsteigt, immer in Richtung der oberen Atmosphäre, und dann, je nach Breitengrad, als Eiskristalle oder Regen zurückfällt. Insgesamt: eine wahre Sintflut.

- Für... vierzig Tage und vierzig Nächte.

- Mit stellenweise stark ansteigendem Wasser.

- So könnte die biblische Sintflut den Nachwirkungen des Einschlags eines Kometen in einem Ozean entsprochen haben. Faszinierend. Wie hängt unsere Flugbahn mit diesem Kometenschwarm zusammen?

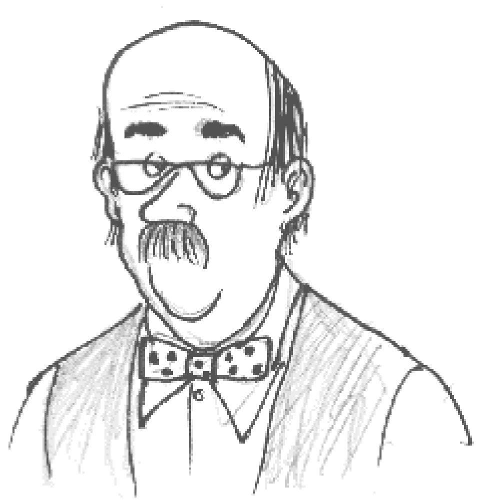
- Leider, mein lieber Freund, steuern wir geradewegs darauf zu!

- Mit über siebentausend Kilometern pro Sekunde. Boissinière, können wir uns umdrehen, um diese Hagelkörner zu vermeiden?

- Nein, auch wenn unsere Schubdüse quer ausgerichtet ist. Wir sind zu schnell und wir sind zu nahe dran. Sobald Picard diese Objekte entdeckt hatte, die sich direkt auf unserer Flugbahn befanden, warnte er mich. Aber wir konnten das Hubble-Teleskop immer noch nicht an Bord bringen. Dieses kleine Teleskop war besser als nichts. Normalerweise hätte Jacobson uns einige Hinweise auf mögliche Kurskorrekturen geben müssen. Er muss sich der Anwesenheit des Laichs bewusst gewesen sein. Hätte man uns vor einer Woche gewarnt, wäre ein Ausweichen immer noch möglich gewesen. Aber jetzt steuern wir direkt auf diesen Kometenschwarm zu.

- Gibt es eine Chance, dass wir es schaffen?

Picard zeigte Bourbakof ein Foto.



- Ich nahm das als Pose auf. Sie können sehen, dass es Zehntausende von Blöcken in allen Größen gibt. Im Okular sahen wir nur die größten, die einige Dutzend Kilometer lang sein müssen, aber es gibt auch kleinere, offensichtlich viel mehr. Bei der Geschwindigkeit, mit der wir vorankommen, wird ein faustgroßer Hagel das Kirchenschiff von einer Seite zur anderen durchbrechen.

- Wow! ...

- Als wir am Jupiter vorbeikamen, hatte ich einen letzten Kontakt mit Jacobson", kommentierte Boissinière.

- Hatten Sie Gelegenheit, mit ihm zu sprechen?

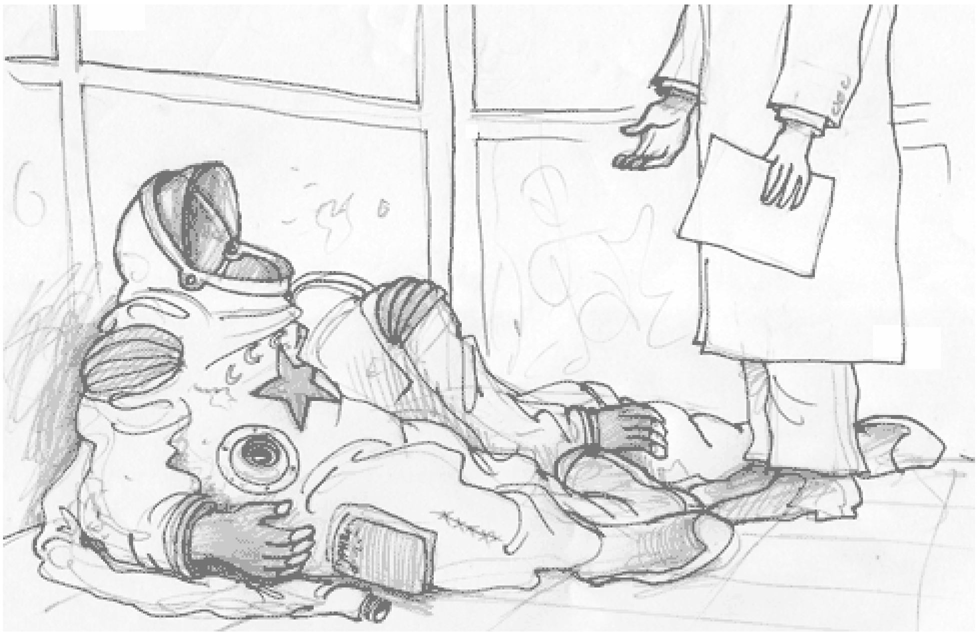
- Sie machen Witze! In der Höhe des Jupiter ist die Erde fast zwei Lichtstunden entfernt.

- Oh, richtig...

- Zu dieser Zeit erhielt ich eine Nachricht von Jacobson, die mir Anweisungen gab, aber die Kommunikation wurde unterbrochen. Unsere Off-World-Antennen wurden durch eine Sonneneruption deaktiviert. Das ist die eine Sache, mit der wir nicht gerechnet haben.

- Sie konnten sie nicht reparieren?

- Wir müssen EVAs durchführen. Wir haben einige alte Anzüge aus dem Museum von Baikonur gekauft, aber wir haben sie noch nicht fertig renoviert.



- Wie auch immer, wir sind am Arsch. Was werden wir tun? Sollen wir vor dem Hagel Bridge spielen?

Boissinière legte ihren Zeigefinger auf die Stirn.

- In meinem Büro liegt ein blauer Umschlag mit der Montageanleitung für die Schubdüse, die Jacobson mit der Ilyushin mitgebracht hat. Auf der Oberseite stand geschrieben: "Zu öffnen, wenn Sie das Sonnensystem verlassen".

- Aber wir befinden uns außerhalb des Sonnensystems!

- Los geht's!

Das Büro von Boissinière war voll, als er den Umschlag öffnete. Alle haben geschwiegen. Diejenigen, die keinen Platz finden konnten, warteten auf dem Flur. Es stand nicht zur Debatte, diese Nachricht vor der gesamten Besatzung zu verheimlichen. Im Prinzip waren die Menschen, die ihren Platz auf dem Schiff eingenommen hatten, kaltblütig, und Panik hätte nicht viel genutzt. Wir hätten eine Fliege fliegen hören, wenn der Franzose gesprochen hätte. Er hat sich geräuspert.

- So steht es hier:

Sehr geehrte Boissinière,

Wenn wir Ihnen vorgeschlagen haben, dieses Schiff zu bauen und das Sonnensystem mit Freiwilligen zu verlassen, dann sollten Sie nicht ein halbes Jahrhundert in diesem Schiff gefangen sein, bevor Sie das nächste System erreichen können. Als wir die Sektoren entsprechend Ihren Strukturplänen bauten, haben wir unwissentlich die parietalen Elemente verändert. Ich werfe Ihnen das nicht vor, aber es stand so viel auf dem Spiel, dass wir beschlossen *haben, alle Vorsichtsmaßnahmen zu ergreifen. Es ist also das, was sich in der Außenhülle des Schiffes befindet, das Ihnen helfen wird. All dies erfordert eine Stromversorgung, und zwar eine ganze Menge davon. Im Anhang finden Sie alle Einzelheiten des Verfahrens zum Anschluss eines im Generator integrierten Kondensators an diese neuen Elemente. Wenn Sie alle diese Verbindungen hergestellt haben, schalten Sie den Antrieb einige Sekunden vor Beginn der Operation ab und schließen ihn dann wieder an. Was dann geschehen wird, erfahren Sie in meiner vorherigen Radiobotschaft. Dies wird nur die praktische Anwendung all dessen sein, was ich Ihnen damals erklärt habe. Dank der Kurskorrekturen, um die wir Sie gebeten haben, sollten Sie viele Eispakete auf uns zukommen sehen können. Jetzt verstehen Sie, warum wir zwei Karten auf einmal spielen wollten: Ihnen die Möglichkeit zu geben, wegzukommen und hier mit Hilfe unserer Freunde zu versuchen, die Blöcke zu neutralisieren, die schließlich den Weg der Erde kreuzen würden. Viel Glück und viel Erfolg.*

Sven

Es gab einen Tumult.

- Welcher Funkspruch? ... was ist das mit der Kurskorrektur? ... von Eisblöcken?

Boissinière forderte Schweigen.

- Die Botschaft, die evoziert wurde, ist diejenige, die ich angefangen hatte aufzunehmen und die durch die verdammte Sonneneruption unterbrochen wurde. Die Eisblöcke entsprechen den Überresten eines Planeten, der in das Herz des Sonnensystems fällt. Picard, Sie können ihnen das alles über die Sprechanlage erklären. Das Problem ist, dass wir diese Kurskorrektur nicht rechtzeitig vornehmen konnten, deshalb steuern wir mit 7.800 Kilometern pro Sekunde auf diese Hagelwolke zu. Was den Rest betrifft, so weiß ich nicht mehr als Sie. Ich möchte 12 freiwillige Ingenieure in zehn Minuten im Maschinenraum haben. Der Rest von Ihnen geht auf Ihre Stationen oder in Ihre Kabinen. Und schnallt euch an eure Kojen!

Bourbakof fiel Fowler ins Auge.

- Meine Liebe, es sind die Launen der Astrophysik. Wir befanden uns in einer Periode ruhigen Sonnenscheins. Ich nehme an, es sollte einfach nicht unser Tag sein...

Mit Ausnahme der zwölf, die Boissinière begleiteten, kehrten alle in ihre jeweiligen Kabinen zurück, legten sich auf ihre Kojen und schnallten sich an. Im Maschinenraum erteilte Boissinière Befehle, die von den Ingenieuren ausgeführt wurden. Sie benutzten mehrere Fäustlinge, um einen aus Tausenden von supraleitenden Kabeln bestehenden Stecker vor der Anschlussbuchse zu positionieren, die sie nach Entfernen einer verschraubten Abdeckung, die sie bedeckte, entdeckten. Vier Stunden später war alles an seinem Platz. Boissinière gewann die Brücke mit einem Minimum an Leuten.

- Picard, können Sie mich hören?

- Ja.

- Ich möchte, dass Sie Ihre Position durch das Teleskop einnehmen.

Er ging in die allgemeine Sprechanlage:

- In Ordnung, alle mal herhören. Ich werde das Triebwerk abschalten, und Sie alle werden für kurze Zeit schwerelos sein. Dann... zu Gott vat.

Fowler fand dieses unangenehme Gefühl, das er als Kind in den Kaufhäusern von New York hatte, aber viel schlimmer. Bourbakof versuchte, sich auf eine Art Theorem zu konzentrieren. Im Herzen des Kirchenschiffs, auf der Brücke, begann Boissinière die Operation. Er hatte den Eindruck, dass alles plötzlich ausgelöscht wurde.

Vielleicht ist etwas ausgebrannt?

- Picard, können Sie mich hören?

- Ja. Da ist eine seltsame Sache. Ich habe das Okular meines Teleskops nicht verlassen. Nun, die Blöcke sind verschwunden...

- Was meinen Sie mit "weg"?

- Sie haben sich in Luft aufgelöst. Ich sehe keine weiteren von ihnen. Aber das Erstaunlichste ist, dass auch die Sterne ausgestorben zu sein scheinen. Ich sehe keinen von ihnen mehr glänzen.

- Was?

Boissinière war dabei, sich an die Dunkelheit zu gewöhnen. Er fühlte sich, als ob er halluzinierte, und rieb sich die Augen. Er wollte sicher sein, was er sah.

- Bourbakof, können Sie mich hören?

- Ja, ich kann Sie hören.

- Wenn Sie nicht allzu empfindlich auf Schwerelosigkeit reagieren, könnten Sie versuchen, zu mir auf die Brücke zu kommen?

- Ich werde es versuchen.

- Haben Sie Strom in Ihrer Kabine?

- Ja, da ist ein Licht. Alles sieht normal aus, die Klimaanlage und alles.

- Nun...

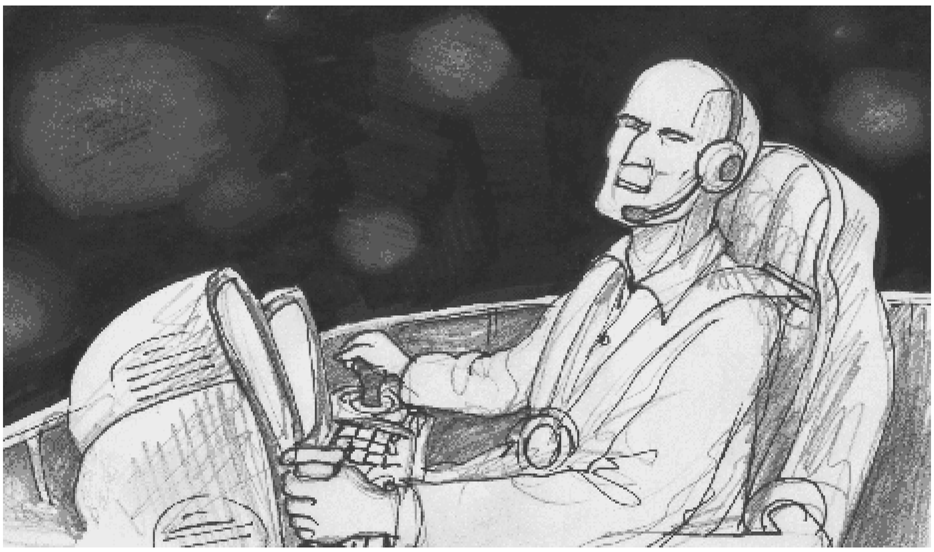
Bourbakof flog in die Korridore. Am Ende war es ganz einfach. Man musste sich nur an die Wand lehnen, geradeaus zielen und starten.

Es gelang ihm, die Vordertür zu ergreifen, die zur Brücke führte. Eine schwerelose Wendeltreppe zu nehmen schien ihm eine recht eigenartige Operation zu sein, aber er schaffte sie, indem er die Stufen mit den Händen ergriff. Sein Gesicht war durch den Blutzufluss einfach ein wenig verstopft. Er gesellte sich zu Boissinière, dessen Silhouette er erriet, als er sitzend und angeschnallt auf seinem Sitz vor seiner Konsole saß.

- Gut. Sie können dort sitzen.

Bourbakof nahm auf dem Sitz Platz und schluchzte.

- Nun, was sehen Sie?



- Eine Art rötliche, etwa kugelförmige Wolke. Es sieht so aus, als würden wir durch eine riesige Schule von ochsenblutfarbenen Quallen segeln.

- Sehen Sie das auch?

- Ja, und?

- Bourbakof, die Sterne, sie sind weg! Was wir sehen, ist das, was sich außerhalb des Kirchenschiffs befindet.

- Sind wir jetzt in der Eisblockwolke?

- Nein, er sollte jetzt schon weit voraus sein. Picard, können Sie uns hören?

- Von Anfang an. Ich sehe diese Dinge auch.

- Was zum Teufel ist das?

- Ich weiß nicht mehr als Sie, aber ich denke, dass es im Vergleich zu dem, was ich ein paar Stunden zuvor gesehen habe, eine deutliche Verbesserung gibt, nicht wahr? Wir steuern nicht mehr auf diesen Kometenschwarm zu, und ich persönlich bin darüber sehr erfreut.

- Glauben Sie, das System, das Jacobson installiert hat, hätte uns eine rechtwinklige Kurve ermöglicht?

- Wenn es Ihnen in diesem Fall gelingt, in die richtige Richtung zu weisen, sollte ich in der Lage sein, die Blöcke vor Ort zu finden. Nehmen Sie auf jeden Fall eine Landmarke: Wir hatten den Schwarm vorne und die Sonne hinten.

Boissinière packte ihren Griff und wirbelte das sphärische Bild herum und versuchte, das Bild der Sonne zu finden.

- Picard, hier stimmt was nicht. Ich kann die Sonne nicht mehr finden. Ich weiß nicht, welchen Weg wir gehen sollen. Alles, was ich sehe, sind diese rötlichen Quallen. Dennoch sieht das Bildverarbeitungssystem in Ordnung aus.

Zu seiner Überraschung hatte er vergessen, den Antrieb wiederherzustellen. Er tat dies, und Fowler fiel zufrieden auf seine Matratze zurück. Boissinière rief ein Dutzend Personen auf die Brücke, die kaum mehr Platz bot.

- Nun, sehen Sie, was ich sehe? Wir segeln durch eine Schule von Quallen.

Diesmal ging er behutsam mit dem Steuergriff um, und alle erkundeten dieses neue Himmelsgewölbe. Eines ist Fowler aufgefallen.

- Sehen Sie, Boissinière, zum einen ist die Farbe nicht einheitlich, zum anderen gibt es zwei völlig obskure Flecken, die zwei diametral entgegengesetzte Positionen einzunehmen scheinen.

Boissinière neigte das Dekor entsprechend. Fowler zeigte auf eine Region dieses seltsamen Himmels.

- Sehen Sie, da! Die Farbe Rot dunkelt am Rand dieser großen, dunklen Fläche nach, die in etwa kreisförmig ist. Nun, Boissinière, könnten Sie uns das diametral entgegengesetzte Bild zeigen?

Ein Druck mit dem Finger und diese neue Region erschien, ebenfalls um einen dunklen Fleck herum organisiert.

- Sehen Sie sich an, wie sich die Farbe des Nebels, der diesen "Abgrund" zu begrenzen scheint, entwickelt. Die Farbe bewegt sich im Spektrum nach oben, bis hin zu Violett. Dann verschwindet alles.

- Was meinen Sie damit? Wir befinden uns in einem schwarzen Loch, so sagte ein Techniker.

Fowler untermauerte seine Worte, posiert.

- Ich weiß nicht, wo wir sind oder worin wir segeln, aber ich glaube, diese Variationen in der Farbgebung hängen mit dem Dopplereffekt zusammen.

Boissinière verbreiterte die Augen.

- Ist Ihnen klar, was Sie da sagen? Wenn dies zutrifft, dann grenzt der schillernde Teil, der sich lila färbt, an eine Region, auf die wir uns mit relativistischer Geschwindigkeit zubewegen. Unser Kurs ist eigentlich das Zentrum dieser großen Leere.

Er bezeichnete diesen Bereich mit einem leuchtenden Kreuz, das mit einem Joystick positioniert wurde.

- Und die diametral entgegengesetzte Region ist die, die wir hinter uns lassen. Wenigstens wissen wir, wohin wir gehen. Picard, mit Ihrem Spektrometer sollten Sie in der Lage sein, uns zu sagen, wie schnell wir vorankommen.

- Es ist erledigt. Meine Herren, unser "Mach Luminique" ist .87.

Bei allen Anwesenden gab es Bewegung.

- So, so Boissinière, hätte uns das Jacobson-System von 7800 auf 260.000 Kilometer pro Sekunde gebracht. Aber selbst unter diesen Bedingungen verstehe ich eines nicht: Wo sind die Sterne? Wo ist die Milchstraße? Wir haben überhaupt keine Orientierungspunkte, als ob wir plötzlich durch eine Art Korridor in der Raumzeit reisen würden. Was meinen Sie, Bourbakof?

- All dies bleibt eminent beunruhigend, und wir können nur spekulieren. Ende der 1960er Jahre schlug Andrej Sacharow vor, das Universum könne "doppelt" sein, d.h. zwei "Seiten" besitzen. Ende der 1990er Jahre gab es sogar das Werk eines Franzosen. Wenn ich mich an sein singuläres Werk erinnere, wären wir in eine Art "Zwillingsuniversum" geraten, das anders strukturiert ist, ohne Sterne.

- Auf jeden Fall", kommentierte Fowler, "ist es eine nette Geste. Dieser Fall hat es uns ermöglicht, dem verdammten Kometenschwarm zu entkommen. Wir wären also wie "auf dem Sprung".

- Man könnte es so ausdrücken...

- Und warum bei einer solchen Geschwindigkeit, ohne den geringsten Eindruck von Beschleunigung?

- Ich weiß nicht so recht.

Boissinière versuchte, pragmatisch zu sein.

- Lassen Sie uns eine Bilanz der Situation ziehen. Jacobson erlaubte uns, unser Schiff mit einem Triebwerk auszurüsten, das es uns ermöglichte, das Sonnensystem in weniger als drei Wochen zu verlassen. Aber auf jeden Fall hätten wir selbst mit der stärksten Schubkraft, die man sich vorstellen kann, die Wand der Lichtgeschwindigkeit getroffen. Je näher wir uns der Geschwindigkeit von c näherten, desto mehr hätte sich die Trägheitsmasse des Schiffes erhöht. Unsere Geschwindigkeit hätte also am Ende einen Spitzenwert von etwa 300.000 Kilometern pro Sekunde minus etwas erreicht. Wenn man bedenkt, dass das nächstgelegene System, Alpha zu den

Centauri, 4,2 Lichtjahre von der Sonne entfernt ist, hätten wir uns auf einer Kreuzfahrt von vielleicht zehn, fünfzehn oder mehr Jahren wiedergefunden. In unseren Vorgesprächen hatte Jacobson jedoch viel kürzere Reisezeiten erwähnt, was bedeutet hätte, dass wir die Lichtgeschwindigkeit überschreiten könnten. Dann wich er den Fragen aus, die ich ihm stellte, was uns zu einem eher banalen technischen Problem zurückführte, und sagte immer wieder: "Ich werde es zu gegebener Zeit erklären.

- Und als diese Zeit kam", intervenierte Turyshev, "ruinierte die Sonneneruption die Kommunikation...

Fowler übernahm das Kommando:

- Also gut. Stellen wir uns vor, dass das prächtige Gadget, mit dem Jacobson das Schiff unwissentlich ausgestattet hat, uns jetzt eine relativistische Kreuzfahrt durch dieses... Zwillingsuniversum ermöglicht.

Er wandte sich an Bourbakof:

- Hat Sacharow ihn so genannt?

- Ja, das Zwillingsuniversum. So nannte er es.

- Ich nehme an, was wir in Entfernungen sehen, die wir nicht messen können, sind riesige Konglomerate von Zwillingsmaterie, die, der Farbe nach zu urteilen, eine Temperatur in der Größenordnung von tausend Grad haben müssen.

- Davon können wir ausgehen.

- Dieses Gerät ermöglicht es uns zumindest, aus einem höllischen Schlamassel herauszukommen. Unter der Annahme, dass dieser Fall unseren Kurs nicht ändert, würden wir den Kometenschwarm einfach problemlos durchqueren.

Er wandte sich an Boissinière:

- Ich nehme an, Jacobson hat einen Weg, um wieder aufzutauchen, oder werden wir dazu verdammt sein, ewig in diesen Katakomben des Universums umherzuwandern?

- Um in unser Heimatuniversum zurückzukehren, schalten Sie das System einfach ein zweites Mal ein.

- Passen Sie gut darauf auf! Selbst bei 260.000 km/s könnten wir immer noch mitten in diesem verdammten Hagelpack sein. Vielleicht wäre es besser, ein bisschen zu warten, bevor man wieder in unserem Universum auftaucht, nicht wahr? Was meinen Sie, Picard?

Der Astronom konzentrierte sich.

- Ich fühle mich wie in einem U-Boot, in dem ich versuche, etwas klarzustellen. Offenbar haben wir jenseits dieser Planetentrümmer einen guten Spielraum, um den Kuipergürtel und die Oort-Wolke, ein mögliches "Kometenreservoir", hinter uns zu lassen, auch wenn dieser weniger dicht ist als dieser Schwarm, und ich denke, wenn wir warten, sagen wir vier oder fünf Stunden, sollte es gut sein.

- Okay, sagt Boissinière. Warum gehen wir in der Zwischenzeit nicht zum Mittagessen?

Nachdem er dem Rat Picards gefolgt war, leitete Boissinière das umgekehrte Verfahren ein, wiederum nach Abschalten des Triebwerks. Zur Zufriedenheit aller sind die Sterne und die Milchstraße sofort wieder aufgetaucht. Noch in der Schwerelosigkeit drehte Boissinière das schwere Schiff, damit Picard sein Teleskop in dessen Kielwasser ausrichten konnte.

- Der Schwarm, sehen Sie ihn?

- Ich sehe nichts. Wir müssen einen verdammt langen Weg zurückgelegt haben. Eigentlich kann ich eine Menge Sterne sehen, aber ich kann sie nicht ganz identifizieren.

- Sind wir verloren?

- Möglicherweise.

Boissinière brachte das Kirchenschiff wieder in Flugposition, setzte den Antrieb wieder in Gang und wechselte dann zur Frontalansicht. Dann kam ein allgemeines "Oh" aus den Mündern der Brückenbesitzer.

- Scheiße, was zum Teufel ist das?

- Ein Superriese, sagte Picard durch die Lautsprecher.

- Aber wir gehen direkt rein!

- Einfach", kommentierte Turyschew, "einfach das Jacobson's Gadget wiederverwenden. Pfff... Reich mir die Muskatnuss. Wir machen den nächsten schlechten Schritt beim Tauchen, ein zweites Mal.

Boissinière warf einen Blick auf seine Zifferblätter.

- Unmöglich, der Kondensator ist noch nicht geladen. Der Generator muss es wieder aufladen, bis die Nadel dort die rote Linie passiert.

- Sonst was?

- Wie soll ich das wissen? Ich weiß nicht einmal, wie es funktioniert...

Picards Stimme war zu hören:

- Zwei Stunden voraus ist etwas, das einem Neutronenstern sehr ähnlich sieht. Es ist der Begleiter dieses Giganten.

- Was schlagen Sie vor? Wir landen auf dem Neutronenstern und machen ein Picknick?

- Nein, aber wir könnten sein Schwerefeld nutzen, um "an der Boje zu drehen". Er bewahrt uns davor, in den Eingeweiden seiner majestätischen Freundin zu landen.

Boissinière hielt dies für eine ausgezeichnete Idee. Es mussten nur noch die Parameter der Flugbahn bestimmt werden.

- Picard, Sie werden das für uns berechnen.

- Du machst Witze. Das ist relativistisch, diese Dinge!

- Was ist also das Problem?

- Allgemeine Relativitätstheorie, ich weiß nichts darüber.

- Aber Sie haben immer noch Abhandlungen über riesige Schwarze Löcher geschrieben?

- Wie alle anderen zu sein. Aus den Messungen der Geschwindigkeit der gasförmigen Massen in den Zentren von Galaxien wurde die Masse M abgeleitet, aus der die Zentrifugalkraft ausgeglichen werden sollte, und da nichts zu sehen war, kam man zu dem Schluss, dass sich im Zentrum ein "riesiges schwarzes Loch" von einer oder zehn Millionen Sonnenmassen befand. Aber da endet mein Wissen. Ich bin strikt unfähig, eine Flugbahn zu berechnen, die nicht newtonsch ist.

- Zum Teufel, hier an Bord, als Astronom, sind es nur Sie. Ich dachte ...

- Tut mir leid. Tut mir leid.

Boissinière wandte sich an Fowler:

- Fowler, Sie haben zwei Stunden Zeit, um alles über die Allgemeine Relativitätstheorie zu lernen.

- Warten Sie, bevor ich mit "mission impossible" beginne: Hat Bourbakof nicht eine Lagrange-Rettung im Hut, um uns hier rauszuholen?

- Du hast Recht. Du hast Recht. Schnappen wir uns Bourbakof!

Bourbakof schlief. Der Aufruf Boissinières weckte ihn mit einem Start auf. Sie trafen sich alle im Seminarraum. Boissinière beharrte auf der Dringlichkeit der Situation. Bourbakof verstand sofort und ging an die Tafel.

- Wir hatten die Keplerianischen Flugbahnen ausgehend von einem "Keplerianischen Lagrange" konstruiert:

$$L_K = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Dieser Lagrangesche war in einem Raum (r ,) definiert worden, und wir hatten die Zeit t als Parameter genommen. Wir sahen eine Verschiebung "im 3d-Raum" vor. Wenn wir in die Welt der Relativitätstheorie wechseln, bewegen wir uns nicht mehr in einem dreidimensionalen Raum, sondern in vier Dimensionen: "Raum-Zeit" (t , r ,). Die Lösungskurven sind also in diesem vierdimensionalen Raum zu schreiben und sie werden nach einem Parameter s durchlaufen. Diese Kurven werden also vom Typ :

$$t(s)$$
$$r(s)$$
$$\theta(s)$$
$$\varphi(s)$$

- Und, so schlug Turyschew vor, die Ableitungen, die durch einen Punkt oben angezeigt werden, werden daher als Ableitungen in Bezug auf diese Variable s genommen.

- Das ist richtig. Damit werfe ich den Lagrangianer ein:

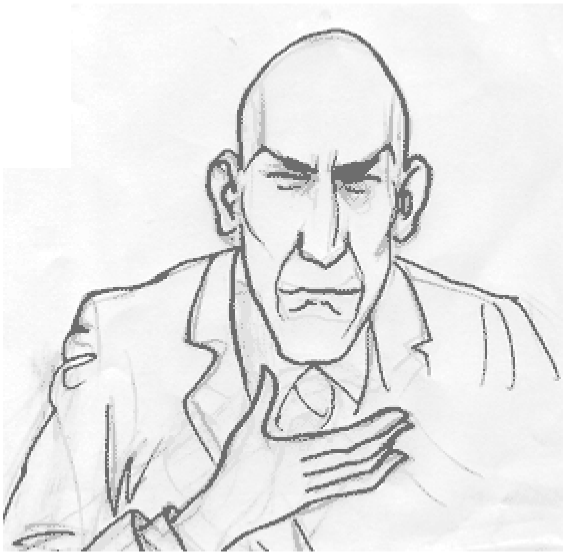
$$L=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{2GM}{c^2r}}-r^2\left(\dot{\theta}^2+\cancel{\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}\right)$$

- Wir werden später erklären, worum es hier geht. Ich weiß, es klingt schrecklich künstlich, aber es scheint, dass wir ein wenig unter Zeitdruck stehen. Dennoch ist G die Konstante der Gravitation, M die Masse des Neutronensterns, c die Lichtgeschwindigkeit. Ich konnte zeigen, dass die Flugbahnkurven flach sind, d.h. dass wir sie modulo einer Änderung der Variablen in einer Ebene lokalisieren können

= /2

- Das haben wir bei der Untersuchung der Newtonschen Flugbahnen gesehen. Jetzt wird es dasselbe sein.

Boissinière fühlte sich auf heißen Kohlen.



- Wir sind alle bereit, Sie beim Wort zu nehmen. Aber bitte beeilen Sie sich. Wir fallen mit fünftausend Meilen pro Sekunde auf diesen Neutronenstern, und je früher wir die Parameter für die richtige Flugbahn erhalten, desto besser.

- Schon gut, schon gut. Sie erinnern sich an die Definition der "Funktion E", die auf einer Bahnkurve konstant war. Turyshev, können Sie uns das aufschreiben?

Turyschew hat das getan.

$$E=\sum_i \dot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}-L=cte$$

- Was ist los?

- Das Lagrange'sche L ist eine quadratische Form der Variablen

$$\dot{x}^i$$

Fowler betrachtete das Gemälde mit Interesse.

- Eine quadratische Form enthält nur Begriffe wie:

$$\dot{x}^{i2} \quad et \quad \dot{x}^i \dot{x}^j$$

Wenn wir all dies ableiten und zur Berechnung der obigen Formel verwenden, erhalten wir E = 2L - L = L

- Also E = L. Konsequenz:

$L = cte$ auf dem Weg

- Schreiben Sie jetzt Ihre Lagrange-Gleichungen auf.

- OK.

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 \dot{t}\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \dot{\theta}\right) = 0 \qquad (2)$$

Sie integriert sofort, indem sie zwei Integrationskonstanten und H :

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 \dot{t} = \frac{c}{\gamma}$$

$$r^2 \dot{\theta} = H \qquad \dot{\theta} = \frac{H}{r^2}$$

- Wir werden eine Variable einführen, deren Bedeutung zu einem späteren Zeitpunkt angegeben wird, laut :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} \qquad s = c\tau \qquad ds = c\,d\tau$$

Lassen Sie uns noch ein paar mehr posieren:

$$\frac{2GM}{c^2} = R_s$$

- Warum?

- Diese Größe hat die Dimension einer Länge. Es erlaubt uns zu schreiben:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} \qquad r \gg R_s : \frac{dt}{d\tau} \to \frac{1}{\gamma}$$

t ist unsere Zeitvariable. Ich habe noch nicht gesagt, was diese neue Variable entsprechen könnte, aber wenn wir weit vom geometrischen Zentrum des Objekts entfernt sind, oder mit anderen Worten, wenn der Abstand zum geometrischen Zentrum vor Rs groß ist, wird die Zeit t "mit der Zeit variieren".

- So kann ich zum Beispiel schreiben, dass L = 1
- Das ist richtig.

Turyschew schrieb:

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2 \dot{\theta}^2$$

- Jetzt, Turyshev, übernehmen Sie.

- Ich springe ein für...

$$1 = \cancel{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} \frac{\cancel{c^2}}{\gamma^2 \cancel{c^2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\cancel{2}}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{H^2}{r^2}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1 + \frac{H^2}{r^2} + \frac{R_s H^2}{r^3}}$$

$$r \text{ grand} \quad \frac{dr}{ds} \to \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)_{r \to \infty} \to c\gamma$$

Nun, es ist die Lichtgeschwindigkeit, aber was ist dann die physikalische Bedeutung dieses Parameters?

- Einfach:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \qquad V^2 = c^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) \gamma^2$$

und ich bekomme:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \; (\text{Lorentz})$$

$$V_\infty = 0 \qquad \gamma = 1 \quad \to \quad V = c \to \gamma = 0$$

Das heißt, das ist der Lorentz-Kontraktionsfaktor.

- Die was?

Boissinière hob ihre Arme zum Himmel:

- Bitte, Turyshev, verwirren Sie unseren Freund nicht mit all Ihren Fragen. Wir haben andere Notfälle. Im Moment haben wir eine Priorität: Wir müssen so schnell wie möglich die Parameter für eine Kursänderung für diese heikle Bojenkurve erhalten. Sobald wir unseren Kurs geändert haben, werden Sie viel Zeit haben, das verspreche ich Ihnen, um zu versuchen, Ihre berechtigte Neugier zu befriedigen.

Bourbakof wurde wieder aufgenommen:

- Wir brauchen den Wert von, um unsere Flugbahnberechnung durchzuführen. Es ist einer der Parameter. Die zweite ist die Richtung unserer Flugbahn, die praktisch die einzige ist, mit der wir spielen können. Diese Änderung der Flugbahn durch die Anwendung von Querschub wird den Modul v unserer Geschwindigkeit kaum verändern. So können wir berechnen .

Es sind 300.000 Kilometer pro Sekunde.

v ist derzeit 8000 km/s wert

so = 0,986

- Es ist fast Einheit!

- Das ist nur natürlich. Achttausend Kilometer pro Sekunde erscheinen uns schnell, aber es sind etwas mehr als zwei Hundertstel der Lichtgeschwindigkeit.

- Und was ist dieser charakteristische Strahl Rs?

- Dies ist nicht der Radius des Neutronensterns, aber er ist um eine Größenordnung größer. Auf jeden Fall stehen wir dort, wo wir sind, in sehr großer Entfernung vor diesem Wert. Physikalisch gesehen bedeutet dies, dass wir uns bei niedriger Geschwindigkeit und weit entfernt vom Gravitationsfeld des Neutronensterns befinden.

Boissinière:

- Bitte, mach weiter! ...

- Wir sind fast am Ende unserer Schwierigkeiten:

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1 + \frac{H^2}{r^2} + \frac{R_s H^2}{r^3}} \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{H}{r^2}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dr} = \frac{H}{r^2\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1 + \frac{H^2}{r^2} + \frac{R_s H^2}{r^3}}}$$

Die Flugbahn (r) wird mit einer einfachen Quadratur erhalten:

$$\boxed{\theta = \int \frac{H\,dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1 + \frac{H^2}{r^2} + \frac{R_s H^2}{r^3}}}}$$

Fowler war begeistert:

- Und noch ein neues Kaninchen aus dem Hut von Herrn Bourbakof! Meine Liebe, Sie bringen mich am Ende dazu, die Mathematik zu lieben, wissen Sie.

Pragmatisch, Boissinière:

- Hm mm mm... wir sind nicht hier, um Spaß zu haben. Bourbakof, können Sie uns bitte die physikalische Bedeutung der Konstante H nennen?

- Natürlich. Das haben wir:

$$H = r^2\dot{\theta} \qquad H^2 = r^4\dot{\theta}^2$$

- In dieser Abbildung zeichne ich einen Kreis mit Radius Rs, einen Vektorradius und ein Bahnelement, das ihn unter einem Winkel schneidet:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{r\,d\theta}{dr}$$

- Dann kann ich schreiben:

$$H^2 = r^4\left(\frac{d\theta}{dr}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right)^2 \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\gamma\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}$$

- Mit dem Winkel , der Geschwindigkeit v und dem bereits berechneten Lorentz-Parameter erhalten wir :

$$H^2 = \frac{r^2\operatorname{tg}^2\alpha\, v^2}{c\gamma}$$

Boissinière entspannte sich.

- Fowler, können Sie mit Ihrem Handy verschiedene Routenoptionen für uns berechnen?

- Ich bin bereits dabei, all dies für Sie zu programmieren.

- Das Protokoll ist verstrichen.

Turyschew nahm Boissinière beiseite und sprach mit halber Stimme.

- Man konnte eine Fliege fliegen hören.

- Turyschew, in diesem Kirchenschiff gibt es keine Fliegen.

- Kein einziger?

- Meines Wissens nicht. Jedenfalls gab es auch auf der Internationalen Raumstation keine.

- In dieser Station waren nur Männer, also...

- Hinzu kommen ein paar Milben, die an elektrischen Drähten zu hacken pflegen. Aber das haben wir im Griff.

- Sie beruhigen mich.

Fowlers Minidrucker knisterte. Er hat das Papier zerrissen.

- Hier sind die Parameter. Die 0,5 g für einhundertacht Sekunden, wobei der Schubvektor in der Ebene liegt, die durch das Kirchenschiff, den Überriesen und den Neutronenstern gebildet wird.

- Welche Richtung?

- Damit wir uns dem Neutronenstern nähern können. Auf diese Weise sollten wir von dem Superriesen wegkommen, weit genug weg, damit seine Strahlung von uns nicht völlig verglüht. Umgekehrt entfernen wir uns weit genug von diesem kleinen Ungeheuer, damit die Gezeiteneffekte unser Schiff nicht zum Bersten bringen.

- Fowler, Sie sind ein Anführer. Ich gehe auf die Brücke, um die entsprechenden Befehle zu erteilen.

Turyschew wurde mit Neugierde verzehrt. Er packte Boissinière am Ärmel.

- Und die Flugbahn, wie sieht sie aus? Was wird der Ablenkungswinkel sein, unsere Höchstgeschwindigkeit?

- Hören Sie, Turyschew, ich verstehe, dass Ihr wissenschaftliches Interesse groß ist, aber lassen Sie uns damit beginnen, aus dieser Sache herauszukommen, indem wir zu Gott beten, dass Fowler die ganze Sache richtig programmiert hat. Ich weiß, dass er ein Genie darin ist, aber man weiß nie. Danach können Sie alle gewünschten Seminare abhalten. Entschuldigen Sie, aber diese ganze Sache mit den schwärmenden Eisschollen, die mit einem Superriesen kollidieren, hat mich ein wenig nervös gemacht.

1. Anhang 1

Lösen der Gleichung

Hier erfahren Sie, wie Sie die Differentialgleichung, an der wir interessiert sind, lösen können:

$$yy''+1-y^2=0$$

Zunächst sei angemerkt, dass, wenn f eine Lösung dieser Gleichung bezeichnet, f ' sich nicht über ein beliebiges Intervall aufheben kann. Andernfalls wäre f '' auch in diesem Intervall Null, was zu dem Widerspruch führen würde:

$$1=0.$$

In diesem Fall ist entweder f eine Lösung der Gleichung. So können wir die Umkehrfunktion lokal definieren:

$$y=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x=f^{-1}(y)$$

und posieren:

$$z(y)=f'\circ f^{-1}(y)$$

Wenn wir nun diese z-Funktion ableiten, erhalten wir :

$$z'=\frac{f''\circ f^{-1}}{f'\circ f^{-1}}$$

oder, wenn man bedenkt:

$$z'=f'\circ f^{-1}$$

Das haben wir:

$$zz'=f''\circ f^{-1}$$

Mit Hilfe der Gleichung erhalten wir:

$$f''\circ f^{-1} = \frac{\left(f'\circ f^{-1}\right)^2 + 1}{f\circ f^{-1}} = \frac{z^2+1}{y}$$

. Daher:

$$yzz' = z^2 + 1$$

Was sonst noch geschrieben wird:

$$\frac{zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$$

und integriert sich leicht zu geben:

$$z^2 + 1 = ay^2$$

Entweder:

$$f' = \sqrt{af^2 - 1}$$

Diese Gleichung passt wieder. Indem Sie für Einfachheit posieren:

$$a = s^2$$

Sie erhalten

$$sf(x) = ch\left(s(x+c)\right)$$

Es gibt zwei Integrationskonstanten, s und c, aber wenn wir uns auf gleichmäßige Lösungen beschränken, d.h. auf das Verifizieren:

$$f(-x) = f(x)$$

die Konstante c notwendigerweise Null ist und wir daher eine Ein-Parameter-Familie von Lösungen erhalten:

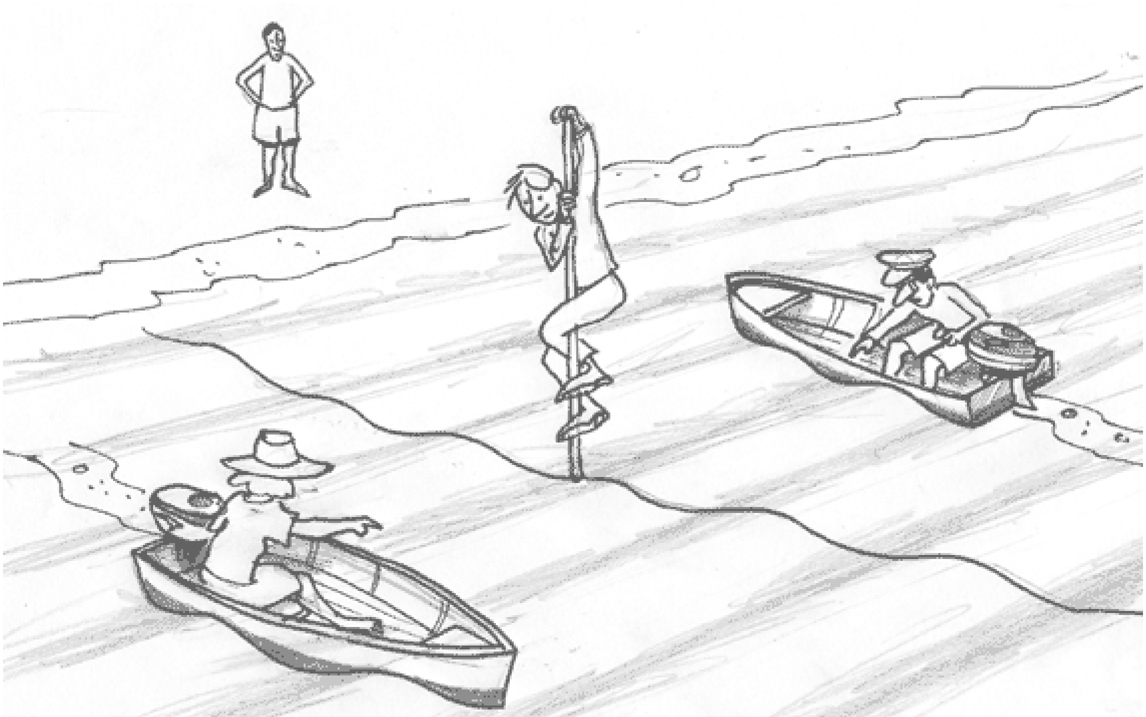
$$f(x) - \frac{ch(sx)}{s}$$

Doppler-Effekt

Das Geräusch eines herannahenden Autos ist schärfer als das Geräusch eines wegfahrenden Autos. Dies ist ein Beispiel für den Dopplereffekt, dem wir alle schon begegnet sind. Dieser "Dopplereffekt" ist überall zu finden, zum Beispiel in der medizinischen Bildgebung oder in der

Astrophysik, oder er wird "Rotverschiebung" genannt. In der Tat ist der Dopplereffekt ein universelles Phänomen: Es handelt sich dabei um die Änderung der Frequenz eines periodischen Signals zwischen dem Sender des Signals und dem Empfänger des Signals, wenn es eine relative Bewegung zwischen den beiden gibt.

Seien wir konkreter und nehmen wir ein Beispiel. Stellen Sie sich einen Strand mit Wellen vor, die vom offenen Meer her kommen. Etwas weiter draußen auf dem Meer steht ein Mast, und auf dem Mast sitzt ein unglücklicher Beobachter, der die Anzahl der unter ihm vorbeiziehenden Wellenberge zählt. Dies ist die Anzahl der beobachteten Scheitelpunkte pro Zeiteinheit. Diese Zahl wird die Häufigkeit genannt. Zu beiden Seiten unseres ersten Beobachters befinden sich zwei kleine Schnellboote. Der eine entfernt sich vom Strand, während der andere sich ihm nähert. Die jeweiligen Steuermannschaften der beiden Boote zählen auch die Anzahl der Kämme. Derjenige, der sich wegbewegt, zählt die Anzahl der Wellenkämme auf seinem Bug und derjenige, der sich dem Strand nähert, zählt die Anzahl der Wellen, die auf sein Heck treffen. Für das Heck sind die Wellen hinter ihm her und versuchen, ihn einzuholen, und die Anzahl der Wellen, die sein Boot pro Zeiteinheit erreichen, ', ist kleiner als die Anzahl der Wellen, die über die Stange laufen. Aber für das Boot, das sich wegbewegt, ist der Effekt genau umgekehrt: Die Anzahl der Wellen, die den Bug pro Zeiteinheit erreichen, ist größer als die Frequenz, die unser armer Wicht an seiner Stange beobachtet.



Lassen Sie uns einen Blick darauf werfen. Man nennt das c-Wellengeschwindigkeit. Der Beobachter auf seinem Pol beobachtet eine Reihe von N Scheitelpunkten, die den Pol während eines Zeitintervalls t überqueren. Wenn der Abstand zwischen zwei Wellenbergen, die so genannte Wellenlänge, L ist, dann ist die Länge des während der Zeit t beobachteten Wellenzugs NL. Das haben wir:

$$NL = c\Delta t \quad et \quad N = \nu\Delta t$$

Für den Steuermann des Bootes, das sich dem Strand nähert, ist die Zeit t', die dieser Wellenzug braucht, um über den Bug seines Bootes zu fahren, eine längere Zeit. Die Geschwindigkeit, mit der die Wellen auf diesem Boot ankommen, ist niedriger als die Geschwindigkeit, mit der die Wellen die Stange erreichen, sie ist: c-u wobei u die Geschwindigkeit des Außenborders ist und wir haben :

$$NL = (c-u)\Delta t' \quad et \quad N = \nu'\Delta t'$$

All dies gibt uns:

$$NL = (c-u)\Delta t' = c\Delta t \quad et \quad N = \nu\Delta t = \nu'\Delta t'$$

Das gibt uns:

$$\nu' = \frac{\Delta t}{\Delta t'}\nu = \left(1-\frac{u}{c}\right)\nu$$

Durch die Benennung der Frequenzdifferenz mit ') haben wir schließlich :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{u}{c}$$

In unserem Beispiel gibt es drei Referenzen: die des Beobachters am Mast, die gleichzeitig die der Quelle ist, die Geschwindigkeit der Wellen, die im Verhältnis zum Meeresboden gemessen wird, der Mast ist im Verhältnis zu diesem Meeresboden bewegungslos. Es gibt auch die des Steuermanns auf dem Boot, das sich dem Strand nähert (Beobachter, der sich von der Quelle entfernt) und die des Bootes, das sich vom Strand entfernt (und sich der Quelle nähert!).

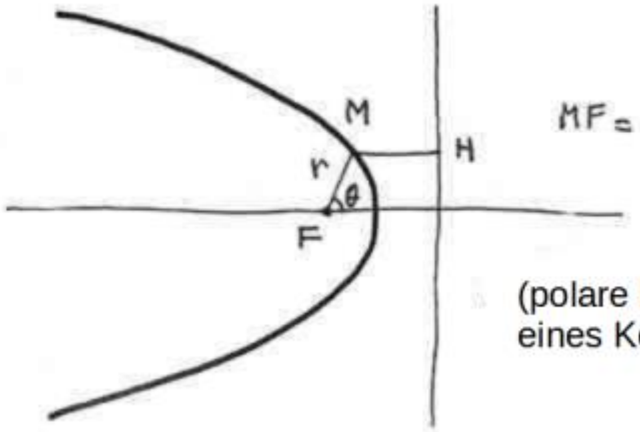
Die Nennfrequenz N der Wellen ist diejenige, die von der Pardune an der Stange gemessen wird. Wir können u, die Geschwindigkeit des Bootes, als die relative Geschwindigkeit zwischen dem Sender (dem Mast) und dem Empfänger (dem Segelboot) betrachten, d.h. die Differenz zwischen der vom Sender gemessenen Geschwindigkeit des Wellenzugs und der vom Empfänger gemessenen, wir ziehen es vor, diese Differenz mit c zu bezeichnen und erhalten schließlich :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta c}{c}$$

2. Dies wird Frequenzverschiebung genannt. Wenn sie positiv ist (d.h. das Schiff nähert sich dem Bereich und bewegt sich in die gleiche Richtung wie das Signal, der Wellenzug), dann ist die Frequenzverschiebung negativ. Die Empfangsfrequenz ist niedriger als die Sendefrequenz: das Rauschen des sich entfernenden Autos ist stärker, das Licht der sich "entfernenden" Galaxie ist zum Rot hin verschoben, daher der den Astrophysikern liebgewonnene Ausdruck "Rotverschiebung". Umgekehrt, wenn sie negativ ist (Fall eines Schiffes, das aufs Meer hinausfährt und sich gegen die Wellen bewegt, während es "näher an die Quelle herankommt"), dann ist die beobachtete Frequenz niedriger: das Geräusch des sich nähernden Autos ist schärfer.

Erinnerung an Kegel

Hier ist die polare Definition eines Kegels:



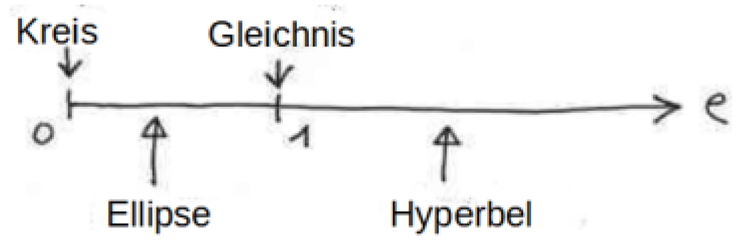
$MF = e\,MH$

(polare Definition eines Kegels)

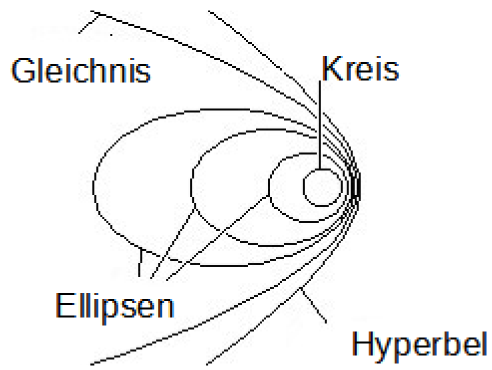
$$MH = h - r\cos\theta \qquad eh = p$$

$$r^2 = e^2(h - r\cos\theta)^2 \qquad r = \frac{eh}{1 + e\cos\theta}$$

e ist die Exzentrizität des Kegels. Die verschiedenen Kegel entsprechen den folgenden Werten:

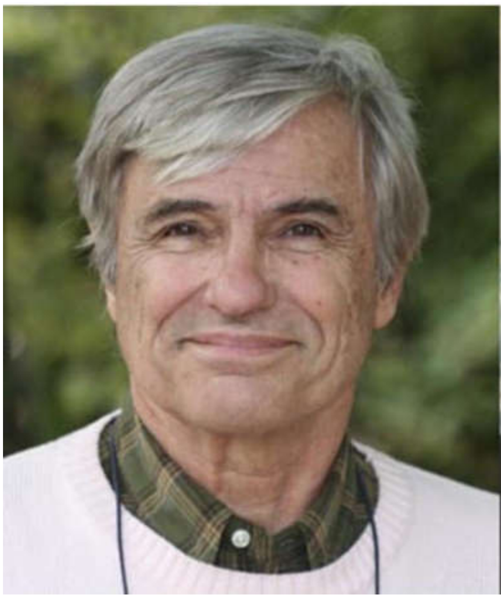


Hier sind die verschiedenen Kurven für h = 1 und die Variable e.



Wissen ohne Grenzen

Gemeinnützige Vereinigung, die 2005 gegründet wurde und von zwei französischen Wissenschaftlern geleitet wird. Ziel: Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse mit Hilfe des Bandes, das durch kostenlos herunterladbare PDFs gezogen wird. Im Jahr 2020: 565 Übersetzungen in 40 Sprachen wurden so erreicht. Mit mehr als 500.000 Downloads.



Jean-Pierre Petit

Gilles d'Agostini

Die Vereinigung ist vollkommen freiwillig. Das Geld wird vollständig den Übersetzern gespendet.

Um eine Spende zu tätigen, verwenden Sie die PayPal-Schaltfläche auf der Startseite:

http://www.savoir-sans-frontieres.com

PayPal
FAIRE UN DON